Литература

1. *Torii T.* Inversion of tridiagonal matrices and stability of tridiagonal system of linear equations.— Juoho Shori, 1965, v. 6, № 4, p. 187–193.
2. *Бухбергер Б., Емельяненко Е.* Методы обращения трехдиагональных матриц.— Препринт ОИЯИ. Дубна, 1971, Р2-4985.
3. *Oohashi T.* Some representations for inverses of band matrices.— Techn. Repts Univ. Math., 1978, v. 14, № 2, p. 39–47.
4. *Фаддеев Д. К.* О свойствах матрицы, обратной Хессенберговой.— Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л., 1981, т. 3, с. 177–179.
5. *Bank R. E., Rose D. J.* Marching algorithms for elleptic boundary value problems. I: The constant coefficient case.— SIAM J. Numer. Analys., 1977, v. 14, № 5, p. 792–829.
6. *Sameh A. H., Kuck D. J.* On stable parallel linear systems solvers.— J. Assoc. Comput. Machinery, 1978, v. 25, № 1, p. 89–91.
7. *Sameh A. H., Kuck D. J.* A parallel QR algorithm for symmetric tridiagonal matrices.— IEEE Trans. Comput., 1977, v. 26, № 2, p. 147–153.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 7.V.1982

УДК 519.624

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

ЖУК П. Ф.

(Херсон)

Определена существенная область значений асимптотической скорости сходимости $V(v)$. Указана структура множества $V^{-1}(c) = \{v: V(v)=c\}$.

1. Исследование асимптотического поведения нормированных градиентов метода наискорейшего спуска при отыскании наименьшего собственного значения λ_1 конечномерного оператора, проведенное в [1], позволило естественным образом определить асимптотическую скорость сходимости $V(v)$ метода как функцию от начального приближения v:

$$V(v) = \lim_{k\to\infty} (\mu_k-\lambda_1)(\mu_{k+1}-\lambda_1)^{-1}.$$

Величина $V(v)$ существенно зависит от v; изучение этой зависимости представляет, по-видимому, не только теоретический, но и практический интерес, так как позволит более точно определять преимущества того или иного метода для конкретных задач. На необходимость таких исследований для метода минимальных невязок при решении матричных уравнений указывалось в [2].

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], изучается зависимость асимптотической скорости сходимости $V(v)$ метода наискорейшего спуска при отыскании наименьшего собственного значения от начального приближения v. В п. 2 определена существенная область значений $V(v)$. Полученный результат позволяет утверждать, что существенная область значений $V(v)$ определяется, как и для матричных уравнений [3], близостью собственных значений оператора $A-\lambda_1 E$ к середине отрезка $[\lambda_2-\lambda_1, \lambda_n-\lambda_1]$. В п. 3 изучается множество начальных приближений $V^{-1}(c)=\{v: V(v)=c\}$ с заданной асимптотической скоростью сходимости c. В частности, установлено, что при некоторых естественных предположениях относительно спектра мера Лебега $V^{-1}(c)$ равна нулю. Аналогичные результаты справедливы и для неявного метода наискорейшего спуска.

2. Без ограничения общности можно считать, что H есть n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

а $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – диагональная матрица (здесь и далее обозначения взяты из [1]). Для простоты изложения предположим, что $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$ – некратные собственные значения.

Обозначим n-мерную меру Лебега, заданную на H, через μ. Возьмем произвольное начальное приближение $v=(v_1,\ldots,v_n)$. Положим

$$V(v)=\begin{cases} 0, & \text{если } v_1=0,\\ \lim\limits_{k\to\infty}(\mu_k-\lambda_1)(\mu_{k+1}-\lambda_1)^{-1}, & \text{если } v_1\neq 0, \quad \mu_k\neq\lambda_1 \quad k=0,1,\ldots,\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом, асимптотическая скорость сходимости $V(v)$ определена на всем H. Нетрудно доказать, что функция $V(v)$ является μ-измеримой на H.

Обозначим через $\pi_s(t)$ многочлен степени s, наименее уклоняющийся от нуля на множестве чисел $\Lambda=\{\lambda_2-\lambda_1,\ldots,\lambda_n-\lambda_1\}$ и нормированный условием $\pi_s(0)=1$. Положим

$$\alpha_s=\min_{i=2,3,\ldots,n}|\pi_s(\lambda_i-\lambda_1)|^{-1}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Если $n>3$, то*

(1) $$\operatorname*{vrai\,sup}_H V(v)=\alpha_2,$$

(2) $$\operatorname*{vrai\,inf}_H V(v)=\alpha_1^2.$$

Сформулируем предварительно несколько лемм. Начальное приближение v будем называть вырожденным, если для некоторого конечного $k=0, 1,\ldots$ существует $i=1,2,\ldots,n$ такое, что i-я компонента k-го приближения $v_{ik}=0$. Пусть U – множество всех вырожденных начальных приближений.

Лемма 1. *Если $n>3$, то $\mu(U)=0$.*

Доказательство. Пусть U_{ik} – множество всех v, для которых $v_{i,k-1}\neq 0$, но $v_{ik}=0$, а

$$H_i=\{v=(v_1,\ldots,v_n): v_i=0\},\qquad \bar{H}=\bigcup_{i=1}^{n}H_i.$$

Исходя из вычислительной схемы метода нетрудно убедиться, что U_{ik} является подмножеством множества Φ_{ik} нулей некоторого многочлена $P^{ik}(v_1,\ldots,v_n)\not\equiv 0$ от n переменных. Используя теорему Фубини, имеем $\mu(\Phi_{ik})=0$, следовательно,

$$\mu(U)\leqslant\mu\Big(\bigcup_{i,k}\Phi_{ik}\cup\bar{H}\Big)=0.$$

Лемма доказана.

Положим $U(\varepsilon)=\{v: V(v)\geqslant\alpha_2+\varepsilon\}$.

Лемма 2. *Если $n>3$, то для любого $\varepsilon>0$ будет $U(\varepsilon)\subseteq U$.*

Доказательство. Пусть $v\notin U$. Тогда, в силу [1, формула (3.11)], $V(v)\leqslant\alpha_2$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $n>3$. Тогда: 1) если для некоторого $\tilde{v}$ будет $V(\tilde{v})\in[\alpha_1^2,\alpha_2)$, то $\tilde{v}$ – точка непрерывности функции $V(v)$; 2) если $V(\tilde{v})\notin[\alpha_1^2,\alpha_2]$, то $\tilde{v}$ – точка разрыва.*

Доказательство. В случае 1) в формуле (3.11) из [1] выполнено строгое неравенство

(3) $$\max_{i\in I,2<i<n}|\rho_i|<\rho_2.$$

Используя (3), можно доказать непрерывную зависимость предела последовательности нормированных градиентов $\{z_{2k}, k=0,1,\ldots\}$ от начального приближения в точке $\tilde{v}$. Непрерывность $V(v)$ в $\tilde{v}$ теперь следует из [1, теорема 5 и формула (3.10)].

В случае 2), в силу леммы 2, $\tilde{v}\in U$. Пусть $O(\tilde{v})$ – некоторая окрестность $\tilde{v}$. В силу леммы 1, существует $\bar{v}\in O(\tilde{v})$ такое, что $\bar{v}\notin U$. Но тогда $V(\bar{v})\in[\alpha_1^2, \alpha_2]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon>0$. В силу лемм 1, 2,

$$\mu(U(\varepsilon))\leqslant\mu(U)=0. \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon<0$. Тогда существует $\tilde{v}$ такое, что $\alpha_2+\varepsilon<V(\tilde{v})<\alpha_2, \alpha_1^2<V(\tilde{v})$. В силу леммы 3, $V(v)$ непрерывна в $\tilde{v}$, следовательно, $\mu(U(\varepsilon))\neq0$. Используя (4), получаем соотношение (1). Доказательство (2) аналогично. Теорема доказана.

3. Положим $V^{-1}(c)=\{v: V(v)=c\}$.

Теорема 2. *Для любого $n>3$ и любого $c\in[\alpha_1^2, \alpha_2)$*

$$V^{-1}(c)=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i,$$

где S_i, $i=1, 2, \ldots,$ – непустые непересекающиеся $(n-1)$-мерные поверхности класса C^1.

Доказательство теоремы 2 ввиду его громоздкости опускаем.

Так как $\mu(S_i)=0$, то из теоремы 2 следует, что для любого $c\in[\alpha_1^2, \alpha_2)$

$$\mu(V^{-1}(c))=0. \tag{5}$$

Равенство (5) верно и для $c\notin[\alpha_1^2, \alpha_2)$ (для $c\notin[\alpha_1^2, \alpha_2]$ оно следует из леммы 2; случай $c=\alpha_2$ требует отдельного исследования). Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если $n>3$, то для любого $c\in R$ выполняется равенство* (5).

Замечание. Теоремы 1–3 справедливы и для неявного метода наискорейшего спуска при отыскании наименьшего собственного значения ν_1 обобщенной задачи на собственные значения $Av=\nu Sv$, $S=S^*>0$ (относительно схемы метода см. [4]). В качестве $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ следует брать собственные значения (возможно, кратные) матрицы $D=B^{-1/2}(A-\nu_1 S)B^{-1/2}$ ($B=B^*>0$ – стабилизатор).

Литература

1. *Жук П. Ф.* Об асимптотических свойствах метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 271–285.
2. *Козякин В. С., Красносельский М. А.* О некоторых задачах, связанных с методом минимальных невязок.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 2, с. 508–510.
3. *Емелин И. В.* О быстроте сходимости метода наискорейшего спуска.– Успехи матем. наук, 1977, т. 32, № 1(193), с. 163–164.
4. *Макаров В. Л., Жук П. Ф., Приказчиков В. Г.* Об одношаговом итерационном методе вычисления собственных значений.– В кн.: Вычисл. и прикл. матем. Вып. 34. Киев: Изд-во КГУ, 1978, с. 152–157.

Поступила в редакцию 6.IV.1982