МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт з курсу
"Інженерна та комп'ютерна графіка"
для студентів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

КИЇВ 2003

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт з курсу
"Інженерна та комп'ютерна графіка"
для студентів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Київ 2003

УДК 5122+519.85
ББК 22.154.3
О-26

Укладачі: В.О.Анпілогова, канд. техн. наук, професор
Н.І.Седлецька, канд. техн. наук, професор
О.В.Василевський, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Ж.Г.Левіна, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск С.М.Ковальов, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри нарисної геометрії, інженерної та машинної графіки, протокол № 1 від 29 вересня 2003 року.

Видається в авторській редакції.

Обчислювальна геометрія: Методичні вказівки до виконання
О-26 лабораторних робіт з курсу "Інженерна та комп'ютерна графіка" / Уклад.: В.О.Анпілогова., Н.І.Седлецька, О.В.Василевський. – К.: КНУБА, 2003. – 32 с.

Розглянуто основні теоретичні питання, пов'язані з параметризацією кривих ліній і поверхонь, апроксимацією та інтерполяцією їх векторно-параметричними рівняннями. Розроблені дві лабораторні роботи за найбільш поширеними в практиці методами Лагранжа та Кунса.

Призначено для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання при вивченні курсу "Інженерна та комп'ютерна графіка" і виконанні лабораторних робіт.

Загальні положення

Необхідність розробки даних завдань обумовлена тим, що курс "Інженерна та комп'ютерна графіка" має розділ "Обчислювальна геометрія". Серед інших питань у цьому розділі передбачається засвоєння методів моделювання кривих та поверхонь у формі зручній для комп'ютерного представлення.

Розроблені роботи в теоретичному плані спираються на матеріали, викладені в [1] і передбачають знання студентами основного курсу нарисної геометрії [2], який викладається на основі теорії параметризації [3].

Завдання розроблені таким чином, щоб студентами були засвоєні найбільш поширені в практиці методи та алгоритми конструювання криволінійних форм [4, 5]. Завдання поєднують аналітичне, графічне та комп'ютерне рішення.

1. Аналітичний опис кривих і поверхонь

В елементарній і аналітичній геометрії та в багатьох інженерних застосуваннях розглядаються лінії та поверхні, рівняння яких задано в явній чи неявній аналітичних формах.

Так рівняння

$$y = f(x) \text{ та } F(x, y) = 0$$

задають криву в явній та неявній формах, а рівняння

$$z = f(x, y) \text{ та } F(x, y, z) = 0$$

– поверхню у відповідних формах.

В топології, диференціальній геометрії та в розвинених системах комп'ютерної графіки застосовують векторно-параметричні рівняння. В топології такий підхід використовують для встановлення відповідностей, в диференціальній геометрії йому надають перевагу, бо він дозволяє досліджувати широкі та важливі класи поверхонь, що мають спільні властивості, але нескінченну множину різноманітних конкретних втілень.

В комп'ютерній графіці векторно-параметричну форму застосовують для математичного опису кривих та поверхонь в процесі їх конструювання. При цьому процес конструювання розглядають як задачу інтерполяції, апроксимації чи згладжування вихідної інформації.

Задача *апроксимації* виникає при необхідності заміни однієї кривої іншою, що близька до неї в деякому значенні.

Задача *інтерполяції* виникає при необхідності побудувати криву або поверхню, що точно проходять через деяку задану скінченну множину точок, або ліній.

Задача *згладжування* виникає, коли вихідна інформація задана з похибкою.

В усіх випадках до форми, гладкості та кривини остаточної кривої на поверхні можуть бути сформульовані додаткові умови.

Широке застосування векторно-параметричної форми опису для перерахованих задач базується зокрема на тому, що вона дозволяє описувати криві, які неоднозначно проекціюються на обидві координатні осі, та поверхні, що неоднозначно проекціюються на всі координатні площини.

Векторно-параметрична форма завдання кривих та поверхонь вимагає більш строгого їх визначення.

2. Векторно-параметрична форма аналітичного опису кривих

2.1. Параметризація кривої лінії

Топологічною або неперервною відповідністю двох точкових множин зветься така взаємно-однозначна відповідність між точками цих множин, що двом нескінченно близьким точкам однієї множини відповідають дві нескінченно близькі точки другої множини.

Якщо між двома точковими множинами встановлена топологічна відповідність, то такі множини *топологічно еквівалентні*.

Простою дугою зветься така множина точок, що топологічно еквівалентна відрізку прямої. Точки, що відповідають кінцевим точкам відрізка, називаються кінцевими точками дуги.

Кривою лінією зветься множина точок, що складається з кінцевої, або зліченної множин простих дуг. Надалі під кривою лінією, чи її дугою будемо розуміти саме просту дугу.

Параметризація дуги кривої може бути виконана наступним чином. Припустимо, що дуга $P1P2$ топологічно відображається на відрізок прямої $P1_0P2_0$ так, що довільній точці $\boldsymbol{P}$ дуги відповідає точка P_0 цього відрізка (рис.1).

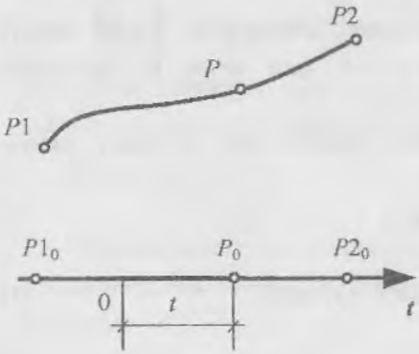


Рис. 1

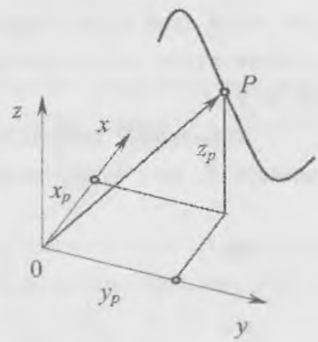


Рис.2

На прямій введено координатну систему $0t$, її початком (точкою 0), напрямом та деяким одиничним відрізком. Тоді будь-якій точці прямої P_0 відповідає її абсциса t (додатна по один бік від точки 0 і від'ємна по іншій).

Якщо відомий закон, за яким точки дуги відображуються на точки відрізку, то завдання абсциси t визначає також положення точки $\boldsymbol{P}$ дуги.

Неперервність встановленої відповідності випливає з того, що двом нескінченно близьким значенням t та t' відповідають нескінченно близькі точки P_0 та P'_0 відрізка прямої і відповідно нескінченно близькі точки $\boldsymbol{P}$ та P' дуги.

Якщо між точками дуги та числами встановлена означена відповідність, то дуга *параметризована*, а число t – параметр відповідної точки. Як топологічна відповідність, так і координатна система $0t$ на відрізку $P1_0P2_0$ можуть бути реалізовані багатьма способами, і кожному з них буде відповідати своя параметризація дуги. Якщо в одному з способів точці

$t = f(u)$, відповідає значення параметру t, а в іншому – значення u, то ці значення будуть пов'язані функціональною залежністю

$$t = f(u),$$

при цьому функція $f(u)$ повинна бути однозначна та неперервна разом із своєю оберненою функцією

$$u = f^{-1}(t).$$

Якщо в просторі задана декартова система координат $Oxyz$, то будь-яка точка дуги кривої визначається її радіусом-вектором $R = \overline{OP}$ (рис.2) компонентами якого є декартові координати x,y,z точки P. Записують $R=[x\ \ y\ \ z]$.

Будь-якому значенню параметра відповідатиме значення радіус-вектора R, що є функцією параметра

$$R = R(t),$$

або

$$R(t) = [x(t)\ \ y(t)\ \ z(t)], \tag{1}$$

або

$$x = x(t); \qquad y = y(t); \qquad z = z(t) \tag{2}$$

Всі наведені записи рівноцінні і визначають векторно-параметричне рівняння кривої. Бачимо, що крива лінія є однопараметричною множиною точок.

При розв'язанні задачі інтерполяції множини точок P_i, $i=1,...,N$ кривою, рівняння якої задано у векторно-параметричній формі (1), перш за все кожній точці P_i необхідно поставити у відповідність значення параметру $t=t_i$. У неперервному випадку серед усіх параметризацій найбільш цікавою є так звана натуральна параметризація. Нехай t – довільний параметр. Величина інтеграла

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\dot{R}\right| dt,$$

де $\dot{R}$ похідна радіус-вектора (1) по параметру t, зветься натуральним параметром кривої і не залежить від вибору параметра t. Різниця значень цього параметра

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left| \dot{R} \right| dt,$$

дорівнює довжині дуги між точками зі значеннями параметрів t_1 та t_2.

При інтерполяції найкращі результати можуть бути отримані саме тоді, коли параметризація буде наближена до натуральної.

Множина точок P_i утворює ламану $P_1,...,P_N$, її довжина l_N складається з суми довжин ланок

$$l_N = \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i (P_{i+1}, P_i) = \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

і може бути наближено прийнята за довжину кривої, а за значення параметру t_i в точці P_i може бути прийнята довжина ламаної від першої до i-тої точки

$$t_i = l_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j .$$

Поширена нормалізована параметризація, при якій значення параметру в першій точці обирається рівним нулю, а в інших підраховується за формулою

$$t_i = \frac{l_i}{l_N}.$$

Тоді вздовж всієї простої дуги параметр змінюється від нуля до одиниці, і в літературі здебільшого позначається літерою u.

За умови, що точки P_i розташовані, приблизно, на однаковій відстані одна від одної за значення параметру t можуть бути обрані їх номери (цілозначна параметризація), а в нормалізованому випадку – дробові значення параметрів пропорційні кількості точок.

2.2. Інтерполяція множини точок векторно-параметричними рівняннями у формі Лагранжа

Нехай задана множина точок P_i, i=1,...,N і встановлена відповідність між нею та значеннями параметрів t_i, i=1,...,N. Необхідно побудувати таку інтерполяційну векторно-параметричну функцію

$$R(t)=\sum_{i=1}^{N} L_i(t)P_i,$$

щоб при кожному значенні параметру $t=t_i$ вона приймала значення вихідної точки $R(t_i)=P_i$. Тут і далі по тексту для радіус-векторів вихідних точок збережені позначення самих точок P. Коефіцієнти $L_i(t)$ мають назву коефіцієнтів Лагранжа і складаються за умовою

$$t=t_i \Rightarrow \begin{cases} L_i(t)=1 \\ L_j(t)=0 \end{cases} \text{при } j\neq i.$$

У найпростішому випадку, коли задані дві точки P_1 та P_2 з відповідними значеннями параметрів $t_1=0$ та $t_2=1$, інтерполяційна функція може бути записана у вигляді

$$R(t)=(1-t)P_1+tP_2,$$

і є векторно-параметричним рівнянням прямої, що проходить через точки P_1 та P_2. Дійсно з $t=0$ випливає $R(t)=P_1$, а з $t=1$ випливає $R(t)=P_2$.

У загальному випадку $L_i(t)$ обчислюється за формулою

$$L_i(t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)},$$

і є добутком множників $\dfrac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)}$ при $i\neq j$, тобто не містить множника $\dfrac{(t-t_i)}{(t_i-t_i)}$, в якому значення j збігається з номером вихідної точки, що має коефіцієнт $L_i(t)$. З цього випливає, що знаменники цих множників ніколи не дорівнюють нулю.

При $t=t_i$ всі множники $L_i(t)$ мають вигляд $\dfrac{(t_i-t_j)}{(t_i-t_j)}$, а тому їх добуток дорівнює одиниці, тобто $L_i(t_i)=1$.

Всі інші коефіцієнти $\underset{k\neq i}{L_k}(t_i)=0$, бо знайдеться принаймні один з множників $\dfrac{(t_i - t_j)}{(t_k - t_j)} = 0$ при $i \neq k$ та $i = j$.

В розгорнутій формі коефіцієнт Лагранжа записується

$$L_i(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)}. \tag{3}$$

Формули (2) можуть бути записані у координатній формі

$$\begin{aligned} x(t) &= L_1(t)x_1 + L_2(t)x_2 + \ldots + L_N(t)x_N, \\ y(t) &= L_1(t)y_1 + L_2(t)y_2 + \ldots + L_N(t)y_N, \\ z(t) &= L_1(t)z_1 + L_2(t)z_2 + \ldots + L_N(t)z_N. \end{aligned} \tag{4}$$

Ступінь змінної t в коефіцієнтах Лагранжа (3) на одиницю менше кількості точок, що інтерполюються, тому всі вирази (4) – поліноми ступеня N-1 при умові, що інтерполюються N точок P_i.

2.3. Апроксимація заданої кривої векторно-параметричними рівняннями

До апроксимації вдаються тоді, коли вихідна крива задана будь-яким чином, наприклад, графічно. На рис.3 задана крива m, що не проекціюється однозначно на координатні осі $0x$, $0y$. Тому, апроксимація її функцією, заданою у явному вигляді $y = f(x)$, чи $x = f(y)$ неможлива, а вибір для апроксимації функції, заданої неявно $f(x,y) = 0$ вимагає відомостей про відповідність властивостей функції та кривої і не забезпечує однозначного визначення точки на кривій. У таких випадках застосовують векторно-параметричні рівняння.

Нижче наведено один із можливих варіантів розв'язання такої задачі і подано його геометричну інтерпретацію.

На кривій m визначаються N точок, по можливості рівномірно, але так, щоб передати особливості її форми. На рис.3 задано шість таких точок. Для них встановлюється значення параметрів $t_i = i$, $i = 1,\ldots,N$, що дорівнюють порядковому номеру точки. Вводяться допоміжні декартові системи координат $x0t$ та $y0t$ так, що вони мають спільні осі $0x$, $0y$. Визначені точки кривої m відображуються на ці допоміжні поля за значеннями їх номерів та координат x та y відповідно. Криві m_1 та m_2, що проведені через точки 1_1, ..., 6_1 та 1_2, ..., 6_2, відповідно (рис. 3) однозначно проеціюються на осі t і тому можуть бути описані явно заданими функціями:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned} \tag{5}$$

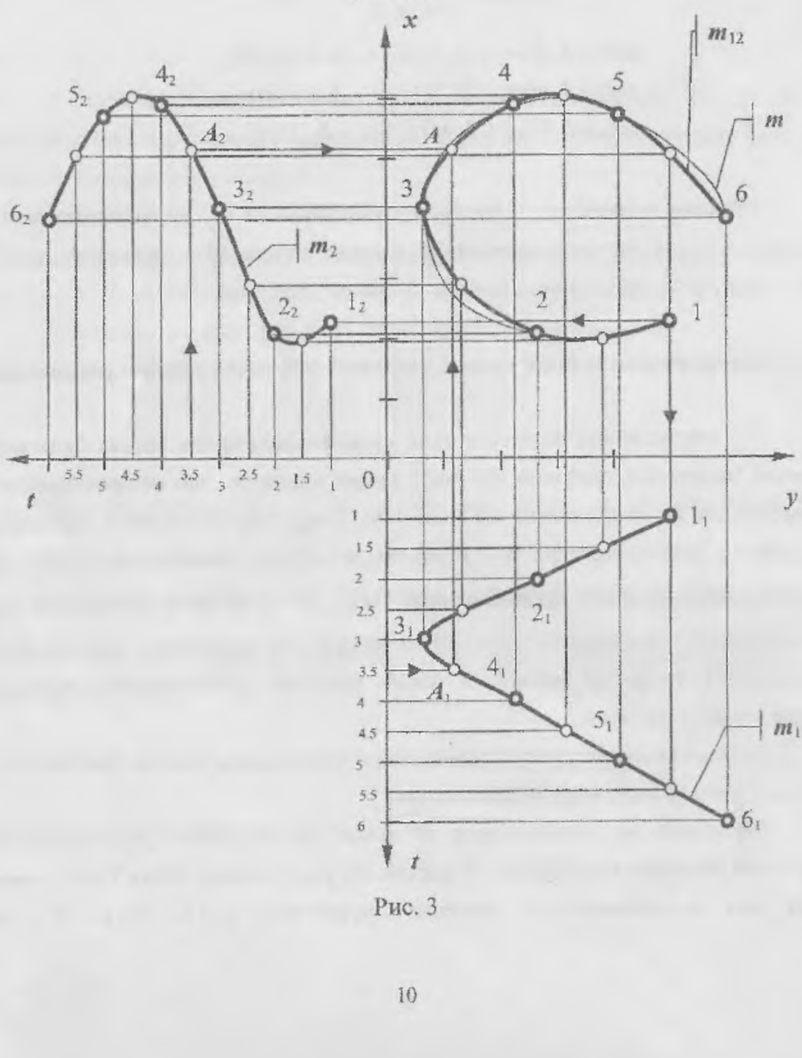


Рис. 3

Найбільш поширено задання їх у вигляді поліномів.

Якщо m_1 та m_2 знайдені для будь-якого t (на рис.3 позначені точки A_1 та A_2 для значення параметру $t = 3{,}5$), може бути знайдена відповідна точка A на кривій m_{12}.

Для побудови аналітичних залежностей (5) можуть бути застосовані поліноми Лагранжа, що інтерполюють точки 1_1, ..., 6_1 та 1_2, ..., 6_2, які в сукупності визначають векторно-параметричне рівняння кривої m_{12}, що апроксимує криву m і точно проходить через шість її точок.

При зміні кількості обраних на кривій точок і зміні їх положення, результат апроксимації буде змінюватися.

Завдання 1. **Апроксимація заданої кривої векторно-параметричними рівняннями у формі Лагранжа**

Завдання виконується на аркуші формату А3. Приклад виконання завдання показано на рис.4.

В табл.1 згідно варіанта обирається вихідна крива, і зображується в декартовій системі координат $x0y$ тонкою суцільною лінією. На ній задаються чотири точки 1,2,3,4, що характеризують її форму.

Визначаються їх параметри $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$ будуються допоміжні системи координат $x0t$ та $y0t$ (рис.3, зразок, рис.4), в яких отримуються ряди точок 1_1, 2_1, 3_1, 4_1 та 1_2, 2_2, 3_2, 4_2. Ці ряди є основою для обчислення кривих m_1 та m_2 за інтерполяційними поліномами у формі Лагранжа. Відповідно перше та друге рівняння з (4)

$$x(t) = L_1(t)x_1 + L_2(t)x_2 + L_3(t)x_3 + L_4(t)x_4 \qquad (6)$$

$$y(t) = L_1(t)y_1 + L_2(t)y_2 + L_3(t)y_3 + L_4(t)y_4. \qquad (7)$$

Коефіцієнти $L_i(t)$ в обох формулах однакові, обчислюються за (3). Вони не залежать від значень координат вихідних точок і тому можуть бути обчислені заздалегідь. На зразку (рис.4) в таблиці наведені значення коефіцієнтів $L_i(t)$ (позначені L_1, L_2, L_3, L_4), що обчислені для різних t, які змінюються від 1 до 4 з інтервалом 0.5.

При цілочислових t (як було наведено у розділі 2) вони набувають значень нуль або одиниця. Одиниця тільки у випадку, коли номер точки (значення параметру) дорівнює індексу i при $L_i(t)$. При дробових значеннях параметру їх слід підраховувати і також записати до таблиці. Наприклад, вираз для обчислення $L_3(2.5)$ за формулою (3) такий:

$$L_3(2{,}5) = \frac{(2{,}5-1)(2{,}5-2)(2{,}5-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{1{,}5 \times 0{,}5 \times (-1{,}5)}{2 \times 1 \times (-1)} = 0{,}562,$$

Далі по (6), (7) обчислюються координати точок з дробовими значеннями параметрів, величини їх координат записуються до таблиці, а самі точки будуються на полях $x0t$ та $y0t$. Наприклад, координата x точки при $t = 2{,}5$ і при відомих значеннях коефіцієнтів L_i та координат x_i вихідних точок (дані вибираються з таблиці на зразку), виконується по формулі (6):

$$x(2{,}5) = L_1(2{,}5)x_1 + L_2(2{,}5)x_2 + L_3(2{,}5)x_3 + L_4(2{,}5)x_4 = -0{,}062 \times 3 + 0{,}562 \times 2 -$$
$$-0{,}562 \times 6 - 0{,}062 \times 5 = 4.$$

Товстою лінією наведено криві m_1 та m_2, точки яких задовольняють рівняння (6) та (7) відповідно. Ці криві визначаються чотирма точками і є поліномами третього ступеня (кубічними параболами). Є можливість приблизно перевірити підрахунки: криві m_1 та m_2 повинні мати не більше однієї точки перегину.

Будуються точки в полі $x0y$, що відповідають дробовим значенням параметрів. (вони будуються за проекційною відповідністю, як точка A на рис.3). Через ці точки та точки *1, 2, 3, 4* проводиться крива m_{12}, на кресленні вона виділяється товстою лінією, що апроксимує криву m, інтерполюючи точки *1*, *2*, *3*, *4*. Отримана крива m_{12} порівнюється з вихідною m, встановлюється, наближено (графічно), максимальне значення абсолютної похибки Δ.

Рекомендується двічі провести розрахунковий експеримент з різним розташуванням точок 1, 2, 3, 4. Для оформлення обрати той, що має меншу Δ.

В роботі, крім рисунка та таблиці, наводяться розрахункові формули, результати обчислення одного з коефіцієнтів $L_i(t)$ та всіх точок з дробовими значеннями параметрів.

Контроль виконання завдання на комп'ютері виконується за допомогою учбової програми "Лагранж" в режимі діалогу. Студент задає координати обраних точок і отримує криві m_1, m_2 та m_{12}. Далі вивчає властивості апроксимації кривої векторно-параметричними рівняннями у формі Лагранжа, збільшуючи кількість заданих точок та змінюючи їх розташування.

Вивчення методів побудови кривих в системі AutoCAD 2002. За допомогою інструкції користувача і спираючись на матеріал лекцій, студент оволодіває навичками моделювання кривих ліній в системі *AutoCAD 2002*, де побудова всіх кривих виконується за допомогою векторно-параметричних методів.

Завдання 1. **Апроксимація заданої кривої векторно-параметричними рівняннями у формі Лагранжа**

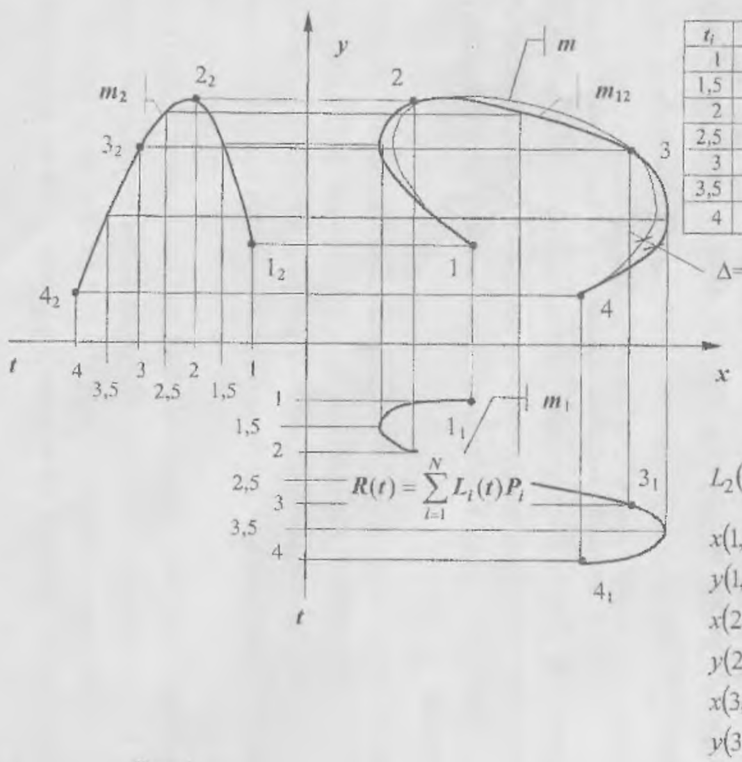


Рис.4

t_i	L_1	L_2	L_3	L_4	x_i	y_i	*Вихідні дані*
1	1	0	0	0	3	2	
1,5	0,312	0,937	-0,312	0,062	1,248	4,125	
2	0	1	0	0	2	5	1(3,2)
2,5	-0,062	0,562	0,562	-0,062	4,00	4,875	2(2,5)
3	0	0	1	0	6	4	3(6,4)
3,5	0,062	-0,312	0,937	0,312	6,744	2,625	
4	0	0	0	1	5	1	4(5,1)

Розрахункові рівняння

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4 \\ y(t) &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4 \end{aligned}\right\};$$

$$L_i(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_n)}.$$

$$L_2(3{,}5)=\frac{(3.5-1)(3.5-3)(3.5-4)}{(2-1)(2-3)\cdots(2-4)}=-0.312;$$

$$x(1{,}5)=0.312\cdot3+0.937\cdot2-0.312\cdot6+0.062\cdot5 \;=1.248;$$

$$y(1{,}5)=0.312\cdot2+0.937\cdot5-0.312\cdot4+0.062\cdot1 \;=4.125;$$

$$x(2{,}5)=-0.062\cdot3+0.562\cdot2+0.562\cdot6-0.062\cdot5=4.00;$$

$$y(2{,}5)=-0.062\cdot2+0.562\cdot5+0.562\cdot4-0.062\cdot1=4.875;$$

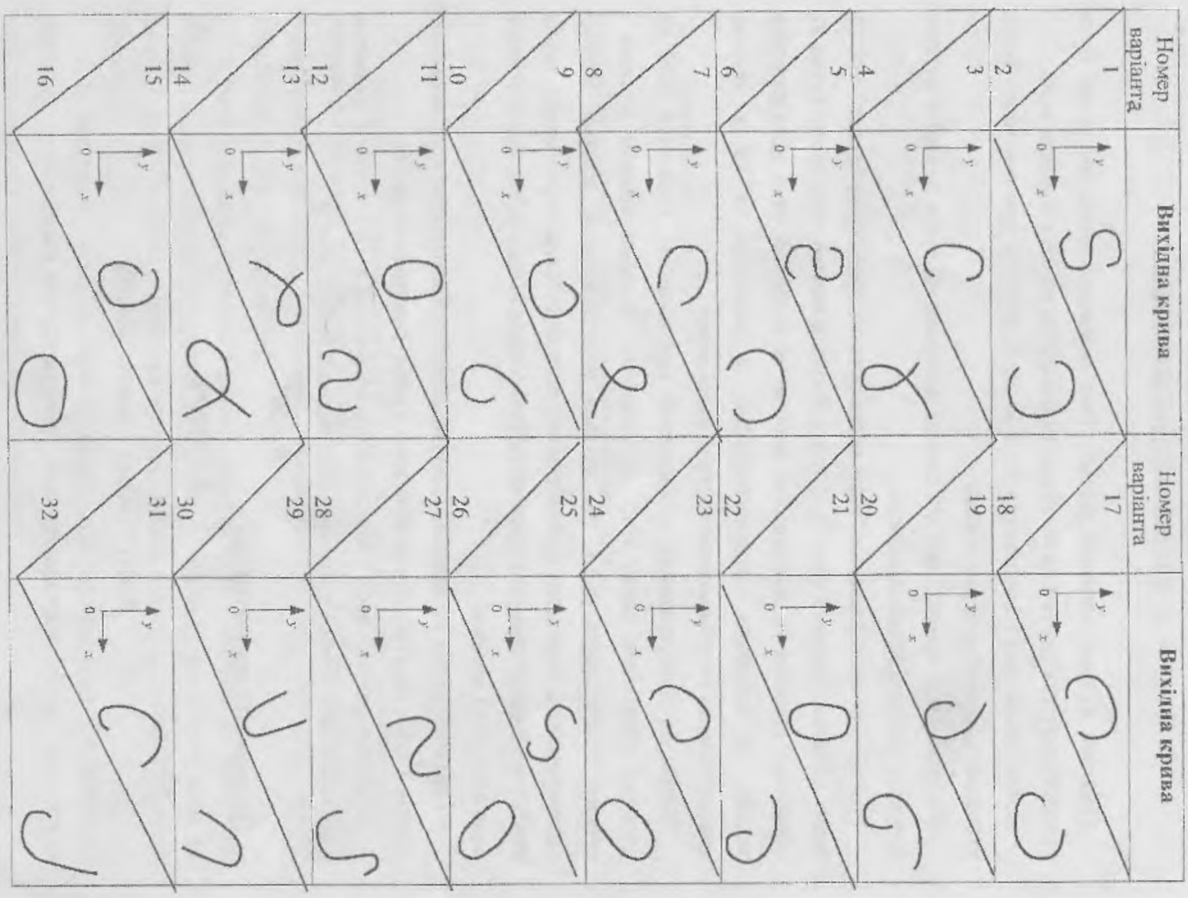
$$x(3{,}5)=0.062\cdot3-0.312\cdot2+0.937\cdot6+0.312\cdot5 \;=6.744;$$

$$y(3.5)=0.062\cdot2-0.312\cdot5+0.937\cdot4+0.312\cdot1 \;=2.625.$$

ПЦБ-11 НЕХОДА М.К.

Таблиця 1

Варіанти до завдання 1



3. Векторно-параметрична форма аналітичного опису поверхонь

3.1. Параметризація поверхні

Простим куском поверхні зветься така множина точок, що може бути топологічно відображена на множину точок круга, разом з точками кола.

Точки куска, що відповідають точкам кола, звуться точками межі. Вони утворюють замкнену криву – межу.

Як і у випадку кривої, далі під словом поверхня чи кусок поверхні будемо розуміти простий кусок поверхні.

Розглянемо кусок поверхні, який може бути відображений топологічно на деяку область площини (рис.5), і точці $\boldsymbol{P}$ цієї поверхні відповідає точка P_0 площини, прямокутні координати якої $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$. Якщо таке відображення задане, то поверхня *параметризована*, а величини $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ звуться *криволінійними координатами* точки $\boldsymbol{P}$ даної поверхні.

Внаслідок неперервності встановленої відповідності, будь-якій лінії на плошині відповідає деяка лінія на поверхні. Зокрема прямим ***u=const*** і ***v=const*** відповідають лінії, що звуться координатними лініями заданої параметризації. Внаслідок однозначності відповідностей, через кожну точку параметризованої поверхні проходить точно одна лінія сім'ї ***u=const*** і точно одна лінія сім'ї ***v=const.***

Ці дві сім'ї разом утворюють сітку, яка зветься правильною координатною сіткою. Сітка, що утворена на простому куску, показана на рис.6.

Завдання значень двох криволінійних координат $\boldsymbol{u}$ та $\boldsymbol{v}$ точки $\boldsymbol{P}$ визначає положення цієї точки в просторі і відповідно її радіус-вектор

$$\boldsymbol{R} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}.$$

По аналогії з кривою маємо

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u,v), \tag{8}$$

або

$$\boldsymbol{R}(u,v) = [x(u,v) \quad y(u,v) \quad z(u,v)],$$

або

$$x = x(u,v); \qquad y = y(u,v); \quad z = z(u,v). \tag{9}$$

Поверхня є двопараметричною множиною точок. При фіксації одного з параметрів u=$u$const чи v=$v$const маємо рівняння координатних ліній:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u\mathrm{const}, v), \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v\mathrm{const}).$$

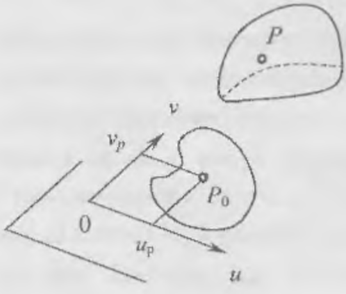


Рис. 5

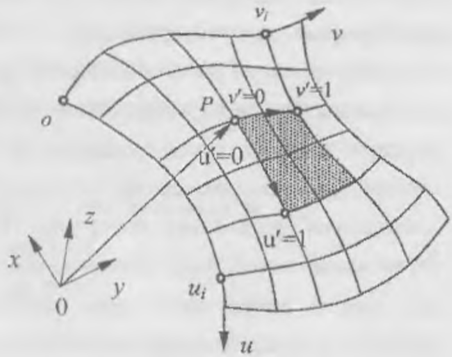


Рис. 6

Якщо задані функції

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(s) \tag{10}$$

неперервні разом зі своїми оберненими функціями

$$t = f_1^{-1}(u), \qquad s = f_2^{-1}(v),$$

то підставляючи (10) в (9) або (8) отримуємо нову параметризацію тієї ж поверхні

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(f_1(t), f_2(s)) = \boldsymbol{R}(t, s).$$

Конкретний вигляд рівнянь (8), або те саме (9) може бути виведений з рівняння поверхні, що задана в явній або неявній формах. Для найбільш поширених поверхонь, зокрема поверхонь другого порядку, відомі різноманітні параметризації [4].

Векторно-параметричні рівняння можуть бути отримані як реалізація кінематичного методу утворення поверхонь за умови, що твірна лінія та закон її руху (одна або декілька кривих) задані у векторно-параметричній формі (1).

В системах комп'ютерної графіки апроксимація та інтерполяція вихідної інформації про поверхню виконується виключно на основі векторно-параметричної форми представлення.

Апроксимація може виконуватись на основі мінімізації критеріїв, що характеризують ступінь наближення поверхні, яка описується рівнянням до вихідної поверхні. У простішому випадку при апроксимації обирається підмножина вихідної інформації (точок або ліній), на основі якої розв'язується задача інтерполяції.

Поверхню на рис.6. розглянемо як подану у вигляді правильної сітки, що прийнята за (u, v) координатну. Кожна її чарунка може розглядатися як окремий простий кусок поверхні. В комп'ютерних системах поширено методи, що спираються на побудову окремих кусків з їх наступним "зшиванням" у загальну поверхню. На рис.6 виділено чотири чарунки і встановлено на них нову нормалізовану параметризацію u', v' (розд.2.1), так, що кінцеві точки ліній межі мають нульові або одиничні значення параметрів. У подальшому приймемо для них позначення u, v.

Куски поверхонь, на яких встановлено нормалізовану параметризацію, називають порціями.

Для аналітичного опису порцій поверхонь застосовують декілька базових методів. Серед них метод Кунса, метод Без'є, метод раціональних параметричних поверхонь та їх різноманітні узагальнення. Вони відрізняються схемами інтерполювання, можливостями щодо забезпечення різних порядків гладкості "зшивання", та до управління формою поверхонь в межах заданої вихідної інформації. Найпростішим з них є метод інтерполяції лінійною поверхнею Кунса. Він забезпечує неперервність поверхні при "зшиванні" кусків та неперервність першої похідної взловж ліній u=const, v=const за умови, що така неперервність задана заздалегідь.

3.2. Векторно-параметричні рівняння порції поверхні за Кунсом

Нехай межа складається з чотирьох кривих, заданих векторно-параметричними рівняннями:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}(u,0); \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}(u,1); \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}(0,v); \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{R}(1,v),$$

які обмежені точками $P(0,0)$, $P(1,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$ (рис.7а). Необхідно побудувати векторно-параметричне рівняння $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v)$ порції таке, щоб при $u \in [0,1]$ та $v \in [0,1]$ воно визначало точки простого куска поверхні, обмеженого кривими a,b,c,d, а при граничних значеннях параметрів точно визначало ці криві.

Розглянемо загальні відомості, на які спирається метод Кунса.

Метод функцій змішання. Нехай задано два довільні математичні об'єкти R_1 та R_2, які мають однакову структуру. Це можуть бути вектори будь-якої вимірності, чи деякі спискові структури, точки яких приведені у відповідність. Нехай далі задано дві скалярні функції $\alpha_0(u)$ та $\alpha_1(u)$, для яких виконуються умови:

$$\begin{aligned} &1-\alpha_1(u) = \alpha_0(u) \quad \text{при будь-яких } u, \\ &\alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_0(1) = 0, \\ &\alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_1(1) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Тоді за умови, що R_1 та R_2 вектори, вираз:

$$R=\alpha_0(u)\,R_1+\alpha_1(u)\,R_2$$

визначить вектор, вимірність якого на одиницю більше вимірності векторів R_1 та R_2. З u=0 випливає: $R = R_1$, а з $u = 1$ випливає: $R = R_2$.

В найпростішому випадку:

$$\alpha_0(u)=1-u, \qquad \alpha_1(u)=u.$$

Легко переконатися, що для них виконуються умови (11). Тоді вираз:

$$R = (1-u)\,R_1+u\,R_2 \tag{12}$$

задає лінійну інтерполяцію векторів R_1 та R_2. Якщо R_1 та R_2 радіус-вектори точок $P_1[x_1\ y_1\ z_1]$ та $P_2[x_2\ y_2\ z_2]$ маємо з (12):

$$R(u) = (1-u)\,P_1+u\,P_2 \tag{13}$$

– векторне рівняння прямої, що інцидентна цим точкам. В параметричному вигляді воно записується:

$$\begin{aligned} x &= (1-u)x_1+ux_2, \\ y &= (1-u)y_1+uy_2, \\ z &= (1-u)z_1+uz_2. \end{aligned}$$

При $u \in [0,1]$ отримуємо множину точок відрізка P_1P_2. Тому такі рівняння можемо розглядати, як рівняння відрізку прямої.

Далі кінцеві точки кривих межі з'єднуються прямими a_0, b_0, c_0, d_0 (рис.7.а). Їх рівняння згідно з (13):

$$\begin{aligned} a_0: &\quad R_0(u,0) = (1-u)\,P(0,0) + uP(1,0), \\ b_0: &\quad R_0(u,1) = (1-u)\,P(0,1) + uP(1,1), \\ c_0: &\quad R_0(0,v) = (1-v)\,P(0,0) + vP(0,1), \\ d_0: &\quad R_0(1,v) = (1-v)\,P(1,0) + vP(1,1). \end{aligned} \tag{14}$$

Проінтерполюємо прямі a_0 та b_0 у v - напрямі:

$$R\,(u,v) = (1-v)\,R_0(u,0) + v\,R_0(u,1),$$

або з урахуванням (14):

$$S_3(u,v) = (1-v)\,(1-u)P(0,0) + (1-v)\,uP(1,0) + v(1-u)\,P(0,1) + uvP(1,1). \tag{15}$$

Виконавши інтерполяцію прямих c_0 та d_0 в u - напрямі отримаємо те саме рівняння.

Рівняння (15) має функції "змішання", лінійні відносно кожного з параметрів u та v, тому зветься білінійним векторними рівнянням. Легко перевірити, що при $u = 0$ отримуємо пряму c_0, а при $u = 1$ – пряму d_0. При $u,v \in [0,1]$ та $u = \text{const}$ отримаємо рівняння відрізків прямих, кінцеві точки яких належать прямим a_0 та b_0, при $u,v \in [0,1]$ та $v = \text{const}$ – відрізків прямих, кінцеві точки яких належать прямим c_0 та d_0.

Тобто, поверхня (15) має дві сім'ї прямолінійних твірних і визначає при $u,v \in [0,1]$ порцію гіперболічного параболоїду (рис.7.б). В літературі з обчислювальної геометрії [4] її називають ще білінійчатою поверхнею.

Виконавши інтерполяцію кривих a та b у v - напрямі, а кривих c та d в u – напрямі, отримаємо векторно-параметричні рівняння порцій поверхонь

$$S_1(u,v) = (1-v)\,R(u,0) + v\,R(u,1), \tag{16}$$

$$S_2(u,v) = (1-u)\,R(0,v) + u\,R(1,v). \tag{17}$$

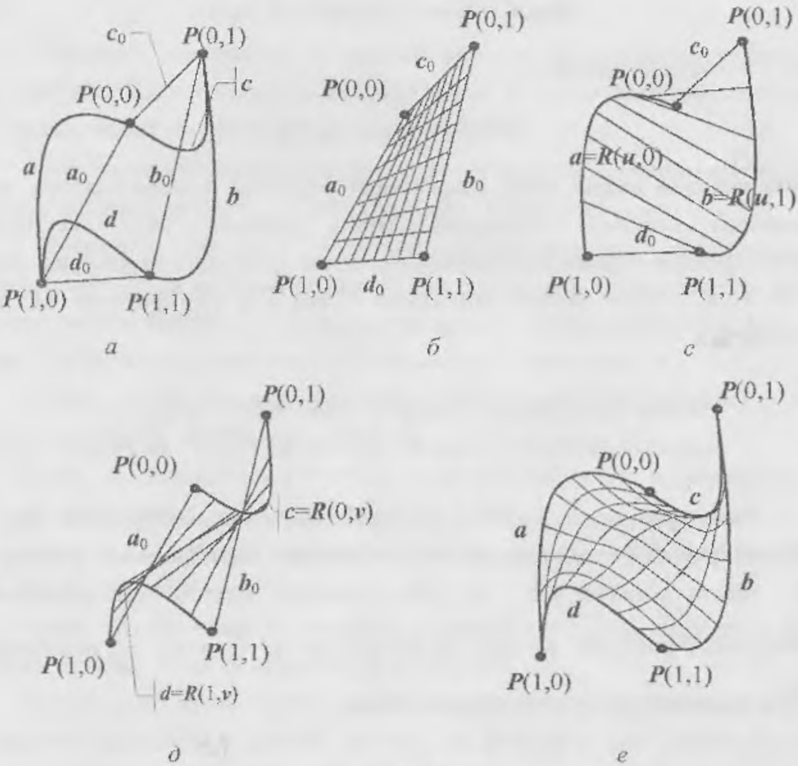


Рис. 7

Це лінійчаті поверхні. Вони складаються з прямих, що з'єднують точки відповідних напрямних кривих з однаковими значеннями параметрів. На рис. 7.в) зображена поверхня $S_1(u,v)$, межа якої складається з ліній a, b та c_0, d_0, а на рис.7.г) – поверхня $S_2(u,v)$, межа якої складається з ліній c, d та a_0, b_0.

Розглянемо на поверхнях S_1, S_2, S_3 лінії при граничному значенні одного з параметрів, наприклад $v = 0$. З рівнянь (16), (17) та (15) відповідно отримаємо:

$$S_1(u,0) = R(u,0) = a,$$
$$S_2(u,0) = (1-u)\, R(0,0) + u\, R(1,0) = (1-u)P(0,0) + uP(1,0) = a_0,$$
$$S_3(u,0) = (1-u)P(0,0) + uP(1,0) = a_0.$$

Вектор

$$R(u,v) = S_1(u,v) + S_2(u,v) - S_3(u,v) \tag{18}$$

при $v = 0$ буде дорівнювати

$$R(u,0) = a + a_0 - a_0 = a,$$

тобто вихідній кривій межі. Аналогічний результат отримується при всіх граничних значеннях параметрів. Тобто, рівняння (18) є векторно-параметричним рівнянням поверхні, яка точно проходить через криві межі a, b, c, d. Вона зветься поверхнею Кунса і в розгорнутому вигляді записується

$$R(u,v) = (1\text{-}v)\,R(u,0) + v\,R(u,1) + (1\text{-}u)\,R(0,v) + u\,R(1,v) -$$
$$- (1\text{-}u)\,(1\text{-}v)\,P(0,0) - (1\text{-}v)\,u\,P(1,0) - v\,(1\text{-}u)\,P(0,1) - uv\,P(1,1). \tag{19}$$

Якщо криві межі: належать, або паралельні площинам проекцій $x0z$ та $y0z$; утворюють в плані прямокутник дві сторони якого належать осям $0x$ та $0y$ і мають довжини L та M відповідно; можуть бути аналітично представлені у вигляді $z = z(u)$ та $z = z(v)$, де $u = \frac{L}{x}$, а $v = \frac{M}{y}$, то рівняння (19) в параметричному вигляді записується

$$\begin{aligned} &x=Lu,\\ &y=Mv,\\ &z(u,v) = (1\text{-}v)\,z(u,0) + v\,z(u,1) + (1\text{-}u)\,z(0,v) + u\,z(1,v) -\\ &- (1\text{-}u)\,(1\text{-}v)\,z(0,0) - (1\text{-}v)\,u\,z(1,0) - v\,(1\text{-}u)\,z(0,1) - uv\,z(1,1). \end{aligned} \tag{20}$$

Такий варіант представлено на зразку завдання 2 (рис.8). Поверхні S_1, S_2 у цьому випадку – циліндроїди з площинами паралелізму $y0z$ та $x0z$, відповідно.

В завданні використовується саме спрощений варіант, бо при ньому значно скорочується обсяг підрахунків і є можливість частину підрахунків замінити графічними побудовами.

Завдання 2. **Інтерполяція поверхні за методом Кунса**

Завдання виконується на аркуші формату А3, до якого додаються розрахунки. Варіанти завдань наведені в табл. 3, зразок виконання завдання показано на рис. 8, а розрахунки до нього – на стор.25-26.

Необхідно сконструювати серединну поверхню оболонки покриття за дискретно заданим контуром ***ABCDEFGHA*** і розмірами плану $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{M}$.

Серединна поверхня оболонки параметризується як порція і інтерполюється за методом Кунса. Кожна з чотирьох кривих контура межі задана трьома точками. Точки вихідних кривих повинні належати поверхні, тому і криві контуру межі необхідно визначити в параметрах $\boldsymbol{u,v}$.

Крива a, що належить площині $x0z$, визначається як $R(u,0)$, а її точки: $A=P(0,0)$; $B=P(0.5,0)$; $C=P(1,0)$.

Крива b, що належить площині, рівняння якої $y=M$, визначається як $R(u,1)$, а її точки: $G=P(0,1)$; $F=P(0.5,1)$; $E=P(1,1)$.

Крива c, що належить площині $y0z$, визначається як $R(0, v)$, її точки A та G вже визначені, $H=P(0,0.5)$.

Крива d, що належить площині, рівняння якої $x=L$, визначається як $R(1,v)$, її точки C та E визначені, а $D=P(1,0.5)$.

Вихідні дані задовольняють умови, сформульовані для рівняння (20) і конкретні розрахунки будуть вестися за ним, але для представлення використовуємо загальну векторну форму (10).

Координати z вихідних точок, що задані за варіантами, вносяться до таблиці 2 і займають позиції відповідно встановленим значенням параметрів u та v (ці графи таблиці умовно позначимо "*V*"). Моделювання порції за Кунсом передбачає, що криві межі задані аналітично. В завданні необхідно розрахувати дев'ять внутрішніх точок порції, а для цього – визначити по дві додаткові точки на кожній кривій межі (на рис.8 вони позначені римськими цифрами). Для опису кривих застосовують рівняння Лагранжа, що задається трьома точками і у варіанті нормалізованої параметризації для кривої $R(u,0)$ має вигляд:

$$R(u,0)=P(0,0)\underbrace{\frac{(u-0.5)\cdot(u-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}}_{L_1(u)}+P(0.5,0)\underbrace{\frac{(u-0)\cdot(u-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}}_{L_2(u)}+P(1,0)\underbrace{\frac{(u-0)\cdot(u-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)}}_{L_3(u)}$$

Для інших кривих межі (дивись розрахунки до завдання 2) коефіцієнти Лагранжа ті самі, тому необхідно попередньо обчислити $L_1(u)$, $L_2(u)$, $L_3(u)$ для значень параметрів $u = 0.25$ та $u = 0.75$.

Аплікати додаткових точок обчислюються за рівняннями їх меж і заносяться до таблиці 2, відповідно значенням параметрів u та v, (заповнені цими координатами графи таблиці позначені "*W*").

Таблиця 2

Результати розрахунку аплікат

v / u	0	0.25	0.5	0.75	1.0
0	*V*	*W*	*V*	*W*	*V*
0.25	*W*				*W*
0.5	*V*				*V*
0.75	*W*				*W*
1.00	*V*	*W*	*V*	*W*	*V*

Для побудови точок поверхні Кунса (18) спочатку будують її складові поверхні в прямокутній диметрії з урахуванням розміру заданого плану $L \times M$, на якому будується прямокутна сітка.

Поверхня $S_1(u,v)$ визначається рівнянням (16) і є циліндроїдом з напрямними *ABC* та *CFE* і площиною паралелізму $y0z$. Поверхня $S_2(u,v)$ визначається рівнянням (17) і є циліндроїдом з напрямними *AHG* та *CDE* і площиною паралелізму $x0z$.

Поверхня $S_3(u,v)$ є поверхня гіперболічного параболоїду (15), що належить точкам стику кривих межі. Для всіх трьох поверхонь визначають аплікати у вузлах прямокутної сітки.

Лінійна поверхня Кунса також будується в диметрії (зразок рис.8.). Спочатку будуються всі її контурні криві та прямокутна сітка в плані. У кожному внутрішньому вузлі сітки визначається апліката. На зразку для точки u=0.25 та v=0.75 на всіх поверхнях ця апліката виділена. Для результуючої поверхні вона дорівнює:

$$z = z_1+z_2-z_3.$$

На другому аркуші розрахунків до завдання 2 показано як для тієї ж точки за допомогою рівняння (20) виконується точний розрахунок аплікати та графічний контроль її значення.

Після визначення аплікат всіх внутрішніх точок дані відповідно значенням параметрів u та v заносять до таблиці (в таблиці 2 ці графи показано пустими). Побудовані точки з'єднуються лініями так, щоб утворилися лінії u=const та v=const. Встановлюється видимість.

Лінії межі, що описані поліномами в формі Лагранжа, є квадратними параболами з вертикальними осями. Оскільки поверхня Кунса отримана лінійною інтерполяцією в u та v- напрямах, то лінії u=const та v=const теж будуть квадратними параболами. Це дає можливість приблизно перевірити результати побудови: жодна лінія сітки не повинна мати перетину.

Контроль виконання завдання на комп'ютері виконується за допомогою учбової програми "Кунс" в режимі діалогу. Студент задає координати обчислених ним точок поверхні і інші вихідні дані. За запитом системи вводить координати контрольної точки. Якщо апліката правильна, то на екран виводиться зображення поверхні і результати розрахунку в табличній формі (рис.9). За ними студент може перевірити усі інші значення. Якщо контрольна апліката розрахована невірно, результат на екран не виводиться.

Вивчення методів побудови поверхонь за методом Кунса в системі AutoCAD 2002. За допомогою інструкції користувача, спираючись на лекційні матеріали і власні знання, отримані при виконанні завдання 2, студент набуває навичок моделювання поверхонь Кунса у загальному випадку з просторовою межею.

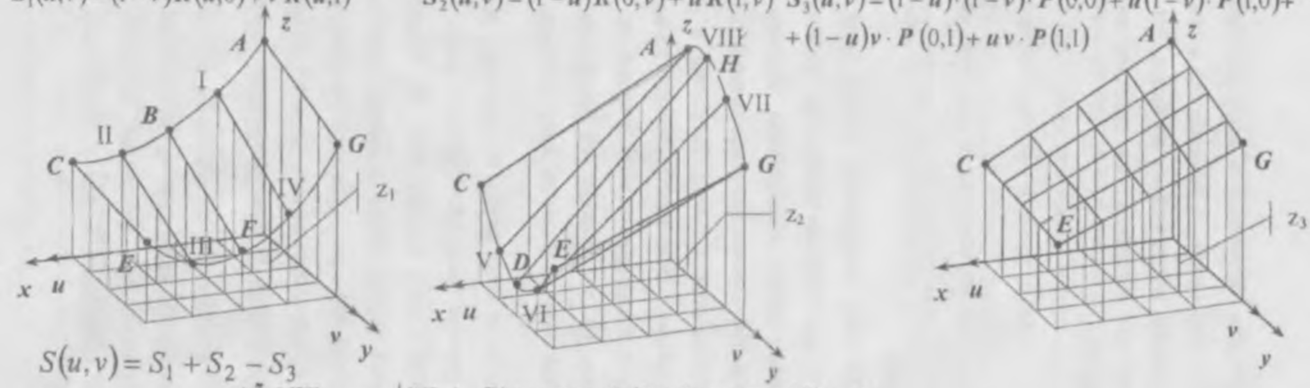
Завдання 2. **Інтерполяція поверхонь за методом Кунса**

Умова: Сконструювати серединну поверхню оболонки покриття за заданим дискретно опорним контуром *ABCDEFGHA* і розміром плана L x M

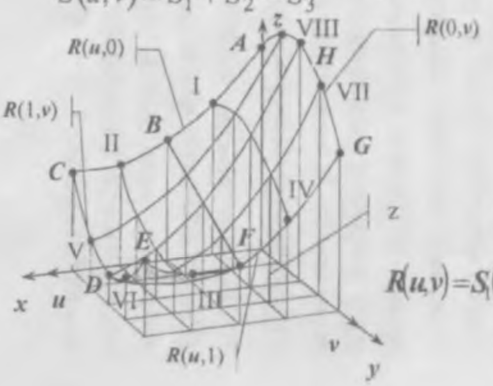
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*
z	100	60	50	15	40	30	80	120	100

L=100; M=100

$S_1(u,v)=(1-v)R(u,0)+v\,R(u,1)$ $S_2(u,v)=(1-u)R(0,v)+u\,R(1,v)$ $S_3(u,v)=(1-u)\cdot(1-v)\cdot P(0,0)+u(1-v)\cdot P(1,0)+$
$+(1-u)v\cdot P(0,1)+uv\cdot P(1,1)$



$S(u,v)=S_1+S_2-S_3$



Рівняння лінійної поверхні Кунса:

$$R(u,v)=(1-v)R(u,0)+vR(u,1)+(1-u)R(0,v)+uR(1,v)-$$
$$-(1-u)(1-v)P(0,0)-u(1-v)P(1,0)-(1-u)vP(0,1)-uvP(1,1)$$

$x=L\cdot u;\ \ y=M\cdot v$

Лінійна поверхня Кунса

$$R(u,v)=S_1(u,v)+S_2(u,v)-S_3(u,v)$$

u/v	0	0,25	0,5	0,75	1
0	100,00	117,50	120,00	107,50	80,00
0,25	76,25	80,31	76,88	65,94	47,50
0,5	60,00	52,50	45,00	37,50	30,00
0,75	51,25	34,06	24,38	22,19	27,50
1	50,00	25,00	15,00	20,00	40,00

Рис. 8

ПГС-11 Нехода М.К.

Розрахунки до завдання 2

Рівняння ліній контуру

$$R(u,0)=P(0,0)\frac{(u-0.5)\cdot(u-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}+P(0.5,0)\frac{(u-0)\cdot(u-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}+P(1,0)\frac{(u-0)\cdot(u-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)};$$

$$R(u,1)=P(0,1)\frac{(u-0.5)\cdot(u-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}+P(0.5,1)\frac{(u-0)\cdot(u-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}+P(1,1)\frac{(u-0)\cdot(u-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)};$$

$$R(0,v)=P(0,0)\frac{(v-0.5)\cdot(v-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}+P(0,0.5)\frac{(v-0)\cdot(v-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}+P(0,1)\frac{(v-0)\cdot(v-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)};$$

$$R(1,v)=P(1,0)\frac{(v-0.5)\cdot(v-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}+P(1,0.5)\frac{(v-0)\cdot(v-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}+P(1,1)\frac{(v-0)(v-0.5)}{(1-0)(1-0.5)};$$

Розрахунок коефіцієнтів $L_i(u)$ для значень параметрів $u=0.25$ та $u=0.75$:

$$L_1(0{,}25)=\frac{(0.25-0.5)\cdot(0.25-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}=0.375;$$

$$L_1(0{,}75)=\frac{(0.75-0.5)\cdot(0.75-1)}{(0-0.5)\cdot(0-1)}=-0.125;$$

$$L_2(0{,}25)=\frac{(0.25-0)\cdot(0.25-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}=0.75;$$

$$L_2(0{,}75)=\frac{(0.75-0)\cdot(0.75-1)}{(0.5-0)\cdot(0.5-1)}=0.75;$$

$$L_3(0{,}25)=\frac{(0.25-0)\cdot(0.25-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)}=-0.125;$$

$$L_3(0{,}75)=\frac{(0.75-0)\cdot(0.75-0.5)}{(1-0)\cdot(1-0.5)}=0.375$$

Розрахунок аплікат точок на контурних кривих:

на параболі *ABC* за рівнянням $R(u,0)$:

$z_I=z(0.25,0)=100\cdot0.375+60\cdot0.75+50\cdot(-0.125)=76.25,$

$z_{II}=z(0.75,0)=100\cdot(-0.125)+60\cdot0.75+50\cdot0.375=51.25;$

на параболі *GFE* за рівнянням $R(u,1)$:

$z_{IV}=z(0.25,1)=80\cdot0.375+30\cdot0.75+40\cdot(-0.125)=47.50,$

$z_{III}=z(0.75,1)=80\cdot(-0.125)+30\cdot0.75+40\cdot0.375=27.50;$

на параболі *AHG* за рівнянням $R(0,v)$:

$z_{VIII}=z(0,0.25)=100\cdot0.375+120\cdot0.75+80\cdot(-0.125)=117.50,$

$z_{VII}=z(0,0.75)=100\cdot(-0.125)+120\cdot0.75+80\cdot0.375=107.50;$

на параболі *CDE* за рівнянням $R(1,v)$:

$z_V=z(1,0.25)=50\cdot0.375+15\cdot0.75+40\cdot(-0.125)=117.50,$

$z_{VI}=z(1,0.75)=50\cdot(-0.125)+15\cdot0.75+40\cdot0.375=107.50.$

Розрахунки до завдання 2 (продовження)

Розрахунок аплікат точок поверхні Кунса:

$z_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(1-\boldsymbol{v})\cdot z(\boldsymbol{u},0)+\boldsymbol{v}z(\boldsymbol{u},1)$;

$z_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(1-\boldsymbol{u})\cdot z(0,\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}z(1,\boldsymbol{v})$;

$z_3(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(1-\boldsymbol{u})\cdot(1-\boldsymbol{v})z(0,0)+\boldsymbol{u}(1-\boldsymbol{v})\, z(1,0)+ (1-\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v}\, z(0,1)+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\, z(1,1)$;

$$z(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})= z_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+ z_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})- z_3(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

Розрахунок точки з параметрами $\boldsymbol{u}=0.5$; $\boldsymbol{v}=0.5$:

$z\ (0.5,0.5) = 0.5\cdot(z(0.5,0)+z(0.5,1)+ z(0,0.5)+ z(1,0.5)) - 0.25\cdot(z(0,0)+z(1$ $+z(0,1)+ z(1,1)) = 0.5(60+30+120+15) - 0.25(100+50+80+40) = 45.$

Розрахунок точки з параметрами $\boldsymbol{u}=0.25$; $\boldsymbol{v}=0.75$:

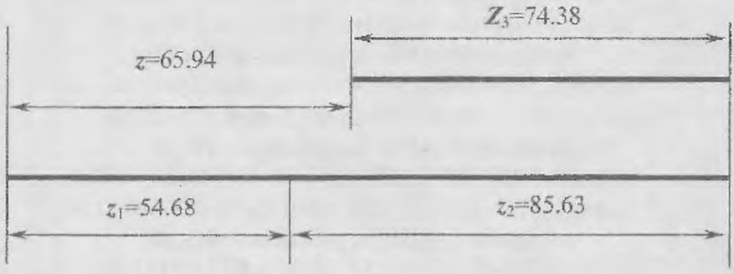
$z_1\ (0.25,0.75) = 0.25\cdot z(0,0.25) + 0.75\cdot z(0.75,1) = 0.25\cdot 76.25 + 0.75\cdot 47.5$ $=54.6875$;

$z_2\,(0.25,0.75) = 0.75\cdot z(0,0.75) + 0.25\cdot z(1,0.75) = 0.75\cdot 107.5 + 0.25\cdot 20 = =85.6$

$z_3\,(0.25,0.75) = z(0,0)\cdot 0.75\cdot 0.25 + z(1,0)\cdot 0.25\cdot 0.25 + z(0,1)\cdot 0.75\cdot 0.75+$ $+z(1,1)\cdot 0.25\cdot 0.75 = 0.75\cdot 0.25(100+40) + 0.0625\cdot 50 + 0.75\cdot 0.75\cdot 80 = 74.375$;

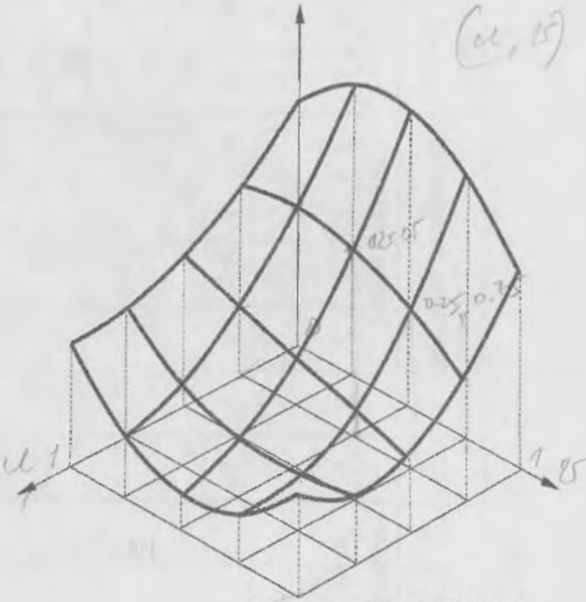
$z = 54.6875+85.625-74.375=65.94.$

Графічний контроль точки $R(0.25,0.75)$;



З р а з о к

Y / X	0	1/4M	1/2M	3/4M	M
0	100,0	117,0	120,0	107,50	80,0
1/4L	76,25	80,31	76,88	65,94	47,50
1/2L	60,0	52,50	45,0	37,50	30,0
3/4L	51,25	34,06	24,38	22,19	27,50
L	50,0	25,0	15,0	20,0	40,0



Нехода В.М.ПЦБ 11

Рис. 9

Таблиця 3

Варіанти до завдання 2

Номер варіанта	**Координата**	**Точки контуру**								*L*	*M*
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*		
1… 33	*x*	0	0.5*L*	*L*	*L*	*L*	0.5*L*	*0*	*0*		
	y	0	0	0	0,5*M*	*M*	*M*	*M*	0.5*M*		
1	*z*	40	10	20	60	40	10	20	60	100	175
2		20	60	40	0	10	50	30	70	100	150
3		70	20	40	10	30	50	10	40	180	120
4		30	70	0	40	20	10	60	0	200	100
5		10	60	20	40	0	35	20	50	150	100
6		80	40	10	0	40	30	50	20	120	150
7		140	40	40	30	10	50	30	40	90	160
8		0	20	60	30	20	40	70	30	150	120
9		40	70	40	0	40	30	50	70	100	180
10		50	10	80	30	0	50	10	40	175	100
11		70	60	30	40	10	50	0	50	100	120
12		10	70	5	20	0	20	60	50	180	120
13		20	60	0	40	10	50	0	60	175	200
14		80	60	60	0	50	0	30	0	200	100
15		40	60	10	30	0	20	0	50	120	100
16		70	30	20	0	50	10	70	30	180	100
17		60	0	80	20	10	40	0	20	100	200
18		80	30	50	20	40	60	20	50	160	120
19		30	0	10	70	30	10	40	50	100	180
20		30	70	50	10	30	50	20	70	175	100
21		10	30	70	40	30	50	80	40	140	200
22		20	60	10	50	20	0	70	10	190	120

Номер варіанта	Координата	Точки контуру								L	M
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*		
1… 33	*x*	0	0.5*L*	*L*	*L*	*L*	0.5*L*	*0*	*0*		
	y	0	0	0	0,5*M*	*M*	*M*	*M*	0.5*M*		
23	*z*	20	70	30	50	10	80	30	60	200	150
24		60	0	20	50	10	40	0	20	175	150
25		10	70	30	0	60	20	40	60	100	160
26		50	70	30	0	20	40	0	70	100	190
27		20	80	60	30	10	30	70	60	200	150
28		30	70	10	60	20	70	0	50	175	200
29		110	50	0	40	20	70	0	50	175	175
30		30	70	20	50	0	60	30	0	140	200
31		80	60	20	20	40	10	20	40	170	100
32		150	100	20	50	40	50	120	50	100	200
33		100	60	50	15	40	30	80	120	100	100

Список літератури

1. *Михайленко В.Е., Ковалёв С.Н., Седлецкая Н.И., Антилогова В.А.* Инженерная геометрия с элементами теории параметризации: Учебн. пособие. – К.: УМК ВО, 1989. – 64с.
2. *Інженерна та комп'ютерна графіка*: Підручник / В.Є.Михайленко, В.М.Найдиш, А.М.Підкоритов, І.А.Скидан; За ред. В.Є.Михайленка. – К.: Вища шк., 2000. – 342 с.
3. *Ковальов С.М.* Параметричний аналіз в геометрії: Навч. посібник. – К.: КНУБА, 1999. – 77с.
4. *А.Фокс, М.Пратт*. Вычислительная геометрия. – М.: Мир., 1982. – 304 с.
5. *Стародетко Е.А.* Элементы вычислительной геометрии. – Минск: Наука и техника., 1986. – 240 с.

З м і с т

Навчально-методичне видання

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт з курсу
"Інженерна та комп'ютерна графіка"
для студентів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Укладачі: **АНПІЛОГОВА** Віра Онисимівна
СЕДЛЕЦЬКА Наталія Іванівна
ВАСИЛЕВСЬКИЙ Олег Валентинович

Комп'ютерна верстка *В.О. Анпілогової, М.С. Бут*

Підписано до друку 22.11. 2003. Формат 60x90$_{1/16}$.
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,0. Ум. фарбовідб. 17.
Тираж 200 прим. Вид. № 94/III-03. Зам. № 190/11-03.

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.