Глава 3. Алгоритми розв'язання навігаційних задач і оцінки навігаційних параметрів

3.1. Навігаційні задачі та методи їх розв'язання

Навігаційною задачею в СНС прийнято називати задачу визначення вектора стану споживача – просторово-часових координат споживача та складових його швидкості. В результаті розв'язання навігаційної задачі повинні бути знайдені просторові координати споживача, виправлення до шкали часу споживача відносно системної шкали часу СНС і складові вектора швидкості споживача.

У режимі спостереження (фільтрації) в апаратурі споживача реалізується безперервне і точне вимірювання інформаційних параметрів радіосигналу конкретного НС (затримки і доплерівського зсуву частоти – *радіонавігаційних параметрів* сигналу). Геометричні параметри, які відповідають радіонавігаційним, прийнято називати *навігаційними параметрами*. Так, затримці сигналу τ відповідає дальність до НС $R = c\tau$, де c – швидкість світла; доплерівському зсуву частоти $f_{\text{доп}}$ відповідає радіальна швидкість зближення $V_r = \lambda f_{\text{доп}}$, де λ – довжина хвилі випромінюваного НС сигналу. А, виділяючи із сигналу навігаційного повідомлення супутника дані альманаху й ефемерид, в апаратурі споживача виникає можливість визначення поточних координат конкретного НС.

Для розв'язання навігаційної задачі, тобто для знаходження вектора стану споживача використовують *навігаційні функції* , які визначають функціональний зв'язок між навігаційними параметрами та компонентами вектора споживача.

У відкритому просторі (у геоцентричній системі координат) геометричне місце точок з однаковим значенням R (дальності до НС) утворює *поверхню положення* у вигляді сфери з радіусом R і центром, співпадаючим з фазовим центром передавальної антени НС. При перетинанні двох поверхонь положення створюється *лінія положення* – сукупність точок, які мають обидва значення навігаційного параметра R. Зокрема, перетинання двох сфер дає лінію положення у вигляді окружності, у кожній із точок якої може знаходитися споживач. Перетинання лінії положення і ще однієї поверхні положення конкретизує місце розташування об'єкта у певні моменти часу. Таким чином, місце розташування об'єкта визначається координатами перетину трьох поверхонь положення, які є геометричним місцем точок з однаковим значенням навігаційного параметра. В загальному випадку лінія положення у вигляді окружності перетинається зі сферичною поверхнею положення в двох точках, що викликає неоднозначність визначення координат споживача. Усунути неоднозначність можна введенням ще однієї лінії положення, або вказавши орієнтоване місце розташування споживача.

Навігаційні функції визначаються за допомогою різновидів далекомірних і різницево-далекомірних методів.

3.1.1. Далекомірний метод

У найбільш простому далекомірному методі навігаційним параметром є дальність R_i між i-им НС і споживачем, а поверхні положення – сфери з радіусом R_i і центром, співпадаючим з фазовим центром передавальної антени i-го супутника

$$R_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \; .$$

Тут R_i – дальність між i-им супутником і споживачем, яка обчислена за умови вимірюваної затримки радіосигналу τ_i; x_i, y_i, z_i, – відомі на момент вимірювання прямокутні координати i-го супутника в геоцентричній системі координат (з урахуванням його переміщення на час поширення сигналу); x, y, z, – шукані прямокутні координати споживача в тій же геоцентричній системі координат.

Місцеположення об'єкта визначається координатами перетинання трьох поверхонь положення, описуваних даним рівнянням. Для споживача, який знаходиться на поверхні Землі, лінія положення від одного НС є лінією (при визначених допущеннях – окружністю) перетинання сфери з радіусом R_1 і поверхні земного геоїда, яка у даному випадку може бути прийнята за одну з поверхонь положення. У випадку з двома НС наземний споживач може знаходитися в одній із двох точок перетинання двох ліній положення. Неоднозначність, яка виникає, усувається знанням орієнтованих координат споживача або вимірюванням дальності до третього НС.

Для авіаційних споживачів СНС земна поверхня не може бути прийнята за одну з поверхонь положення. Тоді, у випадку орієнтованого знання координат, координати літака x, y, z визначаються координатами перетинання трьох сфер, тобто необхідно виміряти дальності R_i до трьох НС (i = 1..3) і тоді навігаційну функцію можна записати як систему з трьох рівнянь:

$$R_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2;$$
$$R_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2;$$
$$R_3^2 = (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2,$$

де x_i, y_i, z_i (i = 1..3) – координати трьох супутників.

У випадку з абсолютною невизначеністю попередніх координат літака необхідне вимірювання дальностей до чотирьох супутників.

Якщо врахувати, що деякі супутники в різні моменти часу можуть розташовуватися близько до лінії радіогоризонту, що надзвичайно невигідно з точки зору приймання радіосигналів і точності вимірювань, або бути несправними, то стає безсумнівним необхідність перебування в зоні видимості авіаційного споживача як мінімум 5...6 супутників, що й обумовлює існуючі орбітальні структури систем ГЛОНАСС і *NAVSTAR*.

У даному методі передбачається, що всі необхідні для проведення обчислень величини взяті в єдиний момент часу. Однак, координати супутника прив'язані до бортової шкали часу НС, а споживач вимірює затримку радіосигналу у своїй шкалі часу. При наявності розбіжності Δt шкал часу виникають похибки вимірювання дальностей $\Delta R = c\Delta t$ і, як наслідок, проблеми з точністю визначення координат споживача. Зблизити синхронізацію шкал часу можна при використанні споживачем еталона часу і частоти, який періодично звіряється із системним еталоном. Але на практиці цей метод не реалізується через складність і дорожнечу такого обладнання і застосовується лише на станціях спостереження командно-вимірювального комплексу сегмента керування СНС і на контрольно-коригувальних станціях диференціальних підсистем СНС (функціональне доповнення до СНС, яке істотно збільшує точність визначення координат до одиниць і часток сантиметра).

Тому в даний час більш широко застосовують псевдодалекомірний метод.

3.1.2. Псевдодалекомірний метод

Розбіжність шкал Δt на час проведення вимірювань можна вважати величиною постійною. Тому при вимірі дальності до i-го НС одержують псевдодальність $R_{\text{вим } i}$, яка відрізняється від справжньої дальності R_i на невідому, але сталу на час визначення навігаційних параметрів величину ΔR . Таким чином, для псевдодальності до i-го НС можна записати

$$R_{\text{вим } i} = R_i + \Delta R = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + \Delta R\ .$$

У псевдодалекомірних методах поверхнею положення як і раніше є сфера, але радіус цієї сфери змінений на невідому величину ΔR. Вимірювання псевдодальностей до трьох супутників призводить до системи рівнянь з чотирма невідомими ($x, y, z, \Delta R$). Для усунення невизначеності, яка виникає, необхідно провести додаткові вимірювання, тобто виміряти псевдодальність до четвертого супутника. Отримана в такий спосіб система чотирьох рівнянь

$$R_{\text{вим}1} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} + \Delta R;$$
$$R_{\text{вим}2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} + \Delta R;$$
$$R_{\text{вим}3} = \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} + \Delta R;$$
$$R_{\text{вим}4} = \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2 + (z_4 - z)^2} + \Delta R$$

має точне рішення, і, отже, координати споживача визначаються як точка перетинання чотирьох поверхонь положення. При цьому як і раніше залишається просторова невизначеність, від якої намагаються позбавитися за допомогою апріорного знання або попереднього обчислення координат.

При обчисленні постійної похибки ΔR споживач одночасно знаходить величину розбіжності $\Delta t = \Delta R / c$ між бортовою шкалою часу НС і шкалою часу споживача, що дозволяє здійснювати в приймачі споживача часову синхронізацію. Цей ефект дозволяє спростити апаратуру споживачів, що й обумовлює широке застосування псевдодалекомірного методу.

3.1.3. Різницево-далекомірний метод

Різницево-далекомірний метод заснований на вимірюванні різниці дальностей від споживача до i-го НС. Метод аналогічний псевдодалекомірному методу і його застосовують при наявності в далекомірних вимірюваннях невідомих зсувів ΔR. Різницево-далекомірний метод використовує три різниці $\Delta R_{ij} = R_{\text{вим}\,i} - R_{\text{вим}\,j}$ до чотирьох НС, оскількио при сталості ΔR на час навігаційних визначень різниці псевдодальностей дорівнюють різниці справжніх дальностей, для визначення яких потрібно мати три незалежних рівняння. Навігаційним параметром є ΔR_{ij}.

Поверхні положення визначаються за умови $\Delta R_i = \text{const}$ і являють собою поверхні двопорожнечого гіперболоїда обертання, фокусами яких є координати опорних точок i і j (центрів мас i-го і j-го НС). Відстань між опорними точками називають базою вимірювальної системи. Якщо відстані від опорних точок до споживача великі в порівнянні з розмірами бази, то гіперболоїд обертання в області точки споживача практично збігається зі своєї асимптотою – конусом, вершина якого збігається із серединою бази.

Точність визначення координат споживача при використанні цього методу така ж, як і псевдодалекомірного. Недоліком методу є неможливість визначення зсуву шкали часу споживача.

3.1.4. Радіально-швидкісний (доплерівський) метод

Радіально-швидкісний (доплерівський) метод заснований на вимірюванні радіальних швидкостей переміщення трьох НС відносно споживача. Фізичною основою методу є залежність радіальної швидкості переміщення споживача відносно НС від координат споживача і НС, а також від швидкостей споживача і НС. Диференціюючи рівняння поверхні положення далекомірного способу за часом, одержуємо

$$\dot{R}_i = \left[(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})\right] / R_i .$$

Тут компоненти $(\dot{x}_i - \dot{x}), (\dot{y}_i - \dot{y}), (\dot{z}_i - \dot{z})$ характеризують вектор відносної швидкості; R_i – відносні координати.

Таким чином, для визначення компонентів вектора швидкості споживача необхідно знати: вектори координат і швидкості трьох НС, а також координати споживача. Останні можна одержати, якщо вимірювати радіальні швидкості $\dot{R}_i$ протягом деякого часу Δt, а потім обчислити інтеграл.

На практиці для вимірювання радіальних швидкостей використовується доплерівській зсув частоти.

Недоліком даного методу є, по-перше, необхідність наявності високостабільного еталона частоти у споживача, оскільки будь-яка нестабільність частоти призводить до неконтрольованої зміни доплерівського зсуву частоти, і, як наслідок, до додаткових похибок вимірювання складових швидкості. По-друге, неможливість вимірювання координат у реальному масштабі часу. Крім того, у середньовисотних СНС повільні зміни радіальної швидкості призводять до малих значень різниць в алгоритмах навігаційних обчислень і, як наслідок, до зниження точності обчислень. Тому радіально-швидкісний метод використовується тільки для визначення складових швидкості споживача.

3.1.5. Псевдодоплерівський метод

Псевдодоплерівський метод аналогічний псевдодалекомірному при визначенні координат споживача і дозволяє визначити вектор швидкості споживача при наявності невідомого зсуву частоти сигналу, наприклад, через нестабільність еталона частоти. При наявності такого зсуву $\Delta \dot{R}$ вираз для радіальних швидкостей можна записати у вигляді двох доданків

$$\dot{R}_{\text{вим}\,i} = \dot{R}_i + \Delta\dot{R} = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{Д_i} + \Delta\dot{R} .$$

Для знаходження вектора швидкості споживача і виправлення $\Delta\dot{R} = \lambda\Delta f_{\text{доп}}$ необхідно провести вимірювання за чотирма НС і розв'язати систему з чотирьох рівнянь. Для її розв'язання необхідні знання дальностей R_i і координат (x, y, z) споживача. Ця інформація може бути отримана, наприклад, із псевдодалекомірних вимірювань.

3.1.6. Різницево-радіально-швидкісний метод

Сутність даного методу полягає у визначенні трьох різниць $\Delta\dot{R}_{ij} = \dot{R}_i - \dot{R}_j$ двох радіальних швидкостей НС. При цьому різниці можна обчислювати відносно одного або відносно різних НС. При обчисленні різниць можна використовувати й псевдорадіальні швидкості $\dot{R}_{\text{вим}\,i}$, оскільки при такому відніманні компенсується невідомий зсув $\Delta\dot{R}$ (у припущенні, що зсув однаковий для різних супутників). Навігаційні параметри отримають у вигляді

$$\Delta\dot{R}_i = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{R_i} - \frac{(x_j - x)(\dot{x}_j - \dot{x}) + (y_j - y)(\dot{y}_j - \dot{y}) + (z_j - z)(\dot{z}_j - \dot{z})}{R_j}.$$

Поверхні положення являють собою поверхні тіл обертання, фокусами яких є координати центрів мас i-го і j-го НС.

Так само як і для далекомірних методів, точність визначення складових вектора швидкості в цьому методі співпадає з точністю визначення тих же складових у псевдорадіальному методі.

Достоїнством методу є його нечутливість до нестабільності еталонів частоти.

3.1.7. Комбіновані методи

Комбіновані методи використовують, крім інформації від супутникової системи додаткову інформацію від вимірників координат, які є у споживача. Так, у далекомірному методі при наявності на борту ЛА високоточної системи вимірювання висоти польоту H, сфера з радіусом $R_з$ +Н (де $R_з$ = 6371116 м – радіус сфери, рівновеликої земному геоїду) може бути прийнята за додаткову поверхню положення. У цьому випадку можна замість вимірювань трьох дальностей до НС обмежитися вимірюванням двох дальностей, тоді навігаційна функція буде включати два рівняння сфери, а третє необхідне рівняння дає вимірник висоти

$$(R_з + H)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Інший аспект використання комбінованих методів зводиться до заміни сукупності одночасних вимірювань на комбінацію одночасних і послідовних вимірювань або на сукупність тільки послідовних вимірювань, наприклад, визначення координат споживача різницево-швидкісним методом.

3.2. Алгоритми оцінки навігаційних параметрів

В результаті первинної обробки радіонавігаційних сигналів оцінюються (вимірюються) радіонавігаційні параметри (затримка $\hat{\tau}_i$ і доплерівський зсув частоти $\hat{f}_{\text{доп}\,i}$) для кожного з НС ($i = \overline{1,4}$) обраного сузір'я. Радіонавігаційні параметри зв'язані з параметрами споживача через навігаційні функції. В існуючих СНС в основному використовуються псевдодалекомірні методи визначення координат і псевдорадіально-швидкісний метод визначення складових швидкості споживача. Для реалізації цих методів вимірюють радіонавігаційні параметри відносно чотирьох НС, а як навігаційні функції використовують співвідношення, що наведені в п.3.1.

Для розв'язання нелінійних рівнянь, які визначають навігаційні функції, можна застосовувати як прямі, так і ітераційні алгоритми розв'язання нелінійних задач.

Прямі алгоритми можна використовувати для початкового визначення вектора стану споживача і вони дають практично точний розв'язок системи, складеної з i-х рівнянь з i-ми невідомими.

3.2.1. Ітераційні алгоритми визначення координат

Ітераційні алгоритми можна використовувати для уточнення апріорних значень координат споживача шляхом знаходження поправок до них у процесі послідовних наближень.

Суть ітераційних алгоритмів розв'язання систем з n рівнянь

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = 0, \tag{3.1}$$

де $\mathbf{u}$ - вектор розмірності n, полягає в наступному. Рівняння (3.1) приводять до вигляду

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u}). \tag{3.2}$$

Вибирають деяке початкове наближення $\mathbf{u}^{(0)}$ й обчислюють послідовні наближення

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = \varphi(\mathbf{u}^{(j)});\quad j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{3.3}$$

Ітераційний процес продовжується до досягнення необхідної точності рішення.

Є багато способів приведення рівняння (3.1) до вигляду (3.2). Широко використовується метод Ньютона, як швидкозбіжний і найбільш просто реалізований. У цьому методі функцію $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ розкладають у ряд у точці $\mathbf{u}^{(j)}$ з використанням лише лінійного члена розкладання

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}^{(j)}) + \left[\frac{\partial \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}^{(j)})}{\partial \mathbf{u}}\right]^{\mathrm{T}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(j)}) = 0 \ ,$$

де $$\frac{\partial \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}^{(j)})}{\partial \mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} . \qquad (3.4)$$

Тут і далі вважається, що похідна від скаляра $f(\mathbf{x})$ за вектором $\mathbf{x}$ є вектор – стовпець $\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_{21}} & \cdots & \frac{df}{dx_n} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Враховуючи, що матриця $\partial \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}^{(j)}) / \partial \mathbf{u}$ невироджена, отримаємо рівняння типу (3.3)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(j)} - \left[\frac{\partial \mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{u}^{(j)})}{\partial \mathbf{u}}\right]^{-\mathrm{T}} \mathbf{h}(\mathbf{u}^{(j)}) . \qquad (3.5)$$

Обчислене в такий спосіб значення $\mathbf{u}$ приймають за нове значення ітераційної процедури, тобто $\mathbf{u}^{(j+1)} = \mathbf{u}$.

Найбільш часто ітераційні алгоритми визначення координат використовують у псевдодалекомірному методі, де визначуваними параметрами є $\mathbf{u} = \mathbf{x} = \begin{vmatrix} x & y & z & \Delta R \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$; вихідними даними – координати НС x_i, y_i, z_i; $i = \overline{1,4}$; початкові наближення координат споживача – $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, $\Delta R^{(0)}$, які обмірювані на етапі первинної обробки дальності $\tilde{R}_{\text{вим}\,i}$ $(i = \overline{1,4})$ до чотирьох НС

$$\tilde{R}_{\text{вим}\ i} = R_{\text{вим}\ i} + h_i \ , \qquad (3.6)$$

де $R_{\text{вим}\ i} = R_i + \Delta R$;

$$R_i = (\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_1 - z)^2} \ . \qquad (3.7)$$

Функція h_i визначається у вигляді $h_i(x, y, z, \Delta R) = \tilde{R}_{\text{вим}\ i} - R_{\text{вим}\ i}$.

Тоді, вводячи вектори

$\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} = \begin{vmatrix} \tilde{R}_{\text{вим}1} \tilde{R}_{\text{вим}2} \tilde{R}_{\text{вим}3} \tilde{R}_{\text{вим}4} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{R}_{\text{вим}} = \begin{vmatrix} R_{\text{вим}1} R_{\text{вим}2} R_{\text{вим}3} R_{\text{вим}4} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$

для похідної (3.4), можна записати

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{T}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial \mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \ , \qquad (3.8)$$

а рівняння (3.5) при $\mathbf{u} \to \mathbf{x}$ перетворити до вигляду

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(j)} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\mathbf{x}^{(j)})}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-\mathrm{T}} (\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} - \mathbf{R}_{\text{вим}}(\mathbf{x}^{(j)})) \ . \qquad (3.9)$$

Елементи матриці $\partial \mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}} / \partial \mathbf{x}$ визначаються формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\text{вим}\ i}(x, y, z, \Delta R)}{\partial x} &= -\frac{x_i - x}{R_i} = -\cos\alpha_i; \\ \frac{\partial R_{\text{вим}\ i}(x, y, z, \Delta R)}{\partial y} &= -\frac{y_i - y}{R_i} = -\cos\beta_i; \\ \frac{\partial R_{\text{вим}\ i}(x, y, z, \Delta R)}{\partial z} &= -\frac{z_i - z}{R_i} = -\cos\gamma_i; \\ \frac{\partial R_{\text{вим}_i}(x, y, z, \Delta R)}{\partial \Delta R} &= 1, \end{aligned} \qquad (3.10)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – напрямні косинуси радіуса-вектора, що з'єднує споживача та *i*-ий НС.

Для нульового наближення $x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \Delta R^{(0)}$ координат споживача $R_{\text{вим}\ i}$ ($x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \Delta R^{(0)}$) обчислюють за формулою (3.7), а за формулою (3.10) елементи матриці похідних (3.8). Далі за формулою (3.9) знаходять перші наближення $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, \Delta R^{(1)}$, що використовують як початкові для другого наближення. Потім уся процедура повторюється. Обчислення закінчуються, коли виконуються умови

$$|x^{(j+1)}-x^{(1)}|\le\delta_x;\ |y^{(j+1)}-y^{(1)}|\le\delta_y;$$

$$|z^{(j+1)}-z^{(1)}|\le\delta_z\ ;|\Delta R^{(j+1)}-\Delta R^{(1)}|\le\delta_{\Delta R},$$

де $\delta_x,\delta_y,\delta_z,\delta_{\Delta R}$ – задані похибки обчислення координат.

3.2.2. Визначення координат при надмірності вимірювань

Ітераційний алгоритм визначення координат (3.5) отриманий у припущенні, що матриця $\partial\mathbf{h}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^{(j)})/\partial\mathbf{x}$ невироджена. У навігаційних задачах це означає, що кількість визначальних параметрів споживача повинна дорівнювати кількості вимірювань. У розглянутому вище прикладі визначалося чотири параметри споживача (*x, y, z,* ΔR) і використовувалися виміри псевдодальностей до чотирьох НС. У той же час споживач може працювати в умовах, коли в зоні видимості знаходиться більш чотирьох НС, і в приймальній апаратурі можна отримати більшу кількість вимірювань $N > 4$. Зрозуміло, що обробка більшої кількості вимірювань підвищує точність, тому бажано мати алгоритм визначення координат споживача при надмірності вимірювань.

Такий алгоритм може бути знайдений при розв'язанні задачі оцінювання за методом найменших квадратів.

Суть методу найменших квадратів така. Існує вектор вимірювань $\mathbf{y}$ розмірністю *N*, який лінійно залежить від вектора постійних оцінюваних параметрів $\mathbf{x}$ розмірністю *n,* тобто

$$\mathbf{y} = \mathbf{Hx} + \boldsymbol{\eta}, \tag{3.11}$$

де $\boldsymbol{\eta}$ – вектор похибок вимірювань.

Ставиться задача знаходження такої оцінки $\hat{\mathbf{u}}$ параметрів, яка мінімізує квадратичну форму

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2=(\mathbf{y}-\mathbf{Hx})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{Hx})\ . \tag{3.12}$$

Розв'язання задачі здійснюємо шляхом прямого диференціювання $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ за $\mathbf{x}$ і прирівнюванням до нуля отриманої похідної

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^2}{\partial\mathbf{x}}=-2\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{Hx})\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}=0\,.$$

Вважаючи, що матриця $(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})$ невироджена, знаходимо розв'язок даного рівняння

$$\hat{\mathbf{x}}=(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\,. \tag{3.13}$$

Розв'язок(3.13) є необхідною та достатньою умовою мінімуму квадратичної форми (3.12).

Застосуємо дану процедуру до задачі навігаційних визначень при використанні псевдодалекомірного методу. У цьому методі виміряються псевдодальності $\tilde{R}_{\text{вим}i};\ i=\overline{1,N}$ до *N* супутників (3.6), а визначенню підлягає вектор $\mathbf{x}=|\,x,y,z,\Delta R\,|^{\mathrm{T}}$.

Об'єднаємо усі виміри $\tilde{R}_{\text{вим}\,i}$ в одне векторне

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}}=\mathbf{R}_{\text{вим}}(\mathbf{x})+\boldsymbol{\eta}\ . \tag{3.14}$$

Нехай $\hat{\mathbf{x}}_0$ – деяке початкове наближення шуканого вектора $\mathbf{x}$. Розкладемо функцію $\mathbf{R}_{\text{вим}}(\mathbf{x})$ в ряд у точці $\hat{\mathbf{x}}_0$ й обмежимося лінійними членами розкладання

$$\mathbf{R}_{\text{вим}}(\mathbf{x})=\mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)+\left[\frac{\partial\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_0)\ . \tag{3.15}$$

Визначимо в якості вектора вимірювань $\mathbf{y}$ (див. формулу (3.11)) різницю

$$\mathbf{y}=\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}}-\mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)+\left[\frac{\partial\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}_0\ .$$

Підставивши (3.15) у (3.14), з урахуванням (3.13) запишемо

$$\mathbf{y}=\left[\frac{\partial\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta}\,.$$

Зіставляючи дане співвідношення з (3.11), отримаємо для даної задачі співвідношення для матриці $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}=\left[\partial\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)/\partial\mathbf{x}\right]^{\mathrm{T}}\ . \tag{3.16}$$

Тепер задача навігаційних визначень у вигляді (3.11) цілком формалізована. Тому, використовуючи розв'язок (3.13) цієї задачі за методом найменших квадратів і переходячи до початкових позначень, одержимо

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} - \mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_0\right) = \\ = \hat{\mathbf{x}}_0 + \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} - \mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)\right), \tag{3.17}$$

де $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ – матриця, яка визначається відповідно до (3.16) у точці $\hat{\mathbf{x}}_0$ оцінних значень координат споживача, а її компоненти обчислюються аналогічно тому, як це було зроблено в (3.10); $\hat{\mathbf{x}}_0$ – початкова оцінка вектора споживача; $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}}$ – виміри псевдодальностей до НС, які отримані на етапі первинної обробки; $\mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ – розрахункові дальності до НС, які обчислені для оцінних значень $\hat{\mathbf{x}}_0$ координат споживача згідно з формулою (3.7), а саме

$$R_{\text{вим}\ i}(\hat{\mathbf{x}}_0) = R_i(\hat{\mathbf{x}}_0) + \Delta\hat{R}; \\ R_i(\hat{\mathbf{x}}_0) = (\sqrt{x_i - \hat{x}_0)^2 + (y_i - \hat{y}_0)^2 + (z_1 - \hat{z}_0)^2}, \tag{3.18}$$

де $x_i, y_i, z_i,$ – координати i-го НС.

Рівняння (3.17) дозволяє визначити оцінку $\hat{\mathbf{x}}$ вектора споживача, маючи початкове грубе наближення $\hat{\mathbf{x}}_0$ і виміри псевдодальностей $\tilde{R}_{\text{изм}\,i}$ за N навігаційних супутників.

Якщо кількість вимірюваннях збігається з кількістю шуканих параметрів і матриця $\mathbf{H}$ невироджена, то рівняння (3.15) наймає вигляду

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{H}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} - \mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)\right), \tag{3.19}$$

тобто цілком співпадає з (3.9).

При нерівноточних вимірах у (3.11), обумовлених кореляційною матрицею $\mathbf{M}\{\eta\eta^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{R}_\eta$, для отримання оптимальних оцінок замість (3.12) використовується квадратична форма вигляду

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\eta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}),$$

а вирази (3.13) для оптимальної оцінки набувають вигляду

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\eta^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\eta^{-1}\mathbf{y}.$$

Аналогічним чином змінюється і рівняння (3.19)

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_0 + \left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\eta^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\eta^{-1}\left(\tilde{\mathbf{R}}_{\text{вим}} - \mathbf{R}_{\text{вим}}(\hat{\mathbf{x}}_0)\right).$$

Для реалізації алгоритму (3.18) необхідна інформація про координати супутників на момент проведення обчислень. Таку інформацію одержують при обробці ефемеридної інформації, яка доступна споживачу після дешифрування навігаційних даних.

3.3. Алгоритми обробки ефемеридної інформації

3.3.1. Алгоритм розрахунку вектора стану супутників на основі неоперативної інформації

Алгоритм грубого розрахунку параметрів руху супутників за даними альманаху використовується для вибору оптимального сузір'я та розрахунків цілевказівок для пошуку радіосигналу обраного НС. Алгоритм заснований на моделі незбуреного кеплерівського руху супутників. Вихідні дані для алгоритму, які одержують після розшифрування альманаху, наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Параметр	Значення параметра	Розмірність
N^A	Календарний номер доби усередині чотирирічного періоду від початку найближчого високосного року, на яку задані елементи орбіти НС	–
$t_{\lambda n}^A$	Час проходження висхідного вузла, найближчого до початку доби з номером N^A	с
λ_n^A	Довгота висхідного вузла в геоцентричній системі координат ПЗ-90 на момент $t_{\lambda n}^A$	рад
Δi_n^A	Виправлення до середнього значення нахилення орбіти на момент $t_{\lambda n}^A$ ($i_{\text{ср}} = 63°$)	рад
ΔT_n^A	Виправлення до середнього значення драконічного періоду обертання НС ($T_{\text{ср}} = 43\ 200$ с)	с
e_n^A	Ексцентриситет орбіти на момент $t_{\lambda n}^A$	–
$\omega_{\text{п}\,n}^A$	Аргумент перигею	рад

У табл. 3.1 індекс A – номер доби формування альманаху (екземпляр альманаху), а індекс n – умовний номер супутника.

Крім даних альманаху, в алгоритмах задаються: $t_{пот}$ – поточний час і $N_{пот}$ – номер доби усередині чотирирічного періоду, протягом якої розраховується вектор кінематичних параметрів.

Вектор стану НС – координати НС і складові швидкості, на першому етапі розраховуються в орбітальній прямокутній системі координат OX_1X_2 як складові $x_1^{ор}$; $x_2^{ор}$; $\dot{x}_1^{ор}$; $x_2^{ор}$, а потім перераховуються в обертову геоцентричну систему координат ПЗ-90. OX_1X_2 (див. рис.1.2) – це система координат, яка лежить в орбітальній площині з початком у центрі Землі, вісь X_1 якої спрямована уздовж фокальної осі до перигею, а вісь X_2 – по нормалі до фокальної осі.

Вектор стану НС в орбітальній системі координат OX_1X_2 розраховують у послідовності виконання наступних чотирьох етапів (індекси A и n опущені).

1. ***Визначення поточних значень*** класичних (кеплерівських) елементів і деяких інших ***елементів орбіти***:

$$i = i_{ср} + \Delta i;\quad T_{др} = T_{ср} + \Delta T;\quad n = 2\pi / T_{др};\quad a = \sqrt[3]{\mu / n^2}\ ,$$

де i – нахилення орбіти; $T_{др}$ – драконічний період обертання НС (зміни періоду обертання супутника, що спричиняються притяганням Місяця і Сонця); n – середня кутова швидкість обертання НС; a – велика піввісь еліптичної орбіти НС; μ = 398600,44 – геоцентрична гравітаційна стала Землі.

2. ***Внесення виправлень на несферичність Землі***

$$\lambda^* = \lambda + \left(\dot{\lambda} - \omega_З\right)\Delta t_{пп};\quad \omega_п^* = \omega_п + \dot{\omega}_п \Delta t_{пп}\ ,$$

де $\Delta t_{пп}$ = 86400 $(N_{пот} - N^A)$ + $t_{пот} - t_\lambda$;

$$\dot{\lambda} = -10\left(\frac{a_е}{a}\right)^{7/2} \cos(i)\frac{\pi}{180 \cdot 86400};$$

$$\dot{\omega}_п = 5\left(\frac{a_е}{a}\right)^{7/2}\left(5\cos^2(i) - 1\right)\frac{\pi}{180 \cdot 86400}\ ;$$

$\omega_З = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ рад/с – кутова швидкість обертання Землі;

$a_е$ = 6378,136 км – екваторіальний радіус Землі.

3. ***Розрахунок ексцентричної аномалії*** E на поточний момент часу $t_{пот}$ проводиться при рекурентному розв'язанні рівняння Кеплера

$$E^{(k+1)} = M + e \cdot \sin^{(k)}.$$

Геометричне значення параметра E легко усвідомити з рис. 3.1, на якому крім еліптичної орбіти НС, наведена гіпотетична кругова орбіта. Для точки H_1 кругової орбіти, яка має однакову з НС абсцису, і визначається ексцентрична аномалія E.

Рух супутника за еліптичною орбітою, на відміну від руху за круговою орбітою, є нерівномірним, а залежить від положення супутника на орбіті. Для того, щоб використовувати зручний рівномірний рух, тобто рух з постійною кутовою швидкістю, вводять кутовий параметр M – *середню аномалію* для моменту часу t *(середня аномалія M епохи t):*

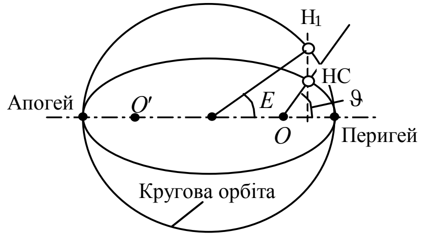

Рис. 3.1

Середня аномалія M епохи $t_{пот}$ визначається з рівняння:

$$M = n(t_{пот} - \tau),$$

де $\tau = t_\lambda + \delta T_п$ – час проходження перигею, який можна визначити як суму часу проходження висхідного вузла і часу $\delta T_п$ руху НС від висхідного вузла до перигею.

Враховуючи прив'язку часу t_λ до доби з номером N^A, а часу $t_{пот}$ до доби з номером $N_{пот}$, рівняння для середньої аномалії приймає вигляд

$$M = n(\Delta t_{пп} - \delta T_п).$$

Час $\delta T_п$ можна визначити з рівнянь Кеплера в такий спосіб. Нехай $E_п$ – ексцентрична аномалія, яка відповідає справжній аномалії $\vartheta = \omega_п^*$. Тоді відповідно до рівняння Кеплера

$$E_П = 2\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\omega_П^*}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right].$$

Для ексцентричної аномалії $E_П$ можна визначити середню аномалію

$$M_П = E_П - e\cdot \sin E_П. \qquad (3.20)$$

Тоді для інтервалу часу $\delta T_П$ справедливе співвідношення

$$\delta T_П = M_П / n + \begin{cases} 0, & \omega_П^* < \pi; \\ T_{др}, & \omega_П^* > \pi. \end{cases}$$

Рекурентне рівняння (3.20) обчислюється з початковими умовами $E^{(0)} = M$, $k = 0, 1...$ доти, поки не буде виконуватися умова $|E^{(k+1)} - E^{(k)}| < 3\cdot 10^{-8}$.

4. ***Визначення координат НС в орбітальній прямокутній системі координат*** OX_1X_2 з урахуванням розрахованих значень ексцентричної аномалії $E^{(k)}$ і $E^{(k+1)}$

$$x_1^{op} = a\left(\cos E^{(k+1)} - e\right); \qquad x_2^{op} = a\sqrt{1-e^2}\sin E^{(k-1)}.$$

Співвідношення для складових швидкості НС в орбітальній системі координат отримують диференціюванням координат (x_1^{op}, x_2^{op}) за часом (з урахуванням $n = d/dt$)

$$\dot{x}_1^{op} = -\frac{na\sin E^{(k+1)}}{1-e\cos E^{(k-1)}}; \qquad \dot{x}_2^{op} = -\frac{na\sqrt{1-e^2}\cos E^{(k-1)}}{1-e\cos E^{(k+1)}}.$$

5. ***Перерахування координат НС в геоцентричну систему координат*** ПЗ-90 або WGS-84.

Визначений в орбітальній системі координат вектор x_1^{op}, x_2^{op} перераховується в систему координат ПЗ-90 (WGS-84) з використанням матриць напрямних косинусів

$$\mathbf{e}_1^0 = \left| e_{x1}^0 \; e_{y1}^0 \; e_{z1}^0 \right|^{\mathrm{T}}, \; \mathbf{e}_2^0 = \left| e_{x2}^0 \; e_{y2}^0 \; e_{z2}^0 \right|^{\mathrm{T}},$$

де елементи матриць

$$e_{x1}^0 = \cos\omega_П^*\cos\lambda^* - \sin\omega_П^*\sin\lambda^*\cos i;$$
$$e_{y1}^0 = \cos\omega_П^*\sin\lambda^* + \sin\omega_П^*\cos\lambda^*\cos i;$$
$$e_{z1}^0 = \sin\omega_П^*\sin i:$$

$$e_{x2}^0 = -\sin\omega_П^*\cos\lambda^* - \cos\omega_П^*\sin\lambda^*\cos i;$$
$$e_{y2}^0 = -\sin\omega_П^*\sin\lambda^* + \cos\omega_П^*\cos\lambda^*\cos i;$$
$$e_{z2}^0 = \cos\omega_П^*\sin i.$$

Матриці напрямнихкосинусів $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$ одержують зі співвідношень, що описують три послідовних повороти орбітальної системи координат на кути $\omega_П^*$, i, λ^* до її сполучення з геоцентричною системою координат ПЗ-90. Тоді вектор координат НС у системі координат ПЗ-90 (WGS-84) визначається співвідношенням

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}_1^{op}\mathbf{e}_1^0 + \mathbf{x}_2^{op}\mathbf{e}_2^0,$$

де $\mathbf{X} = |\, x\, y\, z\, |^{\mathrm{T}}$,

6. ***Перетворення вектора швидкості НС з орбітальної системи координат в обертову систему координат*** ПЗ-90 (WGS-84) проводиться в два етапи. Спочатку вектор швидкості $\dot{x}_1^{op}$; x_2^{op} перетвориться в нерухому систему координат $OX^sY^sZ^s$, вісь OX^s якої зміщена відносно осі X_0 класичної геоцентричної інерціальної (нерухомої) системи координат $OX_0Y_0Z_0$ (див. рис. 1.3) на довготу висхідного вузла рівну λ^*, відповідно до формули

$$\dot{\mathbf{X}}^s = \dot{\mathbf{x}}_1^{op}\mathbf{e}_1^0 + \dot{\mathbf{x}}_2^{op}\mathbf{e}_2^0.$$

На другому кроці вектор швидкості $\dot{\mathbf{X}}^s$ з нерухомої системи координат перераховується в обертову геоцентричну систему координат ПЗ-90 (WGS-84) за формулами

$$\dot{X} = \dot{X}^s + \omega_З Y; \;\; \dot{Y} = \dot{Y}^s - \omega_З X; \;\; \dot{Z} = \dot{Z}^s.$$

3.3.2. Розрахунок вектора стану супутника на основі оперативної інформації

У реальних умовах траєкторного руху НС на нього діють, крім основної, центральної сили притягання Землі, різноманітні додаткові збурюючі сили.

Основними джерелами збурень орбіт НС є:

– збурення гравітаційного поля внаслідок несферичності Землі і нерівномірності розподілу її маси;

– притягання Місяця і Сонця;

– опір середовища при русі НС;

– тиск світлового випромінювання Сонця, інші фізичні фактори.

Розрахунки показують, що збурена орбіта НС у загальному випадку не буде еліптичною, а дійсні параметри орбітального руху НС відрізняються від параметрів незбуреного руху. Тому грубі параметри руху супутників, що розраховані за формулами незбуреного (кеплерова) руху на основі вихідних даних альманаху, не можуть бути використані в алгоритмах розв'язання навігаційної задачі визначення точних координат споживача.

На відміну від незбуреного руху елементи збуреної орбіти НС змінні. Їхня зміна відбувається безперервно, але кожному моменту часу і кожній точці збуреної траєкторії відповідає своя кеплерова орбіта, яку називають *оскуліруючою,* а її орбітальні елементи – *оскуліруючими.*

Для розрахунку точних збурених просторових координат НС і їхніх похідних апаратура споживача одержує від НС періодично поновлювану оперативну інформацію. Вихідні дані для точного розрахунку вектора стану НС одержують після розшифрування ефемерид оперативної інформації, переданої кожним супутником.

Процедура розрахунку проводиться чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь орбітального руху НС. Початковими умовами для інтегрування системи рівнянь є обновлювані через кожні 15 хв дані ефемерид:

- t_b – той момент часу усередині поточної доби, до якого відноситься передана оперативна інформація;
- $x(t_b)$, $y(t_b)$, $z(t_b)$ – координати даного НС у геодезичній системі координат ПЗ-90 (WGS-84) на момент часу t_b;
- $\dot{x}(t_b)$, $\dot{y}(t_b)$, $\dot{z}(t_b)$ – складові вектора швидкості даного НС у системі координат ПЗ-90 (WGS-84) на момент часу t_b;
- $\ddot{x}_{лс}, \ddot{y}_{лс}, \ddot{z}_{лс}$ – місячно-сонячні гравітаційні збурення, які вважають сталими величинами на інтервалах часу ± 15 хв.

Розрахунок проводиться з метою визначення параметрів руху НС на момент часу t_i, відмінному від моменту часу t_b. Рівняння збуреного руху НС, які записані в системі координат ПЗ-90 (WGS-84) і які використовуються при розрахунках у системі ГЛОНАСС, мають вигляд:

$$\frac{dx}{dt}=V_x;\quad \frac{dy}{dt}=V_y;\quad \frac{dz}{dt}=V_z;$$

$$\frac{dV_x}{dt}=-\frac{\mu}{r^3}x+\frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}x\left(1-\frac{5z^2}{r^2}\right)+\omega_3^2 x+2\omega_3 V_y+\ddot{x}_{лс};$$

$$\frac{dV_y}{dt}=-\frac{\mu}{r^3}y+\frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}y\left(1-\frac{5z^2}{r^2}\right)+\omega_3^2 y-2\omega_3 V_x+\ddot{y}_{лс};$$

$$\frac{dV_z}{dt}=-\frac{\mu}{r^3}z+\frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}z\left(3-\frac{5z^2}{r^2}\right)+\ddot{z}_{лс},$$

де a_e – екваторіальний радіус Землі, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

У рівняннях, крім центральної сили притягання Землі враховують додаткову силу, яка обумовлена полярним стисненням і характеризується гармонікою C_{20}, а також місячно-сонячні гравітаційні збурення $\ddot{x}_{лс}, \ddot{y}_{лс}, \ddot{z}_{лс}$.

Інтегрування системи рівнянь проводиться класичним однокроковим методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

3.3.3. Перерахування координат споживача з геоцентричної в геодезичну систему координат

Алгоритм оцінки навігаційних параметрів (3.18) формує оцінки вектора споживача в геоцентричній системі координат *OXYZ,* зв'язаної з Землею (прямокутні координати споживача, що відраховуються відносно центра мас Землі). Споживача в багатьох випадках цікавлять свої координати в геодезичній (географічній) системі координат. Тому в ПІ необхідно здійснити перерахування координат x, y, z з геоцентричної системи координат у координати геодезичної системи координат, тобто знайти координати: B – геодезичну широту, L– геодезичну довготу, H– геодезичну висоту (інколи їх називають географічними координатами).

Формули зв'язку двох систем координат мають такий вигляд:

$$x = (N + H)\cos B \cos L;\ y = (N + H)\cos B \sin L;\ z = \left[\left(1 - e^2\right)N + H\right]\sin B\ ,$$

де $N = a \big/ \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$; $e = \sqrt{a^2 - b^2} \big/ a = 0{,}081813334$ – ексцентриситет земного референт-еліпсоїда Красовського; a = 6378245м – велика піввісь еліпсоїда; b = 6356863м – мала піввісь еліпсоїда.

Перерахування координат за цими формулами може бути реалізовано таким обчислювальним алгоритмом :

1) обчислюється допоміжна величина $D = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2) аналізується значення D:

– якщо $D = 0$, то $B = \pi z\ /\ (2|z|)$; $L = 0$; $H = z \sin B - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$;

– якщо $D > 0$, то знаходиться проміжна довгота $L_a = \arcsin(y / D)$; при цьому

– якщо $x > 0$, $y > 0$, то $L = L_a$;

– якщо $x < 0$, $y > 0$, то $L = \pi - L_a$;

– якщо $x < 0$, $y < 0$, то $L = \pi + L_a$;

– якщо $x > 0$, $y < 0$, то $L = 2\pi - L_a$.

3) аналізується значення z:

– якщо $z = 0$, то

$B = 0$, $H = D - a$;

в інших випадках знаходяться допоміжні величини r, c, p

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\quad c = \arcsin(z / r);\quad p = e^2 a / 2r$$

і реалізується ітеративний процес

$$s_1 = 0;\quad b = c + s_1;\quad s_2 = \arcsin\left(p \sin(2b) \big/ \sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}\right);$$

– якщо модуль різниці $|\ s_2 - s_1\ | < \varepsilon$, де ε – необхідна точність обчислень, то $B = b$; $H = D\cos B + z \sin B - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$;

у противному випадку приймається $s_2 = s_1$ і обчислення повторюються, починаючи з розрахунку b. В усіх випадках вибирається ε = 0,0001".

Після знаходження B, L, H стає також відомою матриця переходу з геоцентричної у прямокутну геотопічну систему координат. Осі земної прямокутної геотопічної системи координат орієнтовані так, що дві з них лежать у площині горизонту, а третя збігається з місцевою вертикаллю. Застосовуючи матрицю переходу, можна здійснити перетворення складових швидкості рухомого об'єкта з геоцентричної у прямокутну систему координат, тобто знайти складові швидкості об’єкта відносно земної поверхні.

У задачах повітряної навігації і літаководіння замість геодезичної частіше застосовують ортодромічні системи координат (маршрут польоту прокладається найчастіше з використанням саме ортодромічних систем координат).

Тому, в апаратурі авіаційних споживачів СНС повинні бути передбачені алгоритми перерахування координат і швидкості літака з геодезичної в ортодромічну систему координат. Нижче наведений один з варіантів перерахування координат

$$\varphi_{\text{орт}} = \arcsin[\sin(L - L_0)\cos B;\quad \lambda_{\text{орт}} = \arcsin\left(\sin B / \cos\varphi_{\text{орт}}\right),$$

де $\varphi_{\text{орт}}$ – ортодромічна широта; $\lambda_{\text{орт}}$ – ортодромічна довгота; L_0 – геодезична довгота точки початку окремої ортодромії, наприклад, довгота проміжного пункту маршруту.

При перерахунках складових швидкості літака V_L, V_B з геотопічної системи координат в ортодромічну використовують шляхові кути окремих ортодромій Ψ_i

$$V_{\lambda\text{орт}} = V_L \sin\Psi_i - V_B \cos\Psi_i;\quad V_{\varphi\text{орт}} = V_L \cos\Psi_i - V_B \sin\Psi_i\,,$$

де $V_{\lambda\text{орт}}$, – складова швидкість польоту літака вздовж ортодромії; $V_{\varphi\text{орт}}$ – швидкість бічного відхилення літака від ортодромії.

Додатково розраховується величина лінійного бічного відхилення літака від ортодромії $\Delta x = \varphi_{\text{орт}} R_з$ (де $R_з$ = 6371116 м – радіус сфери, рівновеликої земному геоїду).

Контрольні питання

1. Яку задачу, що вирішується в СНС, прийнято називати навігаційною задачею? У чому результат розв’язання цієї задачі?
2. Які геометричні параметри відповідають радіонавігаційним параметрам сигналу навігаційного супутника? Наведіть функціональний зв'язок між цими параметрами.
3. Які функціональні залежності визначають навігаційні функції?
4. Що являє собою у відкритому просторі поверхня положення з однаковим значенням дальності до НС?
5. Що являє собою лінія положення?
6. Як, застосовуючи поверхні положення, визначаються координати місця розташування об'єкта?
7. Як можна усунути неоднозначність визначення координат споживача при застосуванні методу поверхонь положення?
8. Які існують різновиди далекомірних і різницево-далекомірних методів?
9. У чому сутність псевдодалекомірного методу?
10. У чому сутність псевдодоплерівського методу?
11. Які методи визначення координат і складових швидкості споживача в основному використовують в існуючих СНС?
12. Які алгоритми розв'язання нелінійних рівнянь, що визначають навігаційні функції, зазвичай застосовують в існуючих СНС?
13. У чому різниця між прямими й ітераційними алгоритмами визначення вектора стану споживача? Коли кожний з них доцільніше застосовувати?
14. Які алгоритми визначення координат споживача застосовують в існуючих СНС при наявності надмірності вимірювань?
15. Як отримають необхідну інформацію про координати супутників на момент проведення обчислень?
16. Для яких цілей використовується алгоритм розрахунку параметрів руху супутників за даними альманаху?
17. Яка процедура розрахунків точних просторових координат НС і їхніх похідних в апаратурі споживача?
18. У якій системі координат здійснюються розрахунки точних просторових координат НС?