3. *Чекмарев С. Ф.* Импульсные течения газа в сверхзвуковых соплах и струях. Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР, 1989.
4. *Фролова А. А.* Расчет течений излучающего газа в соплах. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

Поступила в редакцию 27.09.91

УДК 519.612

П. Ф. ЖУК

(Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХШАГОВОГО МЕТОДА СКОРЕЙШЕГО СПУСКА [1]

Пусть A – симметричная положительно-определенная матрица порядка n. Для приближенного решения системы линейных уравнений $Au=f$, $f\in R^n$, используется s-шаговый метод скорейшего спуска. Последовательные приближения u_1, u_2, ... метода строятся по правилу

$$u_{k+1}=u_k+\sum_{i=1}^{s}\gamma_i^{(k)}A^{i-1}z_k, \qquad k=0,1,\ldots,$$

где u_0 – начальное приближение, $z_k=Au_k-f$ – невязка, а числа $\{\gamma_i^{(k)},\ i=1,2,\ldots,s\}$ выбираются из условия минимума величины $F(u_{k+1})=0.5\ (Au_{k+1},\ u_{k+1})-(u_{k+1},\ f)$.

Пусть $P_s(A,\ z_k)=A^0+\gamma_1^{(k)}A+\ldots+\gamma_s^{(k)}A^s$ – оператор перехода s-шагового метода, R_s^n – множество векторов, разложение которых по системе собственных векторов матрицы A содержит по крайней мере $s+1$ ненулевых компонент, а $\sum_s$ – множество единичных векторов из R_s^n. В предположении (не ограничивающем общности результатов), что собственные значения $\{\lambda_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$ матрицы A просты, рассматривается отображение T: $\Sigma_s\to\Sigma_s$, заданное формулой

$$Ty=P_s(A,\ y)y\|P_s(A,\ y)y\|^{-1}.$$

На множестве неподвижных точек отображения T^2 определяются точки притяжения и отталкивания. Используя свойства этих точек, устанавливаем следующий основной результат: если $z_0\in R_3^n$, то существуют пределы

$$\gamma_i(u_0)=\lim_{k\to\infty}\gamma_i^{(2k)}, \qquad \gamma_i'(u_0)=\lim_{k\to\infty}\gamma_i^{(2k+1)}, \qquad i=1,2,3,$$

т. е. трехшаговый метод обладает предельными операторами перехода по четным и нечетным, соответственно

$$\lim_{k\to\infty}P_3(A,\ z_{2k}), \qquad \lim_{k\to\infty}P_3(A,\ z_{2k+1}),$$

итерациям, зависящими, вообще говоря, от начального приближения, а процесс, составленный из двух последовательных итераций трехшагового метода, является асимптотически линейным.

Указанный результат и аналогичные ему утверждения, доказанные для $s=1,2$ ранее, обосновывают возможность применения к s-шаговому методу приемов ускорения линейных итерационных процессов.

---

[1] Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ 17.10.91, № 4004-В91, 13 стр.

В качестве приложения основного результата определена существенная (по мере Лебега) область значений асимптотической скорости сходимости s-шагового метода для $s=1$, 2, 3.

Пусть u^* – точное решение уравнения $Au=f$, а

$$\rho_k^{(s)}(u_0)=[F(u_{k+1})-F(u^*)][F(u_k)-F(u^*)]^{-1},\qquad k=0,1,\dots.$$

Под асимптотической скоростью сходимости s-шагового метода понимается следующая функция:

$$q_s(u)=\begin{cases}-\ln\rho_s(u), & \text{если } u-u^*\in R_s^n,\\ \infty & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где

$$\rho_s(u)=\lim_{k\to\infty}\rho_k^{(s)}(u).$$

Пусть $\pi_m(t)$ – многочлен степени m, наименее уклоняющийся от нуля на спектре матрицы A и нормированный условием $\pi_m(0)=1$, а $\alpha_m=\max\limits_{i=1,2,\dots,n}|\pi_m(\lambda_i)|$ – величина уклонения. Тогда для $s=1$, 2, 3 и $n\geqslant 2s+1$

$$\operatorname*{vrai\,inf}_{R^n} q_s(u)=-2\ln\alpha_s,\qquad \operatorname*{vrai\,sup}_{R^n} q_s(u)=-\ln\alpha_{2s}.$$

Поступила в редакцию 16.08.90