

## Глава 8. Безплатформні інерціальні навігаційні системи

У безплатформних інерціальних навігаційних системах (БІНС) акселерометри жорстко встановлюють безпосередньо на корпусі ЛА. Відсутність горизонтальної платформи потребує відтворення (моделювання) на борту ЛА відповідної навігаційної системи координат аналітично, тобто шляхом математичного моделювання. Моделювання навігаційної системи координат здійснюється на основі сигналів, що надходять від вимірників кутового положення ЛА. Перепроектуючи сигнали акселерометрів у навігаційну систему координат і виділяючи з їхніх показань сигнали, що є прискореннями ЛА, в обчислювачі БІНС аналітично визначається напрямок вертикалі, при цьому розв'язується задача визначення кутової орієнтації ЛА, тобто кутів крену, тангажа, умовного курсу.

Наступні розрахунки поточних координат ЛА зводяться до інтегрування отриманих прискорень і розв'язання навігаційної задачі зчислення шляху за відомими координатами точки старту і безперервною інформацією про величину і напрямок вектора швидкості в обраній навігаційній системі координат. При цьому точність зчислення визначається точністю роботи обчислювача і, природно, точністю датчиків первинної навігаційної інформації.

До числа потенційних переваг БІНС у порівнянні з платформними ІНС можна віднести:

- менші розміри, вага й енергоємність;
- істотне спрощення механічної частини системи і, як наслідок, підвищення надійності системи та зменшення її вартості;
- відсутність обмежень за кутами розвороту;
- скорочення часу початкового виставлення;
- універсальність системи, оскільки перехід до визначення тих або інших параметрів навігації здійснюється алгоритмічно;
- спрощення вирішення задачі резервування і контролю працездатності системи і її елементів.

Разом з тим, при створенні БІНС виникають принципові труднощі, головними з яких є:

- розробка датчиків інформації із широким діапазоном вимірювання і прийнятною точністю в умовах їх жорсткого кріплення на борту ЛА;
- розробка обчислювачів, що мають достатню швидкодію.

### 8.1. Принципи побудови й аналіз варіантів БІНС

З метою спрощення аналізу можливостей БІНС для початку розглянемо однокомпонентну систему навігації.

Однокомпонентна система навігації повинна містити тільки два акселерометри  $A_x$  і  $A_y$ , вимірювальні осі яких  $x_0y_0$  (рис. 8.1) у точці старту встановлюються по осях навігаційного координатного двогранника  $\xi_0\eta_0$ , зв'язаного з землею умовною системою координат. Стартове положення вимірювальних осей акселерометрів фіксується на об'єкті на увесь час руху останнього.

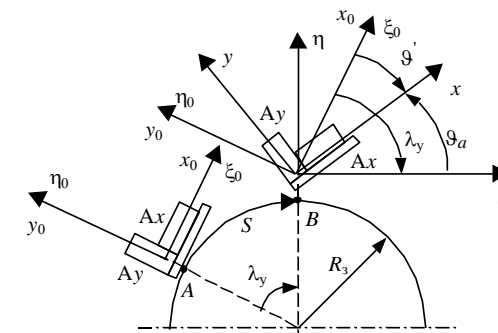


Рис. 8.1

Для визначення прискорень, вимірюваних жорстко зв'язаними з об'єктом акселерометрами, розглянемо момент часу  $t$ , коли об'єкт знаходиться в точці  $B$ , яка відстоїть від точки  $A$  на відстані, що відповідає умовній координаті  $\lambda_y = S/R_3$ .

Звичайно, що кутове положення умовного координатного двогранника  $\xi\eta$  в точці  $B$ , змінене відносно двогранника  $\xi_0\eta_0$  за рахунок об'єкту Землі, також визначається умовною координатою  $\lambda_y$ . Положення вимірювальних осей акселерометрів  $x, y$  відносно координатних двогранників  $\xi_0\eta_0$  і  $\xi\eta$  визначається відповідно кутами:  $\vartheta'$  – характеризує зміну орієнтації об'єкта, що виникає за рахунок його власного обертання;  $\vartheta_a$  – характеризує положення вимірювальних осей акселерометрів відносно поточного положення координатного двогранника  $\xi\eta$ .

Акселерометри БІНС (рис 8.2) будуть вимірювати негравітаційні складові вектора абсолютного прискорення руху точки  $O$  двогранника  $xu$  ( $a_x, a_y$ ):

$$\begin{aligned} a_x &= w_x - g_{0x}; \\ a_y &= w_y - g_{0y}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Тут враховано, що при встановленні вертикального акселерометра на нерухомій основі він вимірює уявне прискорення, що дорівнює за величиною, але протилежно за напрямком вектору напруженості поля сили ваги  $\bar{g}$ . При цьому

$$\begin{aligned} g_{0x} &= g_0 \sin \vartheta_a; \\ g_{0y} &= g_0 \cos \vartheta_a, \end{aligned} \quad (8.2)$$

де  $g_0 \approx -9,8 \text{ м/сек}^2$ .

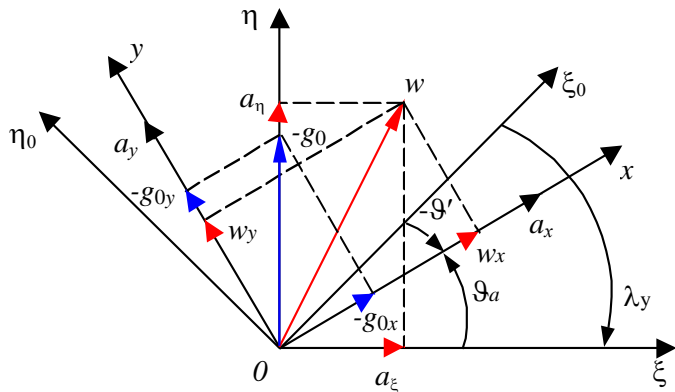


Рис. 8.2

Для визначення кінематичних параметрів, що характеризують рух об'єкта відносно земної поверхні, необхідно знати поточні значення проєкцій вектора прискорення центра мас об'єкта на осі умовного координатного двогранника  $a_\xi, a_\eta$ :

$$\begin{aligned} a_\xi &= w_x \cos \vartheta_a - w_y \sin \vartheta_a; \\ a_\eta &= w_x \sin \vartheta_a + w_y \cos \vartheta_a. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Підставляючи значення  $a_x$  і  $a_y$ , що знайдені з виразу (8.1), у вирази (8.3) і з урахуванням (8.2), одержимо

$$\begin{aligned} a_\xi &= a_x \cos \vartheta_a - a_y \sin \vartheta_a; \\ a_\eta &= a_x \sin \vartheta_a + a_y \cos \vartheta_a + g_0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

З рис. 8.2 видно, що

$$\vartheta_a = -(\lambda_y - \vartheta'), \quad (8.5)$$

тоді

$$\begin{aligned} a_\xi &= a_x \cos(\lambda_y - \vartheta') + a_y \sin(\lambda_y - \vartheta'); \\ a_\eta &= -a_x \sin(\lambda_y - \vartheta') + a_y \cos(\lambda_y - \vartheta') + g_0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

В свою чергу поточні значення кута відхилення вимірювальних осей акселерометрів відносно координатного двогранника  $\xi_0\eta_0$  можна визначити як безпосереднім вимірюванням (за допомогою, наприклад, вільного гіроскопа), так і шляхом вимірювання поточних значень кутового прискорення  $\ddot{\vartheta}'$  або кутової швидкості  $\dot{\vartheta}'$  з подальшим їх інтегруванням

$$\vartheta' = \int_0^t \left( \int_0^t \ddot{\vartheta}' dt \right) dt \quad \text{або} \quad \vartheta' = \int_0^t \dot{\vartheta}' dt. \quad (8.7)$$

Таким чином, в залежності від способу визначення кутового положення об'єкта в інерціальному просторі можливі такі основні варіанти схем БІНС:

- 1-й варіант передбачає наявність у складі БІНС шести акселерометрів, рознесених по осях об'єкта на певну відстань для вимірювання кутових прискорень, і обчислювального пристрою;
- 2-й варіант включає три лінійних акселерометри і три вимірники кутової швидкості об'єкта відносно центра мас, що встановлені в центрі мас об'єкта, а також обчислювальний пристрій;
- 3-й варіант передбачає наявність трьох лінійних акселерометрів і вимірника кутового положення об'єкта в інерціальному просторі, встановлених у центрі мас об'єкта, і обчислювального пристрою.

Використання БІНС першого варіанта зустрічає складності реалізації через малу вимірювальну базу визначення кутових прискорень об'єкта за допомогою акселерометрів, а також через похибки

у визначенні координат, що зростають пропорційно квадрату часу руху. Тому цей варіант системи може бути застосований тільки при досить точних акселерометрах і для об'єктів, що здійснюють політ протягом нетривалого часу.

Реалізація третього варіанта БІНС припускає наявність у складі навігаційної системи триступеневого гіроскопічного вимірника кутових положень, що тотожно тривісній гіростабілізованій платформі – досить дорогому прецизійному приладу.

Тому в даний час загально визнаним є використання на пілотованих ЛА БІНС, побудованої на трьох акселерометрах і трьох вимірниках кутової швидкості, тобто БІНС другого класу за вищевказаною класифікацією (найбільш перспективними чутливими елементами високоточних БІНС цього класу є лазерні кільцеві гіроскопи).

Для визначення поточних значень горизонтальної складової швидкості руху об'єкта  $V_{\xi}$  й умовної координати  $\lambda_y$  за допомогою БІНС 2-го варіанта необхідно вирішувати таку систему кінематичних рівнянь:

$$a_{\xi} = a_x \cos(\lambda_y - \vartheta') + a_y \sin(\lambda_y - \vartheta');$$

$$V_{\xi} = V_{\xi 0} + \int_0^t a_{\xi} dt;$$

$$\dot{\lambda}_y = \frac{1}{R_3} V_{\xi};$$

$$\vartheta' = \int_0^t \dot{\vartheta}' dt.$$

Після перетворення система (8.8) може бути представлена у вигляді:

$$\ddot{\lambda}_y = \frac{1}{R_3} [a_x \cos(\lambda_y - \vartheta') + a_y \sin(\lambda_y - \vartheta')];$$

$$\vartheta' = \int_0^t \dot{\vartheta}' dt.$$

Ця система є математичною моделлю кінематики маятника Шулера на відміну від ІНС із гіростабілізованою платформою, в якій кінематика цього маятника моделюється фізично.

Для розв'язання цієї системи необхідно мати поточні значення прискорень  $a_x$ ,  $a_y$  і кутової швидкості руху об'єкта  $\dot{\vartheta}'$  відносно центра мас.

Крім того, при розв'язанні систем (8.9) повинні бути відомі початкові значення кута  $\vartheta'_0$ , лінійної швидкості руху центра мас об'єкта відносно земної поверхні  $V_{\xi 0}$  і умовної координати  $\lambda_{y0}$ .

На рис. 8.3 зображена блок-схема обчислювального пристрою безперервної дії для 2-го варіанта схеми БІНС, з якої видно, що система замкнена за координатою  $\lambda_y$ .

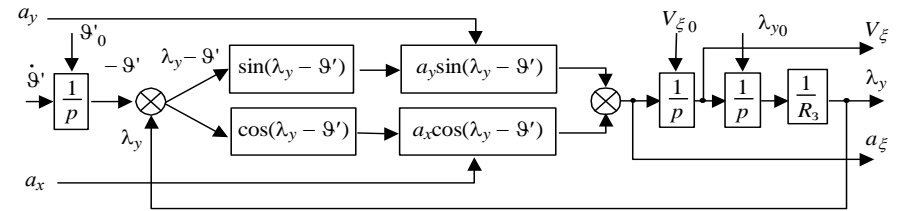


Рис. 8.3

Відзначимо, що БІНС дозволяє визначити не тільки параметри, що характеризують рух центра мас об'єкта відносно земної поверхні, але і параметри, що характеризують кутове положення об'єкта в площині горизонту.

Наприклад, для визначення кута тангажа об'єкта  $\vartheta$  необхідно, щоб обчислювальний пристрій розв'язував рівняння (8.5) з урахуванням кута встановлення осей акселерометрів  $\vartheta_{a0}$  в момент старту

$$\vartheta = \vartheta_a + \vartheta_{a0}.$$

Інструментальні похибки БІНС визначаються похибками акселерометрів, вимірників кутової швидкості або кутового положення, а, також похибками обчислювального пристрою. Звичайно, при застосуванні обчислювального пристрою досить високої точності похибки БІНС будуть визначатися головним чином похибками первинних вимірювальних приладів, що входять до складу системи.

Якщо акселерометри БІНС вимірюють прискорення  $a_x$  і  $a_y$  з похибками  $\Delta a_x$  і  $\Delta a_y$ , то, зазвичай, це призводить до похибки у визначенні координати  $\Delta \lambda_y$ .

Приладові значення зазначених параметрів (зі значком «\*»)

$$\begin{aligned} a_{\xi}^* &= a_{\xi} + \Delta a_{\xi}; \quad a_x^* = a_x + \Delta a_x; \quad a_y^* = a_y + \Delta a_y; \\ \dot{\lambda}_y^* &= \dot{\lambda}_y + \Delta \dot{\lambda}_y; \quad \lambda_y^* = \lambda_y + \Delta \lambda_y; \quad \ddot{\vartheta}^* = \ddot{\vartheta} + \Delta \ddot{\vartheta}; \\ \dot{\vartheta}^* &= \dot{\vartheta} + \Delta \dot{\vartheta}; \quad \vartheta^* = \vartheta + \Delta \vartheta. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Підставивши значення цих параметрів у перше рівняння системи (8.9) і зробивши відповідні перетворення, з урахуванням другого рівняння системи (8.6) отримуємо наступне рівняння похибок:

$$\Delta \ddot{\lambda}_y + \frac{(a_{\eta} + g_0)}{R_3} \Delta \lambda_y = \frac{1}{R_3} [a_x \cos(\lambda_y - \vartheta') + a_y \sin(\lambda_y - \vartheta')]. \quad (8.11)$$

Як видно, ліва частина рівняння (8.11) є (при  $a_{\eta} = 0$ ) рівнянням маятника Шулера, а права – збурюючим впливом.

Координата  $\lambda_y$  і кут  $\vartheta'$  у процесі руху безперервно змінюються, тому права частина рівняння (8.11) буде теж змінною в часі.

Враховуючи (8.5) і те, що при автоматичному керуванні рухом кут відхилення об'єкта від площини горизонту досить малий, а також вважаючи, що

$$\Delta a_x = \Delta a_y = \Delta a,$$

у першому наближенні одержимо

$$\Delta \ddot{\lambda}_y + \frac{1}{R_3} (a_{\eta} + g_0) \Delta \lambda_y \cong \frac{\Delta a}{R_3}. \quad (8.12)$$

При  $a_{\eta} = 0$ ,  $\Delta a = \text{const}$  розв'язок рівняння (8.12) буде мати вигляд:

$$\Delta \lambda_y \cong \frac{\Delta a}{g_0} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{g_0}{R_3}} \cdot t \right) \right). \quad (8.13)$$

З виразу (8.13) видно, що похибка БІНС у визначенні координати  $\lambda_y$ , що обумовлена похибкою акселерометрів, буде мати як

сталу, так і змінну складові. Найбільше значення похибки не перевершить  $\Delta \lambda_y \leq 2 \Delta a / g_0$ .

Графік залежності  $\Delta \lambda(t)$ , отриманий шляхом моделювання однокомпонентної БІНС, при наявності постійних похибок акселерометрів наведений на рис. 8.4, а.

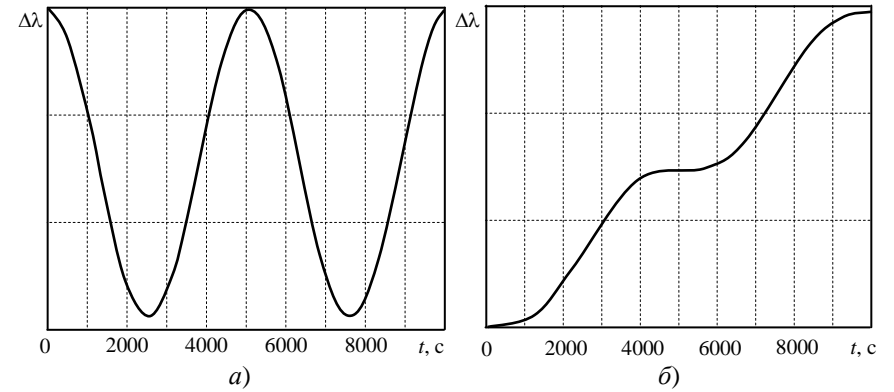


Рис. 8.4

Якщо вимірник кутової швидкості об'єкта має похибку  $\Delta \vartheta'$ , то приладове значення кутової швидкості  $\dot{\vartheta}^* = \dot{\vartheta} - \Delta \dot{\vartheta}'$ .

При цьому, зазвичай, будуть мати місце похибки й у визначенні інших параметрів руху.

Підставляючи значення параметрів  $\dot{\vartheta}^*$  і  $\lambda_y^*$  в рівняння (8.9), після перетворень з урахуванням другого рівняння системи (8.6) одержимо

$$\Delta \ddot{\lambda}_y + \frac{a_{\eta} + g_0}{R_3} \Delta \lambda_y = - \frac{a_{\eta} + g_0}{R_3} \Delta \vartheta'. \quad (8.14)$$

Як видно, ліва частина рівняння (8.14) і в цьому випадку (при  $a_{\eta} = 0$ ) є рівнянням маятника Шулера, а права частина – збурюючим фактором, що обумовлений похибками у вимірюванні кута  $\vartheta'$ .

Якщо вважати похибку  $\Delta \dot{\vartheta}' = \Delta \dot{\vartheta}'_0 = \text{const}$ , то  $\Delta \vartheta' = \Delta \dot{\vartheta}'_0 t$ , при цьому розв'язок рівняння (8.14) буде (при  $a_{\eta} = 0$ ) таким:

$$\Delta\lambda_y = \Delta\dot{\vartheta}'_0 \left( \sqrt{\frac{R_3}{g_0}} \sin \sqrt{\frac{g_0}{R_3}} \cdot t - t \right). \quad (8.15)$$

Як видно з виразу (8.15), похибка у визначенні координати  $\lambda_y$ , що обумовлена похибкою вимірника кутової швидкості, у першому наближенні має дві складові (рис. 8.4,б), одна з яких збільшується пропорційно часу польоту

$$\Delta\lambda_{y0} = \Delta\dot{\vartheta}'_0 t,$$

а інша змінюється з періодом маятника Шулера

$$\Delta\lambda_y = \Delta\dot{\vartheta}'_0 \sqrt{\frac{R_3}{g_0}} \sin \sqrt{\frac{g_0}{R_3}} \cdot t.$$

Графік залежності  $\Delta\lambda(t)$ , що зображений на рис. 8.4, б, отримано шляхом моделювання однокомпонентної БІНС при наявності постійної похибки вимірника кутової швидкості.

## 8.2. Алгоритми роботи трикомпонентної БІНС

Алгоритм функціонування БІНС містить у собі сукупність аналітичних залежностей, які дозволяють за вимірюваним значенням уявного прискорення й абсолютної кутової швидкості ЛА безперервно визначати поточне значення координат місця розташування, складові шляхової швидкості та кутове положення ЛА в обраній навігаційній системі координат.

В алгоритмах роботи трикомпонентної БІНС, як і в алгоритмах платформної ІНС, точність зчислення навігаційних параметрів досягається за рахунок виключення із сигналів уявного прискорення, яке вимірюють акселерометри, складові прискорення сили ваги і коріолісового прискорення. Але вплив цих складових компенсується на відміну від платформної ІНС тільки аналітично.

Кінематичні рівняння інерціальної навігації в основному визначаються вибраною системою координат, тобто навігаційним базисом, в якому визначаються навігаційні параметри (координати і проекції швидкості). У свою чергу, вибір навігаційного базису залежить від типу літального апарата, особливостей його траєкторного руху, характеру розв'язуваних задач.

Наприклад, для БІНС, що інтегруються зі супутниковими навігаційними системами, можна застосовувати інерціальну систему

координат, яка використовується супутниковою системою навігації. При цьому, позиційну інформацію одержують у формі декартових прямокутних координат, швидкісну – у формі проєкцій абсолютної швидкості на осі вибраної інерціальної системи координат, а інформацію про кутову орієнтацію – у вигляді відповідної матриці або трьох кутів орієнтації ЛА відносно вибраного базису. Подальше перерахування отриманих координат в обертову систему координат ПЗ-90 (WGS-84) здійснюється за алгоритмами супутникової системи навігації.

Для БІНС літальних апаратів, які здійснюють рух в атмосфері Землі, найбільш часто використовуються обертові системи координат з базовою площиною місцевого горизонту і певною орієнтацією горизонтальних осей в азимуті. Під орієнтацією осей в азимуті розуміється можливість їхньої орієнтації, наприклад, за сторонами світу, коли дві горизонтальні осі спрямовані в східному і північному напрямках. При цьому позиційну інформацію визначають широтою  $\varphi$ , довготою  $\lambda$  і висотою  $h$ , що виміряні на еліпсоїді Краусовського або на еліпсоїді міжнародної системи WGS-84, швидкість визначають проєкціями на східну  $V_E$ , північну  $V_N$  і вертикальну осі  $V_H$ , якщо за навігаційну систему вибрана система з орієнтацією осей за сторонами світу, або проєкціями на осі горизонтального базису з іншою орієнтацією. Орієнтація при цьому визначається кутами крену, тангажа і аправжнього курсу.

Типову схему побудови БІНС зображено на рис. 8.5. Цей варіант реалізує алгоритм системи, яка працює в обертовій земній системі координат.

Датчики первинної інформації БІНС – датчики кутової швидкості й акселерометри встановлюються жорстко на ЛА. Складні умови роботи датчиків інформації призводять до появи значних похибок, тому в алгоритмах роботи БІНС бажано здійснити аналітичну компенсацію похибок вимірників (здійснювати їх польотне калібрування), перш ніж ці сигнали будуть використані для розрахунку параметрів орієнтації і для визначення складових уявного прискорення уздовж навігаційних осей.

Для корекції показань датчиків первинної інформації необхідна математична модель вимірника, в якій, зазвичай, враховують:

нелінійність; неспіввісність осей датчиків; дрейф; викривлення масштабного коефіцієнта.

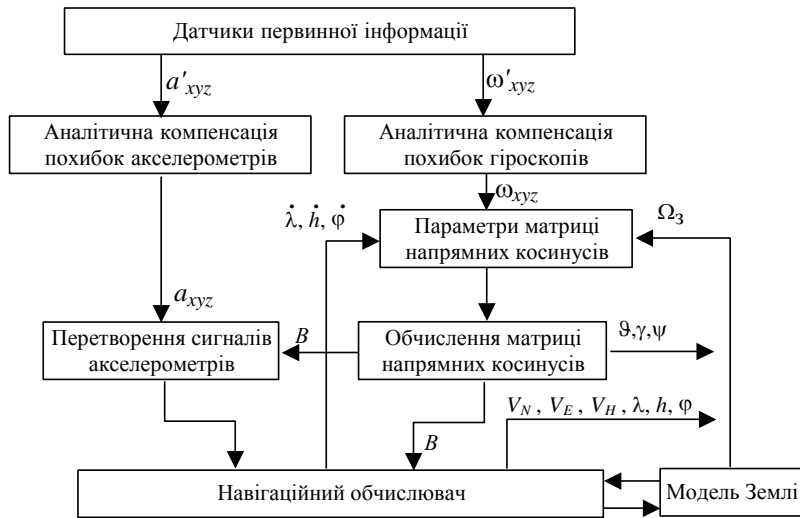


Рис. 8.5

Сигнали  $\omega_{x,y,z}$  з виходу аналітичного компенсатора похибок використовуються для обчислення параметрів матриці напрямних косинусів  $B$ , яка визначає зв'язок між двома системами координат. Оскільки матриця напрямних косинусів  $B$  визначається між зв'язаними з ЛА осями й осями обертової навігаційної системи координат, то при розрахунках параметрів матриці  $B$  необхідно залучити обчислені проекції вектора кутової швидкості навігаційної системи координат, що відображено на схемі додатковими зв'язками, які враховують кутову швидкість, що виникає при обльоті сферичної Землі  $(\dot{\lambda}, \dot{h}, \dot{\phi})$ , і кутову швидкість обертання самої Землі  $(\Omega_3)$ .

Перетворення складових уявного прискорення  $a_{x,y,z}$  від осей ЛА до осей навігаційної системи координат здійснюється за допомогою матриці напрямних косинусів  $B$ . Навігаційний обчислювач вирішує задачі, властиві всім платформним системам, оскільки на вході цього обчислювача сформовані проекції уявного прискорення на осі навігаційної системи координат і нічого принципово нового в

розв'язанні цієї задачі немає. На виході БІНС формуються радіус-вектор місця розташування ЛА, вектор швидкості, а також кути орієнтації ЛА.

В окремому випадку, коли за навігаційний базис вибраний горизонтальний орієнтований за сторонами світу тригранник, на виході системи будуть сформовані географічні (геодезичні) координати радіуса-вектора місця розташування  $B, L, H$ , проекції відносної швидкості руху  $V_N, V_E, V_H$ , а також кути орієнтації ЛА в географічній системі координат – справжній курс  $\psi$ , тангаж  $\vartheta$  і крен  $\gamma$ .

Обсяг обчислень у БІНС значний. Це пояснюється в основному тим фактом, що БЦОМ розв'язує задачі, які пов'язані з динамікою обертання ЛА, а також з динамікою поступального руху ЛА. Поступальні швидкості ЛА відносно малі. Наприклад, швидкість при польоті ЛА в напрямку на північ 1100 км/год відповідає швидкості зміни широти усього на 10 град/год.

Таким чином, інтегрування для одержання швидкості і місця розташування можуть здійснюватися досить точно з використанням дуже простих методів чисельного інтегрування при низькій частоті повторення в типовому випадку 10...20 Гц.

Кутові швидкості ЛА в типовому випадку за величиною на кілька порядків більші поступальних швидкостей. Зокрема, для маневрених ЛА кутові швидкості обертання можуть складати сотні градусів за секунду. В результаті цього інтегрування кутового положення в БІНС зв'язано з жорсткими вимогами до БЦОМ.

Оскільки для забезпечення високої точності інерціальної навігації потрібно, щоб похибки інтегрування кутового положення обмежувалися декількома частками кутової хвилини, необхідно застосовувати алгоритми інтегрування більш високого порядку при типових частотах повторення 80...50 Гц.

З огляду на вище сказане, наведемо варіант побудови алгоритмів БІНС для випадку, коли за навігаційний базис вибраний горизонтальний орієнтований за сторонами світу тригранник.

#### Алгоритми БІНС, яка працює в географічній системі координат

За навігаційний тригранник візьмемо тригранник  $NHE$ , зв'язаний з землею поверхнею.

Виберемо наступний напрямок осей  $NHE$  (рис. 8.6):

$OH$  – збігається з вертикаллю;  
 $ON$  – дотична до меридіана;  
 $OE$  – утворює праву трійку.

В алгоритмах БІНС, звичай, виділяють динамічні та кінематичні рівняння. Динамічні рівняння реалізують трикомпонентну схему БІНС, у якій географічні координати  $L, B, H$  визначаються інтегруванням рівнянь вигляду

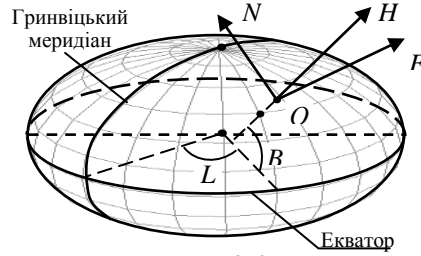


Рис. 8.6

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \frac{V_E}{(R_2 + H)\cos B}; \\ \dot{B} &= \frac{V_N}{R_1 + H}; \\ \dot{H} &= V_H,\end{aligned}$$

де  $V_N, V_E$  – північна та східна проекції шляхової швидкості (проекції на осі системи координат  $NHE$  (див. рис. 8.6);  $R_1, R_2$  – два радіуси кривизни земного сфероїда (еліпсоїда обертання);  $R_1$  – радіус кривизни меридіонального перетину еліпсоїда (площиною  $HN$ );  $R_2$  – радіус кривизни перетину еліпсоїда площиною  $HE$  (площиною першого вертикала);

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}; \quad R_2 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}},$$

де  $a$  – велика піввісь еліпсоїда ( $a = 6378388$  м);  $e$  – ексцентриситет еліпсоїда ( $e^2 = 6,73 \cdot 10^{-3}$ );  $H$  – висота польоту.

Тут можна застосовувати такі ж спрощення, що й у платформних інерціальних системах. Зокрема, функції  $\frac{1}{R_1 + H}$  і  $\frac{1}{R_2 + H}$  з точністю до членів порядку малості  $10^{-5}$  можна представити в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1 + H} &= \frac{1}{a} \left[ 1 - e^2 - \frac{H}{a} - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B - 2e^2 \frac{H}{a} + 3e^2 \frac{H}{a} \sin^2 B + \left( \frac{H}{a} \right)^2 + e^4 \left( 1 - 3 \sin^2 B + \frac{3}{8} \sin^4 B \right) \right]; \\ \frac{1}{R_2 + H} &= \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{H}{a} - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \left( \frac{H}{a} \right)^2 + e^2 \frac{H}{a} \sin^2 B + e^4 \left( \frac{1}{4} \sin^2 B - \frac{3}{8} \right) \sin^2 B \right].\end{aligned}$$

Якщо у формулах  $\frac{1}{R_1 + H}$  і  $\frac{1}{R_2 + H}$  зберегти лише члени порядку малості  $10^{-2}$ , то вони приймуть вигляд

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1 + H} &\approx \frac{1}{a} \left[ 1 - e^2 - \frac{H}{a} - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B \right]; \\ \frac{1}{R_2 + H} &\approx \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{H}{a} - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B \right].\end{aligned} \quad (8.16)$$

Слід відзначити, що використання спрощень (8.16) може призвести до похибок, порівняних з похибками високоякісних гіроскопічних вимірників, які використовуються в БІНС.

Складові шляхової швидкості ЛА  $V_L, V_N, V_H$  одержують в результаті інтегрування проекцій сигналів акселерометрів, виключаючи із них складові коріолісового прискорення і прискорення сили ваги (див. формулу 6.14):

$$\begin{aligned}\dot{V}_E &= a_E - (V_N \omega_{H\Sigma} - V_H \omega_{N\Sigma}) + g_E; \\ \dot{V}_H &= a_H - (V_E \omega_{N\Sigma} - V_N \omega_{E\Sigma}) + g_H; \\ \dot{V}_N &= a_N - (V_H \omega_{E\Sigma} - V_E \omega_{H\Sigma}) + g_N,\end{aligned}$$

де  $a_{E,H,N}$  – проекції уявного прискорення ЛА, вимірювані акселерометрами, на осі навігаційного тригранника;  $g_{E,H,N}$  – проекції вектора прискорення сили ваги, які враховують прискорення земного тяжіння, і прискорення, що викликається відцентровою силою

інерції і зв'язане з обертанням Землі; складові в дужках – проекції коріолісового прискорення на осі навігаційного тригранника;  $\omega_{E\Sigma}, \omega_{H\Sigma}, \omega_{N\Sigma}$  – проекції кутової швидкості навігаційного тригранника відносно інерціального простору, які враховують проекції кутової швидкості обертання Землі  $\Omega_E, \Omega_H, \Omega_N$  і складові відносної кутової швидкості навігаційного тригранника, які обумовлені рухом ЛА відносно Землі  $\omega_{E_V}, \omega_{H_V}, \omega_{N_V}$ :

$$\omega_{N\Sigma} = \omega_{N_V} + 2\Omega_N; \quad \omega_{H\Sigma} = \omega_{H_V} + 2\Omega_H; \quad \omega_{E\Sigma} = \omega_{E_V} + 2\Omega_E.$$

У свою чергу, складові відносної кутової швидкості навігаційного тригранника і швидкості обертання Землі визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \omega_{E_V} &= -\frac{V_N}{R_1 + H} = -\dot{B}; \\ \omega_{H_V} &= \frac{V_E}{(R_2 + H)} \operatorname{tg} B = \dot{L} \sin B; \\ \omega_{N_V} &= \frac{V_E}{(R_2 + H)} = \dot{L} \cos B; \end{aligned}$$

$$\Omega_N = \Omega_3 \cos B; \quad \Omega_H = \Omega_3 \sin B; \quad \Omega_E = 0,$$

де  $\Omega_3$  – кутова швидкість обертання Землі ( $\Omega_3 = 7,27 \cdot 10^{-5}$  рад/с).

Детермінована математична модель прискорення сили ваги існує тільки для нормальної складової поля сили ваги, що відповідає земному еліпсоїду з рівномірним розподілом мас в об'ємі цієї фігури. Градієнт цього поля в будь-якій точці, що належить поверхні еліпсоїда, спрямований за нормаллю до неї і розташований у площині меридіонального перетину. Оскільки точка місцеположення ЛА не належить поверхні Землі, то вектор градієнта нормально-го поля сили ваги  $\bar{g}$  в цій точці не буде спрямований за лінією нормалі, опущеної з неї до поверхні земного еліпсоїда (вісь  $OH$ ). Разом з тим, цей вектор буде розташований у площині меридіана точки  $O$ , тобто в площині  $NOH$ . Тоді, використовуючи потенційну функцію нормального поля тяжіння земного сфероїда, з точністю до членів порядку малості  $10^{-5}$  співвідношення для проекцій складових поля сили ваги  $\bar{g}$  мають такий вигляд:

$$g_E = 0;$$

$$g_N = \frac{1}{2} g \left[ \frac{H}{a} (e^2 - 5q) + q e^2 \sin^2 B \right] \sin 2B;$$

$$\begin{aligned} g_H &= -g \left\{ 1 - 2 \frac{H}{a} - (e^2 + 2q - 3 \frac{H}{a}) \frac{H}{a} + \left[ \frac{1}{2} (5q - e^2) - \frac{1}{8} e^4 + \frac{17}{18} q e^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (3e^2 - 5q) \frac{H}{a} \right] \sin^2 B - \frac{1}{2} q e^2 \sin^4 B + \frac{1}{16} e^2 \left( \frac{1}{2} e^2 - 7q \right) \sin^2 2B \right\}, \end{aligned}$$

де  $g = 9,78049$  м/с<sup>2</sup> прискорення сили ваги на екваторі;

$q = \Omega_3^2 a/g = 0,00346775$  – відношення відцентрової сили, обумовленої обертанням Землі, до сили ваги на екваторі.

З точністю до величин порядку малості  $10^{-4}$  співвідношення для проекцій складових поля сили ваги  $\bar{g}$  декілька спрощуються:

$$g_E = 0;$$

$$g_N = g \sin 2B + \frac{5}{2} q \sin^2 B \frac{H}{a} \left( \frac{e^2}{2} - 2q \right);$$

$$\begin{aligned} g_H &= -g \left[ 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B + \frac{3}{2} q \sin^2 B + e^4 \left( -\frac{1}{8} \sin^2 B + \frac{1}{32} \sin^2 2B \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^2 q \left( -\frac{17}{28} \sin^2 B - \frac{5}{16} \sin^2 2B \right) + \frac{H}{a} e^2 (3 \sin^2 B - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Hq}{a} (-1 - 6 \sin^2 B) - 2 \frac{H}{a} + 3 \frac{H^2}{a^2} \right], \end{aligned}$$

а при малих значеннях висоти ( $H \leq 100$  км) проекції вектора  $\bar{g}$  на осі  $NHE$ , якщо в них зберегти лише члени порядку малості  $10^{-2}$ , взагалі мають простий вигляд:

$$g_E = 0; \quad g_N = 0;$$

$$g_H = -g \left( 1 + 5,2884 \cdot 10^{-3} \sin^2 B \right) \left[ 1 - \frac{2H}{a} (1 - e \sin^2 B) \right].$$

Є й інші форми запису даної складової.



При розв'язанні кінематичних рівнянь розраховуються проекції  $a_{E,H,N}$  уявного прискорення ЛА на осі навігаційного тригранника  $NHE$  за показаннями акселерометрів зі зв'язаної з ЛА системи координат  $XYZ$  з використанням матриці напрямних косинусів  $B$

$$\begin{bmatrix} a_N \\ a_H \\ a_E \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a_{x_{ЛА}} \\ a_{y_{ЛА}} \\ a_{z_{ЛА}} \end{bmatrix}.$$

Матриця напрямних косинусів має такий вигляд:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \sin \psi \cos \gamma + \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix}$$

де  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  – кути крену, тангажа і рискання. Кут рискання відрізняється від географічного курсу  $\psi_T$  знаком, тобто  $\psi_T = -\psi$ .

Матриця напрямних косинусів  $B$  може бути отримана в різні способи. Наведемо приклади деяких з них.

Матриця напрямних косинусів  $B$  може бути отримана в результаті розв'язання узагальненого рівняння Пуассона за інформацією про кутову швидкість ЛА відносно інерціального простору  $\omega_{ЛА}$  і кутову швидкість навігаційної системи координат відносно інерціального простору  $\omega_{NHE}$ , яка враховує кутову швидкість обертання Землі і кутову швидкість, обумовлену обльотом ЛА сферичної Землі

$$\dot{B} = B\omega_{ЛА} - \omega_{NHE}B,$$

де

$$\omega_{ЛА} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_{ЛА}} & \omega_{y_{ЛА}} \\ \omega_{z_{ЛА}} & 0 & -\omega_{x_{ЛА}} \\ -\omega_{y_{ЛА}} & \omega_{x_{ЛА}} & 0 \end{bmatrix}; \omega_{NHE} = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_{E_V} + \Omega_E) & (\omega_{H_V} + \Omega_H) \\ (\omega_{E_V} + \Omega_E) & 0 & -(\omega_{N_V} + \Omega_N) \\ -(\omega_{H_V} + \Omega_H) & (\omega_{N_V} + \Omega_N) & 0 \end{bmatrix};$$

$\omega_{x_{ЛА}}$ ,  $\omega_{y_{ЛА}}$ ,  $\omega_{z_{ЛА}}$  – кутові швидкості ЛА відносно зв'язаних осей, вимірювані датчиками кутової швидкості;  $\Omega_E$ ,  $\Omega_H$ ,  $\Omega_N$  і  $\omega_{E_V}$ ,  $\omega_{H_V}$ ,  $\omega_{N_V}$  були визначені раніше.

За елементами матриці  $B$  визначаються кути орієнтації ЛА: крен  $\gamma$ , тангаж  $\vartheta$ , рискання (курс)  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \arctg \left( \frac{-b_{23}}{b_{22}} \right) = \arcsin \left( \frac{-b_{23}}{\sqrt{1-b_{21}^2}} \right) = \arccos \left( \frac{b_{22}}{\sqrt{1-b_{21}^2}} \right); \\ \vartheta &= \arctg \left( \frac{b_{21}}{\sqrt{b_{22}^2 + b_{33}^2}} \right) = \arcsin(b_{21}) = \arccos(\sqrt{1-b_{21}^2}); \\ \psi &= -\arctg \left( \frac{b_{31}}{b_{11}} \right) = \arcsin \left( \frac{-b_{31}}{\sqrt{1-b_{21}^2}} \right) = \arccos \left( \frac{b_{11}}{\sqrt{1-b_{21}^2}} \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Інший алгоритм отримання матриці напрямних косинусів припускає її формування безпосередньо за кутами  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ .

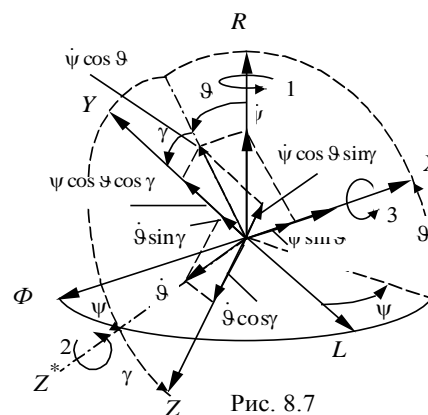


Рис. 8.7

Кінематичні співвідношення між кутами  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  і проекціями вектора абсолютної кутової швидкості на осі зв'язаної системи координат  $\omega_{x_{\Sigma}}$ ,  $\omega_{y_{\Sigma}}$ ,  $\omega_{z_{\Sigma}}$  можна одержати з рис. 8.7, на якому показано перетворення навігаційної системи координат  $OLR\Phi$  у зв'язану  $OXYZ$  шляхом трьох поворотів: 1 – навколо осі  $OR$ ; 2 – навколо проміжної осі  $OZ^*$ ; 3 – навколо осі  $OX$ .

Звичайно, що кутові швидкості  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\gamma}$ , які спрямовані уздовж відповідних осей, є складовими абсолютної кутової швидкості ЛА.

Проектуючи  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\gamma}$  на осі зв'язаної системи координат, отримаємо:

$$\begin{aligned}\omega_{x\Sigma} &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta; \\ \omega_{y\Sigma} &= \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma; \\ \omega_{z\Sigma} &= \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Розв'язуючи ці співвідношення, одержимо такі кінематичні рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (\omega_{y\Sigma} \cos \gamma - \omega_{z\Sigma} \sin \gamma) \sec \vartheta; \\ \dot{\gamma} &= \omega_{x\Sigma} + \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{z\Sigma} \sin \gamma - \omega_{y\Sigma} \cos \gamma); \\ \dot{\vartheta} &= \omega_{y\Sigma} \sin \gamma + \omega_{z\Sigma} \cos \gamma.\end{aligned}$$

У свою чергу

$$\begin{aligned}\omega_{y\Sigma} &= \omega_{y_{\text{ЛА}}} - \omega_{y_{\text{NHE}}}; \\ \omega_{x\Sigma} &= \omega_{x_{\text{ЛА}}} - \omega_{x_{\text{NHE}}}; \\ \omega_{z\Sigma} &= \omega_{z_{\text{ЛА}}} - \omega_{z_{\text{NHE}}},\end{aligned}$$

де  $\omega_{y_{\text{ЛА}}}, \omega_{x_{\text{ЛА}}}, \omega_{z_{\text{ЛА}}}$  – проекції кутової швидкості ЛА відносно інерціального простору на осі зв'язаної системи координат, вимірювані датчиками кутових швидкостей;

$\omega_{x_{\text{NHE}}}, \omega_{y_{\text{NHE}}}, \omega_{z_{\text{NHE}}}$  – проекції кутової швидкості навігаційного тригранника відносно інерціального простору на осі зв'язаної системи координат, які враховують проекції кутової швидкості обертання Землі  $\Omega_H, \Omega_E, \Omega_N$  і складові відносної кутової швидкості навігаційного тригранника, що обумовлені рухом ЛА відносно Землі  $\omega_{H_V}, \omega_{E_V}, \omega_{N_V}$ . Ці проекції кутової швидкості визначаються в результаті розв'язання матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_{\text{NHE}}} \\ \omega_{y_{\text{NHE}}} \\ \omega_{z_{\text{NHE}}} \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} \omega_{N_V} + \Omega_N \\ \omega_{H_V} + \Omega_H \\ \omega_{E_V} + \Omega_E \end{bmatrix}.$$

Перевагою такого підходу до визначення кутів орієнтації ЛА (інтегруванням диференціальних рівнянь, що описують швидкості зміни кутів Ейлера, а не за арктангенсами відношення елементів матриці напрямних косинусів) є відсутність обмежень у  $\pm 90^\circ$ , що особливо важливо при визначенні курсу ЛА на віражах.

Тривимірні матриці напрямних косинусів досить зручні для обчислень у бортовій ЦОМ. Однак формування матриці  $B$  з використанням тригонометричних функцій вимагає значних обчислювальних витрат.

Для визначення орієнтації ЛА можна використовувати не тільки напрямні косинуси, але і параметри Родрига-Гамільтона у формі кватерніонів. Достоїнство методу кватерніонів полягає в тому, що він дозволяє описувати перехід від однієї системи координат до іншої за допомогою всього лише чотирьох чисел, а не 9 напрямних косинусів.

Кватерніонний метод ґрунтується на теоремі Ейлера, яка доводить, що будь-який поворот однієї системи координат відносно іншої можна подати, як поворот на деякий кут навколо однієї нерухомої осі.

Кватерніон є компактною формою запису орієнтації зазначеної осі (векторна частина кватерніона  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) і кута повороту (скалярна частина кватерніона  $\lambda_0$ ) відповідно до теореми Ейлера.

Застосування кватерніонів дозволяє подати ортогональні перетворення у формі множення кватерніонів. Дії над кватерніонами допускають матричні операції з використанням симетризованих матриць, що дуже зручно при створенні програм бортових обчислювачів.

Відповідно до теореми Ейлера-Шаля усяке переміщення твердого тіла, яке має нерухому точку, можна зобразити як результат повороту навколо незмінного напрямку (ейлерової осі) на певний кут  $\varphi$ . Якщо зв'язати з розглянутим твердим тілом правий ортогональний координатний тригранник, то параметри Родрига-Гамільтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , що однозначно характеризують згадані переміщення, можна задати такими виразами:

$$\lambda_1 = \frac{l_1 \sin \varphi}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{l_2 \sin \varphi}{2}; \quad \lambda_3 = \frac{l_3 \sin \varphi}{2}; \quad \lambda_0 = \frac{\cos \varphi}{2},$$

де  $l_1, l_2, l_3$  – косинуси кутів, утворених ейлеровою віссю з осями тригранника в його вихідному та кінцевому положенні. Зв'яжемо з ЛА, на якому встановлена БІНС, ортонормований базис  $\mathbf{E}$  – праву трійку взаємно ортогональних одиничних векторів  $e_1, e_2, e_3$ . Орієнтацію базису  $\mathbf{E}$  відносно ортонормованого інерціального базису  $\mathbf{I}$ ,

складеного з ортів  $i_1, i_2, i_3$ , охарактеризуємо параметрами Родрига-Гамільтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Матриця напрямних косинусів, що обчислена за параметрами Родрига-Гамільтона (кватерніонами), має такий вигляд:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{bmatrix}.$$

Вимірники кутової швидкості, що входять до складу БІНС, вимірюють координати  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  вектора  $\bar{\Omega}$  абсолютної кутової швидкості базису  $\mathbf{E}$ , що задані в цьому базисі. Необхідно, знаючи значення параметрів Родрига-Гамільтона в момент часу  $t = t_0$  і використовуючи сигнали вимірників кутової швидкості, обчислювати параметри Родрига-Гамільтона при  $t > t_0$ . У початковий момент часу за інформацією про кути крену тангажа і курсу можна розрахувати вихідні значення параметрів Родрига-Гамільтона:

$$\begin{aligned} \lambda_{0_0} &= \sin(\gamma_0/2)\sin(\vartheta_0/2)\sin(\psi_0/2) + \cos(\gamma_0/2)\cos(\vartheta_0/2)\cos(\psi_0/2); \\ \lambda_{1_0} &= -\sin(\vartheta_0/2)\sin(\psi_0/2)\cos(\gamma_0/2) + \sin(\gamma_0/2)\cos(\vartheta_0/2)\cos(\psi_0/2); \\ \lambda_{2_0} &= \sin(\gamma_0/2)\cos(\vartheta_0/2)\sin(\psi_0/2) + \sin(\vartheta_0/2)\cos(\gamma_0/2)\cos(\psi_0/2); \\ \lambda_{3_0} &= \sin(\psi_0/2)\cos(\gamma_0/2)\cos(\vartheta_0/2) - \sin(\gamma_0/2)\sin(\vartheta_0/2)\cos(\psi_0/2). \end{aligned}$$

Поточні значення параметрів  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  можна визначити, знаючи проекції кутової швидкості ЛА  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на зв'язаній осі  $XYZ$ , шляхом розв'язання лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами. У цьому випадку параметри  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  кватерніона описують положення осей ЛА  $XYZ$  відносно інерціального простору:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\Omega(t) \cdot \lambda(t),$$

де  $\Omega(t)$  – косиметрична  $(4 \times 4)$ -матриця, яка відповідає вектору  $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}; \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Цей вираз є кватерніонним однорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку зі змінним коефіцієнтом у вигляді гіперкомплексного числа з дійсною частиною, що дорівнює нулю. У скалярній формі це рівняння має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= -0,5 (\omega_x\lambda_1 + \omega_y\lambda_2 + \omega_z\lambda_3); \\ \dot{\lambda}_1 &= -0,5 (\omega_x\lambda_0 + \omega_z\lambda_2 + \omega_y\lambda_3); \\ \dot{\lambda}_2 &= -0,5 (\omega_y\lambda_0 + \omega_z\lambda_1 + \omega_x\lambda_3); \\ \dot{\lambda}_3 &= -0,5 (\omega_z\lambda_0 + \omega_y\lambda_1 + \omega_x\lambda_2). \end{aligned}$$

Динаміка зміни параметрів кватерніона у випадку, коли кватерніон характеризує взаємне положення зв'язаних з ЛА осей  $XYZ$  і оберткових навігаційних осей  $NHE$ , описується рівняннями

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{x\Sigma} & -\omega_{y\Sigma} & -\omega_{z\Sigma} \\ \omega_{x\Sigma} & 0 & \omega_{z\Sigma} & -\omega_{y\Sigma} \\ \omega_{y\Sigma} & -\omega_{z\Sigma} & 0 & \omega_{x\Sigma} \\ \omega_{z\Sigma} & \omega_{y\Sigma} & -\omega_{x\Sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

У свою чергу

$$\omega_{x\Sigma} = \omega_{xЛА} - \omega_{xNHE}; \quad \omega_{y\Sigma} = \omega_{yЛА} - \omega_{yNHE}; \quad \omega_{z\Sigma} = \omega_{zЛА} - \omega_{zNHE},$$

де  $\omega_{yЛА}, \omega_{xЛА}, \omega_{zЛА}$  – проекції кутової швидкості ЛА відносно інерціального простору на осі зв'язаної системи координат, вимірювані датчиками кутових швидкостей;

$\omega_{xNHE}, \omega_{yNHE}, \omega_{zNHE}$  – проекції кутової швидкості навігаційної системи координат відносно інерціального простору на осі зв'язаної системи координат, що визначаються в результаті розв'язання матричного рівняння

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_{NHE}} \\ \omega_{y_{NHE}} \\ \omega_{z_{NHE}} \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} \omega_{N_V} + \Omega_N \\ \omega_{H_V} + \Omega_H \\ \omega_{E_V} + \Omega_E \end{bmatrix}.$$

Ці складові розраховуються й у раніше розглянутих алгоритмах.

У скалярній формі рівняння (8.18) мають вигляд:

$$\dot{\lambda}_0 = -0,5(\omega_{x\Sigma}\lambda_1 + \omega_{y\Sigma}\lambda_2 + \omega_{z\Sigma}\lambda_3);$$

$$\dot{\lambda}_1 = -0,5(\omega_{x\Sigma}\lambda_0 + \omega_{z\Sigma}\lambda_2 + \omega_{y\Sigma}\lambda_3);$$

$$\dot{\lambda}_2 = -0,5(\omega_{y\Sigma}\lambda_0 + \omega_{z\Sigma}\lambda_1 + \omega_{x\Sigma}\lambda_3);$$

$$\dot{\lambda}_3 = -0,5(\omega_{z\Sigma}\lambda_0 + \omega_{y\Sigma}\lambda_1 + \omega_{x\Sigma}\lambda_2).$$

Матрицю  $B$  перерахування зі зв'язаної в географічну систему координат можна також отримати шляхом перемноження двох матриць, з яких одна перераховує зі зв'язаних у інерціальні осі, друга – з інерціальних у географічні. Кожна з двох матриць також обчислюється на основі параметрів Родрига-Гамільтона, які у свою чергу визначаються чисельним алгоритмом другого порядку, побудованим на основі методу послідовних наближень Пікара:

$$B = C^T A;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \end{bmatrix};$$

$$\lambda_0^{(k+1)} = \lambda_0^{(k)} - \lambda_0^{(k)} e/8 - 0,5(\lambda_1^{(k)} \Delta\beta_x + \lambda_2^{(k)} \Delta\beta_y + \lambda_3^{(k)} \Delta\beta_z); \quad (8.19)$$

$$\lambda_1^{(k+1)} = \lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k)} e/8 - 0,5(\lambda_0^{(k)} \Delta\beta_x + \lambda_3^{(k)} \Delta\beta_y + \lambda_2^{(k)} \Delta\beta_z);$$

$$\lambda_2^{(k+1)} = \lambda_2^{(k)} - \lambda_2^{(k)} e/8 - 0,5(\lambda_3^{(k)} \Delta\beta_x + \lambda_0^{(k)} \Delta\beta_y + \lambda_1^{(k)} \Delta\beta_z);$$

$$\lambda_3^{(k+1)} = \lambda_3^{(k)} - \lambda_3^{(k)} e/8 - 0,5(\lambda_2^{(k)} \Delta\beta_x + \lambda_1^{(k)} \Delta\beta_y + \lambda_0^{(k)} \Delta\beta_z),$$

$$\text{де } e = \Delta\beta_x^2 + \Delta\beta_y^2 + \Delta\beta_z^2;$$

$$\Delta\beta_x = \int_{t_k}^{t_k+1} \omega_{x_{ЛА}} dt; \quad \Delta\beta_y = \int_{t_k}^{t_k+1} \omega_{y_{ЛА}} dt; \quad \Delta\beta_z = \int_{t_k}^{t_k+1} \omega_{z_{ЛА}} dt;$$

$\Delta\beta_x, \Delta\beta_y, \Delta\beta_z$  – збільшення інтегралів від проекцій абсолютної кутової швидкості ЛА на осі чутливості гіроскопів (показання датчиків кутової швидкості БІНС, які вимірюють не проекції кутових швидкостей, а збільшення кутів повороту навколо своїх осей чутливості, тобто показання інтегруючих датчиків кутової швидкості):

$$C = \begin{bmatrix} 1 - 2(\mu_2^2 + \mu_3^2) & 2(\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_3) & 2(\mu_1\mu_3 + \mu_0\mu_2) \\ 2(\mu_1\mu_2 + \mu_0\mu_3) & 1 - 2(\mu_1^2 + \mu_3^2) & 2(\mu_2\mu_3 - \mu_0\mu_1) \\ 2(\mu_1\mu_3 - \mu_0\mu_2) & 2(\mu_2\mu_3 + \mu_0\mu_1) & 1 - 2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \end{bmatrix};$$

$$\mu_0^{(k+1)} = \mu_0^{(k)} - 0,5(\mu_1^{(k)} \Omega_x + \mu_2^{(k)} \Omega_y + \mu_3^{(k)} \Omega_z) dt;$$

$$\mu_1^{(k+1)} = \mu_1^{(k)} - 0,5(\mu_0^{(k)} \Omega_x + \mu_3^{(k)} \Omega_y + \mu_2^{(k)} \Omega_z) dt;$$

$$\mu_2^{(k+1)} = \mu_2^{(k)} - 0,5(\mu_3^{(k)} \Omega_x + \mu_0^{(k)} \Omega_y + \mu_1^{(k)} \Omega_z) dt;$$

$$\mu_3^{(k+1)} = \mu_3^{(k)} - 0,5(\mu_2^{(k)} \Omega_x + \mu_1^{(k)} \Omega_y + \mu_0^{(k)} \Omega_z) dt,$$

де  $\Omega_x = \omega_{N_V} + \Omega_N; \Omega_y = \omega_{H_V} + \Omega_H; \Omega_z = \omega_{E_V} + \Omega_E$  – проекції абсолютної кутової швидкості географічного базису на його осі.

До переваг цього методу побудови матриці орієнтації відноситься гарантована ортогональність матриці орієнтації, обчисленої за співвідношеннями (8.19). Крім цього, практика показує, що обчислення з використанням параметрів Родрига-Гамільтона дає найменші обчислювальні витрати в порівнянні з іншими методами за умови забезпечення однакових точностних характеристик. Разом з тим, визначення матриці  $B$  через параметри Родрига-Гамільтона призводить до необхідності рішення двох однотипних систем лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку кожна.

За елементами матриці  $B$  відповідно до (8.17) визначаються кути орієнтації ЛА: крен  $\gamma$ , тангаж  $\vartheta$ , рискання (курс)  $\psi$ :

Після знаходження матриці  $B$  система рівнянь для проведення навігаційних розрахунків замикається.

Алгоритм проведення навігаційних розрахунків у випадку формування матриці напрямних косинусів безпосередньо за кутами  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  можна представити у вигляді (8.20)...(8.28). У випадку недостатньої швидкодії бортового процесора навігаційного обчислювача алгоритм роботи БНС може бути розділений за необхідною швидкістю розрахунку (за тривалістю періоду дискретизації) на два або навіть на три рівні, що характеризують відповідно швидкий, середній і повільний темпи розрахунків.

#### Швидкий темп

$$\begin{aligned}\omega_{y\Sigma} &= \omega_{yJA} - \omega_{yNHE}; \\ \omega_{x\Sigma} &= \omega_{xJA} - \omega_{xNHE}; \\ \omega_{z\Sigma} &= \omega_{zJA} - \omega_{zNHE}.\end{aligned}\quad (8.20)$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (\omega_{y\Sigma} \cos \gamma - \omega_{z\Sigma} \sin \gamma) \sec \vartheta; \\ \dot{\gamma} &= \omega_{x\Sigma} + \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{z\Sigma} \sin \gamma - \omega_{y\Sigma} \cos \gamma); \\ \dot{\vartheta} &= \omega_{y\Sigma} \sin \gamma + \omega_{z\Sigma} \cos \gamma; \\ \psi_{\Gamma} &= -\psi.\end{aligned}\quad (8.21)$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \sin \psi \cos \gamma + \sin \psi \cos \vartheta \sin \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

#### Середній темп

$$\begin{bmatrix} a_N \\ a_H \\ a_E \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a_{xJA} \\ a_{yJA} \\ a_{zJA} \end{bmatrix}. \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_E &= a_E - V_N(\omega_{H_V} + 2\Omega_H) + V_H(\omega_{N_V} + 2\Omega_N); \\ \dot{V}_H &= a_H - V_E(\omega_{N_V} + 2\Omega_N) + V_N\omega_{E_V} + g_H; \\ \dot{V}_N &= a_N - V_H\omega_{E_V} + V_E(\omega_{H_V} + 2\Omega_H).\end{aligned}\quad (8.24)$$

#### Повільний темп

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \frac{V_E}{(R_2 + H) \cos B}; \\ \dot{B} &= \frac{V_N}{R_1 + H}; \\ \dot{H} &= V_H.\end{aligned}\quad (8.25)$$

$$\begin{aligned}\omega_{E_V} &= -\dot{B}; \\ \omega_{H_V} &= \dot{L} \sin B; \\ \omega_{N_V} &= \dot{L} \cos B; \\ \Omega_N &= \Omega_3 \cos B; \\ \Omega_H &= \Omega_3 \sin B.\end{aligned}\quad (8.26)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{xNHE} \\ \omega_{yNHE} \\ \omega_{zNHE} \end{bmatrix} = B^T \begin{bmatrix} \omega_{N_V} + \Omega_N \\ \omega_{H_V} + \Omega_H \\ \omega_{E_V} + \Omega_E \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(R_1 + H)} &\approx \frac{1}{a} \left[ 1 - e^2 - \frac{H}{a} - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B \right]; \\ \frac{1}{(R_2 + H)} &\approx \frac{1}{a} \left[ 1 - \frac{H}{a} - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B \right]; \\ g_H &= -g \left( 1 + 5,2884 \cdot 10^{-3} \sin^2 B \right) \left[ 1 - \frac{2H}{a} (1 - e \sin^2 B) \right].\end{aligned}\quad (8.28)$$

У наведених алгоритмах не реалізуються алгоритми виставлення БНС і алгоритми калібрування датчиків первинної інформації.

### Контрольні питання

1. Як у БНС при відсутності гіроплатформи визначаються прискорення в навігаційній системі координат?

2. Що можна віднести до числа потенційних переваг БНС у порівнянні з платформними ІНС?

3. Які принципові труднощі виникають при створенні високоточних БНС?

4. Які, залежно від способу визначення кутового положення об'єкта в інерціальному просторі, можливі варіанти схем БНС?

5. Яка загальноновизнана схема БНС зазвичай встановлюється на пілотованих ЛА?

6. Який характер у визначенні координати має похибка БНС, що обумовлена похибкою акселерометрів?

7. Який характер у визначенні координати має похибка БНС, що обумовлена похибкою вимірників кутової швидкості?

8. Які складові необхідно виключити із сигналів уявного прискорення, що вимірюють акселерометри, і як вплив цих складових компенсується в БНС на відміну від платформної ІНС?

9. Навіщо в алгоритмах БНС обчислюється матриця напрямних косинусів?

10. Які параметри (проекції векторів кутових швидкостей) зазвичай залучають при розрахунках параметрів матриці напрямних косинусів?

11. За якими способами може бути отримана матриця напрямних косинусів?

12. Які переваги кватерніонного методу побудови матриці орієнтації (матриці напрямних косинусів)?

13. Яким чином, маючи матрицю напрямних косинусів, можна отримати інформацію про кути орієнтації ЛА?

14. На які рівні може бути розділений за необхідною швидкістю розрахунків алгоритм роботи БНС у випадку недостатньої швидкодії бортового процесора навігаційного обчислювача?