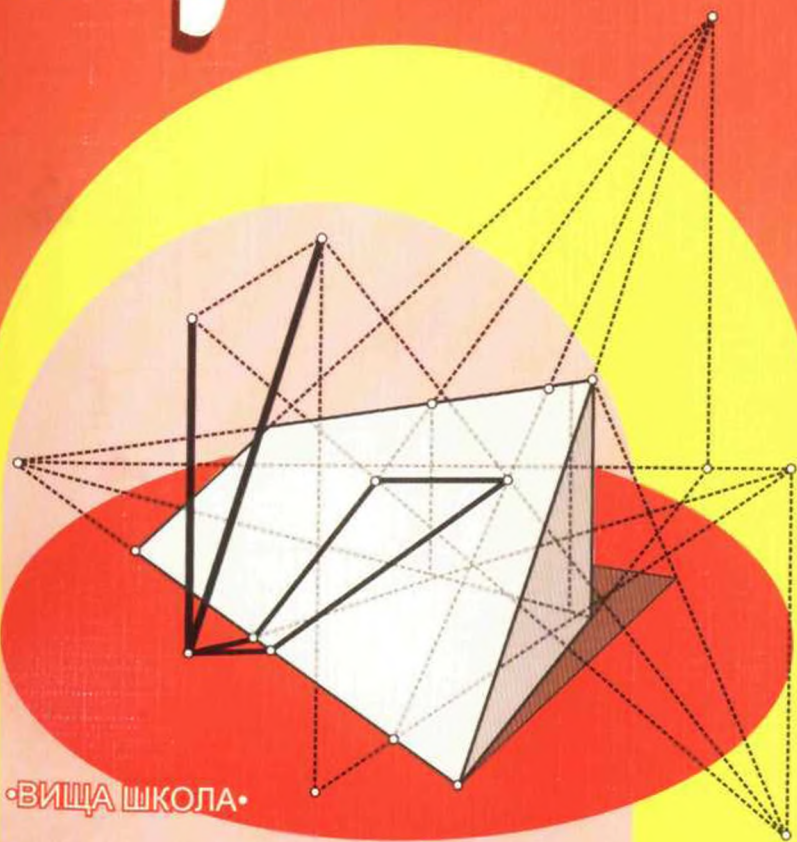


Ю. М. КОВАЛЬОВ

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ



•ВИЩА ШКОЛА•

Ю. М. НОВАЛЬОВ

ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Допущено Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2003

УДК 514.18 : 004.925.8(075.8)
ББК 30.11я73
К 56

Гриф надано Міністерством освіти
і науки України (лист від 26 червня
2001 р. № 14/18.2.958)

Рецензенти: засл. діяч науки України, д-р техн. наук, проф. В. Є. Михайленко (КНУБА), д-р техн. наук, проф. В. В. Ванін (НТУУ «КПІ»)

Редактор В. Ф. Хміль

Ковальов Ю. М.

К 56 Основи геометричного моделювання. Навч. посіб. — К.: Вища шк., 2003. — 231 с. іл.
ISBN 966-642-114-3

Посібник містить усі розділи нарисної геометрії. Окрема частина присвячена характеристичним сучасним напрямкам розвитку дисципліни. Наведено питання для самоконтролю, деякі з яких є проблемними. Акцент зроблено на зв'язок із майбутньою фаховою діяльністю випускників технічних і будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Для студентів вищих навчальних закладів

УДК 514.18 : 004.925.8(075.8)
ББК 30.11я73

ISBN 966-642-114-3

© Ю. М. Ковальов, 2003

ЗМІСТ

Передмова	5
Умовні позначення та скорочення	6
ЧАСТИНА ПЕРША ОСНОВИ	7
1. Організація праці	8
1 1 Комплект інструментів	8
1 2 Ведення конспекту	8
1 3 Підготовка до занять	10
2. Історичний нарис	11
2 1 Первісний лад	11
2 2 Перші цивілізації та античність	13
2 3 Середньовіччя	19
2 4 Від Ренесансу до третього тисячоліття	20
3. Сучасний погляд	29
3 1 Визначення нарисної геометрії та її задач	29
3 2 Побудова абстрактного простору Π^3	30
3 3 Визначення проєкційних систем	33
ЧАСТИНА ДРУГА КЛАСИКА	39
4 Точки, прямі, площини на епюрі Монжа. Позиційні та метричні задачі	40
4 1 Поняття про позиційні та метричні задачі	40
4 2 Точки	40
4 3 Прямі	44
4 4 Площини	50
5. Перетворення проєкцій	55
5 1 Класифікація методів перетворення проєкцій	55
5 2 Зміна площин проєкцій	56
5 3 Обертання навколо перпендикулярних осей	59
5 4 Плоскопаралельне переміщення	60
5 5 Обертання навколо паралельних осей	62
5 6 Суміщення	63
5 7 Допоміжне косокутне проєкціювання	65
5 8 Допоміжне прямокутне проєкціювання	66
6. Грані поверхні та багатогранники	68
6 1 Визначення, класифікація, властивості	68
6 2 Належність точки до гранної поверхні	72
6 3 Перетин гранної поверхні площиною	72
6 4 Розгортка гранних поверхонь	74
6 5 Перетин багатогранників прямими лініями	77
6 6 Взаємний перетин багатогранників	79
6 7 Проєктування дахів як приклад побудови багатогранників за заданими умовами	83
7. Криві ліній	87
7 1 Визначення, класифікація, властивості	87
7 2 Плоскі криві	89

7.3. Просторові криві	96
7.4. Приклади кривих ліній у природі, науці, будівництві	97
8. Криві поверхні	100
8.1. Визначення, класифікація, властивості	100
8.2. Позиційні задачі	105
8.3. Метричні задачі	116
ЧАСТИНА ТРЕТЯ. СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ	123
9. Аксонометрія	124
9.1. Теорія	124
9.2. Приклади побудови геометричних фігур	126
9.3. Розв'язування задач	129
10. Перспектива	133
10.1. Приклади застосування	133
10.2. Перспектива на вертикальній площині	138
10.3. Перспектива на похилій площині	144
10.4. Спосіб перспективної сітки	146
10.5. Заключні зауваження	148
11. Проекції з числовими позначками	149
11.1. Зображення простих фігур	149
11.2. Позиційні задачі	151
11.3. Вертикальне планування — метричні задачі	153
12. Побудова тіней	156
12.1. Загальна послідовність побудови тіней	156
12.2. Побудова тіней на епюрі Монжа	158
12.3. Побудова тіней в аксонометрії	164
12.4. Побудова тіней у перспективі	166
12.5. Побудова тіней у проекціях із числовими позначками	171
ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА. СУЧАСНІ НАПРЯМИ	174
13. Обчислювальна геометрія	175
13.1. Вимоги, задачі, визначення	175
13.2. Моделювання складних об'єктів. Види моделей	178
13.3. Моделювання кривих ліній	181
13.4. Моделювання поверхонь	184
13.5. Моделювання об'ємних тіл	186
13.6. Особливості розв'язування задач	187
14. Комп'ютерна графіка	190
14.1. Визначення, задачі, компоненти	190
14.2. Побудова реалістичних зображень	197
15. Багатовимірна геометрія	204
15.1. Приклади й узагальнення	204
15.2. Аксиоми і властивості	205
15.3. Епюри та зображення	208
16. Моделювання складних систем	211
16.1. Приклади й узагальнення	211
16.2. Концепції та аксиоми	212
16.3. Самоорганізація С-простору	213
16.4. С-відображення і графічні моделі С-простору	216
16.5. Приклади практичного застосування теорії	218
Висновки	223
Список термінів	224
Список використаної та рекомендованої літератури	231

*Присвячується 70-річчю
Національного авіаційного
університету України*

ПЕРЕДМОВА

Наслідком сучасного розвитку науки і техніки є диференціація вимог до геометричного моделювання, яке перестає бути переважно графічним. Через те класичні курси нарисної геометрії та графіки мають бути доповнені ідеями і методами комп'ютерної графіки, обчислювальної геометрії, багатовимірної геометрії, теорії систем. Перелічені напрями мають спільну теоретичну основу — аксіоматичні моделі простору, теорію перетворень, засоби забезпечення наочності. Це є підґрунтям, на якому кожен напрям може бути розгорнутий в окремий курс. Тому назва навчального посібника є цілком виправданою, і його метою є викладення основ геометричного моделювання для студентів вищих навчальних закладів.

У сучасній літературі помітна тенденція до алгоритмічної форми подання матеріалу. Відхід від наочності стримує формування творчого просторового мислення, пов'язаного з діяльністю правої півкулі мозку, тоді як алгоритмічний виклад апелює до аналітичних здібностей лівої півкулі. Максимум графіки при необхідному мінімумі пояснень має виправити цю диспропорцію. Це не призводить до втрати належного теоретичного рівня: там, де потрібно узагальнити матеріал і спростити засвоєння, наводяться результати, що навіть виходять за межі усталеної традиції (частина перша).

Скорочення аудиторних годин та збільшення частки самостійної роботи студентів потребують корекції як змісту і вправ курсу, так і стилістики викладу матеріалу. Спираючись на досвід викладання в Національному авіаційному університеті України, автор прагнув досягти максимальної ясності викладу, зручно розмістити матеріал, послатися на маловідомі факти (частини друга і третя). Деякі вправи потребують самостійних досліджень. Стило описано актуальні напрями геометричного моделювання (частина четверта).

Наприкінці посібника наведено список термінів стосовно геометричного моделювання. Список подано трьома мовами — українською, російською та англійською.

Автор висловлює шире подяку Українській асоціації з прикладної геометрії за всебічну підтримку при підготовці цього посібника.

Особлива подяка рецензентам д-ру техн. наук, проф. *В. Є. Михайленку* і д-ру техн. наук, проф. *В. В. Ваніну* за критичні зауваження, врахування яких сприяло поліпшенню викладу.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

- A, B, C, \dots (великі латинські літери), чи $1, 2, 3, \dots$ (арабські цифри) — точки в просторі
 a, b, c, \dots (малі латинські літери, крім f, h) або (1234) — лінії в просторі (прямі, криві, ламані)
 (AB) — відрізок
 AB — відстань
 f — фронталь
 h — горизонталь
 P, Q, S, \dots (великі латинські літери) або $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (малі грецькі літери) — площини
 Π_1, Π_2, Π_3 — площини проєкцій (горизонтальна, фронтальна, профільна)
 (ABC) — відсік площини
 $\Delta, \Gamma, \Theta, \dots$ (великі грецькі літери) — поверхні
 $A_1, c_2, \Delta_3, \dots$ — проєкції геометричних фігур на Π_1, Π_2, Π_3
 $A_1, c_2, \Delta_3, \dots$ — проєкції фігур на довільні площини
 $\angle \gamma$ або $\angle ABC, \perp$ — кути, прямий кут
 \cup, \wedge — об'єднання
 \cap, \vee — перетин
 $\supset, \subset, \in, \ni$ — належність
 $\not\subset, \notin$ — неналежність
 \equiv — тотожність
 \parallel — паралельність
 \perp — перпендикулярність
— — схрещуваність
 ∞ — нескінченність
т. — точка
ЕОМ — електронна обчислювальна машина
ЕПТ — електронно-променева трубка
ЕС — ергатичне середовище
МЛС — модель взаємодії людини з навколишнім середовищем
ОМ — об'єктна модель
ОС — операційна система
ПК — персональний комп'ютер
ПРЗ — проєктивне розширення зовнішнє
СР — сценарій розширення
РВ — розширення внутрішнє
РЗ — розширення зовнішнє
СВІ — система відображення інформації
ТЗ — тернарна зв'язка
ТРВ — топологічне розширення внутрішнє
ТРЗ — топологічне розширення зовнішнє

ЧАСТИНА

перша ОСНОВИ

Геометричне моделювання — складна наука, для засвоєння якої потрібно чимало творчих зусиль. Цей навчальний курс включає кілька напрямів, які за призначенням, методами, засобами та виглядом, на перший погляд, мають небагато спільного. Проте така спільність існує, хоча й ховається глибоко, на рівні основ — історичних і теоретичних. Слід розуміти це, й тоді прийде усвідомлення, що геометричне моделювання — єдине ціле, а кожен з напрямів посідає належне місце.

I. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРАЦІ

Навчальний курс основ геометричного моделювання включає лекції, практичні заняття та екзамен, у процесі яких вивчаються теоретичні основи, відпрацьовуються способи розв'язування задач, проводиться контроль засвоєння матеріалу. Обов'язковою є самостійна підготовка, зокрема виконання графічних робіт. Дотримання описаних нижче правил, доцільність яких доведено багатьма поколіннями студентів, допомагає робити це краще.

1.1. КОМПЛЕКТ ІНСТРУМЕНТІВ

Слід використовувати і приносити на заняття:

- чорний та два-три кольорових олівці;
- циркуль;
- лінійку і трикутники з кутами 30 та 45°;
- транспортир;
- лекало;
- гумку.

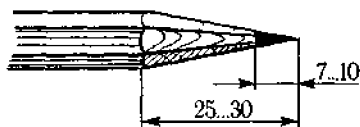


Рис. 1.1. Правильне загострювання олівця

Під час виконання графічних робіт потрібно застосовувати грифелі М чи 2М (В і 2В) для проведення суцільних основних товстих ліній та Т(Н) для тонких ліній. Правильне загострювання олівця показано на рис. 1.1.

1.2. ВЕДЕННЯ КОНСПЕКТУ

Конспект лекцій є найприйнятнішим для студента викладом курсу, першим помічником при підготовці до занять та екзаменів, ефективним засобом запам'ятовування і засвоєння матеріалу, але лише за умови його належної якості. Психологи й ергономісти радять таке.

Структурування

Необхідно нумерувати назви тем та питань, виділяти визначення і теореми, відтіняти значущі фрагменти лекцій. Способи можуть бути різні, наприклад: ЛЕКЦІЯ 1; Питання 1.1; } Визначення; || Теорема.

Важливий текст

Можна використовувати різні шрифти, олівці різних кольорів тощо. Проте не слід зловживати одночасним застосуванням багатьох засобів.

Надання візуально прийнятної форми

Наприклад, перелік, наведений на рис. 1.2, *а*, сприймається і запам'ятовується краще, ніж на рис. 1.2, *б*; внутрішні зв'язки у тексті краще видно при наданні йому вигляду, показаного на рис. 1.2, *в*; рівнозначність або нерівнозначність якихось даних можна підкреслити завдяки симетрії (рис. 1.2, *г*) чи асиметрії (рис. 1.2, *д*).

Спробуйте знайти найбільш зручні саме для вас способи візуалізації матеріалу.

«Переказ», а не «диктант»

Звичайно, слід точно записувати назви, визначення і теореми. Проте матеріал запам'ятовується краще, якщо речення «пропускаються через себе», засвоюються та записуються власними словами. Так і треба робити. Потрібно піклуватись про надання тексту компактного вигляду завдяки застосуванню мнемонічних скорочень, умовних позначень (див. с. 6), таблиць тощо. Наприклад, фраза «У зв'язку з розвитком комп'ютерної графіки зростає роль обчислювальної геометрії» може бути записана приблизно так:
Комп. гр. $\uparrow \Rightarrow \uparrow$ *дискр. геом.*

Рисунки

Слід привчатися малювати від руки (для креслення існують спеціальні вправи), зберігаючи пропорції фігур, заданих у підручнику або накреслених на дошці. Розміри зображень мають бути настільки вели-

<Множина>:	<елемент 1>, <елемент 2>, <елемент 3>, <елемент 4>, <елемент 5>, <елемент 6>	<Множина>:	<елемент 1>, <елемент 2>, <елемент 3>, <елемент 4>, <елемент 5>, <елемент 6>
------------	---	------------	---

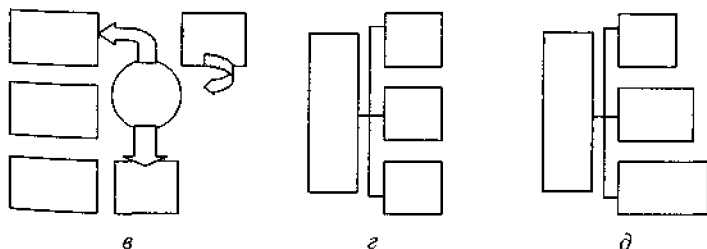


Рис. 1.2. Візуалізація тексту

кими, щоб можна було розрізнити всі подробиці побудов. Для виділення послідовності етапів розв'язування задачі доцільно застосовувати олівці різних кольорів або виконувати тонування різної інтенсивності. Конче потрібними є коротенькі пояснення кожного кроку, які доцільно розмішувати на тих самих сторінках, що й рисунки.

1.3. ПІДГОТОВКА ДО ЗАНЯТЬ

Необхідною умовою формування просторового мислення є *регулярність занять*. Тож:

- удома в день, коли відбулася лекція, треба уважно прочитати конспект;

- те саме слід зробити перед практичними заняттями, зафіксувавши незрозумілі місця, незакінчені рисунки чи помилки, спробувати з'ясувати їх за підручником або самостійно. Якщо якийсь матеріал залишився незрозумілим, не бійтеся ставити запитання;

- краще виконувати домашні завдання і графічні роботи безпосередньо після видачі, поки ви ще пам'ятаєте всі пояснення викладача. Інакше доведеться все заново пригадувати, шукати в підручниках, що призведе до зайвих витрат часу;

- слід використовувати всю рекомендовану методичну літературу, але починати все-таки з конспекту;

- зручніше застосовувати різні зошити для лекцій та практичних занять;

- у робочому зошиті, що видається для самостійної роботи на початку семестру, слід прагнути самостійно розв'язати якомога більше задач. Особливо корисно поміркувати над найскладнішими з них;

- серйозне колективне обговорення і взаємодопомога є конче необхідними, проте порадами товаришів треба користуватися свідомо, відкидаючи ті, що здаються поверховими або помилковими;

- у жодному разі не слід застосовувати як зразки графічні роботи товаришів — досить імовірно, що вони переобтяжені помилками. Така практика позбавляє самостійності та критичності, веде до зайвих витрат часу на виправлення помилок і ніяк не виправдовує себе.

Самоконтроль. Спробуйте якомога точніше відтворити рис. 1.1. Які інструменти вам знадобилися?

Перевірте різні форми ведення конспекту, обов'язково включивши до їх числа рекомендовані. З'ясуйте, яка з них є найкращою з погляду засвоєння матеріалу. Виберіть для себе сукупність найефективніших способів і завжди застосовуйте їх як у навчанні, так і в майбутній фаховій діяльності.

Проведіть хронометраж витрат часу для самостійного виконання завдань. З'ясуйте, де витрачається зайвий час. Надалі намагайтеся позбутися цих вад.

Перевірте слушність наведених рекомендацій щодо підготовки до занять. Виберіть і застосовуйте найефективнішу форму підготовки. Вдосконалюйте її протягом усього періоду навчання.

2. ІСТОРИЧНИЙ НАРИС

Дослідження властивостей простору за допомогою графічних зображень є першим етапом становлення геометричного моделювання. Відповідна наука називається *нарисною геометрією*. Розвиток уявлень про простір і способи його зображення є її історією. Вона цікава сама по собі, але ще привабливішим є виявлення співвідношень зі змінами людської свідомості та соціокультурними здобутками як пам'ятками цих змін. Використаємо традиційний поділ історії людства на епохи.

2.1. ПЕРВІСНИЙ ЛАД

Свого часу була поширена думка, що винайдення зображень є межею, яка відокремлює людину сучасного, так званого кроманьйонського типу, від її найближчого предка неандертальця. З часом з'ясувалося, що все значно складніше. Проте так чи інакше, малюнки супроводжують людину протягом усього її існування, і це не є випадковим. Погляньмо на стіни древніх печер (рис. 2.1, 2.2).

Оцінімо витонченість ліній та експресію! Як точно передано фігури тварин, азарт полювання! Додайте ще вишуканий вибір кольорів. Хіба можна вважати, що це творила примітивна істота? Чи буде перебільшенням стверджувати, що всі напрями сучасного



Рис. 2.1. Палеоліт. Печера Комбарель (Франція)

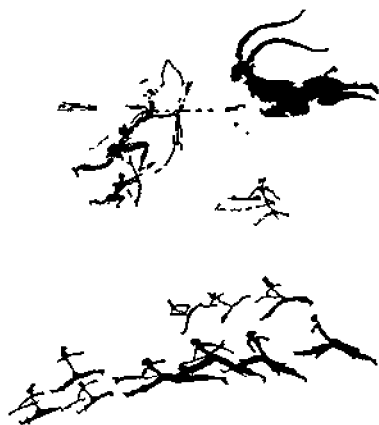


Рис. 2.2. Мезоліт. Скелі іспанського Леванту

живопису від імпресіонізму до абстракціонізму беруть початок звідти?

Коли ж спадає перше захоплення, проглядаються чужі для нашої буденної свідомості риси:

Ці образи, що виникли раптово,
В усій своїй красі, і не щезають
Ніколи...
Цей вічний біг, нікуди і нізвідки,
Без жодних просторових орієнтирів,
Без горизонту...
Це відчуття миттєвого прозріння
Картин і настроїв тодішнього буття
Крізь усі віки...

Яку ж тоді свідомість виражають ці малюнки? За твердженнями дослідників, для неї характерними є цілісність психоемоційного світу та інтуїтивна єдність з навколишнім середовищем, що через малюнок як своєрідний канал наділяється якостями напруження й азарту і відкликається вдачею та радістю життя. Це ознаки магічного психокосмосу, що знаходиться поза логікою і часом, той зародок, від якого походить людська культура, що ще майже не проявлена, але потенційно існує. З ним пов'язані творчі натхнення, тож важливо відчутти його особисто. Спробуємо це зробити, дивлячись на малюнки й обмірковуючи побачене.

Аналіз графічної техніки підтверджує цю інтерпретацію. Бачимо відсутність глибини зображення і точки зору, яка б співвідносилася із власним «я» та свідчила про усвідомлену відокремленість людини від світу. Тварини також позбавлені індивідуальних рис. Можна було б сказати, що використано ортогональні проекції, проте простір є емоційно наснаженим, чого вже ніколи не буде в технічних кресленнях. Відтак малюнок, попри зовнішню реалістичність, не є картиною в сучасному розумінні, це — знаряддя гармонізації психічних станів і природних процесів. Показово, що в часи розквіту первісного ладу людина дедалі сміливіше втручалася в ці процеси.

Результати цих спостережень можна узагальнити так.

Характеристики здобутків первісного ладу

Типи пам'яток	Просторові уявлення	Визначні риси	Значення
Малюнки на стінах печер, побутових предметах, кераміці, різьба по каменю і кістці	Інтуїтивна єдність психокосмосу	Відсутність глибини простору і точки зору, умовності, абстракції	Зародок культури і всіх наук

2.2. ПЕРШІ ЦИВІЛІЗАЦІЇ ТА АНТИЧНІСТЬ

Стародавні часи позначені найяскравішим злетом людського духу. Це період, коли відбувалося формування християнства й інших світових релігій, складалися грандіозні натурфілософські та міфопоетичні системи, виникали держави і науки, період, що залишив у спадок вічні винаходи. Багато правди є у твердженні, що далі людство лише просувалося у напрямі, визначеному саме тоді.

У цей час стався величезний стрибок від первісної цілісності світу і свідомості до сучасної їх розшарованості, найяскравішою ознакою чого було винайдення письма. Звичайно, зміни, що відбувалися крок за кроком, позначилися також на уявленнях про простір.

Межа історії

Минали тисячоліття, і людина потроху відчула свою відчуженість від природи — маєток, землеробство та тваринництво зробили її набагато незалежнішою. Це — межа історії, доба працивілізацій. Погляньмо, як змінився характер малюнків — де й поділася безпосередність вражень. Натомість бачимо автономність від вражень, складні композиції та абстракції (рис. 2.3, 2.4).

Першою концепцією, яка прийшла на зміну первісним уявленням, стала міфологема структурованого простору-всесвіту, простору-часу, що виникає і зникає чи то сам по собі, чи то за волею богів, в якому людина вже є окремим елементом. Без сумніву, тут відбилися дані тисячолітніх астрономічних спостережень.



Рис. 2.3. Печатка (Гіндустан, не пізніше 2-го тисячоліття до н. е.)

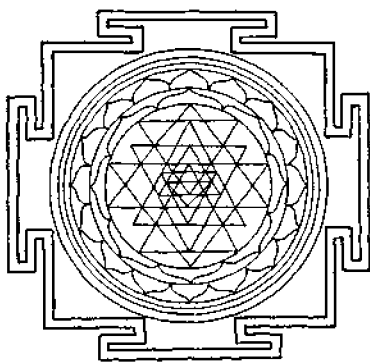


Рис. 2.4. Шрі-янтра (Гіндустан)

Печатка (див. рис. 2.3) відтворює один із перших варіантів цієї міфологеми, притаманний цивілізації Харалпи — Мохенджо-Даро. Основою композиції є дерево — вісь цілісного всесвіту. Три світи, позиційно, структурно й емоційно відмінні, є його складовими. Простежуються різноякісні зв'язки між ними, центром яких є композиція з дев'яти кіл, вписаних у велике коло.

Більш абстрактними, хронологічно пізнішими, можливо, створеними іншим етносом, є янтри (в перекладі з санскриту — знаряддя), що також походять з Гіндустану (див. рис. 2.4). Композиція підкреслює динамічну насиченість всесвіту, циклічність змін у ньому, спокій поза ним. Одним з їх використань була і досі є психорегуляція.

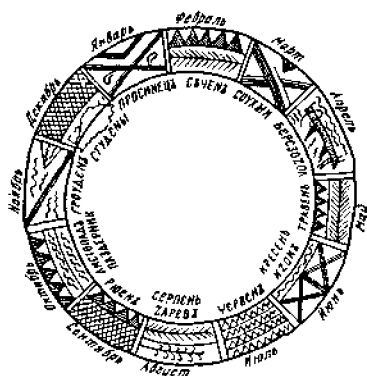


Рис. 2.5. Сучасна реконструкція календаря за розписом на кераміці (Україна, перші століття н. е.)

На рис. 2.5, 2.6 простежується розвиток символів, які потроху втрачають якості інтуїтивного зв'язку з означуванним та перетворюються на писемність.

Цікаво, що елементи — хрести, зірки, хвилі, меандри, свастики тощо — є спільним надбанням людства; вони зустрічаються в культурах, розділених часом в усіх частинах світу, більше того, мають однакові співвіднесення із певними станами свідомості та досить близькі значення.

Подібні символи знаходять застосування і нині, наприклад, у системах відображення інформації для управління психоемоційним станом операторів.

Отже, відображення всесвіту на рис. 2.3 — 2.6 уже більш тонкі й абстраговані, його зв'язок із людиною підтримується за допомо-

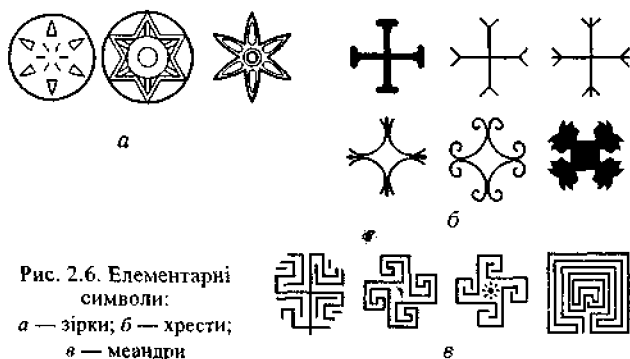


Рис. 2.6. Елементарні символи:
а — зірки; б — хрести;
в — меандри

гою символів, своєрідної знакової системи стихійної магії, мови чаклунів і жерців — дуже впливових постатей тогочасного суспільства.

Передача складної структури простору, його цілісності, динаміки, циклічності потребувала деяких геометричних знань та розвинутої графічної культури. Так, уже побудова простих шестипроменевих зірок (див. рис. 2.6, а) може бути здійснена лише за усвідомлення, що сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу кола. Ще складніше вписати в коло сукупність співмірних трикутників на рис. 2.4: забезпечення розташування вершин і точок перетинів сторін на прямих лініях потребує не тільки ретельності, а й наявності інструментів.

Самоконтроль. Спробуйте відтворити рис. 2.4, користуючись переліченими в п. 1.1 інструментами та знаннями шкільної геометрії. Оцініть витрати часу. Ця вправа вчить поважати здобутки минулих часів, чи не так?

Рабовласницькі держави Близького Сходу

Виникнення держав, без сумніву, докорінно змінило світогляд стародавніх людей. І графічні пам'ятки наочно відобразили це.

Зображення месопотамського і давньоєгипетського походжень демонструють порушення цілісності та розшарування просторових уявлень, початок відокремлення релігійних доктрин від буденних і прагматичних відчуттів. Однак превалюють соціальні мотиви. Наведемо типові приклади (рис. 2.7, 2.8).

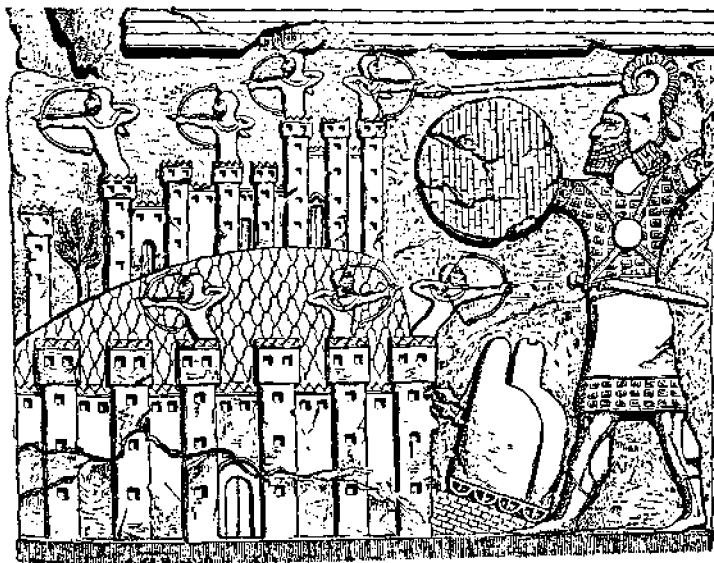


Рис. 2.7. Взяття цитаделі (ассірійський рельєф часів Тиглатпаласара III)



Рис. 2.8. Переможна плита фараона Хора Сома (Єгипет, Раннє Царство)

Велич правителя-бога, який творить історію, перемагає і впорядковує все-світ, є їх домінантою; воля, змагання, закон — ось що наповнює цей все-світ. Інші деталі є лише фоном для діянь правителя, що підкреслюється різницею в розмірах фігур. Типовим способом є розворот обличчя фараона чи царя у профіль та тулуба в анфас, що є зародком перетворень проєкцій. Характерною також є відсутність перспективи. Глибина простору подається послідовностями близьких за розмірами зображень на окремих планах (див. рис. 2.7). Це не є примітивним способом, як може здатись; так показується однаковість статусу зображених фігур. Отже, ідеологія соціуму коригує зір художника ще з сивої давнини!

У ті часи будівельне мистецтво перебувало вже на високому рівні. Різноманітність будівель — храмів (часто орієнтованих за астрономічними ситуаціями, тобто прив'я-

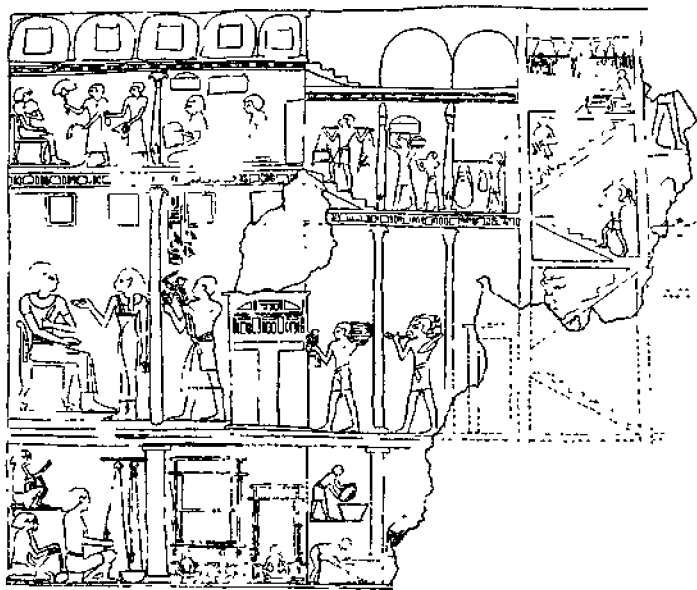


Рис. 2.9. Кухня майстерня в приватному будинку (Єгипет, Нове Царство)

заних у просторі-часі), палаців, будинків, іригаційних споруд, мостів, доріг і фортець — свідчить про досить високий рівень графічного забезпечення. Досі збереглися деякі плани міст, карти, умовні зображення будівель (рис. 2.9).

Креслення цього типу тепер називають *розрізами*. Проте вони багато в чому схожі на попередні. Це свідчить про те, що людина тих часів ще не сповна усвідомлювала розрив між суб'єктивним та зовнішнім простором, і тому була відкритою для майже магічного тиску соціуму.

Еллада і Рим

Геометрія як наука виникла в Давній Греції. Її батьком вважають Евкліда, який близько 300 р. до н.е. розробив *аксіоматику простору*, що згодом дістав його ім'я. Проте не слід забувати також Арістотеля (384 — 322 рр. до н. е.), який створив *логіку*. (Чи всі пам'ятають, що він був учителем Александра Македонського?) Адже аксіоми Евкліда фіксують лише ті інтуїтивні просторові уявлення, які можуть бути об'єктами логічних маніпуляцій. Звідси *однорідність, адитивність, дискретність, незмінність елементів простору*, тенденція до *логічної досконалості доказів*.

Ці діяння були новаторськими, адже від попередніх епох було успадковане розуміння чисел і фігур як предметних (феноменальних) виразів ідеального (ноуменального) світу, символів, а не самостійних об'єктів. Останнє зрозуміло з того, що нам відомо про школу Піфагора та дослідження Платоном правильних багатогранників. Дві парадигми, дві геометрії — Евкліда і Піфагора — тривалий час розвивалися паралельно; вони виражали різні усвідомлення та орієнтувалися на різні потреби; обидві приводили до цікавих результатів. Вершиною першої є дослідження конічних перерізів Аполлонієм близько 200 р. до н. е.; другої — теологія Прокла (410—485), в якій властивості богів розглядалися як похідні від теоретико-множинних відношень! — думка занадто смілива навіть для часів занепаду поганства і релігійного синкретизму. Тож не дивно, що друга, так звана сакральна геометрія, згодом локалізувалася в герметичних общинах, які претендували на таємні знання. Зазначимо, що з того часу *зображення перестало бути символом*, і це наочно засвідчило важливий крок у розвитку свідомості — поширення логічного мислення.

Іншим досягненням, яке обов'язково слід згадати, стало практичне *застосування перспективи* (рис. 2.10).

З того часу світ набув справжньої реалістичності: його стали зображати так, як бачили. І це теж наочна ознака ще однієї зміни свідомості — засвоєння самодостатньої цінності відчуттів.

Вищим же синтезом античної свідомості, естетичної і філософської водночас, став погляд на людину як на «міру всіх речей» (Про-

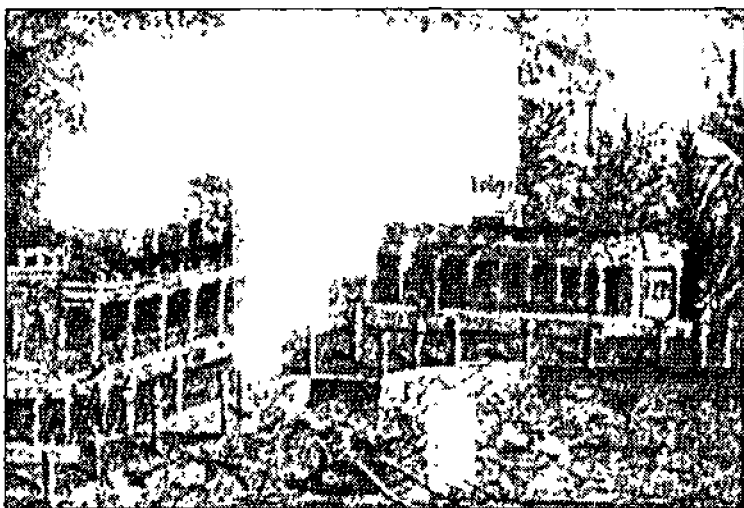


Рис. 2.10. Вілла в Кампанії (розпис у Помпеях, I ст.)

тагор), використання *пропорцій людського тіла*, зокрема «золотої пропорції», для гармонізації та надання цілісності храмам і скульптурним композиціям. (Храм — символ Всесвіту; тож чи не тоді народився так званий антропний принцип космології?) Так, це був найвищий злет, злет Ікара — і саме з нього почалося падіння...

Римський період небагато додав до цих здобутків. Систематизація та вдосконалення — ось його девіз. Прикладом є трактат Вітрувія (I ст.) «Про архітектуру», в якому описується проектування будівель із використанням іхнографії (плану на поверхні ґрунту), ортографії (фронтального плану) і сценографії (перспективного плану у фронтальній постановці споруди) — все це за змістом та багатьма технічними деталями відповідає сучасній практиці.

Узагальнимо викладене у вигляді таблиці.

Характеристики здобутків Давнього Світу

Типи пам'яток	Просторові уявлення	Визначні риси	Значення
Фрески, мозаїки, малюнки; трактати, картини, плани; різьба по каменю, будівлі, споруди, міста	Структурованість та інтуїтивно-емоційний зв'язок макро- і мікрокосму; мікрокосм як об'єкт впливу соціуму в часі; логічно зумовлений простір; чуттєво сприйнятий простір	Складні цілісні композиції як опори менталізації та міфотворчості; маніпуляція розмірами і планами; схеми, креслення; фронтальна перспектива	Формування парадигм основних наук

2.3. СЕРЕДНЬОВІЧЧЯ

З цих часів історія стає європоцентричною, оскільки саме в Європі сформувалася сучасна нарисна геометрія. Не будемо розглядати своєрідні символні системи Африки й Америки, геометричну аскезу мечетей, повноту життя храмів Індії, вишукані, немов поезія, напівпрозорі, немов тумани, альбоми китайських і японських митців... Однак будемо пам'ятати про них.

Середньовіччя інколи називають темними віками, натякаючи на культурний та технологічний регрес порівняно з античністю. Чи так це насправді? Візантійська історія донесла до нас відомості про базарні сутячки, що виникали виключно через богословські розбіжності; про собори і збори, які обговорювали догмати в той час, коли ворожі тарани розвалювали мури їхніх міст, та інколи — про чудесні спасіння від ворогів. Центр інтересів суспільства змістився в бік християнської містики — свідомість ніби обернулася назад і там набула нової єдності — з Богом... І це дійсно призвело до занедбання мирських справ. Та сама Візантія, що в недоторканості успадкувала здобутки Риму, вже наприкінці XII ст. втратила свої технологічні переваги.

Однак нас перш за все цікавлять графічні ознаки таких змін. Погляньмо на Візантійські ікони (рис. 2.11) — хіба вони не мають схожості з малюнками первісних часів?

І дійсно, ікона розумілася як символ, канал зв'язку з потойбічним світом, куди спрямовувалися молитви та звідки маніфестувалася дія Святого Духа — згадаймо про численні чудеса і зцілення. Проте не можна двічі вступити в одну ріку — і ознакою цього є зворотня перспектива (рис. 2.12, а), характерна риса іконографії. Сучасні дослідження підтверджують, що людина справді бачить



Рис. 2.11. Православна ікона (Візантія, IX ст.)

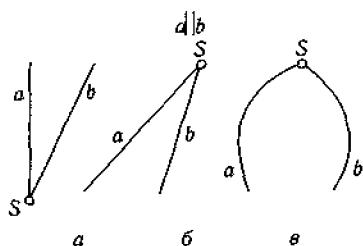


Рис. 2.12. Зворотна (а), лінійна (б) та перцептивна (в) перспективи



Рис. 2.13. Мадонна канцлера Ролена (Ян Ван Ейк, близько 1436 р.)

не за законами лінійної перспективи (рис. 2.12, б), а швидше так, як малював Поль Сезанн (рис. 2.12, в), але тут мала місце ще й ідеологема — людина виступає як цар земного світу.

Пізніше, за часів «осені середньовіччя», лінійна перспектива знову набуває поширення — особливо у світському, або алегоричному, живопису (рис. 2.13).

Дослідники нарахували тут 11 перспектив (спробуйте перевірити), що може свідчити про психологічну й ідеологічну кризу — різкі коливання свідомості від буденності до релігійного фанатизму. І це не дивно в епоху, коли щойно закінчилася Столітня війна, коли володарювали Людовик XI та Карл Смільний — перечитайте пригоди хороброго лицаря Квентіна Дорварда в романі Вальтера Скотта... Перечитайте і «Молот відьм» Шпренгера й Інститоріса (29 видань з 1487 р.).

Зазначимо також існування «технічної графіки» серед будівельників і картографів, а також сакральної геометрії всередині еретичних громад та лицарських орденів.

Самоконтроль. Охарактеризуйте просторові уявлення від первісних часів до епохи Відродження.

2.4. ВІД РЕНЕСАНСУ ДО ТРЕТЬОГО ТИСЯЧОЛІТТЯ

Для різних типів свідомості одне й те саме явище означає щось зовсім відмінне. Відродження і науково-технічна революція у ліберально-гуманістичній свідомості сприймаються як прогрес, безумовне благо, переддень небувалого розквіту; у релігійній — як апостасія, нове поганство, люциферіанський бунт, переддень апокаліпсису. Конфлікт між ними, витoki якого простежуються ще в суперечках номіналістів із реалістами глибокого середньовіччя, засвідчив черговий виток історичного розвитку — тепер як ідеал сприймалося античне обожнення людини. Треба пам'ятати про нього, щоб правильно розуміти інтереси і вчинки не тільки революціонерів, а й учених.

Відродження, розпочавшись в Італії десь 550 років тому, швидко стало всеєвропейським явищем. П'ять із половиною століть — майже ніщо порівняно з минулими тисячоліттями; крім того, це найоднорідніший з погляду просторових уявлень період. Тенденція логічного осмислення форм і відношень простору стала панівною вже на початку Відродження; всі інші забулися або були відтіснені на периферію. Зниження рівня мотивацій, втрата містичної глибини, гостроти інтуїції, різнобарв'я емоцій стали платою за технічний прогрес. Отже, нарисна геометрія повинна б мати майже такий вигляд, як і зараз? Ні, і щоб проілюструвати це, з'ясуємо, наскільки була б зрозумілою тоді сучасна постановка її основної проблеми.

Нехай є точка простору з координатами (x, y, z) . Треба знайти відображення, які б однозначно переводили цю точку в її образ на площині.

Непорозуміння виникли б за такими пунктами.

1. Було б неясно, який простір мається на увазі. Чи досить (згадаймо тодішню нерозв'язаність проблеми доказу п'ятого постулату) аксіом Евкліда для його визначення?

2. Вираз «координати (x, y, z) » сприймався б як якась магічна абракадабра — до розробки координатного методу залишалось ще понад 200 років.

3. Цілковита неясність була б із однозначністю відображень — якщо будувати їхнографію, то як показати висоту? Якщо використати перспективу, то як зробити колесо, адже коло виглядає як еліпс, парабола чи гіпербола?

4. Як довести коректність побудов, якщо методи доказу самі ще не є точними?

Отже, все це треба було з'ясувати якнайшвидше, оскільки практичні потреби, пов'язані з картографією, будівництвом, розвитком техніки, ставали дедалі нагальнішими.

Утвердження раціоналізму

Показовою ознакою свідомості людей Відродження, яка зразу впадає у вічі, є поява десятків трактатів (а досі згадувалася одна лише праця Вітрувія) з питань побудови зображень. Ці трактати дуже несхожі на сучасні книги з нарисної геометрії. Для прикладу наведемо цитату з книги Леона-Батиста Альберті (1404—1472) «Про зодчество», де описується побудова перспективи:

Спочатку там, де я маю зробити малюнок, я креслю чотирикутник із прямими кутами і приймаю його за відкрите вікно. Всередині цього чотирикутника, де мені приглянеться, я встановлюю точку, яка займала б те місце, куди вдаряє центральний промінь. і тому я називаю цю точку центральною і т.д.

Такі пояснення, викладені на багатьох сторінках, зовсім не супроводжуються графічними ілюстраціями!

Ця епоха дала багато нових ідей, які потім увійшли до золотого фонду як нарисної геометрії, так і живопису:

- визначення і побудова перспективи — П'єтро-делла-Франческо дель Борго (1406—1492) — «батько перспективи»;

- дослідження способів малювання, колористики, композиції, світлотіньових ефектів, зображення на циліндричних поверхнях — Леонардо да Вінчі (1452—1519);

- перспективні зображення з використанням плану та фасаду — Альбрехт Дюрер (1471—1528);

- компендіум методів перспективного зображення об'ємних тіл і тіней від них — Д. Барбаро (1513—1570);

- «спосіб архітекторів», перспектива на криволінійних поверхнях, реконструкція фігур за перспективними зображеннями (фотограмметрія) — Гвідо Убальді (1545—1607), «Шість книг із перспективи».

Тогочасні митці показали блискуче володіння прийомами побудови складних зображень (рис. 2.14).

У XVI—XVII ст. почали використовуватись аксонометричні проєкції та проєкції з числовими позначками. Швидко розвивалися не лише способи побудови перспективи чи зображень технічних пристроїв, а й картографічні проєкції — а що поробиш, епоха великих географічних відкриттів!

З цим пов'язана інтригуюча загадка — зображення на картах Пірі Рейса, Оронтеуса Фініуса, Меркатора, пізніше й Філіппа Буше — контурів узбереж-

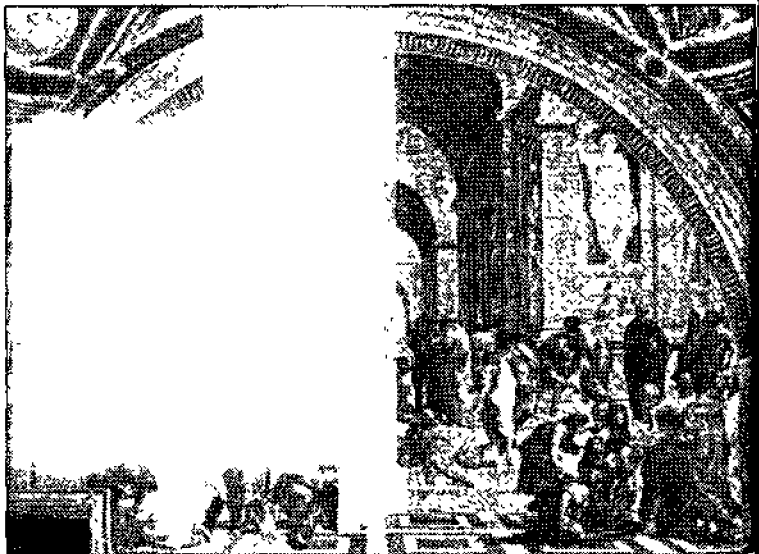
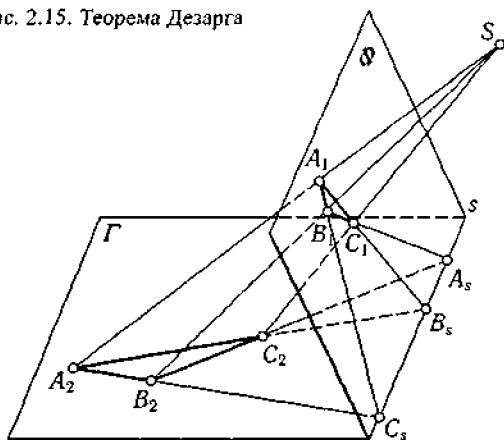


Рис. 2.14. Афіньська школа (фреска, Рафаель, Ватикан, 1509—1511)

Рис. 2.15. Теорема Дезарга



жа і внутрішніх частин Антарктиди, причому вільної від льодовиків! Однак кораблі Ф. Ф. Беллінсгаузена і М. П. Лазарева доплили до неї лише в 1820 р.! На які ж джерела спиралися картографи?

Подальші два століття характеризувалися зростанням теоретичної складової досліджень. Це цілком відповідало панівному з часів Р. Декарта (1596—1650), І. Ньютона (1643—1727) і Г. В. Лейбніца (1646—1716) науковому гаслу *Cogito ergo sum* — мислю, отже, існую. Для нас цікавими є координатний метод Декарта (поєднання геометрії з алгеброю), теорія доказів Лейбніца (започаткування формального методу), концепція абсолютного простору Ньютона (екстраполяція уявлень Евкліда на фізичний простір).

Як і інші генії, названі вчені аж ніяк не вписуються в тісні рамки раціоналізму. Наприклад, Р. Декарт розробив вихрову модель простору, Г. В. Лейбніц — монадологію, І. Ньютон залишив чимало богословських праць. Тим не менш — це також є типовим — у науковому обороті залишились, передусім, ті їхні здобутки, які відповідали духові часу.

Людиною, яка надала раціональної форми теорії зображень предметів у перспективі, став Жерар Дезарг (1593—1662). Він є основоположником проєктивної геометрії. Наведемо для прикладу формулювання його відомої теореми, що описує гомологічну відповідність і є однією з основ нарисної геометрії.

Якщо три прями, які сполучають відповідні вершини двох трикутників, перетинаються в одній точці, то три точки перетину відповідних сторін цих трикутників належать одній прямій (рис. 2.15).

Ж. Дезарг мав багато талановитих послідовників, серед яких виділяється Блез Паскаль (1623—1662), відомий передусім як філософ. Побудову кривих ліній другого порядку, що ґрунтується на його теоремі, описано в розд. 7. З того часу центр геометричних досліджень переміщується з Італії до Франції.

Однак розвивався також практичний напрям, пов'язаний передусім з ортогональними проекціями. Можна згадати праці інженера Фрезье, який узагальнив практичні способи використання ортогональних проекцій, але найкolorитнішим представником цього напрямку став Гаспар Монж.

Гаспар Монж аж ніяк не може вважатися кабінетним ученим. Син дрібно-го торговця, з великими труднощами улаштований до Військово-інженерної школи в Мезьєрі, він спрямував свої перші самостійні дослідження на військові



Гаспар Монж (1746—1818)

потреби — теоретично показав, як слід розмішувати артилерійські позиції для руйнування фортець. До нього така задача розв'язувалась тільки на місцевості. Отже, нарисна геометрія, як і багато що в науці, своїм розвитком завдячує військовій справі.

Під знаком Марса проходило і подальше життя Г. Монжа, одного з провідних професорів Політехнічної школи. Він палко сприйняв ідеї революції і брав у ній активну участь: був морським міністром, членом Тимчасового виконавчого комітету Конвенту. На документі про страту Людовика XVI є його підпис. Він чітко орієнтувався у смертельно небезпечному вирі тогочасної політики, зокрема одним із перших помітив і підтримав Наполеона.

Г. Монж супроводжував майбутнього імператора в Італійському та

Єгипетському походах (до речі, був головним організатором вивозу культурних цінностей з Італії), згодом став графом. У роки Реставрації був репресований і навіть ув'язнений. Отже, недарма одна з його біографій називається «Геометрія і Марсельєза».

Головною працею Гаспара Монжа є «*Geometrie descriptive*», видана в Парижі 1799 р. (ювілей нарисної геометрії був широко відзначений не тільки у Франції). Розуміння її задач звучить дуже сучасно і, сказати б, вагомо:

Ця наука має дві головні мети.

Перша — точне подання на кресленні, що має тільки два виміри, об'єктів тривимірних, які можуть бути точно задані.

З цієї точки зору — це мова, необхідна інженеру, який створює якийсь проект, а також усім тим, хто має керувати його здійсненням...

Друга мета нарисної геометрії — виводити із точного опису тіл усе, що неминуче впливає з їхньої форми і взаємного розташування.

У цьому сенсі — це засіб пошуку істини; вона дає незчисленні приклади переходу від відомого до невідомого...

У названій праці розглянуто зображення точок, прямих, площин, поверхонь, кривих ліній у просторі, задачі їх взаємного перетину, способи побудови дотичних і нормальних площин до кривих по-

верхонь порівняно з алгебричним методом — усе це є основним змістом сучасних курсів. Задачі вивчаються на спеціальному кресленні, що складається з двох ортогональних взаємозв'язаних проєкцій — епюрі Монжа. Отже, основна проблема нарисної геометрії з 1799 р. може вважатись не тільки зрозумілою, а й вирішеною.

Розглядаючи цей період, можна помітити, що практичні та теоретичні стимули розвитку існували водночас і чергувалися за своїм пріоритетом, що й визначило природу нарисної геометрії як синтетичної науки. Подальший розвиток дисципліни також підживлювався з обох джерел; настала пора розглянути їх окремо.

Самоконтроль. Які зміни в теорії зображень відбулися до початку XIX ст.? Яким був внесок Г. Монжа?

Нарисна геометрія і геометрія

Є дві тенденції теоретичних досліджень: поява нових напрямів і прагнення до їх об'єднання на основі узагальненої, або зовсім нової, парадигми. Це стосується будь-якої науки. Наприклад, у фізиці гравітаційні, електричні, магнітні, слабкі та сильні взаємодії певний час розглядалися окремо, потім були побудовані теорії електромагнітних й електрослабких взаємодій, нині розробляється єдина теорія («Велике об'єднання»). Так само сталося і в нарисній геометрії: «геометрична революція» XIX — початку XX ст. експортувала свої ідеї — неевклідового та багатовимірного простору, диференціальної геометрії, формального методу — але вони були сприйняті не відразу. Більше того, навіть окремі розділи нарисної геометрії розвивалися самі по собі, а зв'язок між ними не усвідомлювався.

Так, праці послідовників Ж. Дезарга стали вагомим внеском у проєктивну геометрію (поняття інваріантів перетворень, елементів проєктивного простору, принципу подвійності ввів Понселе; колінеації, кореляції, проєктивітет, взаємно однозначне перетворення досліджено А. Ф. Мебіусом; конструюванням і дослідженням вищих проєктивних відповідностей займалися Я. Штейнер, М. Шаль, К. Г. Х. Штаудт, Л. Кремона), а також в алгебричну геометрію (Л. Кремона, Ф. Клейн, Жонк'єр, Ф. Севері).

Метод Г. Монжа не зазнав істотних змін; він використовувався для розв'язування все нових задач, здебільшого на взаємний перетин кривих і поверхонь. Приємно, що його успіхи були підкріплені працями вітчизняних учених — Я. О. Севаст'янова, М. І. Макарова, В. І. Курдюмова, М. О. Риніна, Є. С. Федорова.

Свій розвиток дістали проєкції з числовими позначками (Нуазьє), аксонометрія (К. В. Польке, К. Г. А. Шварц).

Є. С. Федоров розробив зовсім нову проєктивну систему — векторіальні проєкції.

Наприкінці XIX ст. стало можливим об'єднання окремих розділів. Праці А. Келі та Ф. Клейна дали змогу інтерпретувати з

проективних позицій метричну геометрію — перетворення евклідового простору виявилися окремими випадками проективних перетворень, що дало можливість зрозуміти взаємні зв'язки проективної, афінної, метричної та евклідової геометрій і згодом побудувати схему, яка узагальнює метод Монжа, аксонометрію та перспективу. В практику викладання ці ідеї були введені Є. С. Федоровим, М. О. Риніним; пізніше — Н. О. Глаголєвим і М. Ф. Четверухіним.

Водночас апогею досягла тенденція до точного (логічного) обґрунтування геометрії. Підвалинами цього стали повна система аксіом евклідового простору Д. Гільберта, створений ним же і Ф. Л. Г. Фреге формальний метод, а також теорія множин Г. Кантора. Здавалося, ще кілька зусиль — і геометрія набере остаточно завершеного та логічно досконалого вигляду.

Ця ілюзія є типовою для певних стадій розвитку науки. Наприклад, вважалося, що класична фізика здатна пояснити все на світі, для чого залишилось зробити зовсім небагато. Поява теорії відносності та квантової фізики швидко спростувала такі надії.

И был наш мир глубокой тьмой окутан.
Да будет свет! И вот явился Ньютон.
Но сатана недолго ждал реванша,
Пришел Эйнштейн, и стало все, как раньше.
(С. Я. Маршак)

Так само, вже в перші десятиліття ХХ ст., було спростовано вчення Д. Гільберта про повноту і несуперечність аксіом евклідового простору (К. Гьодель), визначено істотні обмеження формального методу (А. Тарський), знайдено численні теоретико-множинні парадокси (Б. А. У. Рассел). І це добре, оскільки широко відчинилися двері для нових досліджень, в яких знайшлося місце інтуїтивним та синтетичним методам. Що ж до об'єднання, можливо, воно буде досягнуто на основі теорії систем. Поживемо — побачимо.

Нарисна геометрія і практика

Орієнтація на практичні потреби аж ніяк не означає другорядності результатів. Навпаки, саме практика інколи потребує оригінальних теоретичних побудов, що не вкладаються в панівні уявлення. Наприклад, векторіальні проєкції — фундаментальний результат, який згодом знайшов застосування у багатовимірній геометрії — було здобуто під час розв'язування вузькоспеціальної задачі кристалографії. ХХ ст. взагалі демонструвало продуктивність прикладних досліджень.

Так, потреби машинобудування і будівництва примусили змінити погляд на нарисну геометрію. Її почали розглядати не тільки як теорію зображень ліній та поверхонь, а передусім як *інструмент їх конструювання* з метою забезпечення потрібних властивостей. Тому

були створені *теорії параметризації і формоутворення*, значно розвинені *теорія перетворень та диференціальна геометрія*.

Необхідність розрахунку конструкцій, у більшості випадків можливого тільки за допомогою числових методів, сформувала напрям *дискретної, або обчислювальної, геометрії* (див. розд. 13).

Проектування за допомогою ЕОМ зумовило розквіт *комп'ютерної графіки* (див. розд. 14).

Задачі багатокритеріальної оптимізації дали поштовх розвитку *багатовимірної геометрії* (див. розд. 15).

Моделювання складних систем, які містять людський фактор, що взаємодіє з машинами і середовищем, примусило по-новому подивитись на *геометричне моделювання* взагалі та привело до розробки фундаментальних моделей, починаючи від аксіоматичного базису (див. розд. 16).

Розпізнавання образів, дослідження закономірностей художньої творчості, задачі штучного інтелекту (особливо моделювання прийняття рішень і створення експертних систем) також перебувають на передньому краї геометричних досліджень.

Отже, сучасне розуміння нарисної геометрії таке: *це прикладна геометрія і теорія геометричного моделювання*.

Українська школа

Вона виникла не на порожньому місці. В одному з музеїв Києво-Печерської лаври (спробуйте знайти його самі!) представлені досконалі зразки креслень, починаючи з XVIII ст. За часів, коли Україна входила до складу Російської імперії та Австро-Угорщини, нарисна геометрія викладалася у навчальних закладах Києва, Харкова і Львова. Проте школа може вважатись сформованою лише тоді, коли має вагомі наукові здобутки, організаційну структуру, численних учнів. Така трансформація відбулася вже за радянських часів і значною мірою пов'язана з діяльністю проф. С. М. Колотова (1880—1965), який по праву вважається засновником школи.

Нині існує докторська вчена рада (голова — д-р техн. наук, проф. В. Є. Михайленко), видаються три наукові збірники, регулярно проводяться наукові конференції та семінари, встановлено активні міжнародні зв'язки. В 1998 р. було створе-



С. М. Колотов (1880—1965)

но Українську асоціацію з прикладної геометрії, що має сприяти ще більшій інтеграції теоретичних досліджень з потребами економіки країни. Провідними центрами прикладної геометрії протягом багатьох років є Київський національний університет будівництва та архітектури, в якому працював С. М. Колотов і нині працює В. Є. Михайленко, та Національний технічний університет України «КПІ», що є заслугою проф. А. В. Павлова і його учнів.

Можна з гордістю констатувати, що в Україні представлено всі сучасні напрями прикладної геометрії і що наша школа займає гідне місце як на теренах СНД, так і у світі.

Підсумки останнього періоду наведено нижче.

Характеристики здобутків новітнього періоду

Типи пам'яток	Просторові уявлення	Визначні риси	Значення для науки
Ті самі, що й у попередні епохи, плюс технічні та будівельні креслення і зображення в електронній формі	Рационалізовані аксіоматичні моделі абстрактних просторів залежно від задач, що мають бути розв'язані	Використання різноманітних добре обґрунтованих проекційних систем і методів побудови зображень	Перетворення нарисної геометрії на прикладну — могутній інструмент розв'язання інженерних задач і проведення наукових досліджень

Самоконтроль. Охарактеризуйте розвиток нарисної геометрії в XIX—XX ст.

Спробуйте інтуїтивно відчутти особливості свідомості різних часів, що відбилися в просторових уявленнях; зробіть поетичні перекодування ваших відчуттів.

3. СУЧАСНИЙ ПОГЛЯД

Труднощі у засвоєнні основ геометричного моделювання здебільшого пов'язані з нерозумінням неевклідового характеру простору і відображень. Отже, слід з самого початку усвідомити, що звичні зі шкільної геометрії властивості, за винятком окремих випадків, не мають місця. Щоб чітко уявити відмінності, слід ретельно опрацювати матеріал розділу попри всі труднощі, що виникають через його абстрактний характер. Зрештою, хіба не цікаво познайомитись із однією з неевклідових геометрій?

3.1. ВИЗНАЧЕННЯ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЇЇ ЗАДАЧ

Спочатку — сучасне визначення. Враховуючи описані в розд. 2 тенденції розвитку, маємо записати так.

Визначення 3.1. *Нехай ϵ експериментально встановлена сукупність характеристик предмета, явища або процесу $\{X\}$. Тоді нарисна геометрія — наука, що визначає абстрактний простір Π^α , аксіоми якого відповідають $\{X\}$, конструює взаємно однозначні відображення $F: \Pi^\alpha \rightarrow \{\Pi^2_1, \dots, \Pi^2_n\}$ і досліджує властивості форм та відношень Π^α за допомогою зображень на $\{\Pi^2_1, \dots, \Pi^2_n\}$.*

Залежно від характеристик предмета дослідження вимірність α простору Π може бути не тільки натуральним, а й нецілим або навіть від'ємним числом. У такому разі побудова зображень — задача майже на рівні докторської дисертації.

Однак курс орієнтовано на потреби машинобудівного і будівельного креслень, що спрощує завдання та дає змогу обмежитися відображенням, дослідженням, моделюванням і конструюванням форм, розмірів та взаємного розташування твердих тіл і, в спеціальних розділах, деяких ефектів, що підвищують реалістичність зображень. Виходячи з цього, конкретизуємо задачі. Це:

- побудова абстрактного простору Π^α ;
- визначення схем найбільш удалих (за певними критеріями) відображень F ;
- проведення досліджень із використанням зображень на $\{\Pi^2_1, \dots, \Pi^2_n\}$.

Перші дві задачі розглянемо нижче; третя є змістом наступних двох частин посібника.

3.2. ПОБУДОВА АБСТРАКТНОГО ПРОСТОРУ \mathbb{P}^3

У шкільній геометрії фізичному просторові прийнято ставити у відповідність евклідовий простір E^3 (часова складова фізичного простору не враховується). Почнемо з того самого і доповнимо E^3 деякими додатковими елементами.

Невласні елементи і проєктивний простір

Задамо відображення т. A на площину Π так, як показано на рис. 3.1, а: візьмемо в просторі довільну т. S і проведемо через неї промінь SA до перетину з Π .

Визначення 3.2. *Проєкцією точки A на площину Π називається точка перетину променя SA з Π .*

Позначати проєкцію точки (і фігури) будемо за позначенням або номером площини проєкцій — A_Π , A_Π тощо.

Визначення 3.3. *Проєкціюванням називається відображення точки на площину.*

Проєкцію можна побудувати в усіх випадках, за винятком показаного на рис. 3.1, б, де $(SA) \parallel \Pi$. Для того щоб задача завжди мала розв'язок, будемо вважати, що промінь SA перетинається з паралельною йому прямою a площини в нескінченно віддаленій точці A_Π^∞ . Таку точку будемо називати *невласною точкою* а та SA (рис. 3.1, в).

Введемо також *невласну пряму* як лінію перетину паралельних площин і *невласну площину* як сукупність усіх невластних прямих простору.

Визначення 3.4. *Проєктивним простором \mathbb{P}^3 називається простір, елементами якого є точки, прямі та площини, доповнені невластними точками і прямими, а також невластною площиною.*

Наведемо приклади, які покажуть, наскільки введення невластних елементів змінює властивості простору.

Зміна властивостей форм (фігур)

У проєктивному просторі пряма лінія є замкненою. Щоб пересвідчитись у цьому, достатньо визначити взаємно однознач-

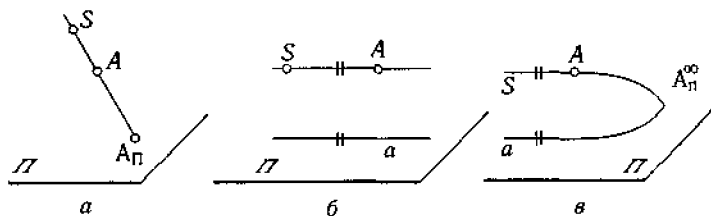


Рис. 3.1. Визначення невластних точок

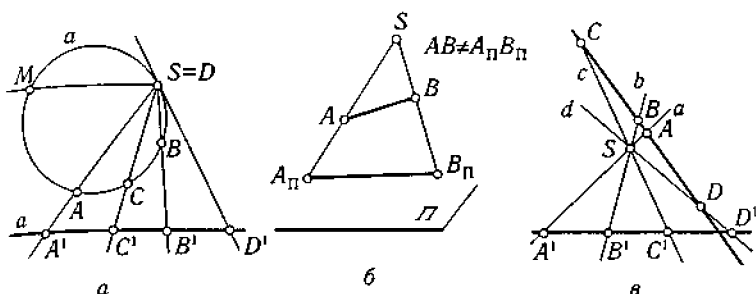


Рис. 3.2. Відмінності властивостей проективного та евклідового просторів

ну відповідність між точками замкненої кривої та прямої лінії (рис. 3.2, а).

Зміна властивостей перетворень

Перетворення зберігають незмінними ті чи інші характеристики, які називаються *інваріантами*. Інваріантами перетворень E^3 — паралельного перенесення та повороту — є *метричні характеристики*: довжини відрізків, значення кутів, площі та об'єми. Для проєкціювання — перетворення P^3 — вони змінюються (рис. 3.2, б). Інваріантом проєктивних перетворень є *складне відношення чотирьох точок*: $(ABCD) = (A'B'C'D') = AC/BC : AD/BD = A'C'/B'C' : A'D'/B'D'$ (рис. 3.2, в). Для визначення ж метричних характеристик потрібні спеціальні операції.

Перетворення евклідового і проєктивного просторів є асоціативними; існують одиничні й обернені перетворення. Отже, вони утворюють *групи*. Наявність власної групи перетворень є, за Клейном, ознакою окремої геометрії.

Зміна аксіом

Втрачає сенс аксіома паралельності — будь-які прямі матимуть точку перетину. Мають бути перевизначені також деякі інші постулати. Так, аксіоми Евкліда вказують, що дві точки визначають пряму, а три — площину. Обернене твердження є невірним, оскільки паралельні прямі чи площини не перетинаються. Для проєктивного ж простору перетин двох прямих або трьох площин завжди визначить точку. Отже, маємо змінити формулювання:

- дві різні точки належать одній прямій;
- дві різні прямі належать одній точці;
- три різні точки, що не належать одній прямій, належать одній площині;
- три різні площини, що не належать одній прямій, належать одній точці. І т. ін.

Геометри давно помітили двоїстість, тобто певну взаємозамінність точок, прямих та площин у цих аксіомах, і поширили її на інші твердження. Було сформульовано:

Малий принцип двоїстості. Будь-яке твердження стосовно точок та прямих проєктивної площини залишається правильним при заміні слова «точка» словом «пряма», а слова «належить» — словами «проходить через» і навпаки.

Великий принцип двоїстості. Будь-яке твердження стосовно точок та площин проєктивного простору залишається правильним при заміні слова «точка» словом «площина», а слова «належить» — словами «проходить через» і навпаки.

Ці принципи узагальнюються на проєктивні простори з більшою, ніж три, цілочисловою вимірністю.

У другій частині посібника будемо неодноразово звертатися до принципу двоїстості. Поки ж укажемо на важливий для студентів наслідок — кількість тверджень відносно точок, прямих та площин, які треба запам'ятовувати, скорочується вдвічі!

Принцип двоїстості дає змогу спрощувати підрахунки кількості фігур на площині й у просторі. Обчислимо, наприклад, скільки прямих належить площині. Зафіксуємо довільну точку на осі y і будемо переміщувати ще одну довільну точку вздовж осі x (рис. 3.3, а). На осі x є ∞^1 точок (ця вимірність називається **параметричним числом**; кажуть, що множина точок прямої є **однопараметричною**). Тоді кількість можливих прямих, що проходять через обидві точки, буде ∞^1 . Тепер переміщуватимемо точку вздовж осі y і для кожного з її положень будемо фіксувати всі можливі прямі; загальна їх кількість становитиме $\infty^1 * \infty^1 = \infty^2$. Згідно з малим принципом двоїстості, такою самою буде кількість точок площини. Для простору маємо ∞^3 точок і ∞^3 площин. Рис. 3.3, б показує, що в тривимірному просторі можна провести $\infty^2 * \infty^2 = \infty^4$ прямих.

Для складніших фігур розрізняють **параметри положення та форми**; параметричне число дорівнює їх сумарній кількості. Так множина відрізків на площині буде чотирипараметричною (точка фіксує два параметри положення; третім є кут нахилу до координат).

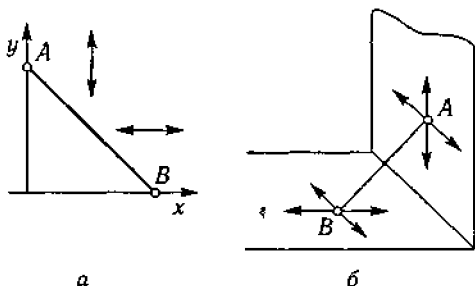


Рис. 3.3. Визначення кількості прямих на площині й у просторі

натної осі; довжина відрізка є параметром форми). Для інших фігур у просторі маємо такі параметричні числа: коло — 6, циліндр — 5, конус — 6, сфера — 4 [7]. Отже, проєктивний простір істотно відрізняється від евклідового.

Самоконтроль. Викладіть розуміння предмета і завдань нарисної геометрії. Що таке невластні елементи? Для чого вони вводяться? Які це надає переваги?

Викладіть визначення проєктивного простору. Сформулюйте малий та великий принципи двоїстості.

Назвіть і проілюструйте прикладами відмінності проєктивного простору від евклідового.

Перевірте, чи правильно підраховано параметричні числа кола, циліндра, конуса, сфери. Скільки параметрів форми характеризує кожен з фігур?

3.3. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОЄКЦІЙНИХ СИСТЕМ

Для виконання креслень або виготовлення виробу за кресленнями потрібна точна передача метричних характеристик. Забезпечення цього називається *оборотністю креслення*. Оборотність формалізується як вимога взаємної однозначності проєкційних перетворень. Неважко помітити, що проста схема на рис. 3.1, а не є взаємно однозначною, оскільки всім точкам променя SA відповідає лише одна проєкція, що пояснюється нерівністю вимірностей площини (2) і простору (3). Отже, апарат проєкціонування слід удосконалити. Взаємна однозначність проєкційних перетворень може бути досягнута різними способами.

Приклади проєкційних систем

Введемо в просторі координатну систему $Oxyz$ і сумістимо площину проєкцій з площиною Oxy , а центр проєкціонування S — з невластною точкою осі z (рис. 3.4, а). Тоді координати (x, y) т. A визначаються проєкцією A_{Π} , а координату z можемо просто написати, домовившись, що при розташуванні точки над площиною проєкцій вона матиме знак «+» і знак «-» у протилежному випадку.

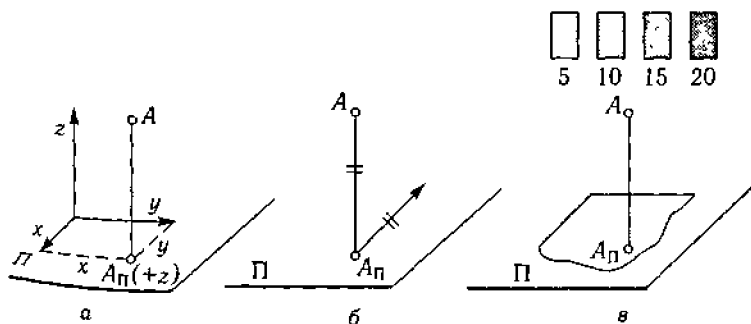


Рис. 3.4. Деякі способи забезпечення оборотності креслень

ку. Така проєкційна система називається *проєкціями з числовими позначками* (див. розд. II). Вона широко застосовується в будівництві та картографії.

Далі можна не записувати координату z , а домовитись, що вона буде позначатись вектором певного напрямку, довжина якого дорівнює z ; від'ємне ж значення — вектором протилежного напрямку (рис. 3.4, б). Така система називається *векторіальними (федоровськими) проєкціями*. Вона легко узагальнюється на багатовимірний простір (див. розд. 15): образом точки такого простору будуть точка і два, три чи більше векторів.

Можна вчинити і так, як це роблять картографи, позначаючи z кольором за домовленістю (рис. 3.4, в).

Перевагою зазначених систем є *простота побудови*. Однак вони недостатньо *наочні*. Оці дві вимоги, хоча й є додатковими, також мають враховуватись при вдосконаленні апарату проєкціювання.

Метод двох зображень

З названих причин в інженерній практиці найширше застосовуються варіанти методу двох зображень.

Розглянемо спочатку загальну схему.

Апарат складається з основного центра проєкціювання S , двох додаткових центрів S_1 та S_2 , площини Π і двох додаткових площин проєкції Π_1 та Π_2 , які мають розмішуватись так, як показано на рис. 3.5. З центра S_1 проєкціюємо т. A на Π_1 , а з центра S_2 — на Π_2 . Одержані проєкції т. \bar{A}_1 й \bar{A}_2 знову, тепер уже з центра S , проєкціюємо на площину Π . Пара точок (A_1, A_2) і є зображенням т. A . Це зображення є взаємно однозначним, оскільки ∞^3 точок простору на площині Π відповідає ∞^3 пар точок (за умови належності т. A_1, A_2 та F одній прямій впливає, що параметричне число пари точок $\infty^2 * \infty^1 = \infty^3$).

Схема є досить складною, тому на практиці частіше застосовують її різновиди — метод Монжа, аксонометрію і перспективу

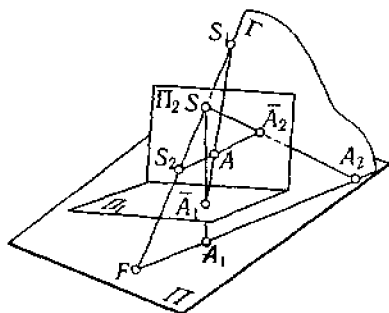


Рис. 3.5. Схема проєкціювання за методом двох зображень

пов'язані з окремими розташуваннями елементів апарату. Саме ж існування загальної схеми показує, що всі ці проекційні системи є спорідненими.

Із викладеного випливає цікаве зауваження: способи побудови зображень і розв'язання задач в усіх трьох проекційних системах є, по суті, варіаціями одного методу; отже, кількість прийомів, які треба знати, скорочується втричі!

Перспектива або центральне проєкціювання

Визначення 3.5. *Перспективою називається різновид методу двох зображень, що має такі особливості:*

- площина зображення Π та картинна площина Π_2 збігаються; предметна площина Π_1 розташовується перпендикулярно до Π_2 ;
- основний центр S та точка зору S_2 збігаються; центр S_1 є невластною точкою і знаходиться в напрямі, перпендикулярному до Π_1 ;
- довільна т. A простору зображається парою точок: A_2 — перспективою т. A , A_1 — вторинною проєкцією т. A (рис. 3.6, а).

Для зручності побудов вводяться також:

- площина горизонту Γ , що проходить через точку зору паралельно до Π_1 ;
- лінія горизонту $h = \Gamma \cap \Pi_2$;
- основа картини $t \parallel h$, $t = \Pi \cap \Pi_1$;
- головний промінь p — перпендикуляр з S до Π ;
- головна точка картини $P = p \cap \Pi$.

Зазначимо практичні особливості перспективи:

• це найнаочніший спосіб зображень. Порівняйте куб на рис. 3.6, б з його ж зображеннями в аксонометрії (рис. 3.7, б) і на епюрі Монжа (3.8, б);

• це найскладніший спосіб побудови зображень;

• визначення метричних характеристик є непростою задачею.

Тому перспектива використовується переважно архітекторами та дизайнерами, для яких важливо оцінити зовнішній вигляд

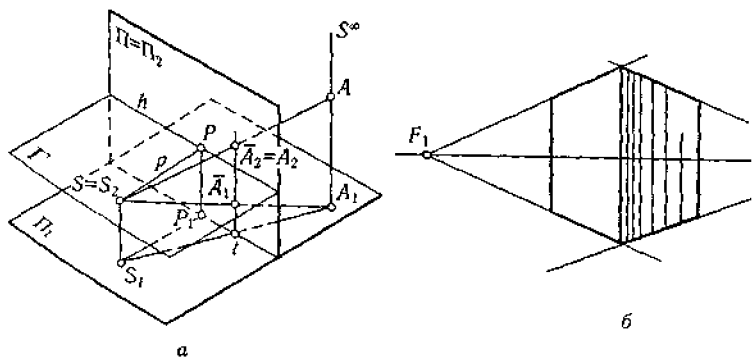


Рис. 3.6. Перспектива

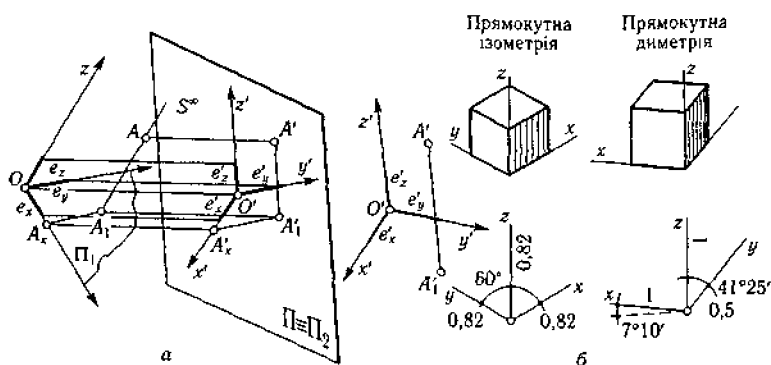


Рис. 3.7. Аксонометрія

будівлі, інтер'єру чи машини. Властивості перспективи розглядатимуться в розд. 10.

Аксонометрія, або паралельне проєкціювання

Визначення 3.7. Аксонометрією називається різновид методу двох зображень, що має такі особливості:

- площина зображення Π та аксонометрична площина проєкцій Π_2 збігаються; вторинна площина проєкцій Π_1 суміщується з площиною Oxy натуральної системи координат $Oxyz$;
- основний центр S та центр S_2 збігаються і є невласними точками; невласною точкою є також центр S_1 , що знаходиться в напрямі, паралельному осі z ;

• довільна т. A простору зображається парою точок: A_2 — аксонометрією т. A , A_1 — вторинною проєкцією т. A (рис. 3.7, а).

Залежно від розташування $Oxyz$, напряму S^∞ і S_2 , можна дістати різні аксонометрії, для яких коефіцієнти спотворення довжин координатних відрізків не будуть однаковими. Вони розглядатимуться в розд. 9; поки що зробимо резюме щодо практичних особливостей:

- аксонометрія менш наочна, ніж перспектива, проте передає особливості форми достатньою мірою (рис. 3.7, б);
- це досить простий спосіб побудови зображень;
- установлення метричних характеристик є відносно складним, хоча й простіше, ніж для перспективи.

Метод Монжа, або ортогональні проєкції

Визначення 3.8. Методом Монжа є різновид методу двох зображень, що має такі особливості:

- площина зображення Π та фронтальна площина проєкцій Π_2 збігаються і розташовуються вертикально; горизонтальна площина проєкцій Π_1 — перпендикулярно до Π_2 ;

- усі центри проєціювання є невластими точками перпендикулярів: S — до лінії перетину Π_1 та Π_2 , що утворює з Π_2 кут 45° ; S_1 — до Π_1 ; S_2 — до Π_2 ;

- довільна т. A простору зображається парою точок: A_2 — фронтальною проєкцією т. A , A_1 — горизонтальною проєкцією т. A ; т. A_1 утворюється після повороту площини Π_1 до суміщення з Π (рис. 3.8, а).

Введемо кілька позначень і назв.

Фронтальна та горизонтальна площини (або *поля*) проєкцій позначаються як Π_2 і Π_1 відповідно; перпендикулярна до них площина називається *профільною площиною проєкцій* та позначається Π_3 .

Площина, що проходить під кутом 45° до Π_2 і Π_1 , називається *бісекторною*.

З лінією перетину площин Π_1 та Π_2 суміщується ось Ox натуральної системи координат; отже, осі z і y належать відповідно площинам Π_2 та Π_1 . За рис. 3.8, а легко впевнитись, що без спотворень (кажуть — у *натуральну величину*) відображаються координати т. A :

- на фронтальній площині проєкцій — (x, z) ;
- на горизонтальній площині проєкцій — (x, y) .

Оскільки обидві проєкції точки мають однакову координату x , вони лежать на лінії, перпендикулярній до осі Ox , яка називається *лінією зв'язку*. Система зв'язаних проєкцій точки на фронтальній і горизонтальній площинах проєкцій називається *зображенням точки на епюрі Монжа* (інакше — на *комплексному кресленні*).

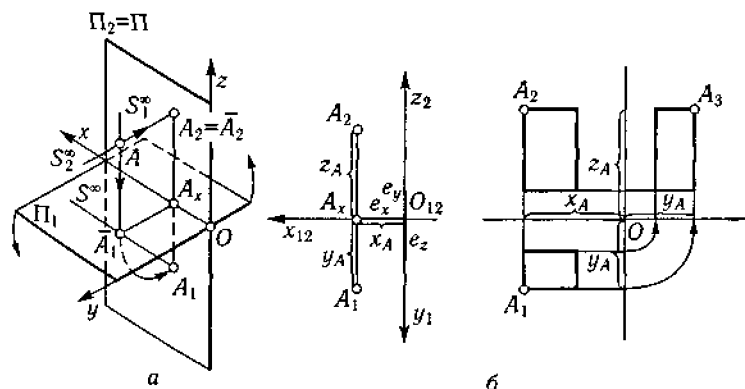


Рис. 3.8. Метод Монжа

Отже, якщо зобразити паралелепіпед, грані якого паралельні координатним площинам, то в натуральну величину відобразяться дві видимі спереду та зверху грані, тобто їхні відрізки і кути, а також площини (рис. 3.8, б). Непаралельні площинам проєкцій фігури будуть зображатись із спотвореннями. Це потребує пояснень, оскільки на с. 31 стверджувалося, що інваріантом проєктивних перетворень є відношення чотирьох точок, а не метричні характеристики.

Справа в тому, що і для перспективи, і для аксонометрії, і для методу Монжа використовувались окремі випадки проєктивних відображень (це підкреслювалась в альтернативних назвах — центральне проєкціювання, оскільки основний центр є власною точкою; паралельне проєкціювання, оскільки проєктувальні промені — паралельні (S^∞); ортогональні проєкції, оскільки напрям проєкціювання є перпендикулярним до площин проєкцій). Ці відображення, поряд із загальними, мають специфічні інваріанти. Для ортогонального проєкціювання це *відношення трьох точок*: якщо відрізок AB поділено точкою C у певному відношенні, то й проєкції відрізка діляться проєкціями точок у тому самому відношенні: $AC / CB = A_1C_1 / C_1B_1 = A_2C_2 / C_2B_2$. Таке відображення називається *афінним (спорідненим)*; отже, поля проєкцій знаходяться в афінному відношенні.

Назвемо деякі інваріанти ортогонального проєкціювання (частина з них, що стосуються інших різновидів методу двох зображень, уже згадувалася):

Властивість 3.1. *Проєкцією точки є точка.*

Властивість 3.2. *Проєкцією прямої є пряма.*

Властивість 3.3. *Якщо точка належить до прямої, то її проєкція належить до проєкції прямої.*

Властивість 3.4. *Точка перетину проєкцій прямих є проєкцією точки перетину цих прямих.*

Властивість 3.5. *Проєкції відрізків паралельних прямих паралельні, а їхні довжини знаходяться в тому самому відношенні, що й довжини відрізків, які проєкціюються.*

Отже, паралельні та непаралельні прямі при ортогональному проєкціюванні розрізняються.

Резюмуємо практичні особливості методу Монжа:

- ортогональні проєкції найменш наочні, визначення форми потребує певного тренування (див. рис. 3.8, б);
- це найпростіший спосіб побудови зображень;
- установлення метричних характеристик є простою операцією (в окремих випадках вони відображаються в натуральну величину).

Самоконтроль. У чому суть проблеми оборотності креслення? Які додаткові вимоги ставляться до відображень?

Назвіть проєкційні системи, що згадувалися в розділі. Вкажіть переваги і недоліки різновидів методу двох зображень.

ЧАСТИНА

ГОУГО КЛАСИКА

Метод Монжа є основою інженерної графіки; він використовується під час побудови основних і додаткових виглядів, перерізів, розрізів. Способи розв'язання позиційних та метричних задач застосовуються в спеціальних розділах і комп'ютерній графіці. Проте є й інший бік справи. Вміння уявляти об'єкт загалом за його частинами та правильно проводити поділ об'єкта — основа будь-якого творчого процесу. Вичуваність будівлі зумовлена гармонійністю її елементів, що виражається через форми, розміри, пропорції; якість поетичного твору — відповідністю основній ідеї ритму, рим, окремих звуків. Можна наводити безліч подібних прикладів. О. К. Антонов любив повторювати, що красиві літаки літають добре, некрасиві — погано, підкреслюючи, що вдале технічне рішення має неабиякий естетичний вплив. Отже, уявлення фігур за їхніми проєкціями, перетворення зображення, об'єднання і перетин поверхонь, розбиття складних задач на простіші, розв'язання через об'єднання окремих етапів розвивають творчий потенціал людини.

4. ТОЧКИ, ПРЯМІ, ПЛОЩИНИ НА ЕПЮРІ МОНЖА. ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Матеріал розділу порівняно з попереднім може здатися занадто простим. Однак, це основа розв'язання складних задач, які розглядатимуться далі. Через те його слід засвоїти не просто на рівні запам'ятовування чи практичних навичок, а *автоматичного використання за будь-яких умов.*

4.1. ПОНЯТТЯ ПРО ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Узагальнюючи наведені в розд. 3 приклади, дамо точні визначення:

Визначення 4.1. *Позиційними називаються задачі, в яких відшукуються розташування точок, прямих, площин, ліній, гранних і кривих поверхонь одне відносно іншого чи частин простору, площин проєкцій, координатних осей.*

Визначення 4.2. *Метричними називаються задачі, в яких відшукуються натуральні розміри відрізків, кутів, площин чи об'ємів.*

Як позиційні, так і метричні задачі можуть бути двох типів:

- прями — визначення характеристик за вихідними умовами;
- обернені — побудова фігур за заданими метричними та позиційними характеристиками.

Усі задачі, що розглядатимуться в цій частині, належать чи зводяться до позиційних або метричних.

4.2. ТОЧКИ

Зображення

Нехай площини проєкцій та осі координат розміщено у просторі так, як показано на рис. 4.1, а. Тоді координати т. $A(x_A, y_A, z_A)$ визначаються за довжинами перпендикулярів, проведених із точки до площин Π_3 , Π_2 і Π_1 . Зображення будується відкладанням координат уздовж відповідних осей (рис. 4.1, б). Зверніть увагу на розташування осей після суміщення полів проєкцій із площиною зображення.

Просто розв'язується також обернена задача. Нехай на епюрі задано т. B . Правило визначення знаків координат таке:

z — за фронтальною проєкцією (індекс z): якщо точка вище осі x , то «+», а якщо нижче, то «—»;

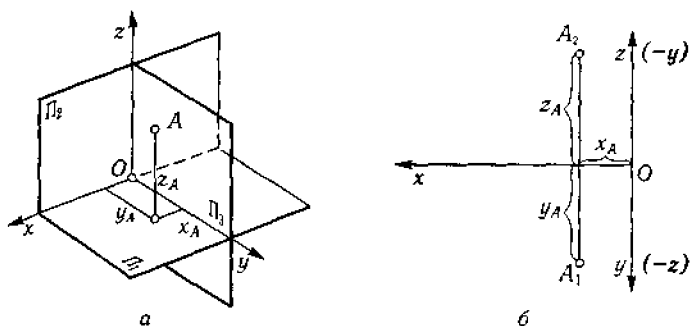


Рис. 4.1. Зображення точки на епюрі Монжа

y — за горизонтальною проекцією (індекс 1): якщо точка вище осі x , то «—», якщо нижче, то «+».

Далі маємо $x_B = x_A, y_B = -y_A, z_B = -z_A$ (рис. 4.2, а). Будуємо у просторі горизонтальну проекцію т. В, а потім, відкладаючи вздовж перпендикуляра до Π_1 координату z_B , знаходимо і саму т. В (рис. 4.2, б).

Тепер розглянемо побудову профільної проекції т. В. На Π_3 положення точки визначається двома координатами — y і z ; отже, необхідно визначити їх на Π_1 та Π_2 і передати на Π_3 . Для цього через т. B_2 проводимо пряму, паралельну осі x (рис. 4.2, в). Оскільки всі точки прямої мають координату $z = z_B$, т. B_3 буде знаходитись на цій прямій (тобто зафіксовано один параметр положення т. B_3). Так само передаємо на Π_3 координату y_B з Π_1 , фіксуючи другий параметр положення. Це можна зробити за допомогою циркуля (I) або використовуючи бісекторну пряму (II).

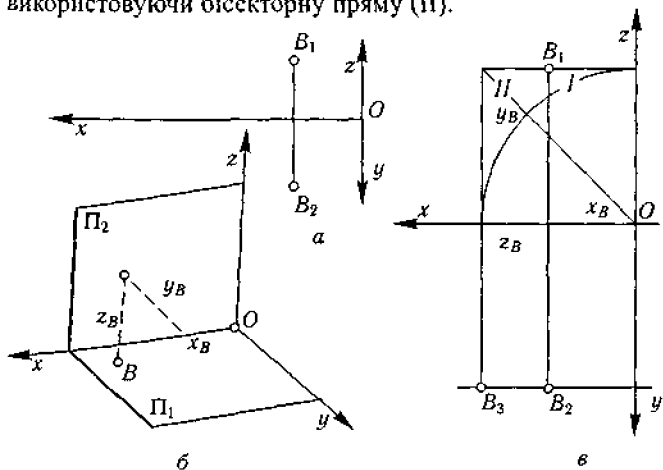


Рис. 4.2. Визначення положення точки та її профільної проекції

Позиційні задачі

Як випливає з рис. 4.1 і 4.2, точки, що мають різні за знаком координати, по-різному розташовані відносно площин проекцій та координатних осей. Площини Π_2 і Π_1 ділять простір на чотири частини, які називають *чвертями*. Чверті нумерують згідно з рис. 4.3, а. Залежно від розташування точок у чвертях знаки їхніх координат x та z змінюються так, як показано в табл. 1. Такі комбінації знаків називають *сигнатурами*.

Точки A, B, C, D знаходяться відповідно в чвертях 1, 2, 3, 4. Їх розташування на елюрі показано на рис. 4.3, б. Розташування точок на Π_1, Π_2, Π_3 , координатних осях, бісекторній площині мають ознаки, показані на рис. 4.3, в. Запам'ятайте їх.

Самоконтроль. Опрацюйте самостійно ші випадки. Вкажіть, де саме розташовуються т E, G, I, K, L, M, N .

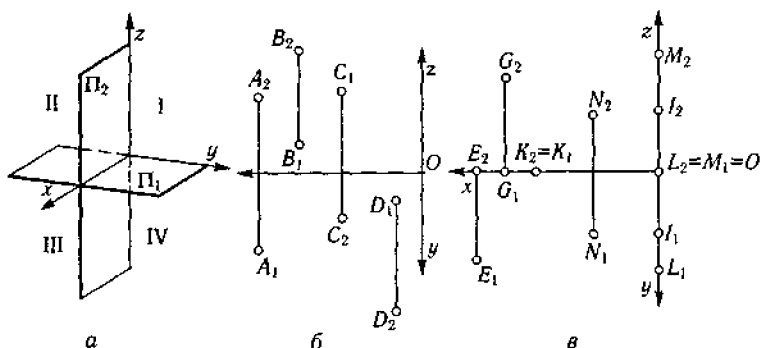


Рис. 4.3 Окремі випадки розташування точок

Доповнимо систему ортогональних площин проекцій Π_1 і Π_2 профільною площиною Π_3 . Ці три площини поділять простір на вісім частин, які називаються *октантами*. Розташування точок та їхні сигнатури визначатимуться знаками трьох координат. Октанти нумерують згідно з рис. 4.4, а. Наприклад, т. A і B , розташовані в I та V октантах, матимуть сигнатури $(+++)$ і $(-++)$ відповідно.

Самоконтроль. Не виконуючи рисунка, а просто уявляючи розташування точок, заповніть табл. 2.

Таблиця 1 Чверті та сигнатури

Чверті/ координати	1	2	3	4
z	+	+	-	-
y	+	-	-	+

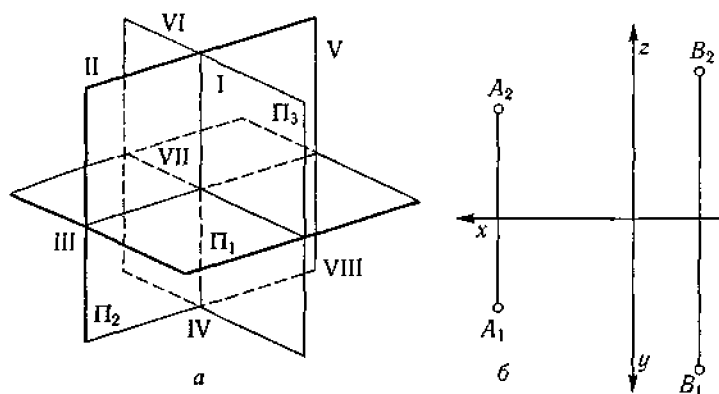


Рис. 4.4 Розташування точок в октантах простору

Таблиця 2 Октанти і сигнатури

Октанти / координати	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+				-			
y	+				+			
z	+				+			

Метричні задачі

Набір метричних задач поки що є обмеженим: розглянутий матеріал надає можливості лише встановлювати відстані від точок до площин проєкцій та координатних осей. Розглянуті вище побудови узагальнює така властивість.

Властивість 4.1. Відстань між фронтальною і горизонтальною проєкціями точки дорівнює сумі відстаней від точки до Π_2 та Π_1 .

Відстань від т. A до Π_2 дорівнює y_A , до Π_1 — z_A , до осі x — кореню квадратному з $y_A^2 + z_A^2$ тощо.

Пара точок

Існує лише одна позиційна задача — з'ясування, чи збігаються точки пари. Вичерпну відповідь дає така властивість.

Властивість 4.2. Точки збігаються, коли збігаються обидві проєкції, та не збігаються в решті випадків.

На рис. 4.5, a — b показано ознаки різних випадків взаємного розташування т. A, B, C

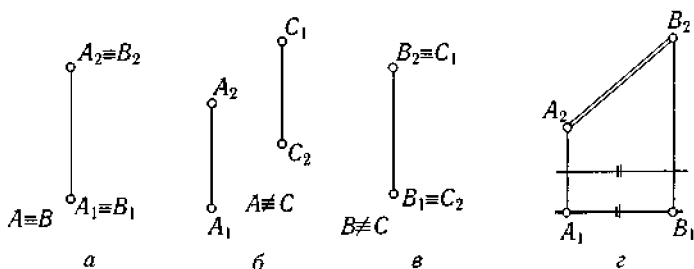


Рис. 4.5. Взаємне розташування пари точок

Зазначимо, що властивість залишається правильною також для інших геометричних фігур, які відповідають її умовам.

Як бачимо, для з'ясування взаємного розташування точок не були потрібні значення координат, тому на епюрі не показано координатні осі. Такий варіант називається *епюром без осі*.

Щодо *метричної задачі* — визначення відстані між парою точок — можемо знайти її відразу лише в окремих випадках, а саме, коли відрізок, заданий точками, буде паралельний координатним площинам (рис. 4.5, *г*). Натуральні величини будемо в подальшому позначати *тонкою подвійною лінією*.

Самоконтроль. Нехай задано т. $A(10,10,10)$. Подивіться на неї з боку не-власної точки осі x . Уявіть та обґрунтуйте, в яких чвертях й октантах будуть знаходитися точки, розташовані відносно т. A : вище на 20; нижче на 20, перед на 20; ззаду на 20; ліворуч на 20; праворуч на 20. Використайте рисунок і перевірте відповіді.

4.3. ПРЯМІ

Зображення

У нарисній геометрії здебільшого використовуються два способи задання прямої — відрізком та парою точок. Пряма простору, що займає *загальне положення* відносно Π_1 і Π_2 , зображається парою проєкцій (рис. 4.6, *а, б*).

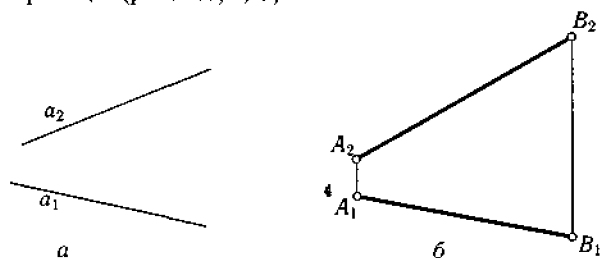


Рис. 4.6. Зображення прямої загального положення

Розташування у чвертях та октантах

Пряма переходить із чверті у чверть (з октанта в октант), перетинаючи площини проєкцій. Точки перетину називаються *слідами*; вони визначають розташування прямої. Розрізняють горизонтальний H , фронтальний F і профільний W сліди. Отже, для визначення положення прямої у чвертях потрібно:

1. Знайти фронтальний слід прямої. Ознакою $F_1 = a_1 \cap \Pi_2$ є нульове значення координати y , а саме такою є вона для осі x . Отже, проводимо пряму a_1 до перетину з x і дістаємо т. F_1 . Проекцію т. F_2 знаходимо за відповідністю (рис. 4.7).

2. Знайти горизонтальний слід прямої (H_1, H_2). Виконується аналогічно; використовуються пряма a_2 , координата z і площина Π_1 (див. рис. 4.7).

Сліди ділять пряму загального положення на три частини, кожна з яких знаходиться в окремій чверті. Номер чверті визначиться, якщо проаналізувати сигнатури будь-яких точок цих частин, керуючись табл. 4.1 (рис. 4.8).

Для визначення положення прямої в октантах слід знайти точки перетину з усіма площинами проєкцій і для кожної з частин прямої, обмежених ними, врахувати знаки всіх координат, керуючись табл. 4.2. Знаходження проєкцій точки перетину прямої з профільною площиною показано на рис. 4.9.

Самоконтроль. Визначте проходження прямих (рис. 4.7 — 4.9) через октанти.

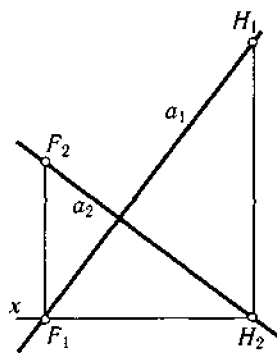


Рис. 4.7. Знаходження слідів прямої

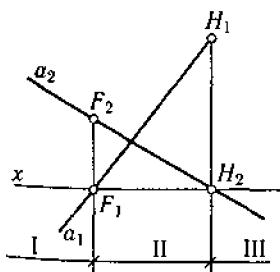


Рис. 4.8. Пряма у чвертях простору

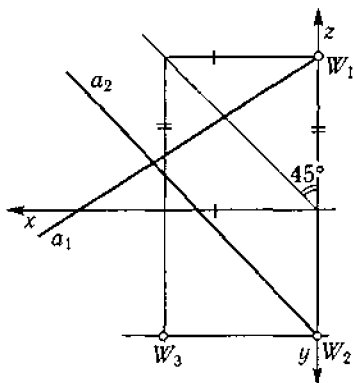


Рис. 4.9. Визначення профільного сліду прямої

Окремі випадки розташування прямих відносно площин проєкцій

Визначення 4.3. Фронтальними, горизонтальними, профільними прямими називаються прямі, паралельні відповідно фронтальній, горизонтальній, профільній площинам проєкцій.

Оскільки відстань від прямої до паралельної площини проєкцій однакова для будь-якої її точки, ознакою паралельності буде незмінність відстані від однієї з проєкцій прямої до осі x (для фронтальної та горизонтальної прямих) й осі z (для профільної прямої). У натуральну величину зобразитимуться довжини відрізків і кути нахилу прямих до площин проєкцій. Зображення горизонтальної, фронтальної і профільної прямих показано на рис. 4.10. У подальшому будемо використовувати такі самі позначення кутів.

Визначення 4.4. Фронтально, горизонтально, профільно проєкціювальними прямими називаються прямі, перпендикулярні відповідно до фронтальної, горизонтальної, профільної площин проєкцій.

Приклади зображення прямих показано на рис. 4.11.

Постає питання: чому, наприклад, профільно проєкціювальні прямі, які водночас с фронтальними та горизонтальними, назива-

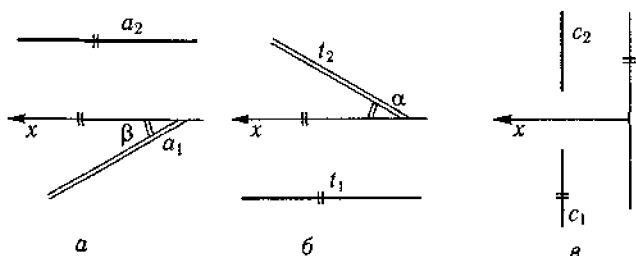


Рис. 4.10. Прямі, паралельні площинам проєкцій: а — горизонтальна; б — фронтальна; в — профільна;

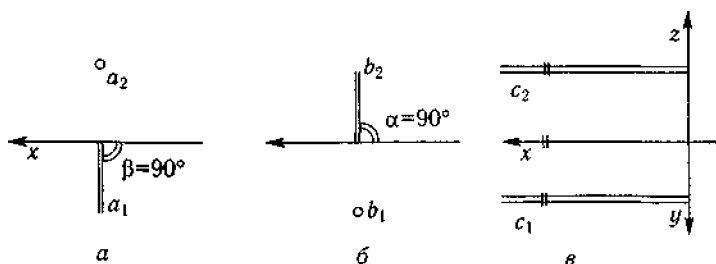


Рис. 4.11. Прямі, перпендикулярні до площин проєкцій: а — фронтально проєкціювальна, б — горизонтально проєкціювальна; в — профільно проєкціювальна

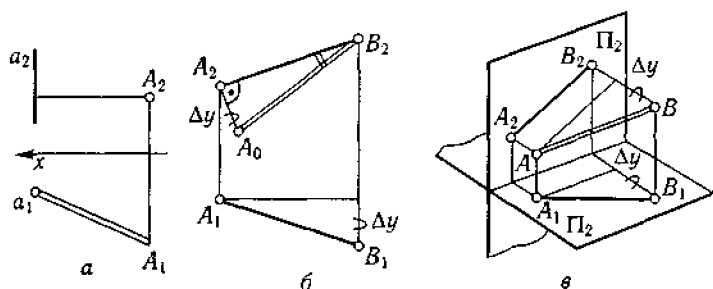


Рис. 4.12. Визначення відстаней і кутів нахилу

ються за ознакою перпендикулярності? Визначення має фіксувати більш специфічну ознаку. Покажемо, що перпендикулярність є саме такою ознакою. Зафіксуємо довільну точку і підрахуємо, скільки через неї проходить паралельних та перпендикулярних прямих. Горизонтальна проекція фронтальної прямої має бути паралельна осі x , другі проекції можуть бути здобуті обертанням прямої навколо фронтальної проекції вибраної точки. Їх — ∞^1 . Аналогічно є ∞^1 горизонтальних прямих, що проходять через цю саму точку; всього паралельних прямих $2\infty^1$. І лише одна з них, обидві проекції якої паралельні осі x , є профільно проекційовальною.

Самоконтроль. Виконайте рисунок, що ілюструє ці міркування.

Точка і пряма

Позиційні характеристики вичерпуються властивістю 3.3.

Поки що можемо розв'язати лише дві метричні задачі: визначення відстані від точки до прямої (тільки в окремих випадках, подібних до показаного на рис. 4.12, а) та знаходження відстані між точками прямої. В останньому випадку застосовується *спосіб прямокутного трикутника* (рис. 4.12, б, в). З т. A_2 проводимо перпендикуляр до відрізка і відкладаємо вздовж нього $\Delta y = y_A - y_B$. Одержану точку з'єднуємо з т. B . Довжина цього відрізка є натуральною (AB). Кут між натуральною довжиною і фронтальною проекцією відрізка дорівнює куту нахилу прямої до Π_2 . Аналогічно визначається кут нахилу прямої до Π_1 .

Розглянемо ще одну типову задачу.

Задача 4.1. Поділ відрізка в заданому відношенні, наприклад $1/2$ (рис. 4.13).

Задача є прикладом використання інваріанта афінного перетворен-

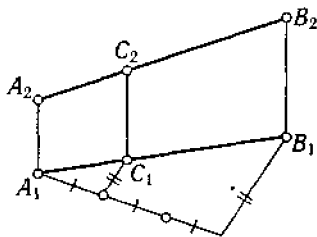


Рис. 4.13. Пропорційний поділ відрізка

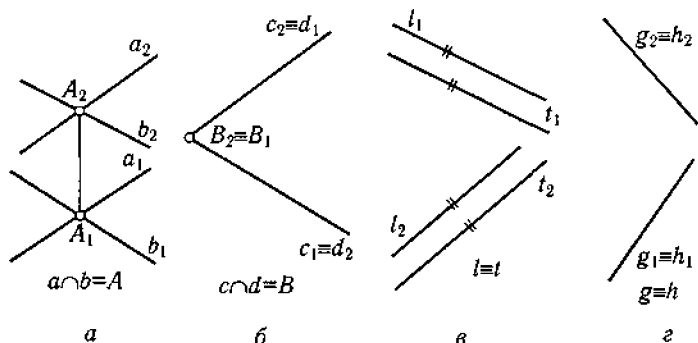


Рис. 4.14. Взаємні розташування пар прямих

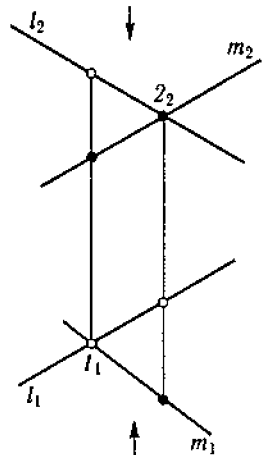
ня — відношення трьох точок, шкільним аналогом якого є *теорема Фалеса*. Хід розв'язання такий:

1. Проведемо з т. A_1 пряму під довільним кутом до (A_1B_1) .
2. Відкладемо вздовж прямої три однакових відрізки.
3. З'єднаємо кінець останнього з т. B_1 .
4. Через кінець першого відрізка проведемо пряму, паралельну одержаній в п. 3.

Точка C_1 перетину цієї прямої з (A_1B_1) і знайдена за відповідністю т. C_2 ділитимуть (A_1B_1) та (A_2B_2) в заданому відношенні, що справедливо також для т. C і (AB) .

Дві прямі

До *позиційних задач* належить визначення взаємного розташування прямих. Можливі варіанти, які є наслідками властивості 4.2, показано на рис. 4.14.



Існує ще одне розташування пари — мимобіжні прямі. Вони частково перекриваються, і виникає така типова задача.

Задача 4.2. *Визначення видимості способом конкуруючих точок* (рис. 4.15).

Проведемо лінії зв'язку для *конкуруючих* т. I_1 та I_2 , де спостерігається перекриття. Бачимо, що кожній точці відповідають дві точки (на l і m). Позначимо їх незаштрихованим і заштрихованим колами. Напряму зору для фронтальної проєкції знизу вгору, а для горизонтальної — звер-

Рис. 4.15. Визначення видимості способом конкуруючих точок

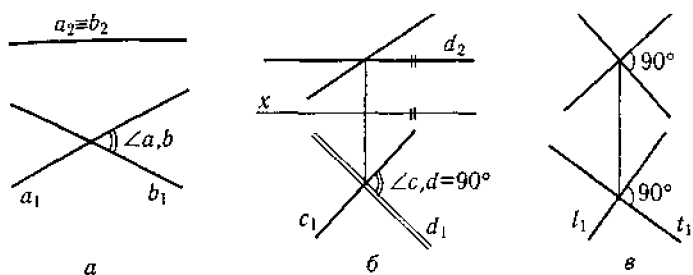


Рис 4.16. Зображення натуральних величин кутів (окремі випадки)

ху вниз. Оскільки точка на l_2 ближча до глядача, ніж точка на m_2 , її будемо бачити, і коло, що позначає т. l_1 буде незаштрихованим, а коло, що позначає т. 2_2 — чорним, тому що точка на m_1 ближча до глядача, ніж точка на l_1 .

Розглянемо кілька важливих прикладів метричних задач. Кут відображається в натуральну величину, якщо обидві його сторони паралельні площині проекції (рис. 4.16, а), що буває рідко. Частіше бачитимемо прямий кут (рис. 4.16, б).

Властивість 4.3. Прямий кут проєкціюється в натуральну величину, якщо одна з його сторін паралельна площині проєкції, а інша не є перпендикулярною до неї.

Самоконтроль. Подивіться на рис 4.16, в Чи буде прямий кут між прямими l_1 і t_1 ?

Із властивості 4.3 випливає, що відстань між мимобіжними прямими не матиме спотворень у випадках, подібних до рис. 4.17, а, а відстані між паралельними прямими є натуральними для розташувань на рис. 4.17, б, в.

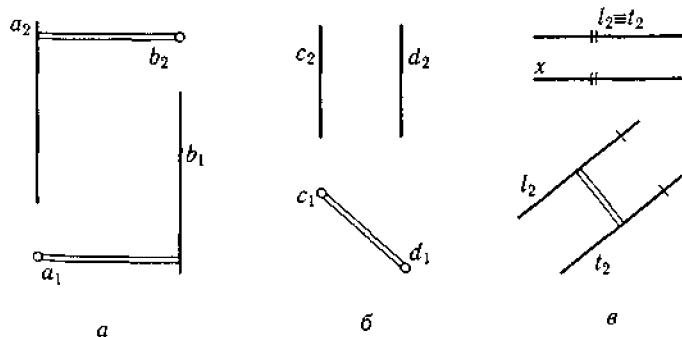


Рис. 4.17. Відстані між парами прямих (окремі випадки)

4.4. ПЛОЩИНИ

Зображення

Найчастіше площини задаються відсіком, парою прямих, лініями рівня, слідами (рис. 4.18, *a—г* відповідно).

Докладніше зупинимось на варіантах *в* і *г*. У площині P можна провести прями, паралельні до Π_2 та Π_1 ; вони називаються **фронталлю** і **горизонталлю** та позначаються f і h . Кожна фронталь має однакову координату y , а горизонталь — координату z . Звідси й друга назва — **лінії рівня**. Спосіб побудови є зрозумілим із рис. 4.19, *a*.

Ще дві головні лінії площини — **найбільшого нахилу** до Π_1 та Π_2 (рис. 4.19, *б*) — перпендикулярні до ліній рівня.

Сліди площини P на Π_2 і Π_1 (позначаються f_p та h_p) паралельні довільним фронталі й горизонталі. Можна назвати їх

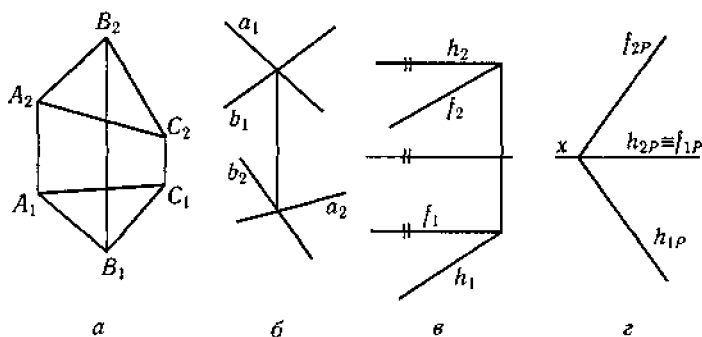


Рис. 4.18. Зображення площин, заданих різними способами

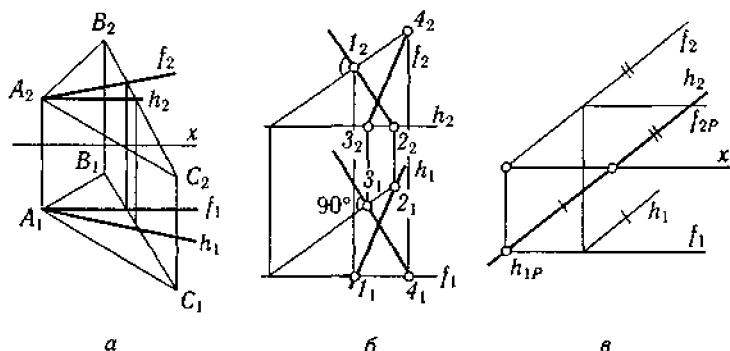


Рис. 4.19. Спеціальні лінії площини

«нульовими» лініями, оскільки з умови належності площинам проєкцій випливає, що f_1 і h_2 збігаються з віссю x . Відтак перехід від задання площини лініями рівня до задання слідами (рис. 4.19, в) є, по суті, перенесенням f_1 і h_2 до суміщення з віссю x .

Розташування відносно площин проєкцій

Задача 4.3. *Визначення кута нахилу площини P до площин проєкцій.*

Проводимо лінію найбільшого нахилу — перпендикуляр до горизонталі, якщо шукаємо кут нахилу до Π_1 (рис. 4.20), і до фронталі, якщо — до Π_2 (властивість 4.3). Знаходимо натуральну довжину відрізка перпендикуляра. Кут між натуральною довжиною та проєкцією відрізка дорівнює шуканому.

У випадках, коли площини перпендикулярні до площин проєкцій (рис. 4.21, а) та паралельні їм (рис. 4.21, б) в натуральну довжину будуть відображатись відрізки, кути, площі відскіків.

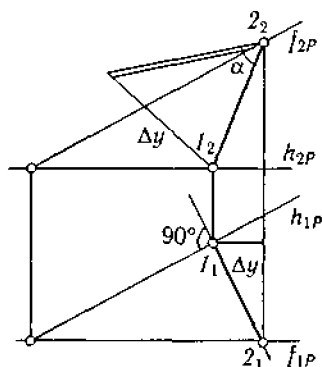
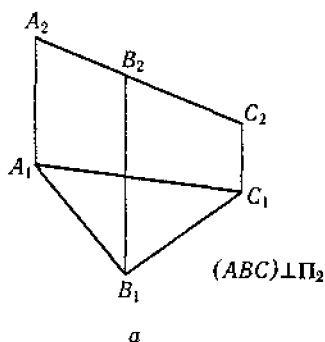
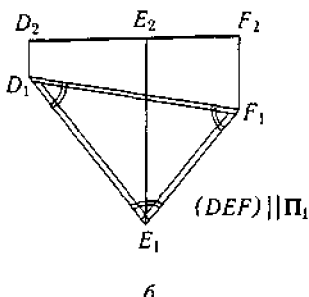


Рис. 4.20. Визначення кута нахилу площини P до Π_1



а



б

Рис. 4.21. Площини окремого розташування

Площина, що водночас паралельна і перпендикулярна до площин проєкцій, називається за ознакою паралельності.

Самоконтроль. Поясніть, чому назва площини визначається саме так.

Точка і площина

Маємо *позиційну задачу* визначення належності точки до площини (якщо належить, то точка належить також якійсь прямій площини, що перевіряється за другою проєкцією, рис. 4.22, а), та *метричну задачу* визначення відстані від точки до площини (рис. 4. 22, б).

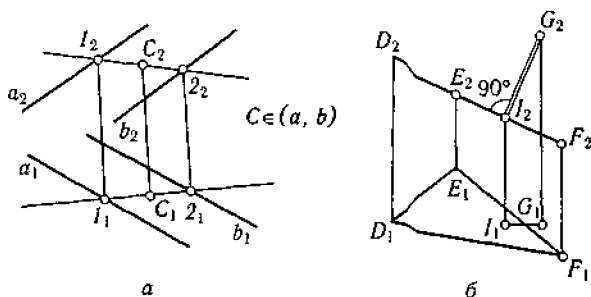


Рис. 4.22. Точка і площина:
 a — належність; b — відстань (окремаї випадок)

Пряма і площина

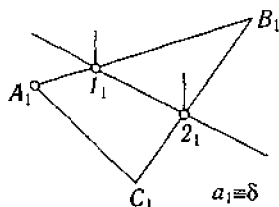
Розглянемо основну позиційну задачу.

Задача 4.4. Визначення перетину прямої і площини, заданої відсіком (рис. 4.23).

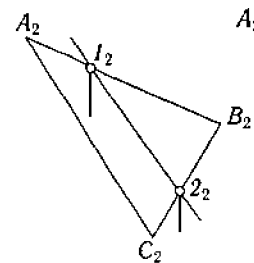
1. Через будь-яку з проєкцій прямої проводимо допоміжну січну площину δ (вона має бути проєкціовальною). Нехай для визначеності вона проходить через a_1 і перпендикулярна до Π_1 (рис. 4.23, a).

2. Ця площина перетинає (ABC) по прямій, положення якої визначатиметься т. 1 і 2 перетину δ з AB і BC . Фронтальні проєкції т. 1 і 2 визначаються за відповідністю (рис. 4.23, b).

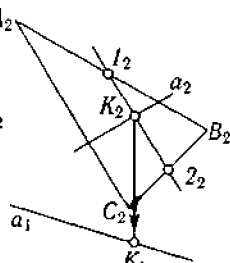
3. Оскільки a_2 та $1_2, 2_2$ належать δ , вони не є мимобіжними і мають точку перетину K_2 . Оскільки пряма $1_2, 2_2$ належить



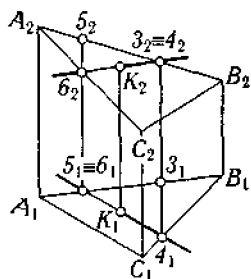
a



b



c



d

Рис. 4.23. Основна позиційна задача — перетин прямої та площини

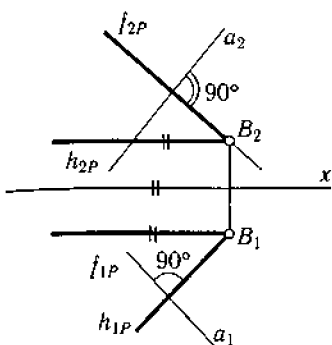


Рис. 4.24 Побудова площини за заданою умовою

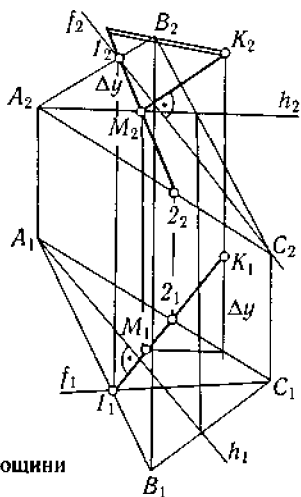


Рис. 4.25. Визначення відстані від точки до площини (загальний випадок)

(ABC), т. $K \in$ точкою перетину a та ABC . Точка K_1 визначається за відповідністю (рис. 4.23, в).

4. Видимість прямої a відносно відсіку (ABC) визначається виходячи з того, що відсік є непрозорим. Місця конкуруючих точок впливають із рис. 4.23, г. Поза межами відсіку пряма завжди є видимою. Видимість змінюється в точці перетину K .

Тепер розглянемо типові метричні задачі.

Задача 4.5. Проведення площини, перпендикулярної до заданої прямої, через задану точку (рис. 4.24).

Пригадаємо, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох непаралельних прямих цієї площини. Оскільки для побудов потрібні, щоб прямий кут проєкціювався без спотворень, як прямі, що задають шукану площину, вибираємо фронталь і горизонталь, що відповідає умові властивості 4.3.

1. Проводимо через т. B фронталь і горизонталь.

2. Задаємо площину P слідами, орієнтуючись на рис. 4.19, в. Кінцевий результат показано на рис. 4.24.

Задача 4.6. Визначення відстані від точки до площини (загальний випадок, рис. 4.25).

1. Проводимо з т. K перпендикуляр до (ABC). При цьому керуємося рис. 4.24 і відповідними поясненнями.

2. Знаходимо т. M його перетину з площиною. Пригадаємо рис. 4.23 та пояснення до нього.

3. Знаходимо натуральну величину відрізка (KM) способом прямокутного трикутника. Керуємося поясненнями до рис. 4.12, б. Ця величина і є відстанню від т. K до (ABC).

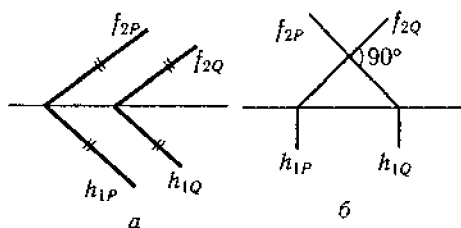


Рис. 4.26. Паралельні та перпендикулярні площини (окремі випадки)

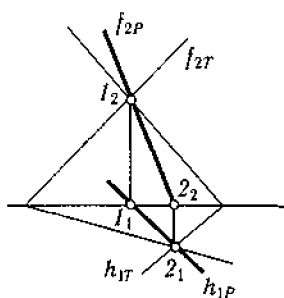


Рис. 4.27. Перетин площин, заданих слідами

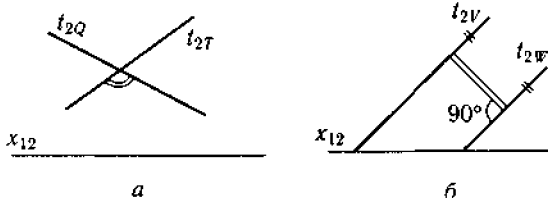


Рис. 4.28. Кути і відстані між площинами (окремі випадки)

Дві площини

Особливі розташування площин показано на рис. 4.26, а, б.

Задача 4.7. Визначення лінії перетину площин P і T .

Ця пряма визначається точками перетину двох довільних прямих, що належать P та T . Найлегше знайти точки, коли площини задано слідами (рис. 4.27): перетин f_p і f_T визначить проекції т. 1, а h_p і h_T — проекції т. 2.

За інших умов доцільно перейти до розглянутого способу або використати допоміжні січні площини. Видимість визначається способом конкуруючих точок.

Розглянемо *метричні задачі*. На рис. 4.28, а показано натуральну величину кута між площинами, а на рис. 4.28, б — відстань між паралельними площинами. Для зображення проєкціовальних площин досить одного сліду (рис. 4.28, б).

Самоконтроль. Перерисуйте всі окремі випадки розташування точок, прямих та площин на окремий аркуш і запам'ятайте їх.

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

У розд. 4 розглядалися здебільшого окремі випадки позиційних і метричних задач (пригадайте їх). Щоб перейти до складніших та практично більш значущих питань, потрібно розширити арсенал методів розв'язання. Розділ присвячено саме цьому.

5.1. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

Наведені досі задачі поділяються на дві групи: для одних усе потрібне визначалося безпосередньо на епюрі; для інших застосовувались неочевидні побудови. З цього випливає, що: простота розв'язання істотно залежить від розташування фігур відносно площин проекцій; можливим шляхом розв'язання є зміна невдалого зображення на більш зручне. Ця ідея лежить в основі методів перетворення проекцій. Як змінити зображення? Є три можливості: змінити площини проекцій, розташування фігур або напрям проєкціювання (табл. 3).

Таблиця 3. Порівняльна характеристика перетворень проекцій

Ідея	Варіанти ідей	Особливості	Застосування
Заміна Π_1, Π_2, Π_3	Одно- чи двократна	Залежно від умови задачі	Універсальне
Зміна положення фігур	Обертання навколо перпендикулярних осей	Осі, перпендикулярні до Π_1 чи Π_2	—«—
	Плоскопаралельне переміщення	Обертання і паралельне перенесення	—«—
	Обертання навколо паралельних осей	Обертання навколо лінії рівня	Визначення натуральної величини відсіку
	Суміщення	Слід площини суміщується з Π_1 чи Π_2	Побудова фігур за заданими умовами
Зміна напрямку проєкціювання	Косокутне проєкціювання	Кут проєкціювання $\neq 90^\circ$	Позиційні задачі
	Прямокутне проєкціювання	Будується діаграма	Метричні задачі

Технічна частина методів різна, а мета одна — перейти до такого розташування фігур, коли потрібну характеристику можна визначити безпосередньо. Зазначимо, що для цього іноді слід застосовувати той чи інший метод кілька разів або сполучати його з іншими методами.

5.2. ЗАМІНА ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Схема

Нехай задано проєкції точки — A_1 та A_2 (рис. 5.1). Побудуємо зображення т. A на додатковій вертикальній площині Π_4 .

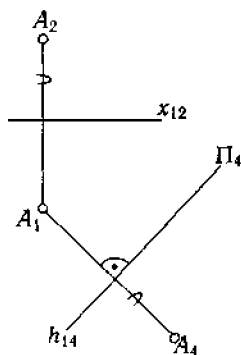


Рис. 5.1. Схема заміни площин проєкцій

1. Задамо додаткову площину Π_4 горизонтальним слідом h_{14} . Оскільки вона є горизонтально проєкціовальною, цього досить для однозначного визначення.

2. Лінії зв'язку між проєкціями A_1 і A_4 будуть перпендикулярними до сліду h_{14} .

3. Координата z_A визначиться за фронтальною проєкцією; відкладаючи її вздовж лінії зв'язку, одержуємо т. A_4 .

Для переходу до зручного (виходячи з умови задачі) положення проєкцій іноді необхідно проводити дві послідовні заміни. Тоді координати кожен раз беруться з попередньої площини проєкцій.

Застосування

Задача 5.1. Визначення довжини відрізка (рис. 5.2).

Нехай відрізок знаходиться в довільному положенні (рис. 5.2, а). У натуральну величину він буде відображатись, коли займе поло-

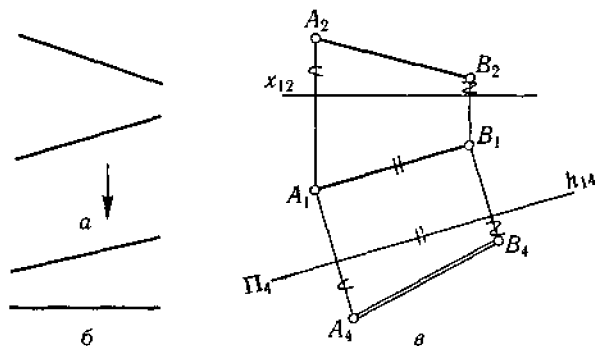


Рис. 5.2. Визначення довжини відрізка

ження, показане на рис. 5.2, б. Отже, слід підібрати таку вертикальну площину проєкцій, для якої відрізок буде паралельним. Ця констатація і лежить в основі перетворення (рис. 5.2, в).

Задамо вертикальну площину Π_4 горизонтальним слідом h_{14} , паралельним (A, B_1) ; за цієї умови він може розташовуватись у будь-якому місці. (Цей слід є лінією перетину Π_1 та Π_4 , тому доцільно позначати його саме цими індексами.) Будуємо проєкції т. A і B на Π_4 , виходячи з того, що лінії зв'язку будуть перпендикулярними до h_{14} , а координати z_A та z_B — такими самими, як і на Π_2 . Здобуте зображення відрізка без спотворень покаже його довжину.

Отже, тут знадобилася лише одна зміна площин проєкцій.

Самоконтроль. Порівняйте застосування заміни площин проєкцій для розв'язання цієї задачі способом прямокутного трикутника. Які ви вбачаєте аналогії?

Одна заміна площин проєкцій є достатньою для розв'язання тих задач, де потрібно перевести:

- у проєкціювальне положення довільну площину (допоміжна площина вибирається перпендикулярною до фронталі чи горизонталі цієї площини);

- довільну пряму в положення, паралельне допоміжній площині проєкцій.

Покажемо, як використовувати подвійну заміну.

Задача 5.2. Визначення відстані між мимобіжними прямими (рис. 5.3).

Вихідне положення прямих показано на рис. 5.3, а. Для розв'язання задачі одну з них слід перевести у проєкціювальне положення (рис. 5.3, б). Проте здійснити це однією заміною неможливо: якщо, наприклад, взяти додаткову площину перпендикулярною до a_2 , то пряма зобразиться не як точка, а як відрізок — різні її точки матимуть різні координати y . Тому спочатку переведемо одну з

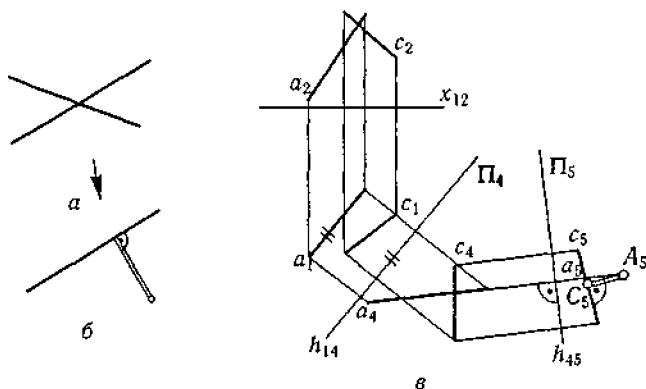


Рис. 5.3. Визначення відстані між мимобіжними прямими

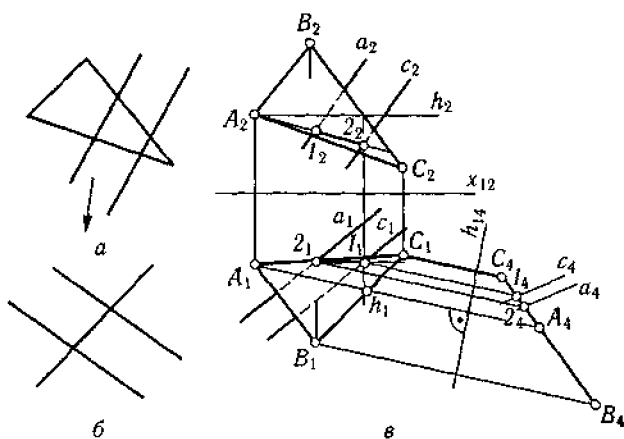


Рис. 5.4. Перетин площин

прямих у паралельне до додаткової площини проєкції положення, а потім — у проєкціювальне (рис. 5.3. *б*). Відстань між a і c дорівнює натуральній величині відрізка (AC) на площині Π_1 .

Подвійна заміна площин проєкцій використовується, якщо під час розв'язування задачі необхідно зробити:

- пряму загального положення — проєкціювальною;
- довільну площину — паралельною площині проєкцій.

Самоконтроль. Задайте площину відрізком (ABC) і знайдіть натуральні величини відрізків (AB) , (BC) , (CA) , кутів між ними, а також відрізок площини.

Заміна площин проєкцій може бути успішно використана також при розв'язанні позиційних задач.

Наступний приклад слід розібрати до повної ясності, оскільки він буде використовуватись в розд. 6 та 8.

Задача 5.3. Перетин площин (рис. 5.4).

Вихідне розташування площин, показане на рис. 5.4, *а, в* загальним. Для розв'язання задачі слід одну з них зробити проєкціювальною (рис. 5.4, *б*), знайти лінію перетину, повернутися до вихідних проєкцій і визначити видимість.

1. Проводимо в (ABC) горизонталь.
2. Вибираємо положення додаткової площини проєкцій Π_4 перпендикулярним до h_1 . Позначаємо її слід h_{14} .
3. Будуємо на площині Π_4 зображення (ABC) та (a, c) .
4. Фіксуємо лінію перетину $(I_4 2_4)$ за точками перетину сліду (ABC) на Π_4 з (a, c) .
5. Повертаємось до вихідних зображень, переносючи т. I і 2 в папрямі ліній зв'язку спочатку на горизонтальну, а потім на фронтальну площини проєкцій.

6. Визначаємо видимість площин за допомогою конкуруючих точок. Оскільки поза межами відсіку (a , c) площина (ABC) буде видимою, а видимість зміниться на лінії перетину, достатньо проаналізувати тільки дві такі точки (рис. 5.4, в).

5.3. ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ОСЕЙ

Схема

Нехай задано вісь обертання a , $a \perp \Pi_1$, а також т. A , яку слід повернути навколо a на кут γ (рис. 5.5).

Оскільки площина, в якій відбувається обертання, перпендикулярна до a , вона паралельна Π_1 . Тоді траєкторія — дуга кола радіуса, що дорівнює відстані від т. A до a , — зобразиться на Π_1 без спотворення. Ця сама площина перпендикулярна до Π_2 ; отже, на фронтальній площині проєкції траєкторія виглядатиме як відрізок прямої, паралельної осі x . З'ясувавши це, будуюмо нові зображення т. A , тобто A'_1 , A'_2 .

Застосування

Обертання навколо перпендикулярних осей є універсальним методом, що використовується для розв'язання позиційних і метричних задач один чи кілька разів послідовно. Зауваження щодо кількості заміни площин проєкцій для задач певних типів, зроблені вище, справедливі також для підрахунку кількості обертань.

Задача 5.4. Визначення відстані від точки до площини (рис. 5.6)

Для розв'язання задачі слід від загального розташування площини, зображеного на рис. 5.6, а, перейти до показаного на рис. 5.6, б проєкціовального її положення; тоді відстань до точки визначиться згідно з рис. 4.22, б. Повернемо площину навколо горизонтально проєкціовальної осі. Доцільно провести вісь через вершину відсіку (наприклад, A — т. A не змінюватиме положення, і доведеться будувати зображення не чотирьох, а лише трьох точок). Далі визначимо радіуси та кут повороту. Перші дорівнюватимуть відстаням від точок до осі, а другий — куту повороту горизонталі до положення, перпендикулярного до Π_2 . Після обертання площина (ABC) стане фронтально проєкціовальною. Отже:

1. Будуємо горизонталь (ABC). Проводимо вісь обертання i через т. A й обертаємо горизонталь до проєкціовального положення.

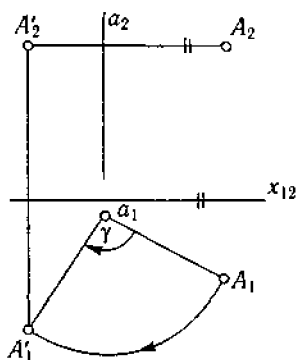


Рис. 5.5. Схема обертання навколо перпендикулярних осей

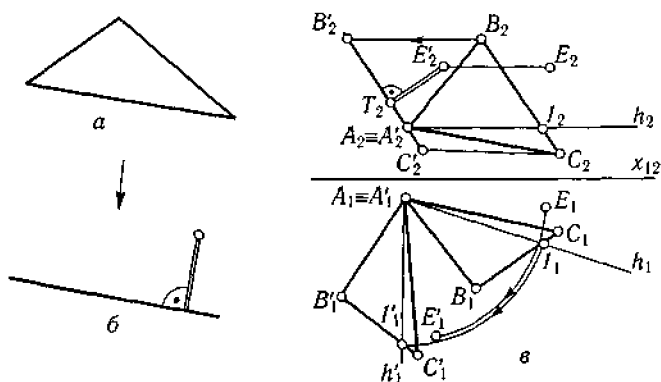


Рис. 5.6. Визначення відстані від точки до площини (обертання навколо перпендикулярних осей)

2. Маємо нові положення т. A (збігається з вихідним) і I . Положення т. B, C, E визначаються однією з умов: вони обертаються по колах фіксованих радіусів на визначений кут у визначеному напрямі або по колах фіксованих радіусів та зберігають відстані від т. I .

3. Нові положення точок на фронтальній площині проєкцій визначаються з умов: траєкторії їх переміщення паралельні осі x ; лінії зв'язку між новими горизонтальними і фронтальними зображеннями точок перпендикулярні до осі x . Проводимо перпендикуляр ($E'_2 T_2$) з т. E'_2 до ($A'_2 B'_2 C'_2$). Відстань $E'_2 T_2$ і є шуканою відстанню від точки до площини (рис. 5.6, в).

Самоконтроль. Площина є проєкціовальною, коли будь-яка її пряма перпендикулярна до площини проєкцій. Чому ж кут повороту визначається за обертанням горизонталі або фронталі?

5.4. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Схема

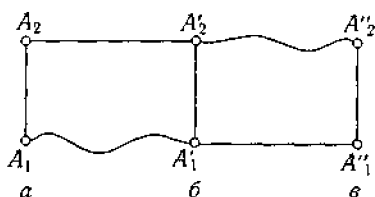
Плоскопаралельне переміщення (рис. 5.7) є суміщенням обертань і паралельних перенесень; воно ґрунтується на трьох очевидних властивостях.

Властивість 5.1. При плоскопаралельному переміщенні відносно горизонтальної площини проєкцій траєкторія руху на фронтальній площині зобразиться у вигляді прямої, паралельної осі x .

Властивість 5.2. При плоскопаралельному переміщенні відносно фронтальної площини проєкцій траєкторія руху на горизонтальній площині зобразиться у вигляді прямої, паралельної осі x .

Властивість 5.3. При плоскопаралельному переміщенні позиційні та метричні властивості фігур не змінюються.

рис. 5.7. Схема плоскопаралельного переміщення



Отже, при русі т. A (рис. 5.7, a) спочатку паралельно Π_1 , а потім — Π_2 проєкційні зв'язки матимуть вигляд, показаний на рис. 5.7, $б$, $в$.

Застосування

Область її особливості застосування плоскопаралельного переміщення аналогічні обертанню навколо перпендикулярних осей.

Задача 5.5. *Визначення двогранного кута.*

Кут між площинами (рис. 5.8, a) не спотворюватиметься, коли лінія їх перетину займе проєкціювальне положення (рис. 5.8, $б$). Отже, загальне положення прямої (AB) слід змінити на проєкціювальне.

Для цього спочатку робимо її паралельною фронтальній площині проєкцій, а потім перпендикулярною до горизонтальної площини проєкцій. Хід побудов і результат — кут γ — показано на рис. 5.8, $в$.

Самоконтроль. Двогранний кут визначається за кутом між перпендикулярами, проведеними у площинах, що перетинаються, до лінії перетину. Доведіть, що при розв'язанні задачі була використана рівнозначна властивість. Використайте плоскопаралельне переміщення для визначення натуральної величини плоского відсіку (ABC)

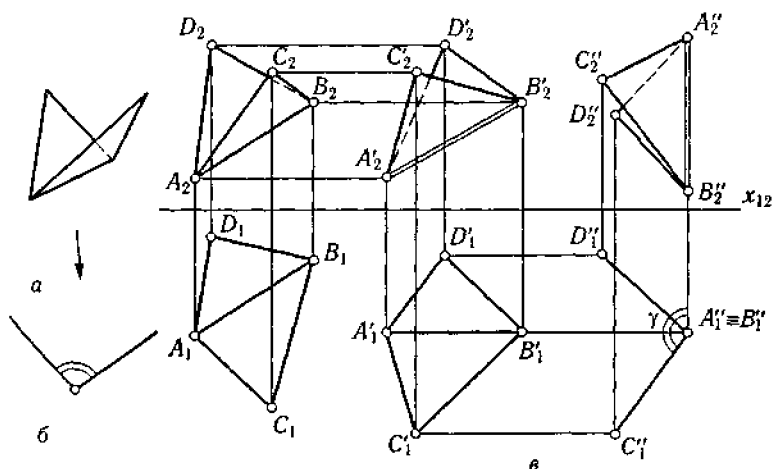


Рис. 5.8. Визначення двогранного кута

5.5. ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПАРАЛЕЛЬНИХ ОСЕЙ

Схема

Плоска фігура переводиться у положення, паралельне одній з площин проєкцій; тоді вона зображується в натуральну величину. Як вісь обертання вибирається фронталь або горизонталь; центри, радіуси і кут визначаються з умови досягнення мети перетворення.

Переведемо т. A обертанням навколо горизонталі в положення, коли радіус (OA) стане паралельним Π_1 (рис. 5.9, а). Траєкторія обертання на горизонтальній площині зобразиться як перпендикуляр до h , на фронтальній — у вигляді еліпса (будувати його немає потреби). Отже, т. O перетину перпендикуляра з h і є центром обертання. Знаходимо натуральну величину (OA) способом прямокутного трикутника. Щоб мінімізувати кількість побудов, відкладаємо Δz уздовж h . Тоді, відклавши натуральну величину радіуса (OA) вздовж перпендикуляра, дістанемо A'_1 — нове положення т. A (рис. 5.9, б).

Застосування

Область застосування цього перетворення обмежена — воно використовується тільки для визначення натуральних величин плоских фігур.

Задача 5.6. *Визначення натуральної величини відсіку площини* (рис. 5.10, 5.11).

Вихідні умови дано на рис. 5.10, а. Метою перетворення є переведення плоского відсіку (ABC) в горизонтальне положення, показане на рис. 5.10, б.

Для зменшення побудов проводимо горизонталь через т. A . Далі визначаємо центри обертання і натуральні довжини радіусів для т. B та C . Кут визначиться з умови переведення радіусів у положення, паралельне Π_1 . Відкладаємо вздовж перпендикулярів до го-

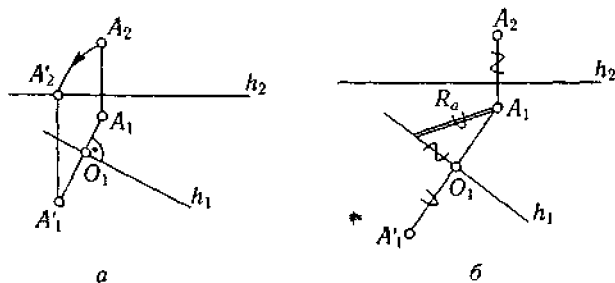


Рис. 5.9. Апарат обертання навколо паралельної осі

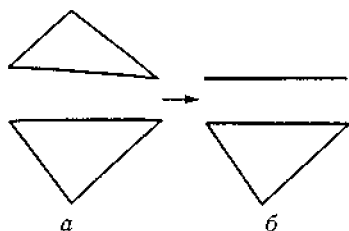
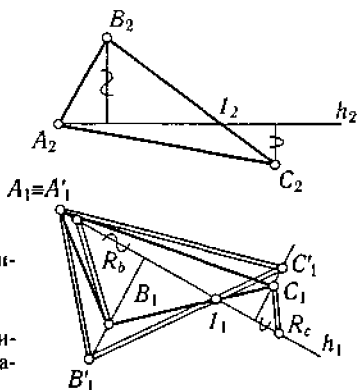


Рис. 5.10. Вихідні умови і мета перетворення задачі 5.6

Рис. 5.11. Визначення натуральної величини плоского відсіку (обертання навколо паралельних осей)



ризонталі натуральні довжини радіусів т. B і C й дістаємо їх нові положення. Сполучивши їх з т. A , дістанемо натуральну величину (ABC) (рис. 5.11).

Зазначимо, що для розв'язання цієї задачі, на відміну від заміни площин проєкцій, обертання навколо перпендикулярних осей та плоскопаралельного переміщення, знадобилося лише одне перетворення.

Самоконтроль. Для перевірки побудов використовується така властивість: (C_1B_1) перетинає горизонталь у тій самій точці, що й (C_1B_1) . Поясніть, чому це так.

5.6. СУМІЩЕННЯ

Схема

Суміщення є окремим випадком обертання навколо паралельних осей, коли як вісь вибирається фронтальний або горизонтальний слід площини. В результаті площина суміщується з фронтальною чи горизонтальною площиною проєкцій. Звідси й походить назва перетворення.

Той слід, який є віссю, не змінює свого положення; отже, потрібно визначити суміщене положення другого сліду. Для цього досить показати нове положення однієї точки, оскільки точка перетину слідів не змінюватиме свого положення. Отже, при обертанні навколо горизонтального сліду фіксуємо на f_{2p} довільну т. I_2 і знаходимо її горизонтальну проєкцію. Переміщуватись ця точка буде вздовж перпендикуляра до h_{1p} , а на яку саме відстань, визначиться з умови, що після повороту $OI'_1 = OI_2$. Точки O та I'_1 визначають суміщене положення фронтального сліду (рис. 5.12, а). Звернемо увагу, що h_{1p} , f'_{2p} і вісь x визначають афінне перетворення т. I'_1 на т. I_1 (рис. 5.12, б).

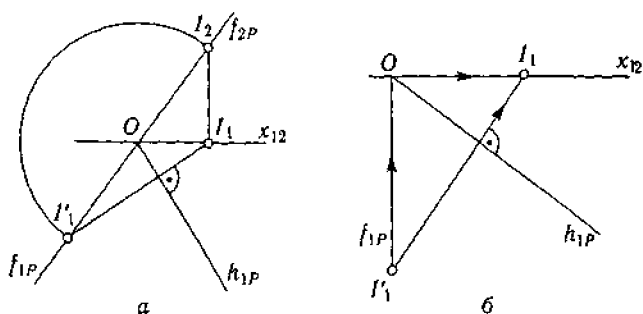


Рис. 5.12. Апарат суміщення

Застосування

Суміщення зручно використовувати, коли потрібно побудувати фігуру за заданими метричними умовами в довільній площині.

Задача 5.7. Побудова трикутника в довільній площині (рис. 5.13).

Нехай задано площину P та трикутник (123) зі сторонами 10 мм. Послідовність розв'язування задачі така.

1. Спочатку переводимо P в положення, суміщене з Π_1 . Звернемо увагу на кількість побудов. Щоб її зменшити, вершину 1 трикутника розташуємо в т. I'_1 , а вершину 2 — на f'_2 . Точка 3 знайдеться на перетині дуг радіусами 10 мм, проведених із точок 1 і 2.

2. Визначаємо положення т. 1 — 3 при вихідному розташуванні P : т. I_1 і I_2 є; т. 2_2 відшукується зворотним обертанням фронтального сліду; т. 2_1 — за відповідністю; т. 3_1 — через афінне перетворення т. 3 (рис. 5.12, б), т. 3_2 — за відповідністю та з умови належності т. 3 довільній прямій площини P (взято фронтальну пряму).

3. З'єднуючи вершини, дістаємо шуканий трикутник.

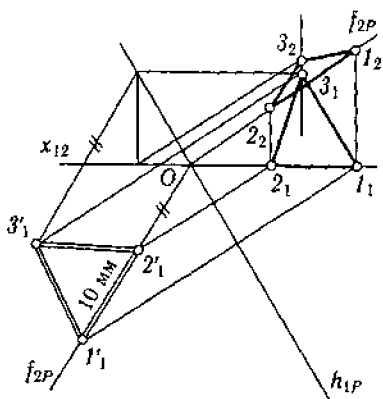


Рис. 5.13. Побудова трикутника в площині P (суміщення)

Самоконтроль. В інших підручниках вершини у вихідній площині будуються без посилання на афінні перетворення. Розберіть відповідні приклади і порівняйте з наведеним вище. Підрахуйте кількість та оцініть зручність побудов. Який спосіб придатніший для вас? Користуйтеся у подальшому саме ним.

5.7. ДОПОМІЖНЕ КОСОКУТНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Схема

Метод використовується для розв'язання позиційних задач і полягає у проєкціюванні під непрямым кутом на додаткову площину, як правило, фронтальну чи горизонтальну. Напрямок проєкціювання та площина вибираються, виходячи з умови задачі. Розберемо це на конкретному прикладі.

Нехай потрібно перевести довільну пряму (рис. 5.14) у проєкціювальне відносно горизонтальної площини положення.

Вибираємо напрям проєкціювання вздовж прямої (на фронтальній площині проєкцій — вздовж a_2 , і на горизонтальній — вздовж a_1) та знаходимо горизонтальний слід прямої a . Ця точка, позначена на рис. 5.14 як a'_1 , і буде розв'язком задачі. Звернемо увагу, що тут знадобилося тільки одне, а не два, як у розглянутих вище методах, перетворення.

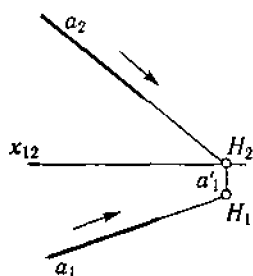


Рис. 5.14. Схема допоміжного косокутного проєкціювання

Застосування

Задача 5.8. *Визначення точки перетину прямої з площиною (рис. 5.15).*

Нехай задані площина і пряма займають довільне положення (рис. 5.15, а). Для розв'язання задачі слід перевести площину в

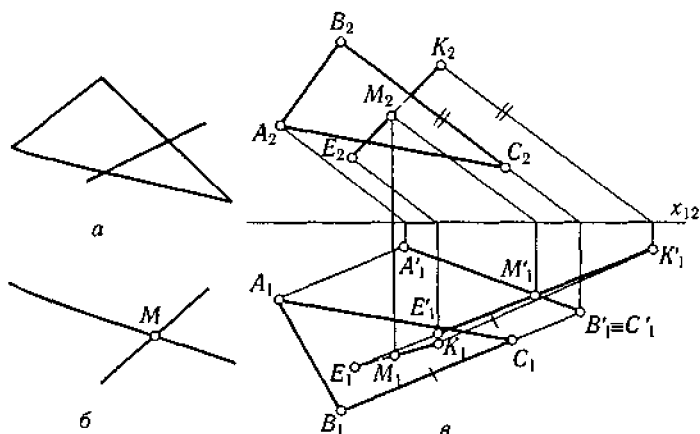


Рис. 5.15. Визначення точки перетину прямої з площиною (косокутне допоміжне проєкціювання)

проекціювальне положення, тоді точка перетину з прямою відшукається легко (рис. 5.15, б).

1. Вибираємо напрям проекціювання вздовж будь-якої сторони трикутника; нехай це буде BC .

2. Здійснюємо проекціювання на Π_1 . Знаходимо горизонтальні сліди т. A, B, C, E, K . Точка перетину $(A'_1B'_1C'_1)$ та $E'_1K'_1$, тобто т. M'_1 , є шуканою точкою.

3. Повертаємо її на вихідні зображення. Визначаємо видимість (рис. 5.15, в).

Самоконтроль. Розв'яжіть цим способом задачу на визначення лінії перетину площин (див. рис.5.4). Порівняйте кількість побудов.

5.8. ДОПОМІЖНЕ ПРЯМОКУТНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

Цей метод, розроблений С. М. Колотовим, є своєрідним «фірмовим знаком» київської школи нарисної геометрії. Практика застосування методу для розв'язання практичних і теоретичних задач переконливо довела його переваги. Наведемо простий приклад.

Задача 5.9. Визначення відстані між паралельними прямими (рис. 5.16).

Прямі загального положення (рис. 5.16, а) робляться проекціювальними; тоді відстань не має спотворень (рис. 5.16, б).

1. Будемо проекціювати вздовж a_2 й a_1 на допоміжну площину Π_4 , фронтальний і горизонтальний сліди якої перпендикулярні до напрямів проекціювання.

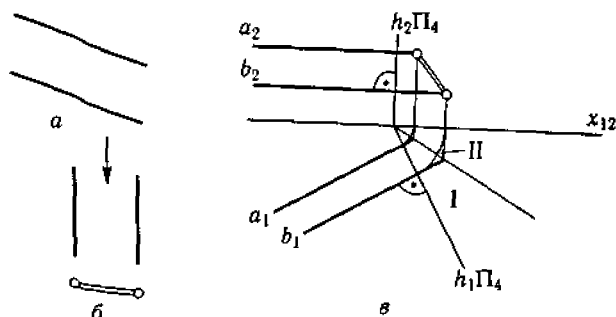


Рис. 5.16. Визначення відстані між паралельними прямими (допоміжне прямокутне проекціювання)

2. Зображення на Π_4 будуються так: зв'язок із фронтальними проєкціями прямих — за відповідністю; зв'язок з горизонтальними проєкціями — через бісекторну площину $P(I)$ або передачу координат по дузі (II) подібно до побудови профільної проєкції точки в розд. 4 (рис. 5.16, *в*).

Як бачимо, основною перевагою прямокутного проєкціювання перед косокутним є можливість розв'язувати не тільки позиційні, а й метричні задачі.

Самоконтроль. Порівняйте викладені в цьому розділі методи з точки зору універсальності, наочності, простоти, кількості побудов, необхідності вільного місця та якості рисунків.

Доповніть табл. 3 відповідними пунктами. Перепишіть і використовуйте її при виборі способу розв'язання задач.

6. ГРАННІ ПОВЕРХНІ ТА БАГАТОГРАННИКИ

Гранні поверхні та багатогранники є своєрідним «магічним кристалом», в глибинах якого бачимо як природні структури — від молекул до медових стільників, так і витвори людини — від сірникових коробок до пірамід та хмарочосів.

За однією з гіпотез ядро Землі має форму додекаедра, а місця аномалій — таких, як Бермудський трикутник чи Море диявола — відповідають його вершинам. Віртуальні світи комп'ютерної графіки теж знаходяться там — розрахунок найчарівніших пейзажів і найстрашніших монстрів починається зі створення полігональної сітки.

6.1. ВИЗНАЧЕННЯ, КЛАСИФІКАЦІЯ, ВЛАСТИВОСТІ

Визначення 6.1. *Гранною поверхнею називається неперервна поверхня, що складається з опуклих багатокутників, сполучених по своїм сторонам.*

Визначення 6.2. *Багатогранником називається замкнена гранна поверхня.*

Для однозначного визначення багатогранника необхідно задати певну сукупність елементів, причому можливі варіанти. Так, чотиригранна піраміда визначається вершиною і ламаною основи, всіма вершинами, всіма гранями.

Цю сукупність елементів називають *визначником* і позначають $\Phi(A, a)$, $\Phi(A, B, C, E)$, $\Phi((ABC), (ACE), (ABE), (BCE))$, де Φ — піраміда; A, B, C, E — її вершини; a — ламана основи. Для зображення піраміди слід побудувати по дві проєкції кожного з її елементів та визначити видимість способом конкуруючих точок (рис. 6.1).

Зображенням Φ на фронтальній і горизонтальній площинах проєкцій є повний (тобто з діагоналями) чотирикутник, сторони якого є видимими. Отже, видимість визначається лише для діагоналей. За видимістю ребер визначається видимість граней піраміди.

Серед численних типів гранних поверхонь і багатогранників найбільший практичний інтерес становлять піраміди, призми, правильні багатогранники та деякі інші групи.

Визначення 6.3. *Пірамідою називається багатогранник, однією гранню якого є багатокутник, а іншими — трикутники, що мають спільну вершину.*

Піраміда є *правильною*, якщо її основою є правильний багатокутник, а висота прохо-

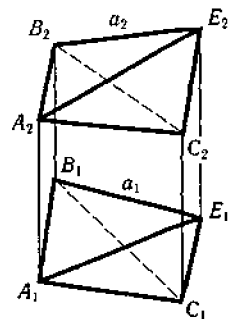


Рис. 6.1. Визначник і зображення піраміди

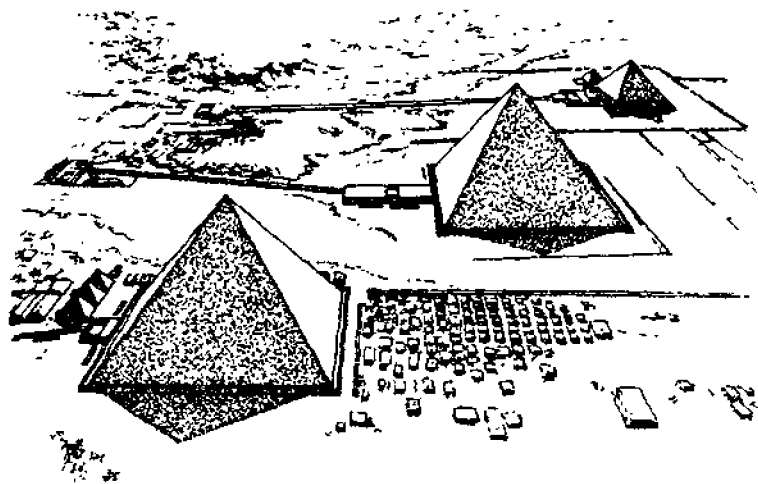


Рис. 6.2. Великі піраміди, піраміда Хеопса попереду (Єгипет, Старе Царство, IV династія)

дить через його центр, і зрізаною, якщо її вершина відтинається площиною, яка перетинає всі ребра, що виходять з цієї вершини.

Піраміди — правильні та зрізані, з каменю і ґрунту — будувалися повсюди протягом тисячоліть. В Єгипті їх винахідником був Імхотеп (або Іма-Хатпі), будівничий та радник фараона Джосера. Найвідомішою є піраміда Хеопса в Гізі (рис. 6.2). Її висота сягає 147 м — приблизно дорівнює 45-поверховому будинку; сторона основи — 233 м — більша від довжини двох футбольних полів; кількість кам'яних блоків — 2 300 000 при середній масі кожного 2.5 т. Наполеон особисто підрахував, що цього матеріалу вистачило б, аби звести стіну заввишки 3 м по периметру Франції! З Гізьким комплексом пов'язано багато таємниць.

Так, вважається, що Великі піраміди та Великий сфінкс були збудовані приблизно одночасно в середині 3-го тисячоліття до н.е. Про це свідчать історичні дані. Геологи ж вказують на досить помітні сліди водяної ерозії (рис. 6.3) і стверджують, що вологий період в Єгипті завершився у 8-му тисячолітті до н.е.; отже, ці споруди не могли бути створені пізніше. Неясними залишаються також технологія і мета будівництва.

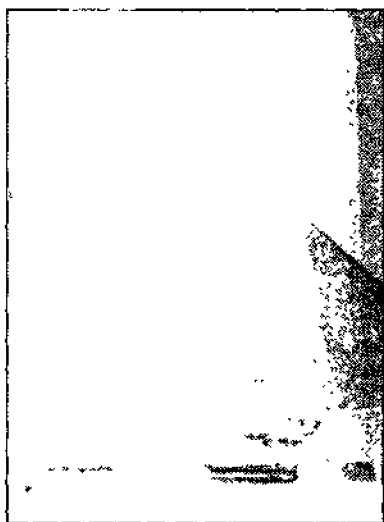


Рис. 6.3. Сліди водяної ерозії на обличчі Великого сфінкса

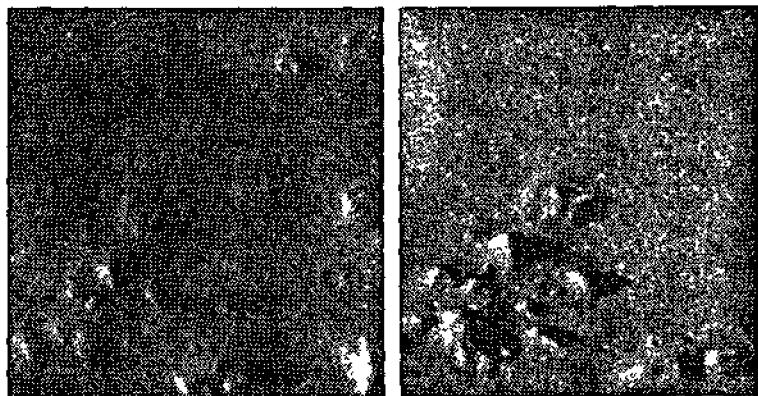


Рис. 6. 4. Пірамідальні утворення на Марсі, область Сидонія

Ще одна таємниця пов'язана з пірамідами на Марсі (рис. 6.4), виявленими 1976 р. при фотографуванні області Сидонія апаратом «Вікінг». Висота найбільшої — 800 м, довжина основи — до 2600 м. Е. Торун, Х. Крейтер та М. Карлотто, фахівці з геоморфології, фізики й оброблення зображень, інтерпретують їх як штучні за походженням. Більшість учених ставляться до цього скептично. Можете сформувати власну думку — на рис. 6.4, а зображено необроблений знімок НАСА 35A72, а на рис. 6.4, б — результати його комп'ютерного оброблення.

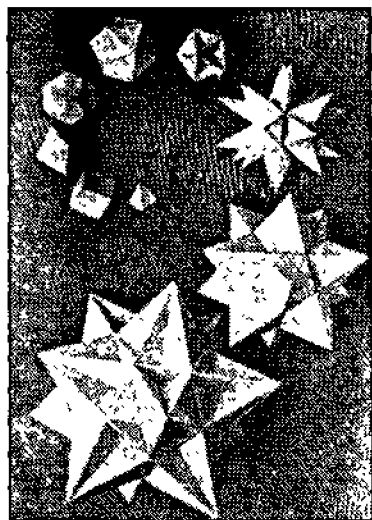


Рис. 6.5. Правильні та зіркоподібні багатогранники

Визначення 6.4. Призмой називається багатогранник, дві грані якого — рівні багатокутники із взаємно паралельними сторонами, а решта — паралелограми.

Призма є прямою, якщо її ребра перпендикулярні до площини основи; якщо ця основа є прямокутником, то призма називається паралелепіпедом.

Хмарочоси найчастіше мають форму паралелепіпедів. Серед висотних споруд у Києві саме так

виглядають Будинок торгівлі на Львівській площі та Обчислювальний центр біля Повітрофлотського шляхопроводу.

Визначення 6.5. Правильними називаються опуклі багатогранники, грані яких — правильні багатокутники (рис. 6. 5).



Рис. 6.6. Символізм правильних багатогранників за Платоном: а — октаедр (повітря); б — куб (Земля); в — тетраедр (вогонь); з — додекаедр (Всесвіт); д — ікосаедр (вода)

Доведено, що в тривимірному просторі існує п'ять таких фігур. Вони були відомі ще Платону, звідси їхня друга назва — Платонові тіла. Правильний чотиригранник називається *тетраедром*, шестигранник — *гексаедром*, або кубом, восьмигранник — *октаедром*, дванадцятигранник — *додекаедром* і двадцятигранник — *ікосаедром*; кількість ребер, що обмежують їхні грані, — 3, 4, 3, 5, 3 відповідно. Крім них існують (також в обмеженій кількості форм) опукло-вгнуті багатогранники, грані яких теж є правильними багатокутниками; приклади їх наведено на рис. 6.5.

У правильних багатогранниках є насправді щось містичне. Платон вважав їх символами стихій і Всесвіту (рис. 6.6). Так само і Й. Кеплер, до того, як сформулював закони руху планет, намагався описати структуру Сонячної системи за допомогою багатогранників (рис. 6.7). У сакральній геометрії відомо куб *Метатрона*, з якого можуть бути здобуті зображення правильних багатогранників.

Числа вершин, ребер і граней гранних поверхонь пов'язані між собою. Цей зв'язок було встановлено Л. Ейлером:

$$V + G - P = 3 - h,$$

де V , G , P — число вершин, граней та ребер відповідно; h — порядок зв'язності (спрощено — кількість дірок плюс 1).

У цій формулі вершини і ребра — точки та площини — додаються з одним знаком, що є наслідком принципу двоїстості (див. розд. 3). Правильні багатогранники також є двоїстими фігурами: тетраедр — до самого себе, куб до — октаедра, додекаедр — до ікосаедра.

Самоконтроль. Керуючись визначеннями правильних багатогранників, принципом двоїстості та формулою Ейлера, підрахуйте числа граней, вершин і ребер для кожного з них.

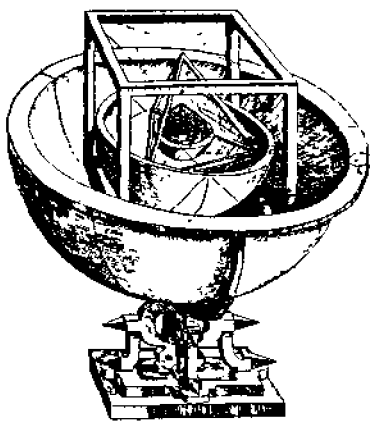


Рис. 6.7. Модель Сонячної системи за Кеплером

6.2. НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧКИ ДО ГРАННОЇ ПОВЕРХНІ

Оскільки грані є площинами, задача зводиться до визначення належності точки до площини (див. розд. 4), що слід повторити кілька разів, тому що точка може належати кільком граням (рис. 6.8). Отже, проводимо через A_2 пряму, фіксуємо її можливі горизонтальні проєкції, а оскільки жодна з них не проходить через A_1 , констатуємо, що вона не належить Φ .

6.3. ПЕРЕТИН ГРАННОЇ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ

Спочатку розглянемо прості приклади, на які будемо посилалися в подальшому.

Властивість 6.1. Якщо фігура є проєкціювальною, то будь-яка лінія, що належить її поверхні, збігається із зображенням фігури на тій площині, відносно якої фігура займає проєкціювальне положення.

Задача 6.1. Перетин проєкціювальної площини та піраміди (рис. 6.9).

Оскільки площина P є фронтально проєкціювальною, будь-яка належна їй лінія, в тому числі перерізу, збігатиметься на Π_2 із зображенням P_2 . Отже, фронтальна проєкція перерізу вже є. Фіксуємо точки перетину площини з ребрами, знаходимо і сполучаємо їхні горизонтальні проєкції. Визначаємо видимість.

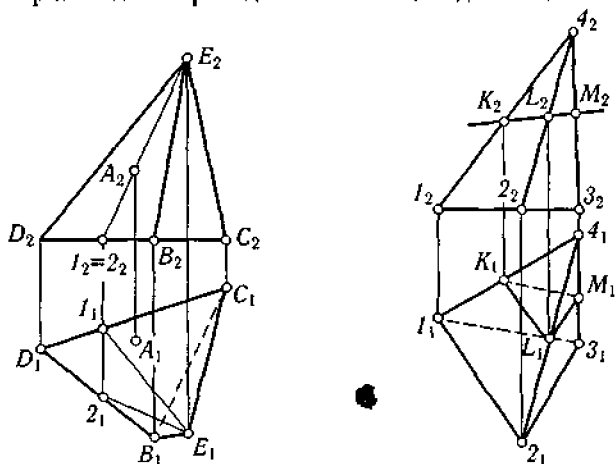


Рис. 6.8. Визначення належності точки до багатогранника

Рис. 6.9. Перетин піраміди проєкціювальною площиною

Задача 6.2. Перетин проекційовальної призми площиною (рис. 6.10).

Згідно з властивістю 6.1 маємо горизонтальну проекцію лінії перерізу. Оскільки вона є ламаною з вершинами в точках перерізу площини T з ребрами, слід зафіксувати фронтальні проекції цих точок і потім сполучити їх. Знаходимо їх з умови належності т. l — 3 площини T . Визначаємо видимість.

Тепер можна розглянути загальний випадок, коли ні площина, ні гранна поверхня не є проекційовальними. Розв'язання задач такого типу зводиться до задач 6.1, 6.2 (останньої — тільки для призм), якщо використати один із способів перетворення проєкцій (див. розд. 5).

Задача 6.3. Перетин піраміди загального положення площиною (рис. 6.11, а).

Переведемо площину P в проекційовальне положення способом заміни площин проєкцій. Виберемо додаткову площину проєкцій

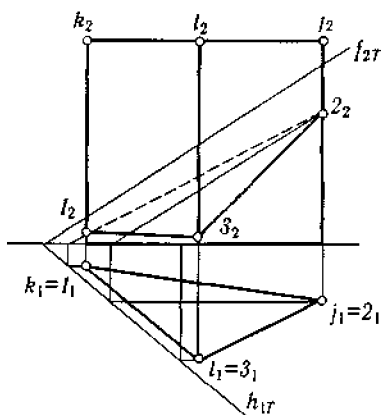


Рис. 6.10. Перетин проекційовальної призми площиною

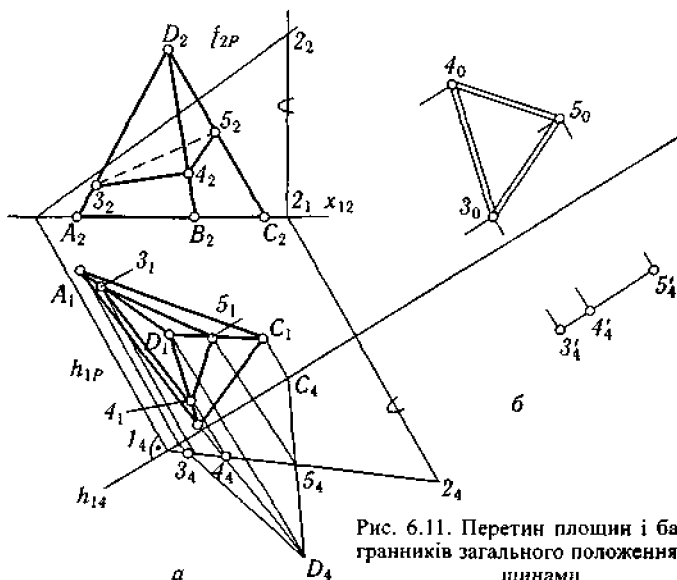


Рис. 6.11. Перетин площини і багатогранників загального положення площинами

Π_4 перпендикулярною до горизонтального сліду h_p . Зафіксуємо її горизонтальний слід — лінію h_{14} — і побудуємо зображення сліду площини P на Π_4 . Одна точка цього сліду вже є — це т. 1 перетину h_p з h_{14} ; іншу будуємо таким чином: беремо довільну т. 2, що належить f_p ; переносимо її на Π_4 вздовж лінії зв'язку між Π_1 і Π_4 , паралельній h_p , відкладаючи від h_{14} координату з т. 2. Аналогічно будуємо проєкції вершин піраміди на площину Π_4 . Лінія (345) і є лінією перетину. Повертаємо т. 3, 4, 5 на горизонтальну та фронтальну площини проєкцій, рухаючись по лініях зв'язку в зворотному напрямі. Визначаємо видимість.

Розглянемо супутню метричну задачу.

Задача 6.4. *Визначення натуральної величини перерізу* (рис. 6.11, б).

Скористаємось плоскопаралельним переміщенням. Лінію (345) на Π_4 переведемо в положення, паралельне h_{14} . На перетині ліній зв'язку і горизонтальних проєкцій траєкторій переміщення знаходимо т. 5₀, 4₀, 3₀, що визначають натуральну величину перерізу.

6.4. РОЗГОРТКА ГРАННИХ ПОВЕРХОНЬ

Спочатку дамо визначення.

Визначення 6.5. *Розгорткою гранної поверхні (багатогранника) називається неперервне, без складок і розривів, суміщення її граней з площиною.*

Розгортка, як це впливає з визначення, залишає незмінними довжини відрізків, кути, площі граней. Ці властивості мають назви *ізоморфності, конформності, еквіареальності*. Якщо перетворення ізоморфне, то воно також конформне й еквіареальне. Тому розгортка є водночас ізоморфним, конформним, еквіареальним перетворенням. Зазначимо, що оскільки гранні поверхні складаються з відсіків площин, *побудова розгорток завжди можлива*.

Побудова розгорток є елементом проектування технічних гранних поверхонь — по контуру розгортки вони вирізаються з листа матеріалу, а потім згинаються по лініях стику граней.

Порядок побудови розгортки такий: спочатку слід знайти натуральну величину кожної з граней, а потім розмістити їх на довільній площині, зберігаючи взаємний зв'язок по спільних ребрах. Оскільки таке розміщення можна здійснити по-різному, існує кілька варіантів розгортки однієї поверхні. Побудови (окремі для призм та пірамід) мають певні технічні нюанси — визначення довжин ребер, величин кутів і граней в кожному конкретному випадку зручніше здійснювати одним із кількох можливих способів. Розглянемо їх на прикладах.

Задача 6.5. Розгортки піраміди (рис. 6.12, 6.13).

Проаналізуємо умови. Основа піраміди — трикутник (ABC) — знаходиться в горизонтальній площині — довжини ребер AB, BC, AC натуральні. Ребро CT є фронтальним, отже, його довжина відома. Ще однією особливістю є те, що всі грані піраміди — трикутники (див. рис. 6.12).

Тепер опишемо хід побудови.

1. Визначаємо натуральні величини AT і BT . Найзручніше це робити, застосувавши обертання навколо горизонтально проєкціувальної осі, що проходить через вершину T (рис. 6.13, а).

2. Далі в зручному місці проводимо довільну пряму та фіксуємо на ній довільну т. A . Відкладаємо вздовж прямої відрізок (AB) . Проводимо дві дуги радіусами (AC) і (BC) із центрами в т. A та B ; їх перетин визначить т. C . Будуємо грань (ABT) — з центрів A і B проводимо дуги радіусами (AT) та (BT) й у точці їх перетину знаходимо т. T . Аналогічно будуємо грані (BCT) і (ACT) (рис. 6.13, б).

Задача 6.6. Розгортки прямої зрізаної призми (рис. 6.14, 6.15).

Аналізуємо умови (рис. 6.14). Нижня основа знаходиться на горизонтальній площині; отже, відомо довжини AB, BC та CA . Довжини вертикальних ребер без спотворень показано на Π_2 . Залишається знайти довжини ребер верхньої основи.

Для розгортки застосуємо спосіб, який називається *розкочуванням*. На осі x фіксуємо довільну т. A і відкладаємо послідовно AB, BC, CA . Проводимо в одержаних точках вертикальні лінії.

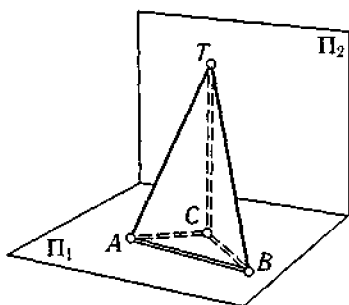


Рис. 6.12. Аналіз умов задачі 6.5

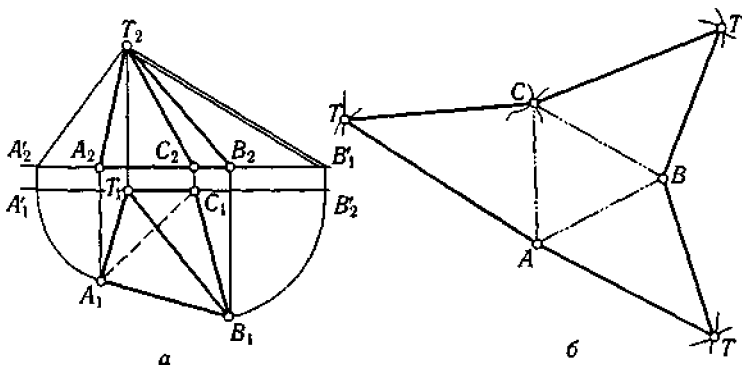


Рис. 6.13. Розгортка піраміди

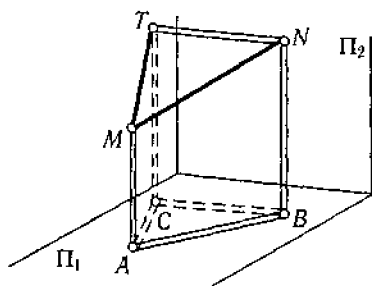


Рис. 6.14. Аналіз умов задачі 6.6

Відкладаємо вздовж них довжини ребер AM, BP, CT , проводячи з т. M_2, P_2, T_2 горизонтальні лінії до перетину з відповідними вертикальними прямими. Маємо розгортку бічної поверхні призми і водночас натуральні довжини MP, PT, TM . Проводимо дуги радіусами AC та BC із центрів A і B й одержуємо т. C . Так само, проводячи дуги радіусами MT та PT з центрів M і P , знаходимо т. T .

Сполучаємо здобуті точки (рис. 6.15).

Задача 6.7. Розгортка похилої призми (рис. 6.16).

Особливостями розташування, порівняно з умовами задачі 6.5, є непаралельність бічних ребер фронтальній площині проєкції і, отже, неможливість безпосереднього застосування розкошування. Через те потрібно провести заміну площин проєкцій та побудувати додаткову проєкцію призми так, щоб її ребра відображалися на додатковій площині в натуральну величину. Щодо ребер верхньої та нижньої основ, то їхні довжини вже є натуральними.

Визначаємо положення сліду додаткової площини $\Pi_4 - h_{14}$ — та будуємо проєкцію призми на ній. Бічні ребра відображено в натуральну величину. Розгортку на Π_4 починаємо від ребра (CT) . Перетин ліній, проведених перпендикулярно до (CT) із т. A_4 і M_4 та дуг із центрами C_4 і T_4 радіусів AC та TM визначить положення т. A_0 і M_0 та ребра (A_0M_0) ; аналогічно будуються інші бічні ребра. Верхня і нижні основи додаються до розгортки бічної поверхні так, як і в задачі 6.5.

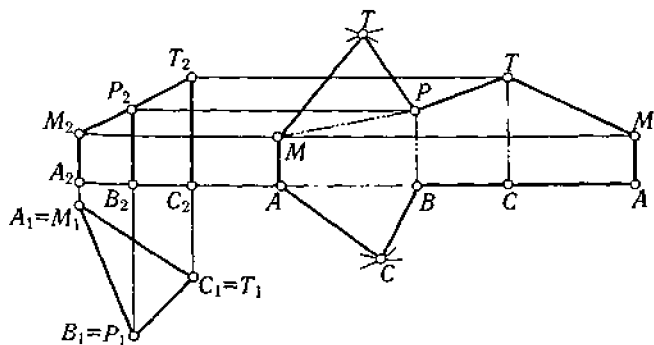


Рис. 6.15. Розгортка прямої зрізаної призми

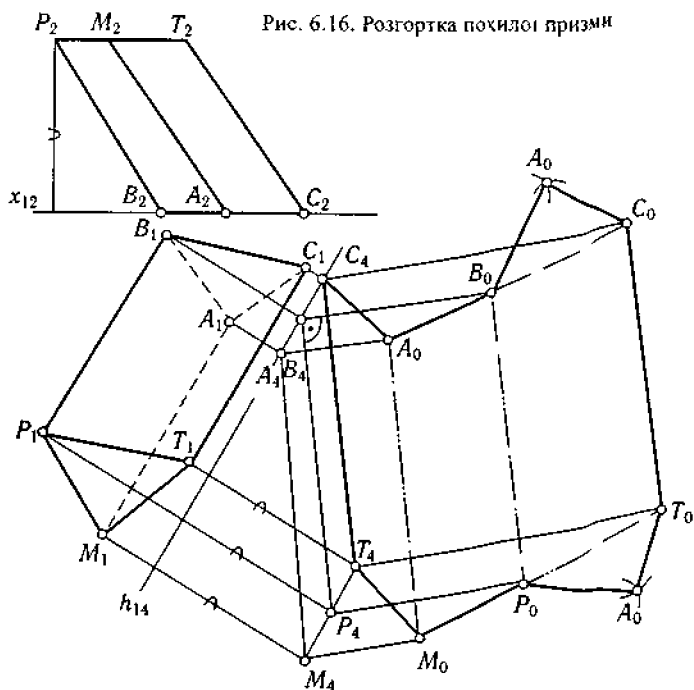


Рис. 6.16. Розгортка похилої призми

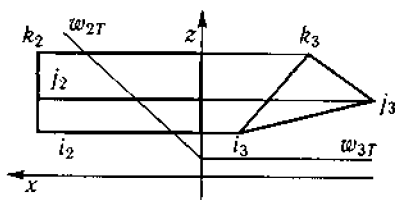


Рис. 6.17. Перетин призми з площиною T і побудова розгортки

Самоконтроль. Для призми на рис. 6.17 знайдіть лінію перетину з площиною T , визначте видимість і побудуйте розгортку зрізаної частини. Ретельно проаналізуйте умови з урахуванням проєкціовального положення.

6.5. ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ

Оскільки багатогранники складаються з плоских відсіків, розв'язання зводиться до основної позиційної задачі (див. розд. 4). При цьому слід мати на увазі, що пряма може перетинати поверхню у двох точках, мати одну точку дотику, збігатися з ребром, належати якійсь грані або взагалі не перетинати поверхню. Розглянемо приклади.

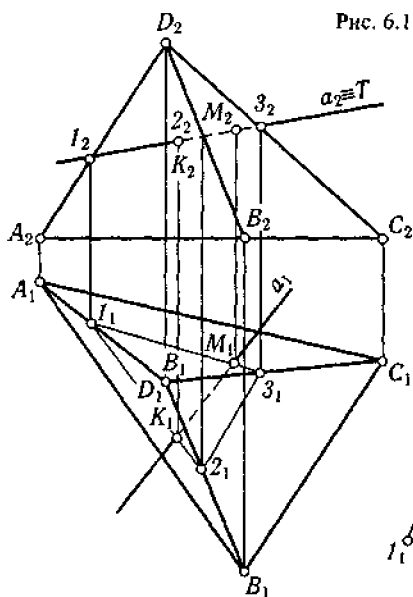
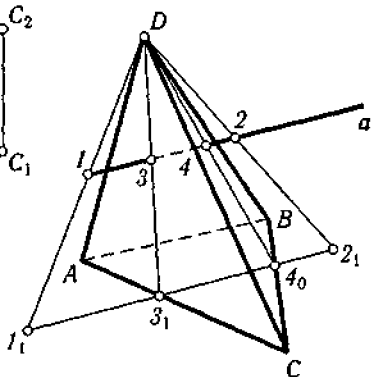


Рис. 6.18. Перетин піраміди прямою лінією

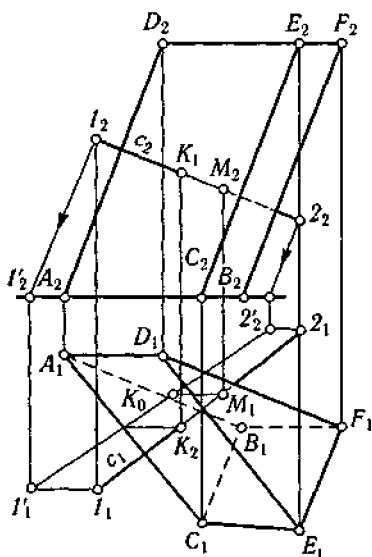
Рис. 6.19. Визначення типу перетину



Задача 6.8. Перетин піраміди прямою лінією — застосування допоміжної січної площини (рис. 6.18).

Аналізуємо умови — визначити відразу тип перетину неможливо.

Тому використаємо загальну схему, сумістивши слід фронтально проекціювальної допоміжної площини T з a_2 . Будемо горизонтальну проекцію перетину T з пірамідою. Оскільки лінія перерізу та пряма знаходяться у площині T , точки їх перетину K і M є точками перетину піраміди прямою лінією. Знаходимо їхні фронтальні проекції за відповідністю. Визначаємо видимість.



Початковий аналіз типу перетину (тільки для пірамід та призм) провадиться за допомогою допоміжного проєкціювання (рис. 6.19).

Рис. 6.20. Перетин призми прямою лінією

Пряма a проєкціюється на площину основи з вершини піраміди. Оскільки основа і слід a належать Π_1 , характеристики перетину відразу визначають з наявності та типу перетину сліду прямої основи. Точки перетину лежать на лініях перетину допоміжної площини з гранями піраміди там, де вони перетинаються з a .

Для призм — пірамід з невласними вершинами — напрям проєкціювання вибирається паралельним ребрам.

Задача 6.9. *Перетин призми прямою лінією* (рис. 6.20).

Проекціюємо лінію s на площину основи призми. Промені вибираємо паралельними бічним ребрам; слід s є лінією, що сполучає сліди променів l_1 і l_2 . Оскільки слід у т. K_0 та т. M_0 двічі перетинає основу, пряма має дві точки перетину з гранями. Знаходимо їхні проєкції, проводячи з т. K_0 і M_0 лінії, паралельні ребрам до перетину з проєкціями прямої. Визначаємо видимість.

Самоконтроль. Як визначається видимість, коли пряма є дотичною, збігається з ребром, належить грані багатогранника?

6.6. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ

Задачі на взаємний перетин багатогранників є одними з найскладніших у курсі. Побудова лінії перетину — замкненої просторової ламаної, іноді з великою кількістю ланок, як і аналіз видимості, хоча й зводяться до розглянутих прикладів, але потребують творчого застосування викладених способів.

Найдоцільнішим є такий порядок розв'язування.

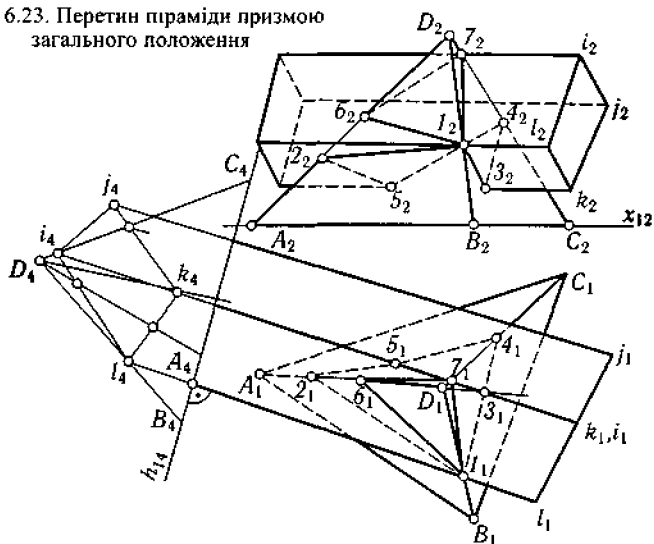
Ретельно аналізують умови задачі. Наявність проєкціювального розташування істотно полегшує розв'язання. Ці випадки розглядатимуться в задачах 6.10, 6.11.

Визначають тип перетину — безпосередньо з умов чи за допомогою косокутного проєкціювання. Багатогранники можуть перетинатися таким чином, що частина ребер і граней одного перетинається з ребрами та гранями іншого або всі ребра і грані одного перетинаються з іншим. У першому випадку, який називається *неповним проникненням*, або *врізанням* (рис. 6.22), лінія перетину є просторовою ламаною. У другому випадку, який називається *повним проникненням* (рис. 6.21), лінія перетину розпадається на дві (або й більше) замкнених ліній, які, проте, можуть бути простішими за формою, зокрема плоскими. Можливі також взаємні дотики багатогранників по ребру, грані або вершині. В усіх цих випадках побудови матимуть особливості.

Вибирають і реалізують той чи інший метод побудови лінії перетину. Приклади розглядатимуться далі.

Аналізують видимість лінії перетину, потім — багатогранників. Загальне правило таке: *видимими є ті ланки ламаної, які належать*

Рис. 6.23. Перетин піраміди призмою загального положення



умовам задачі 6.11. Аналогічним є також подальший хід розв'язання.

Самоконтроль. Перерисуйте рис. 6.23. Самостійно розберіть розв'язання задачі до кінця. Зверніть особливу увагу на визначення ламаної, її видимості, а також видимості багатогранників, що перетинаються.

Як бачимо, в разі загального розташування багатогранників неможливо зразу встановити тип перетину, через що розв'язання значно ускладнюється. Крім того, заміна площин проєкцій або інше перетворення також не є панацеєю — вони не допоможуть, наприклад, при перетині двох пірамід.

У таких випадках застосовують інші методи, один з яких і розглянемо.

Спроєкціюємо вершини A та E пірамід Φ і Δ на Π_1 уздовж проведеної через них прямої. Проведемо через одержану

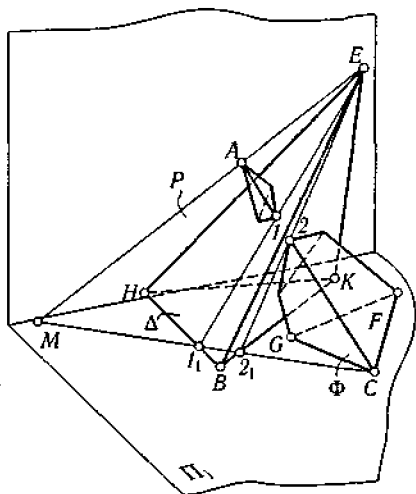


Рис. 6.24. Застосування косокутного проєкціювання і січних площин для визначення лінії перетину багатогранників

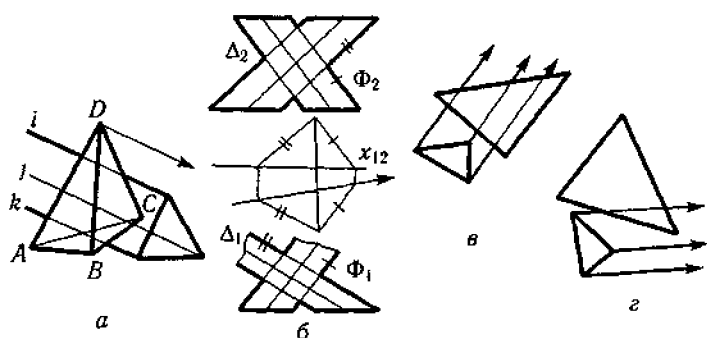


Рис. 6.25. Вибір напрямку проєкціювання та аналіз типу перетину

т. M і вершину C основи Φ допоміжну площину P . За таких умов P пройде через ребро (AC) піраміди Φ і перетне Δ по прямим $(1, E)$ та $(2, E)$. Ці прямі перетнуть (AC) в т. 1 і 2 входу ребра в піраміду Δ та виходу з неї (рис. 6.24). Обходячи всі вершини основи Φ , а потім основи Δ , будемо всі точки ламаної.

При побудові перетину піраміди призмою напрям проєкціювання визначається за рис. 6.25, *а*; двох призм — за рис. 6.25, *б*. Повному проникненню відповідає розташування основ на рис. 6.25, *в*; врізанню — рис. 6.25, *г*. Якщо основи не належать горизонтальній площині, то можна спочатку перетнути їх такою площиною, одержати зображення вершин і далі діяти за описаною схемою. Область її застосування — *перетин призм та пірамід*.

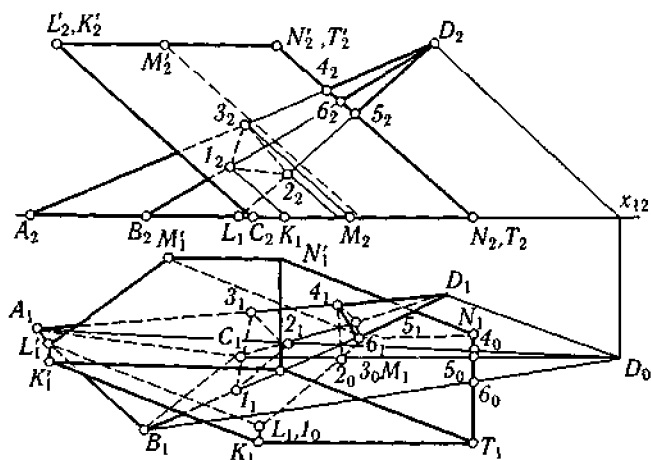


Рис. 6.26. Перетин призми пірамідою зі спільною площиною основи

Задача 6.13. Перетин призми пірамідою зі спільною площиною основи (рис. 6.26).

Послідовність розв'язування така:

1. Проекціюємо вершину D піраміди на площину основи в напрямі, паралельному бічним ребрам призми.

2. Через одержану т. D_0 та вершини A, B, C піраміди і K, L, M, N, T призми проводимо промені.

3. Порівнюючи здобуту картину з рис. 6.25, *в*, бачимо, що має місце повне проникнення, і ламана розпадається на дві ламані, вершини яких для легшого розрізнення позначаємо окремо парними та непарними числами.

4. Будуємо точки перетину ребер $(AD), (BD), (CD)$ піраміди гранями призми (бічні ребра призми гранями піраміди в цьому випадку не перетинаються).

5. Сполучаємо сусідні точки обох ліній перетину.

6. Визначаємо видимість лінії перетину та багатогранників.

Самоконтроль. Побудуйте ортогональні проекції пірамід, показаних на рис. 6.24. Визначіть лінію перетину і видимість.

6.7. ПРОЕКТУВАННЯ ДАХІВ ЯК ПРИКЛАД ПОБУДОВИ БАГАТОГРАННИКІВ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Використання схилого даху (рис. 6.27) дає змогу поліпшити естетичні якості будівлі та вдосконалити її експлуатаційні характеристики, розмістивши під дахом технічний або житловий поверх (мансарду). Природно виникає задача побудови багатогранника (а дах є саме багатогранником) відповідно до задуму архітектора.

Послідовність дій розглянемо на простому прикладі (рис. 6.28) — будівля прямокутна в плані, кількість схилів дорівнює чотирьом, нахил усіх схилів однаковий. Лінія перетину схилів будується на основі таких правил:

1. Горизонтальна проекція перетину суміжних схилів є бісектрисою кута між їхніми слідами.

2. Горизонтальна проекція перетину суміжних схилів проходить через точку перетину їхніх горизонтальних слідів.

3. Через горизонтальну проекцію точки перетину ребер двох схилів проходить проекція третього ребра.

Побудову починаємо на Π_1 (у плані) з проведення бісектрис кутів; точки їх перетину сполучаємо. На Π_2 розташування цих точок залежить від нахилу схилів α .

Задача 6.14. Дах будівлі з прямокутним виступом, перекритим двосхилим дахом (рис. 6.29).

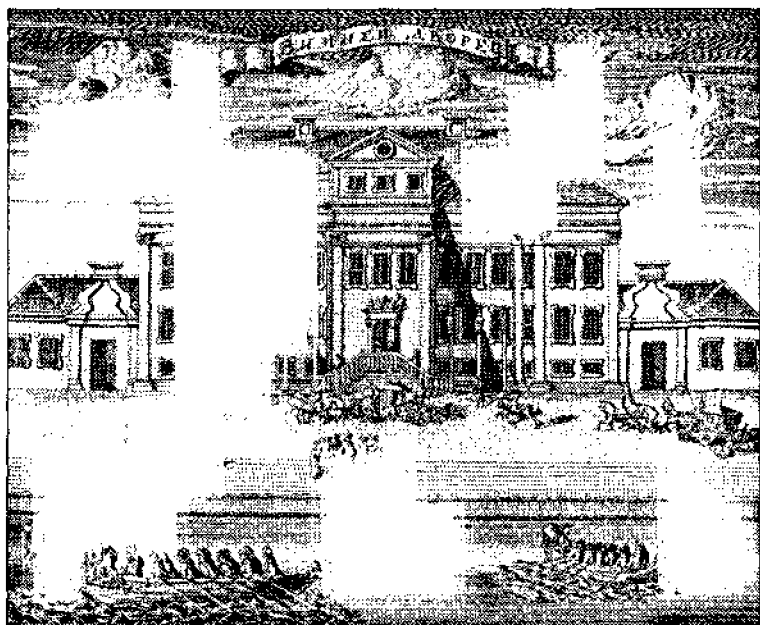


Рис. 6.27. Зимовий палац за часів Петра I (1711 р.)

Побудову починаємо з розбиття плану на два прямокутники; горизонтальні проекції перетинів схилів будуються окремо для кожного з них. Будуємо ланки, які відповідають правилам 1 — 3. Будуємо за відповідністю фронтальну проекцію.

Задача 6.15. *Дах будівлі з подвір'ям* (рис. 6.30).

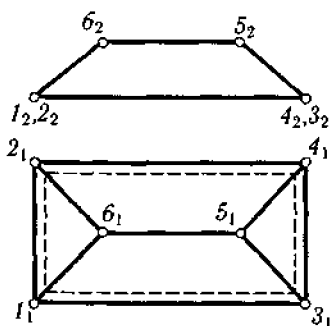


Рис. 6.28. Побудова рівносхилого даху прямокутної в плані будівлі

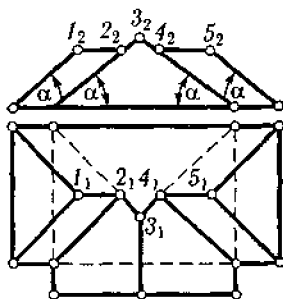


Рис. 6.29. Побудова даху для будівлі з виступом

Послідовність побудови порівняно із задачею 6.14 не змінюється: план розбиваємо на трикутники і прямокутники; будуємо лінії перетину схилів для кожного з них; залишаються тільки реально існуючі перетини і будуємо фронтальну проекцію даху за відповідністю, виходячи з кута нахилу схилів α .

Самоконтроль. Спробуйте побудувати дах для Пентагона за умов, що схили мають однакові нахили під кутом α , всі об'єми будівлі — однакової висоти, а в середині є подвір'я прямокутної форми (насправді — п'ятикутне). Вихідні дані з рис. 6.31 слід перерисувати на окремий аркуш у збільшеному масштабі.

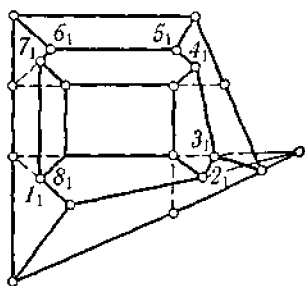


Рис. 6.30. Побудова даху для будівлі з подвір'ям

Задача 6.16. Дах з однаковим нахилом схилів будівлі з об'ємами різної висоти (рис. 6.32).

Цей випадок зводиться до розглянутого в задачі 6.13 наступним чином: через лінію контуру даху вищого об'єму проводимо горизонтальну площину Γ . Для нового контуру будуємо лінії перетину схилів, розбиваючи його на прямокутники та керуючись правилами 1—3. Потім слід продовжити перетини до первісного контуру і побудувати за відповідністю фронтальну проекцію, виходячи із заданого кута нахилу схилів α (рис. 6.32).

Застосування гранних поверхонь при побудові дахів, перекриттів та підвісних стель не обмежується випадком схилих дахів. Досить часто архітектори надають куполам гранної форми або використовують складчасті перекриття (рис. 6.33). Так, у Києві купол у ви-

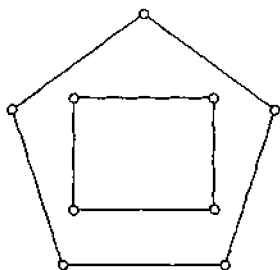


Рис. 6.31. Дах для Пентагона

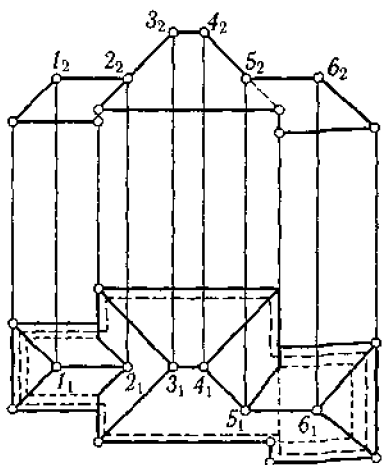


Рис. 6.32. Побудова даху для будівлі з об'ємами різної висоти

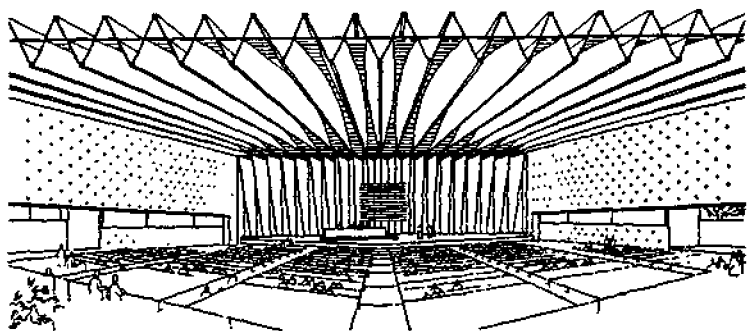


Рис. 6.33. Застосування гранної поверхні стелі

гляді гранної поверхні має новий поштамт на Залізничному вокзалі, а складчасту покрівлю — Льодовий палац на вулиці генерала Жмаченка. Існує ще кілька споруд такого типу.

7. КРИВІ ЛІНІЇ

Траєкторія польоту птаха й орбіти планет, спіраль ДНК і спіралі галактик, лінії на людській долоні — ось кілька прикладів природних кривих. Природа не любить прямолінійних дій .. Так і в техніці — в авіації, космонавтиці, автомобілебудуванні, будівництві — криві лінії є складовими багатьох досконалих рішень.

7.1. ВИЗНАЧЕННЯ, КЛАСИФІКАЦІЯ, ВЛАСТИВОСТІ

Криві лінії можна розуміти по-різному — в одних випадках розглядаючи їх як множини точок, в інших роблячи наголос на кінематичному походженні або утворенні в результаті перетину.

Визначення 7.1. *Кривою лінією називається неперервна однопараметрична множина точок.*

Визначення 7.2. *Кривою лінією називається траєкторія неперервного переміщення точки в просторі.*

Визначення 7.3. *Кривою лінією називається лінія перетину двох поверхонь.*

Можливі й інші визначення. Отже, існують різні підходи до класифікації кривих ліній (рис. 7.1).

Наведемо кілька прикладів кривих різних груп.

Плоска крива — еліпс; просторова — гвинтова лінія.

Закономірні алгебричні криві задаються рівняннями, де відношення координат виражається степеневим багаточленом. Приклад — парабола чи той самий еліпс. Рівняння може бути явним, неявним, параметричним, записаним у різних координатних системах.

Прикладом незакономірних кривих є горизонталі рельєфу; вони можуть задаватись у формі таблиці координат за результатами гео-



Рис. 7.1. Класифікація кривих ліній

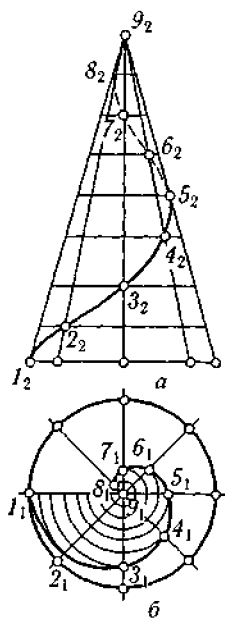


Рис. 7.2. Зображення гелси (а) та спіралі Архімеда (б)

дезичних вимірів або проводиться із певним наближенням. Таке задання називається *апроксимацією*; про криві кажуть, що вони є апроксимованими. Ця група охоплює багато технічних кривих, з яких виділимо *обводи* — криві, що складаються з дуг кількох кривих, поєднаних певним чином (див. розд. 13).

Зобразимо просторову і плоску криві.

Побудуємо прямий круговий конус (рис. 7.2). Будемо переміщувати вздовж його твірної знизу вгору точку так, щоб підйому на $1/8$ висоти конуса відповідав поворот на 45° проти руху стрілки годинника (відповідні побудови зрозумілі з рисунка). Тоді за повне обертання точка підніметься до вершини конуса й опише просторову спіраль, яку називають *гелісою*, або *конічною гвинтовою лінією* (рис. 7.2, а). Її горизонтальна проекція є плоскою кривою і називається *спіраллю Архімеда* (рис. 7.2, б). Остання почала застосовуватись ще в

сиву давнину — такої форми надавали лопатям водочерпальних машин для поливання полів.

Самоконтроль. Побудуйте спіраль Архімеда, кососиметричну до заданої. Зафарбуйте один із сегментів чорною фарбою, залишивши білу точку, в білому сегменті поставте чорну точку. Одержане зображення подібне до символу тайцзи, який виразно і лаконічно ілюструє фундаментальне положення даосизму — єдність, боротьбу, гармонію та взаємний перехід протилежних основ Всесвіту як й інь. У сучасному дизайні подібні символи використовують досить часто, наприклад у товарних знаках.

Наведені побудови можна також розглядати як ілюстрацію поняття *визначника кривої*: сукупності елементів відповідає ще й певна алгоритмічна частина; разом вони однозначно задають криву.

Рис. 7.2 є прикладом реалізації таких властивостей проєкцій кривих.

Властивість 7.1. У загальному випадку проєкціями кривої лінії є криві лінії.

Винятком є проєкціовальне положення площини плоскої кривої відносно площини проєкцій.

Властивість 7.2. Проєкції точки, яка належить кривій лінії, належать до її проєкцій.

Властивість 7.3. Дотична кривої лінії проєкціюється в дотичну її проєкції, якщо її напрям не збігається з напрямом проєкціювання.

7.2. ПЛОСКІ КРИВІ

До плоских належать криві, всі точки яких лежать в одній площині.

Властивості

Розрізняють *глобальні* (для лінії загалом) і *локальні* (для окремих точок) властивості. Наприклад, до перших належить замкненість лінії, до других — кривина в точці. В дослідженнях використовуються дотичні та нормалі.

Визначення 7.4. *Дотичною до плоскої кривої в точці називається граничне положення січної, коли точки її перетину з кривою, наближаючись, збігаються (рис. 7.3, а).*

Визначення 7.5. *Нормаллю до плоскої кривої в точці називається пряма, що лежить у площині кривої і є перпендикулярною до її дотичної (рис. 7.3, б).*

Визначення 7.6. *Точка кривої, в якій є тільки одна дотична, називається гладкою, як і крива, що містить тільки такі точки.*

Визначення 7.8. *Точка кривої називається звичайною, якщо при її переміщенні вздовж кривої напрям руху та напрям обертання дотичної не змінюються (рис. 7.4, а); решта точок є особливими (рис. 7.4, б—д, 7.5).*

У *точці перегину* дотична перетинає криву (рис. 7.4, б). У *точці повороту першого роду* напрям руху змінюється на протилежний (рис. 7.4, в). А в *точці повороту другого роду* напрями руху й обертання змінюються на протилежні (рис. 7.4, з). В *точці зламу* крива має дві дотичні (рис. 7.4, д).

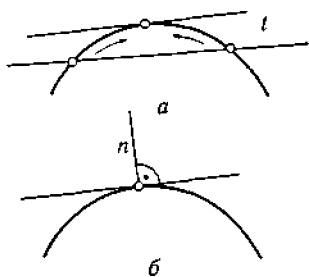


Рис. 7.3. Дотична (а) і нормаль (б) плоскої кривої

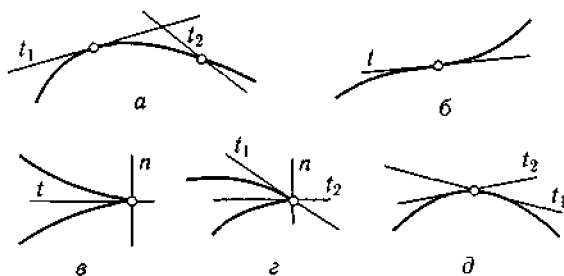


Рис. 7.4. Точки кривої:

а — звичайні; б — перегину, в, з — повороту, д — зламу

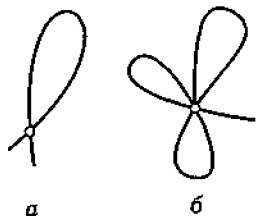


Рис. 7.5. Точки кривої:
а — подвійна; б — повторення

У *подвійній точці* крива перетинає саму себе двічі (рис. 7.5, а); якщо є більше двох таких перетинів, то точка називається *кратною*. В *точці повторення* крива два чи більше разів торкається однієї прямої (рис. 7.5, б).

Властивість 7.4. У загальному випадку звичайні точки кривої при проєкціюванні відображаються у звичайні точки проєкції кривої, а особливі — в особливі точки.

Введемо поняття *кривини*. Як зазначалося в розд. 3, коло задається трьома параметрами; отже, трьох точок плоскої кривої досить для його однозначного визначення. Будемо нескінченно наближати крайні точки цієї трійки до середньої; побудоване таким чином коло назовемо *дотичним*.

Визначення 7.9. *Кривиною* плоскої кривої в точці називається обернена до радіуса дотичного кола величина.

Напрямок на центр дотичного кола — центр кривини — збігається з нормаллю кривої в заданій точці. Крива, яка в кожній точці має однакову відстань від заданої (відстань вимірюється вздовж нормалі), називається *еквідистантою* (рис. 7.6, а); крива, що складається з центрів кривини заданої кривої, — її *еволютою* (рис. 7.6, в); вихідна крива — *евольвентою* своєї еволюти (рис. 7.6, б).

Плоскі криві можуть мати кривину. Дослідженням локальних властивостей кривих займається *диференціальна геометрія*.

Визначення 7.10. *Порядком* кривої називається степінь алгебричного рівняння, що задає цю криву.

Визначення 7.11. *Класом* кривої називається степінь рівняння кривої в тангенціальних координатах.

Порядок визначається за максимальною кількістю точок перетину січної з кривою (чотири на рис. 7.7, а); клас — за кількістю дотичних, які можна провести до кривої з точки, що не належить до неї (дві на рис. 7.7, б).

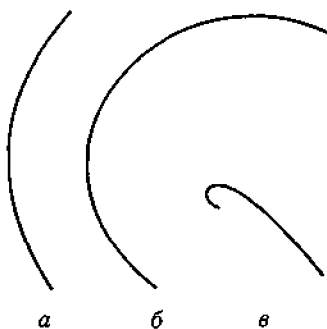
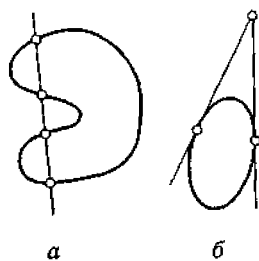


Рис. 7.6. Криві:
а — еквідистанта; б — евольвента; в — еволюта

Рис. 7.7. Графічне визначення порядку (а) і класу (б) кривої



Властивість 7.5. У загальному випадку порядок і клас плоскої кривої зберігаються для її проекції.

Визначення 7.12. Жанром, або родом, кривої називається різниця між можливою для кривої заданого порядку і реально існуючою кількістю подвійних точок.

Можлива кількість подвійних точок k розраховується за формулою

$$k = (n - 1)(n - 2) / 2,$$

де n — порядок кривої.

Розглянемо приклади плоских кривих.

Криві другого порядку

Криві другого порядку є найбільш дослідженими ще з античних часів. Вони часто застосовуються в машинобудуванні, будівництві, мистецтві та інших сферах людської діяльності, як основний елемент формоутворення. Особливо це стосується кола. Існують кілька визначень і варіантів аналітичного опису кривих другого порядку, а також десятки способів їх графічного задання.

Визначення 7.13. Кривою другого порядку називається крива, яка в прямокутних декартових координатах задається рівнянням другого степеня

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Це рівняння задає криву другого порядку загального вигляду; при певних коефіцієнтах маємо окремі випадки — еліпс, параболу, гіперболу.

Визначення 7.14. Еліпсом називається замкнена плоска крива, для якої сума відстаней від будь-якої точки до двох фіксованих точок (фокусів) є однаковою.

Якщо в наведеному вище рівнянні $A = 1/a^2$, $B = 0$, $C = 1/b^2$, $D = 0$, $F = -1$, то воно набуде вигляду

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1,$$

розв'язком якого будуть точки еліпса, кола, множина уявних точок, одна дійсна точка (в окремих випадках).

Розглянемо спосіб побудови еліпса (рис. 7.8).

Візьмемо перпендикулярні *взаємно спряжені* діаметри (ділять хорди, паралельні другому діаметру, навпіл) — *осі еліпса*. Прове-

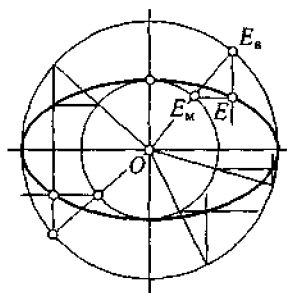


Рис. 7.8. Побудова еліпса

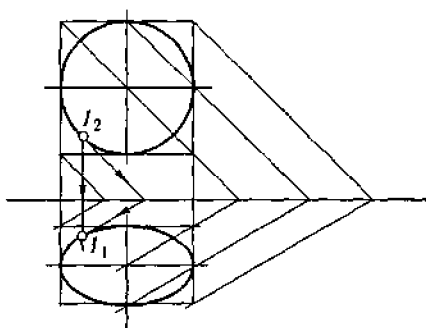


Рис. 7.9. Афінна відповідність еліпса і кола

демо з т. O їх перетину кола з діаметрами, що дорівнюють осям. З т. O проведемо промінь через довільну точку малого кола E_m . Він перетне велике коло в т. E_b . Через т. E_m проведемо пряму, паралельну великій осі, а з т. E_b — пряму, паралельну малій осі. Точка їх перетину E належатиме еліпсу. Так можна побудувати достатню кількість точок, а потім сполучати їх; це й буде еліпс.

Властивість 7.6. *Еліпс характеризується такими властивостями:*

- має суми площ квадратів, побудованих на двох взаємно спряжених діаметрах, що дорівнюють сумі площ квадратів, побудованих на осях;
- має площу паралелограма, побудованого на взаємно спряжених діаметрах, що дорівнює площі прямокутника, побудованого на осях;
- кожен з діаметрів еліпса і кола ділить інші діаметри навпіл;
- точки перетину діаметрів еліпса та кола є центрами симетрії;
- описаному навколо еліпса паралелограму відповідає квадрат, описаний навколо кола.

Останні три пункти засвідчують тісний зв'язок кола і еліпса; він реалізується через афінну відповідність фігур.

Це дає змогу обґрунтувати ще один спосіб побудови еліпса (рис. 7.9). За відповідністю описаних квадрата та прямокутника реконструюємо апарат перетворення; далі можна знаходити потрібну кількість точок, перетворюючи точки кола на точки еліпса.

Самоконтроль. Керуючись рис. 7.9, перетворіть коло на еліпс, велика вісь якого дорівнює діаметру кола, а мала — його радіусу.

Визначення 7.15. *Параболою називається плоска крива, кожна з точок якої є рівновіддаленою від фіксованих фокуса і прямої (директриси).*

Підставивши $A = 0, B = 0, C = 1, D = -p, E = 0, F = 0$ в загальне рівняння кривої другого порядку, дістанемо

$$y^2 = 2px,$$

що є рівнянням параболи. Окремі його розв'язки відповідатимуть парі паралельних або збіжних прямих чи множині уявних точок.

Опишемо спосіб побудови параболи (рис. 7.10).

Уздовж осі x від початку координат O відкладаємо $OC = 2p$. Беремо довільну абсцису x і на відрізку $(BC) = 2p + x$ будуємо коло. Воно перетинає вісь y в т. K . Отже, $AK^2 = OC \cdot OB$ є квадратом ординати $y^2 = 2px$, тому т. I належить параболі. Змінюючи x , дістаємо потрібну для проведення кривої кількість точок.

Наведемо властивості цієї кривої.

Властивість 7.7. Парабола:

- симетрична відносно осі x ;
- незамкнена — необмеженому зростанню абсцис відповідає необмежене зростання ординат;
- має ординати, які є середнім пропорційним між параметром $2p$ та абсцисами x .

Самоконтроль. Які з цих властивостей використовувались при побудові параболи на рис. 7.10?

Дослідимо гіперболу.

Визначення 7.16. Гіперболою називається плоска крива, різниця відстаней від кожної точки якої до двох фокусів є однаковою.

Підставляючи в загальне рівняння кривої другого порядку коефіцієнти $A = 1/a^2, B = 0, C = -1/b^2, D = 0, E = 0, F = -1$, отримуємо

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$

розв'язками якого є точки гіперболи або пари прямих, що перетинаються.

Покажемо побудову гіперболи (рис. 7.11).

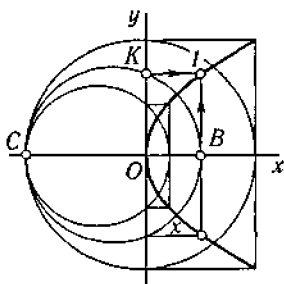


Рис. 7.10. Побудова параболи

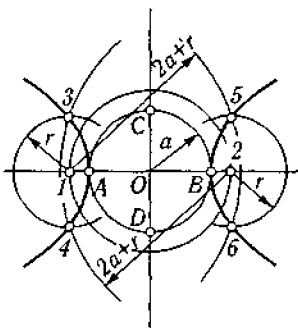


Рис. 7.11. Побудова гіперболи

Відкладемо вздовж осей x і y відрізки $AB = 2a$ і $CD = 2b$. З початку координат O радіусом a проводимо коло до перетину з віссю x . Одержані т. 1 і 2 є фокусами гіперболи. Проводимо кола з центрами у фокусах радіусами r та $2a + r$. Точки їх перетину 3, 4 і 5, 6 є точками гіперболи, оскільки різниця відстаней від них до фокусів дорівнює сталій величині $2a$. Змінюючи r , знаходимо потрібну кількість точок.

Сформулюємо деякі властивості цієї кривої.

Властивість 7.8. Гіпербола:

- незамкнена;
- симетрична відносно осей x і y ;
- має дотичні, нахилені однаково до фокальних радіусів-векторів у точці дотику;
- має нормалі, які ділять кут між фокальними радіусами-векторами навпіл;
- має різницю площ квадратів, побудованих на двох взаємно спряжених діаметрах, що дорівнює різниці площ квадратів, побудованих на її осях;
- має площу паралелограма, побудованого на двох взаємно спряжених діаметрах, що дорівнює площі квадрата, побудованого на її осях.

Тепер кілька фактів для допитливих студентів.

1. Не тільки еліпс можна одержати з кола за допомогою афінного перетворення — коло, еліпс, парабола, гіпербола пов'язані більш загальними проєктивними перетвореннями, тобто є конгруентними фігурами у проєктивному просторі (див. розд. 3, 10).

2. Крива другого порядку на площині задається п'ятьма параметрами (це впливає з її рівняння); парабола — чотирма, коло — трьома. Будь-яка п'ятірка умов (п'ять точок, три точки і дві дотичні тощо) однозначно визначає конкретну криву.

Для прикладу наведемо побудову, що ґрунтується на теоремі Паскаля: *в будь-якому шестикутнику, вершини якого належать кривій другого порядку, три точки перетину протилежних сторін належать одній прямій.*

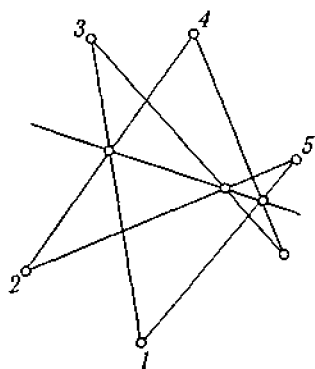
Нехай задано т. 1—5. Сполучаємо т. 1, 3, 5; 2, 4, 5. Через точки перетину прямих (13) і (24) проводимо довільну пряму a . Через т. 3 та 4 і точки перетину a з прямими (25) та (15) відповідно проводимо ще дві прямі, точкою перетину яких є шоста точка, що належить заданій кривій (рис. 7.12). Змінюючи положення прямої a , знаходимо інші точки.

Наведена побудова (елегантна, чи не так?) є невеличким фрагментом проєктивної теорії кривих другого порядку [17].

3. Існує ще більш глибока спорідненість між кривими другого порядку і прямими лініями, яка встановлюється за допомогою *квадратичних перетворень*. Нехай задано осі a та c , перпенди-

Рис. 7.12. Побудова кривої другого порядку за п'ятьма точками

кулярні одна до одної, і довільну т. A (рис. 7.13, *a*). Проведемо перпендикуляри з т. A до осей. З центра O перетину осей радіусом (OA_c) проведемо коло; точки його перетину з другим перпендикуляром — A_1 й A_2 — будуть образами т. A . Тепер проведемо пряму p під гострим кутом до осі a . Проведемо також прямі під кутом 45° до осей з центра O (*директриси*). Вони перетинають пряму p в т. 1 і 2. Відобразимо відрізок (12) за заданим алгоритмом та дістанемо еліпс (рис. 7.13, *б*).



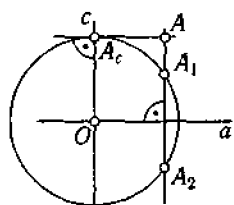
Самоконтроль. Залежно від кута нахилу прямої p дістаємо еліпс, параболу чи гіперболу, а залежно від відстані точок прямої p до осей a і c — дійсні чи уявні їхні образи. Проведіть таке дослідження самостійно, маючи на увазі, що директриси відіграють у ньому визначальну роль.

Приклади побудови інших плоских кривих

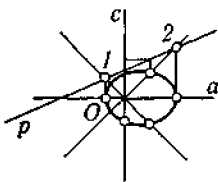
Конхкоїди утворюються *конхкоїдним перетворенням* вихідної кривої — радіуси-вектори її точок, що виходять із заданого полюса, збільшуються (зменшуються) на однакову довжину (рис. 7.14, 7.15).

Строфоїда (рис. 7.16): з довільної т. A осі x проводимо пряму, що перетинає вісь y у т. C , від якої в різні боки відкладаємо відрізки (CT) і (CP), що дорівнюють (OC). Змінюючи положення прямої, дістаємо точки строфоїди.

Верзієра Аньєзі (рис. 7.17): будуємо коло діаметром OA . Півхорда (BC) перетинає верзієру в т. E , знайдений із пропорції $BE/BC = OA/OB$. При переміщенні т. C по колу т. E опише шукану криву.



a



б

Рис. 7.13. Квадратичні перетворення (*a*) і крива (*б*) другого порядку

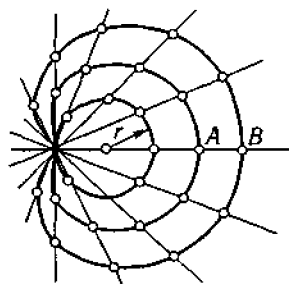


Рис. 7.14. Равлик Паскаля

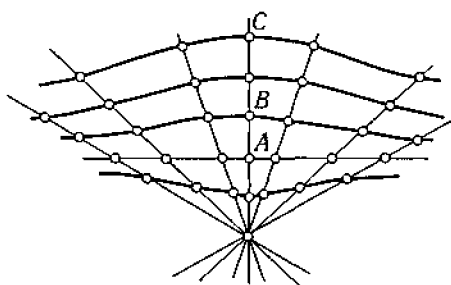


Рис. 7.15. Конхйоїда Нікомеда

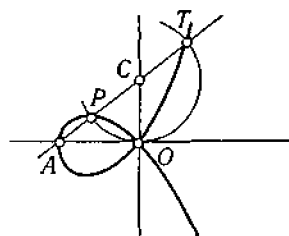


Рис. 7.16. Строфоїда

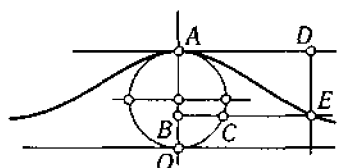


Рис. 7.17. Верзієра Аньєзі

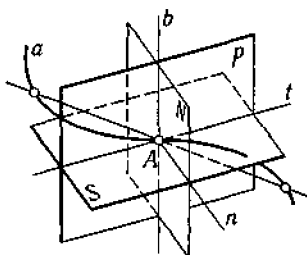


Рис. 7.18. Визначення супутнього триєдра

Побудови деяких інших кривих описано в [2]. Залежності, що виражаються кривими, мають певне значення в механіці, приладобудуванні тощо.

7.3. ПРОСТОРОВІ КРИВІ

Як і плоскі криві, просторові можуть бути задані графічно, аналітично і т. д. Для дослідження використовується *супровідний триєдр*, або *тригранник Френе*, — сукупність площин S , N , P , які визначаються так.

Проведемо дотичну до довільної т. A кривої. Серед дотичних площин вибираємо S , яка найкраще наближається до кривої: в околі т. A крива лежить в S . Площина S називається *стичною*. Сукупність нормалей до т. A утворює *нормальну площину* N .

Нормаль в S називається *головною*; перпендикулярна до S — *бінормаллю*. Площина P , що складається з бінормалей, називається *випрямною* (рис. 7.18).

При русі вздовж кривої напрями дотичних, нормалей і весь тригранник змінюються.

Грані S , N , P утворюють площини проєкцій, а дотична, головна нормаль і бінормаль — просторові координати. Проєкціюючи криву на грані триєдра, дістаємо проєкції, за допомогою яких можна визна-

чити характеристики просторових кривих за аналогією з плоскими. Проекції зберігають деякі властивості просторових кривих (зокрема, належність точки дотику), дають змогу розрізняти особливі точки — перегину, повороту, повторення, зламу, подвійні та кратні точки. Проте звичайні точки іноді виглядають як особливі.

При переміщенні тригранника вздовж кривої стична площина обертається навколо нормалі. Відношення кута повороту стичної площини до довжини дуги кривої при нескінченно малому її значенні називається *скрутом* кривої. Скрут є аналогом кривини для просторової кривої; його можна визначити також як величину, обернену до радіуса сфери, проведеної через три точки околу і довільну точку кривої. Скрут плоскої кривої дорівнює нулю.

Просторові криві мають параметричне число $6+n$, де n — кількість параметрів форми конкретної кривої. Іноді кількість параметрів положення може бути меншою від шести.

Самоконтроль. Проведіть самостійне дослідження геліси (див. рис. 7.2) із використанням тригранника Френе.

Наведіть інші приклади просторових кривих. Зверніть увагу на можливості визначення особливих точок.

Коли звичайні точки будуть виглядати як особливі? Наведіть приклади і виконайте рисунки, що ілюструють їх.

7.4. ПРИКЛАДИ КРИВИХ ЛІНІЙ У ПРИРОДІ, НАУЦІ, БУДІВНИЦТВІ

Наведемо п'ять прикладів використання плоских і просторових кривих, а також коротенькі коментарі до них.

Еволюція черепашок (рис. 7.19) привела до логарифмічних спіралей; досить часто природні утворення набирають форми спіралі Архімеда або спіралі на основі «золотого перерізу».

Мабуть, криві саме цього типу є найпоширенішими у Всесвіті...

Деякі вчені стверджують, що спіралі на основі «золотого перерізу» є найхарактернішими для живої природи, проте немає повних статистичних даних, які б свідчили, що це саме так. Слід також зважати на те, що форма спіралі реалізується приблизно, утворення лише наближається до неї.

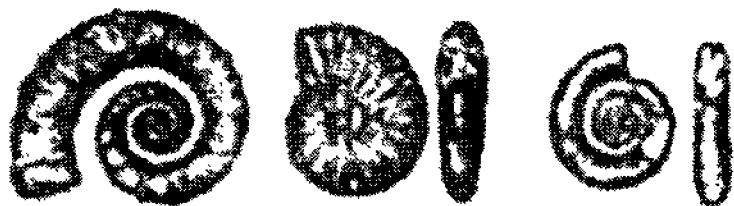


Рис. 7.19. Спіральні форми черепашок

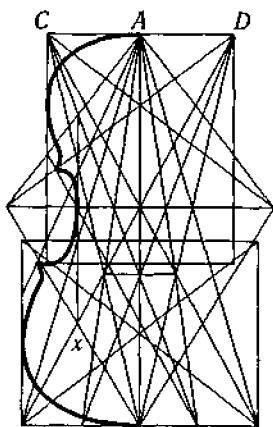


Рис 7 20 Реконструкція креслення скрипки Страдіварі

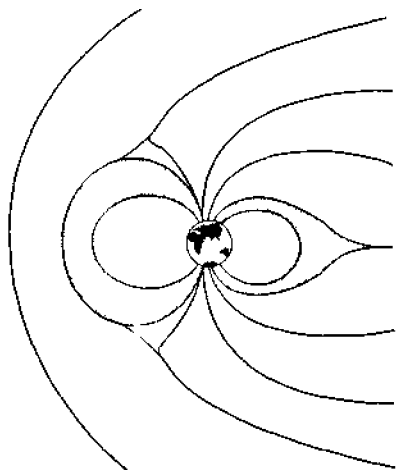


Рис 7 21 Модель магнітного поля Землі

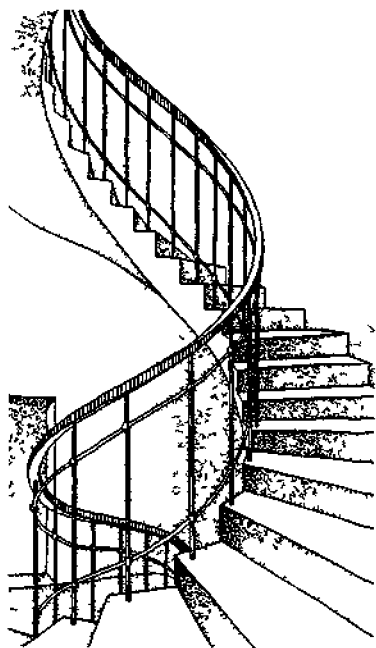


Рис 7 22 Гвинтові сходи

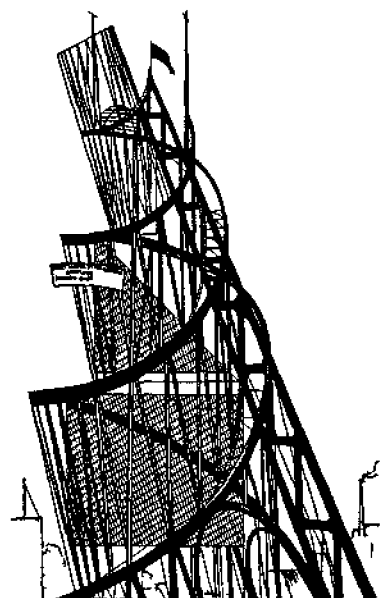


Рис 7 23 Проект пам'ятника III Інтернаціоналу (архітектор В Татлін, Росія, 1919 р)

Креслення на рис 7 20 є прикладом складного обводу з дуг кривих, побудованого на основі нетривіальної геометричної схеми, що відображає уявлення великого майстра про оптимальну акустику скрипки. В сучасному геометричному моделюванні обводи використовуються як моделі технічних кривих. Побудову обводів описано в розд 13. Силові лінії магнітного поля Землі на рис 7 21 є ще одним прикладом використання обводів для подання результатів наукових досліджень.

Формотвірними елементами конструкцій на рис 7 22 і 7 23 є геліси.

Надання сходів такої форми має давню традицію — вони характерні для веж рицарських замків. І не мотиви економії площі чи якісь спостереження за природою нав'ювали цю ідею. Ні, суто тактичні міркування — меч чи шпага захисника має доволі простору, тоді як зброя нападника упирається в стіну. Проте вийшло красиво, що й забезпечило конструкції довге життя.

А тепер забудьмо про політику та естетику й оцінимо масштабність задуму і сміливість митця — висота пам'ятника III Інтернаціоналу (рис 7 23) мала б становити 400 м! Найвища за тих часів у світі будівля, і це в 1919 р., в розореній країні, коли була в розпалі громадянська війна.

Самоконтроль. Згадайте, які ще технічні конструкції мають у своїй основі ті чи інші плоскі або просторові криві. Нарисуйте кілька таких форм. Подумайте, наскільки вони є технологічними. Чи треба проводити їх апроксимацію або інтерполяцію?

Задання технічних кривих розглядається в розд 13. Прогляньте його.

8. КРИВІ ПОВЕРХНІ

Існує глибинна подібність граничних і кривих поверхонь. Вона проявляється у визначенні, способах зображень, наборі типових задач.

І ті, й інші є окремими випадками об'єктів, які в математиці називаються *многовидами*. Тому структура цього розділу нагадуватиме розд. 6. Однак є й відмінність — більша гладкість кривих поверхонь, що зумовлює інші застосування їх у мистецтві, будівництві та техніці.

8.1. ВИЗНАЧЕННЯ, КЛАСИФІКАЦІЯ, ВЛАСТИВОСТІ

Будемо використовувати два визначення.

Визначення 8.1. *Кривою поверхнею називається неперервна двопараметрична множина точок.*

Визначення 8.2. *Кривою поверхнею називається неперервна однопараметрична множина ліній.*

Для задання поверхні застосовують визначники, які позначаються так само, як і визначники граничних поверхонь, і теж мають алгоритмічну частину. Аналогічно є можливість існування кількох визначників однієї поверхні. Поверхні задаються аналітично, графічно, сім'єю ліній тощо; технічні поверхні (розд. 13) — дискретно (множинами точок, каркасами ліній, сукупностями відсіків).

Для зображення поверхні будуються дві проєкції кожного з елементів визначника (рис. 8.1).

Використаємо рис. 8.1 для введення двох понять. Коло a є *напрямною* конуса, а пряма c — його *твірною*. Можна, навпаки, вважати напрямною пряму, а твірною — коло змінного радіуса, що переміщується вздовж цієї прямої. Такі варіанти демонструють різні можливості утворення, що зумовлює належність конуса до різних класифікаційних груп. Багато інших поверхонь так само можуть належати до різних груп.

Отже, один із класифікаційних принципів — визначення груп за способом утворення, інший — за формальними ознаками, наступний — за властивостями і т. д. Існує багато класифікацій поверхонь, найповнішу з яких наведено у [2]. Покажемо її скорочену схему, деталізуючи трохи згодом групи

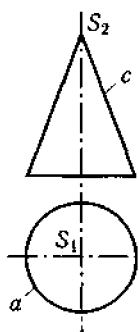


Рис. 8.1. Визначник і зображення кругового конуса (S , a , c)

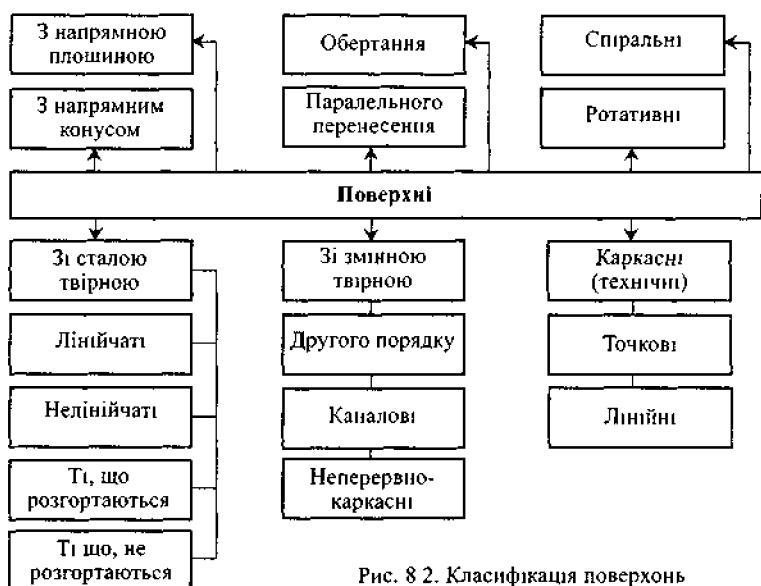


Рис. 8.2. Класифікація поверхонь

лінійчатих поверхонь, що важливо через їх широке застосування і прозорість класифікаційних ознак (рис. 8.2).

Розглянемо лінійчаті поверхні. Їхні твірні є прямими лініями.

З ∞^4 прямих E^3 маємо виділити ∞^1 твірних поверхні. Фіксуємо один параметр, вимагаючи, щоб твірні проходили через криву a . Маємо ∞^3 прямих — *комплекс*. Провівши криву b і вимагаючи, щоб прямі проходили через a та b , фіксуємо два параметри і маємо ∞^2 прямих — *конгруенцію*. Крива c виділить з конгруенції ∞^1 твірних. Такі поверхні називаються *косими циліндрами* (рис. 8.3); їх порядок $n = 2n_a n_b n_c$, де n_a, n_b, n_c — порядки напрямних кривих.

Можливості конструювання форми і розмірів поверхні залежать від напрямних кривих, вигляд яких зумовлює подальшу класифікацію. Якщо одна з напрямних належить невластній площині, то маємо *поверхню з напрямною поверхнею* (на рис. 8.4 це конус з вершиною S); умова паралельності твірних довільній площині Γ дасть *поверхню Каталана* (рис. 8.5) тощо.

Якщо напрямні AC і BS поверхні Каталана є кривими лініями, то маємо клас

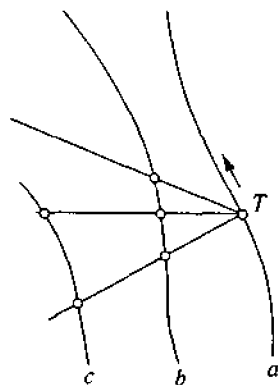


Рис. 8.3. Виділення косих циліндрів із множини прямих простору

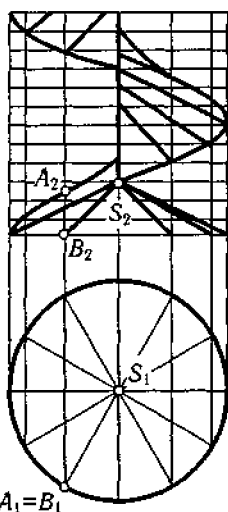


Рис. 8.4. Косий гелікоід, поверхня з напрямним конусом

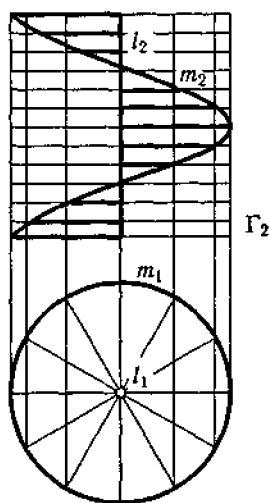


Рис. 8.5. Прямий гелікоід, поверхня з площиною паралелізму

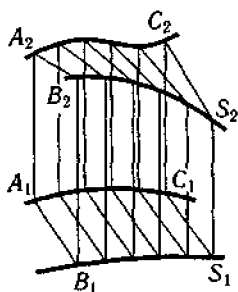


Рис. 8.6. Циліндроїд

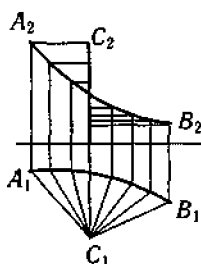


Рис. 8.7. Коноїд

поверхонь, які називаються *циліндроїдами* (на рис. 8.6 площина паралелізму паралельна вертикальній площині). Порядок циліндроїда $n = 2n_a n_b$. Циліндроїди досить часто застосовуються в техніці. Наприклад, таку форму мають конструкції повітропроводів, патрубки, деякі агротехнічні знаряддя тощо.

Якщо однією з напрямних поверхні є пряма лінія, то це *коноїд* (рис. 8.7; площину паралелізму Γ взято паралельною Π_1 , а як напрямну вибрано горизонтально проєкціювальну пряму). Порядок коноїда $n = 2n_b$. У будівництві такої форми надають перекриттям промислових і цивільних споруд, опорам мостів, аркам прорізів. У суднобудуванні коноїди використовують при конструюванні носових части суден і т. д.

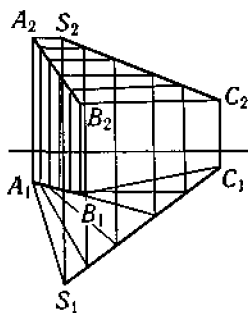
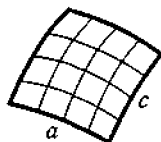


Рис 8.8. Коса площина

Рис. 8.9. Поверхня паралельного перенесення



Поверхня з двома прямими напрямними і площиною паралелізму називається *косою площиною* (рис. 8.8); її порядок $n = 2$. Вона має непогані естетичні якості, а її виготовлення є технологічно зручним — можна використовувати прямолінійні елементи арматури й опалубки. Через це косі площини часто застосовують в архітектурі. В Києві такої форми надано покриття Будинку меблів на бульварі Дружби народів.

Дивовижними є властивості косої площини: і напрямні, і твірні її — це прямі лінії, рівняння (для окремого розташування) яких записується як $x = ky/z$, а поверхня є кривою і має порядок 2. Це підкреслюється її другою назвою — гіперболічний параболоїд. Параболи та гіперболи є обвідними твірних, як це видно на рис. 8.8.

Наведемо ще два приклади поверхонь різних груп.

Поверхню Φ на рис. 8.9 задано визначником (a, c) ; твірна a переміщується вздовж напрямної c паралельно до самій собі. Ця поверхня *паралельного перенесення* може бути віднесена також до неперервно-каркасних — її напрямні і твірні утворюють сітку каркаса. Клітинки сітки мають попарно рівні та паралельні сторони (*сітка Чебишова*).

Каналова поверхня зі змінною твірною $\Delta(a, c)$ на рис. 8.10 утворюється при переміщенні кола a змінного радіуса вздовж напрямної c (площина кола перпендикулярна до c). Обвідна визначає абрис поверхні. Якщо радіус кола не змінюється, то поверхня називається *трубною*; якщо при цьому c є прямою, то *круговим циліндром*, який є лінійчатою поверхнею другого порядку, будучи прикладом неоднозначної класифікації.

Підрахуємо кількість параметрів поверхні й покажемо її зв'язок з порядком.

Як зазначалося в розд. 3, кількість параметрів положення дорівнює 6, отже, загальна кількість їх

$$m = 6 + m_f,$$

де m_f — кількість параметрів форми.

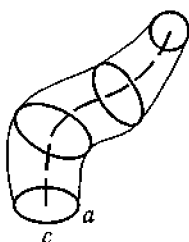


Рис. 8.10. Каналова поверхня загального вигляду

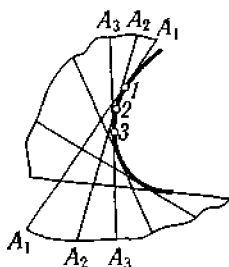


Рис. 8.11. Торс

Для поверхні порядку n маємо максимальну кількість параметрів форми

$$m_f = n(n^2 + 6n + 1)/6.$$

Реальна кількість параметрів може бути набагато меншою за теоретичну; наприклад, для сфери вона становить $3 + 1 = 4$, для еліптичного параболоїда — $6 + 2 = 8$, для конуса другого порядку — $6 + 3 = 9$ тощо.

Самоконтроль. На початку цього розділу поверхня визначалась як однопараметрична множина ліній або двопараметрична множина точок. Щойно були наведені приклади поверхонь, параметричні числа яких більші за 1 чи 2. Поясніть це.

Тепер розглянемо той факт, що криві поверхні, на відміну від гранних, розгортаються не завжди.

Твірними і напрямними поверхні можуть бути прямі та криві лінії. Кожну точку поверхні можна розглядати як перетин двох сімей ліній — напрямних і твірних (нагадаємо, що вони можуть замінювати одна одну). Тоді кожна з цих ліній має власну кривину k_1 та k_2 , яким можна умовно приписати знаки «+» чи «—» залежно, наприклад, від напрямку всередину поверхні чи назовні. Величина

$$k = k_1 k_2$$

називається *гауссовою кривиною* поверхні. Залежно від знака k розрізняють поверхні *додатної*, *від'ємної* та *нульової гауссової кривин* (див. рис. 8.10, 8.8, 8.1).

Властивість 8.1. Тільки поверхні нульової гауссової кривини є такими, що розгортаються.

Крім конусів загального вигляду, до них належать ще *циліндри загального вигляду* і *торси*. Торс зображено на рис. 8.11. Він утворюється множиною дотичних прямих до напрямної кривої c , яка має назву *ребра звороту*. Ця крива і є його визначником. Якщо ребро звороту перетворюється на точку, то маємо конус; якщо ця точка віддалена в нескінченність — то циліндр.

Самоконтроль. Із наведеного прикладу випливає, що геометричні умови фіксують іноді більше, ніж один параметр. У цьому випадку умова дотику рівнозначна двом умовам перетину. Поясніть це. Подумайте, чому напрямна називається ребром звороту?

8.2. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

Визначення належності точки до поверхні

На одній з проєкцій через точку проводиться твірна і перевіряється, чи буде друга її проєкція проходити через цю точку (рис. 8.12). Якщо так, то точка належить до поверхні, якщо ні — не належить. Одній проєкції можуть відповідати кілька твірних; перевірка здійснюється для всіх їх.

На відміну від гранної поверхні твірна може бути не прямою, а кривою лінією, до того ж змінної форми, що створює певні труднощі. Нижче буде розглянуто один із способів їх подолання.

Перетин кривої поверхні з площиною

Для кривих поверхонь потрібно провести спеціальний аналіз, який має визначити форму кривої — результат перетину.

У ході цього слід знайти *характерні* точки, що обмежують криву, й *особливі* точки, які визначають її форму. До перших належать верхня, нижня, права, ліва точки, а також точки зміни видимості. До других — усі особливі точки плоскої кривої (див. розд. 7). Далі знаходять проміжні точки. Всі точки сполучають плавною лінією, після чого визначають видимість.

Задача 8.1. Побудова плоского перетину поверхні обертання (рис. 8.13).

Поверхня Φ утворюється внаслідок обертання твірної a навколо горизонтально проєкціувальної осі s і перетинається вертикальною площиною P . Лівою та правою межами лінії перетину $I_1^n, 2_1^n$ будуть точки перетину горизонтального сліду площини з контуром Φ_1 ; т. $I_2^n, 2_2^n$ розташовуються на перетині прямої — проєкції кола — з лініями зв'язку. Точки зміни видимості $3_1^{3b} \equiv 4_1^{3b}$

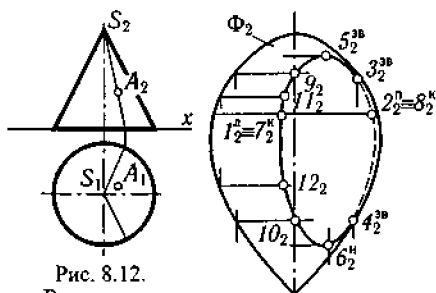
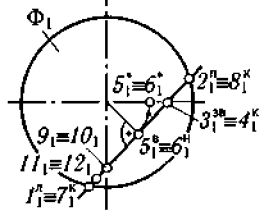


Рис. 8.12.

Визначення належності точки до поверхні

Рис. 8.13.
Знаходження плоского перетину поверхні обертання



лежать на перетині сліду площини і горизонтальної осі симетрії Φ_1 ; фронтальні проекції є точками перетину ліній зв'язку з контуром Φ_2 . Верхня та нижня точки $5_1^* \equiv 6_1^*$ розташовуються на колі, дотичному до площини (отже, для їх визначення слід провести перпендикуляр із центра Φ_1 до сліду P).

Твірна, що проходитьиме через ці точки, зобразатиметься на Π_2 у спотвореному вигляді; щоб уникнути її побудови, горизонтальна проекція обертається до суміщення з віссю симетрії; через одержану т. 6_1^* проводиться лінія зв'язку до перетину з e_2 ; з т. 5_2^* і 6_2^* проводяться горизонтальні лінії — фронтальні проекції траєкторії обертання; їх перетин із лініями зв'язку, проведеними з т. $5_1^* \equiv 6_1^*$, визначить фронтальні проекції верхньої та нижньої точок. Особливі точки — в цьому випадку точки зміни кривини 7_1^* і 8_1^* — знаходяться на перетині контуру Φ_1 зі слідом P та збігаються з лівою і правою точками перетину; збігаються також їхні фронтальні проекції. Проміжні т. 9, 10, 11, 12 беруться на колі довільного радіуса і знаходяться аналогічно верхнім та нижнім точкам. Сполучаємо всі точки лінії перетину. Видимою буде та її частина, яка розташовується перед віссю симетрії Φ_1 . Як бачимо, іноді характерні й особливі точки збігаються, що слід урахувувати при аналізі.

Лінія перетину такої самої поверхні з іншими за розташуванням площинами набирає різної форми. Плоскі перерізи прямого кругового конуса є типовими прикладами цього явища. Можливі варіанти їх показано на рис. 8.14.

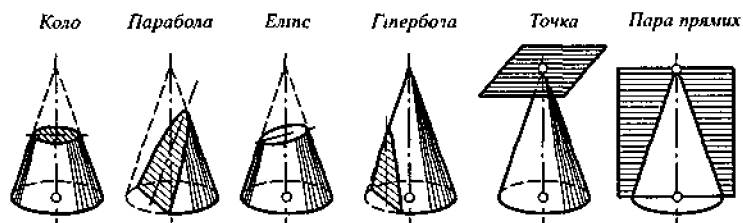


Рис. 8.14 Конічні перерізи

Площина:		\cap		проходить	збігається з
основи	одиній	\cap усім	двом	через вершину	площиною
	твірній	твірним	твірним		симетрії

Самоконтроль (для допитливих студентів). Еліпс, парабола і гіпербола є орбітами ракет при досяганні першої, другої та третьої космічних швидкостей. Поміркуйте, які властивості фізичного простору-часу впливають із цього факту

Задача 8.2. Перетин прямого кругового циліндра площиною загального положення (рис. 8.15).

Горизонтальна проекція лінії перетину збігається з Φ_1 . Крайні точки і точки зміни видимості розташовуються на горизонтальній

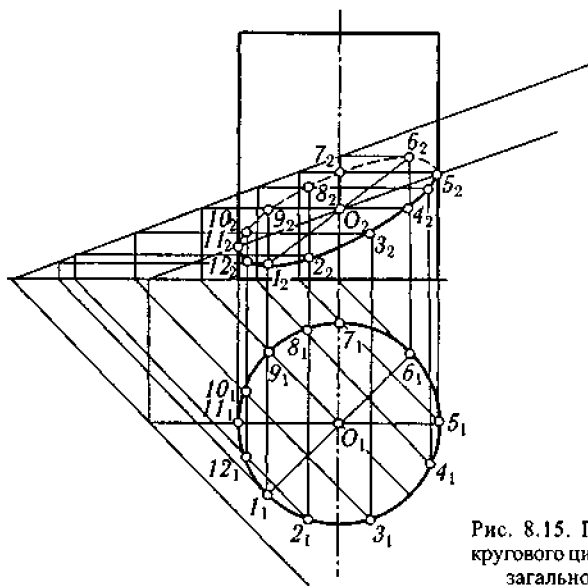


Рис. 8.15. Перетин прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения

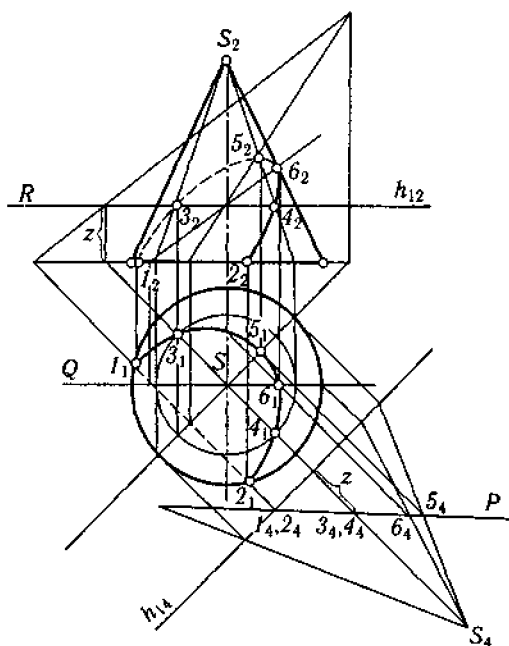


Рис. 8.16. Перетин конуса плоскостью

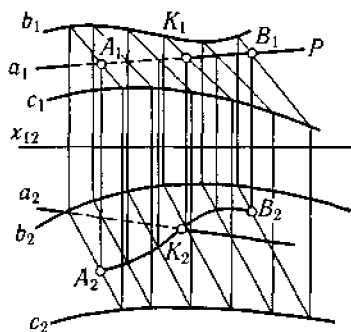


Рис 8.17. Перетин циліндроїда прямою

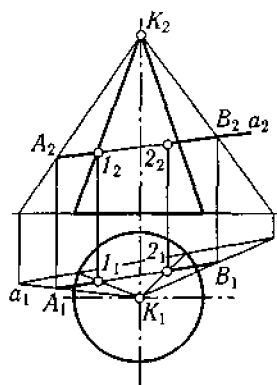


Рис. 8.18. Перетин поверхні прямою (допоміжне проєкціювання на площину основи; застосовується для конусів і циліндрів)

осі симетрії Φ ; верхня та нижня — на перетині перпендикуляра, проведеного з центра Φ_1 до сліду площини, з контуром циліндра; особливих точок немає. Проміжні точки візьмемо в довільних місцях Φ_1 . Фронтальні проєкції точок знайдуться в місцях перетину твірних циліндра і фронтальних прямих площини, проведених через горизонтальні проєкції точок лінії перетину. Видимість — за аналогією з рис. 8.13.

Задача 8.3. Перетин конуса площиною (рис. 8.16).

Слід перевести площину в проєкціовальне положення.

Перетин поверхні з прямою лінією

Доцільно застосовувати метод допоміжних січних площин або, в разі перетину прямої з конусом чи циліндром, допоміжне проєкціювання на площину основи.

Задача 8.4. Перетин циліндроїда прямою (рис.8.17).

Через a_1 проводимо горизонтально проєкціовальну площину P і за точками її перетину з твірними циліндроїда будемо фронтальну проєкцію лінії перетину площини поверхнею. Точка перетину a_2 з цією лінією і є точкою перетину циліндроїда прямою (див. рис. 8.17).

Знаходимо її горизонтальну проєкцію. Визначаємо видимість.

Задача 8.5. Перетин конуса прямою (рис. 8.18).

Проєкціовальні промені проводимо через вершину K і довільні точки прямої a . Горизонтальні сліди променів визначають нове розташування прямої, а точки її перетину з основою — твірні, на яких у місцях перетину з a лежать потрібні точки (див. рис. 8.18). Видимість визначається за загальним правилом: якщо точки перетину належать видимим твірним, то вони видимі, й навпаки.

Взаємний перетин граних і кривих поверхонь

Задачі цього типу зводяться до багатократного розв'язання задач на перетин поверхні площиною і прямою. Послідовність дій має бути такою:

- виявлення характерних й особливих точок (обов'язково — точок перетину ребер з поверхнею);
- побудова проєкцій цих, а також проміжних точок (можуть застосовуватись всі наведені вище методи);
- плавне сполучення точок кривою лінією;
- визначення видимості лінії перетину і поверхонь.

Задача 8.6. *Перетин призми конусом* (рис. 8.19).

Призма є фронтально проєкціювальною: отже, маємо одну проєкцію лінії перетину. Характерні точки розташовуються так: верхні — на ребрі i , ліва — на ребрі j , права — на ребрі k . Для визначення горизонтальних проєкцій застосовуємо допоміжні площини Γ_1 , Γ_2 та Γ_3 (можна було б проводити твірні, але так точніше) і знайдемо проєкції там, де плоскі перерізи — кола — перетинатимуть ребра. За допомогою січної площини Γ_2 визначаємо проміжні точки. Сполучаємо всі точки і визначаємо видимість — видимі ті ділянки кривої, які належать одночасно видимим частинам поверхонь.

Самоконтроль. Які криві другого порядку утворюють криву, здобуту в результаті розв'язання задачі 8.6?

Знайдіть аналогі засобів і послідовності розв'язування задач 8.2, 8.3, 8.5 та 8.6 із подібними задачами для багатогранників (див. розд. 6) Поясніть причини цього. Використовуйте такі способи при опрацюванні подальшого матеріалу.

Знайдіть відмінності розв'язання задач 8.1 і 8.6 від розв'язання аналогічних задач для багатогранників. Поясніть причини.

При розв'язуванні задач можуть застосовуватись різні перетворення, мета яких — перевести одну з поверхонь у проєкціювальне положення або навіть змінити форму поверхні, зробивши її зручнішою для розв'язання задачі.

Задача 8.7. *Перетин вертикальної призми еліптичним параболоїдом* (рис. 8.20).

Хоча й маємо горизонтальну проєкцію лінії перетину, проте скористатись цим для побудови її фронтальної проєкції не можна, оскільки твірними поверхні є еліпси або параболи, побудова яких є трудомісткою. Тому доцільно перетворити поверхню на параболоїд обертання, скориставшись відповідністю еліпса і кола (див. розд. 7). Вісь перетворення a візьмемо паралельною осі x у довільному місці; інші елементи апарату дістанемо, перетворивши лінію, що сполучає кінці малої та великої осей еліпса, на пряму, проведену під кутом 45° до a .

Далі будемо зображення призми і параболоїда (тепер уже кругового). Знаходимо характерні точки — вони відповідають перетинам:

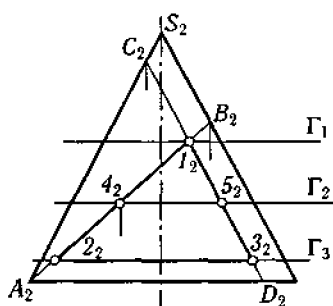


Рис. 8.19. Перетин призми конусом

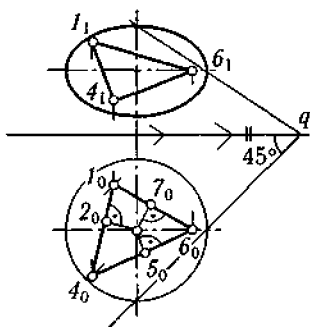
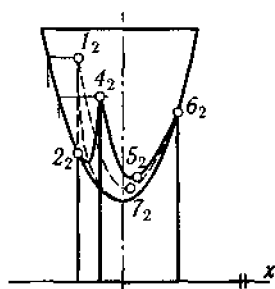
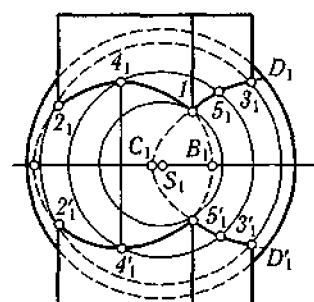


Рис. 8.20. Перетин вертикальної призми еліптичним параболоїдом (афінне перетворення)

ребер призми — поверхнею, граней з горизонтальною віссю симетрії кола — перпендикулярами, проведеними з центра кола до слідів граней. Визначаємо фронтальні проекції всіх цих точок, використовуючи лінії зв'язку, сполучаємо їх плавною лінією. При визначенні видимості користуємось горизонтальною проекцією, а не перетвореним положенням фігур, оскільки воно є дзеркальним відносно осі a .

Взаємний перетин кривих поверхонь

Крім використання проекційовального положення фігур та допоміжного проекціювання, за аналогією із задачами розд. 6 застосовують спеціальні методи.

Розглянемо спочатку особливості використання відомих методів.
Задача 8.8. Перетин кругових конуса і циліндра (рис. 8.21).

З умов на рис. 8.21 хід розв'язання є цілком зрозумілим. Зробимо наголос на виявленні характерних точок. Т. C і D на горизонтальній осі симетрії циліндра визначають зміну видимості на горизонтальній проекції; крайні праві точки лінії перетину знаходяться саме там. Їхні горизонтальні проекції відшуковуються за допомогою січної площини. Оскільки поверхні, що перетинаються,

є поверхнями другого порядку, лінія перетину матиме четвертий порядок та дві вершини. Крайні ліві т. E й F — вершини кривої — розташовуються на контурній лівій твірній конуса (і на його горизонтальній осі симетрії). Побудова горизонтальних проекцій цих точок не потребує додаткових пояснень. Горизонтальні проекції проміжних т. A та B будуються за допомогою січної площини Σ . Знайшовши достатню кількість таких точок, будуюмо криву (її горизонтальна проекція називається *кардіоїдою* через зовнішню схожість із серцем людини). Визначаємо видимість кривої і фігур.

Самоконтроль. Для умов, показаних на рис. 8.22, знайдіть лінію перетину циліндрів, визначіть особливі та характерні точки, а також видимість. Докладно поясніть одержані результати

Проекціовальне положення фігур спрощує розв'язання задачі. Тому слід здійснювати відповідне перетворення.

Покажемо застосування допоміжного проєкціювання. Як і для гранних поверхонь, його перевагою є те, що воно зразу дає змогу встановити вид перетину: чи буде він взагалі, чи буде крива розпадатися на дві частини, чи залишиться цілою. Застосовувати його доцільно лише для розв'язання задач на перетин циліндрів, конусів, призм і пірамід, які мають спільну площину основи, в будь-якій комбінації.

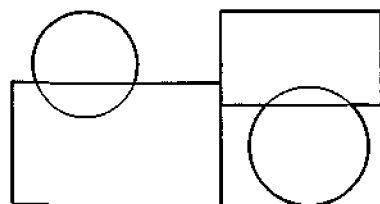


Рис. 8.22. Взаємний перетин циліндрів одремого положення

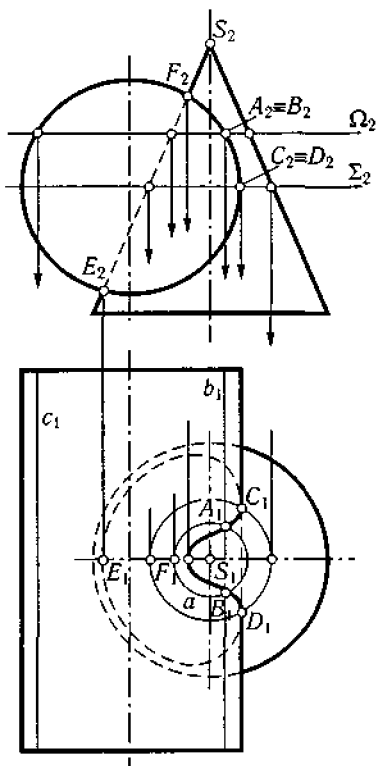


Рис. 8.21. Перетин кругових конуса і циліндра

Залежно від типу фігур напрям проєкціювання визначається лінією, проведеною через вершини або через вершину конусу чи піраміди паралельно ребрам призми або твірним циліндра чи паралельно прямій, що сполучає сліди ліній, паралельних твірним (ребрам) циліндрів (призм).

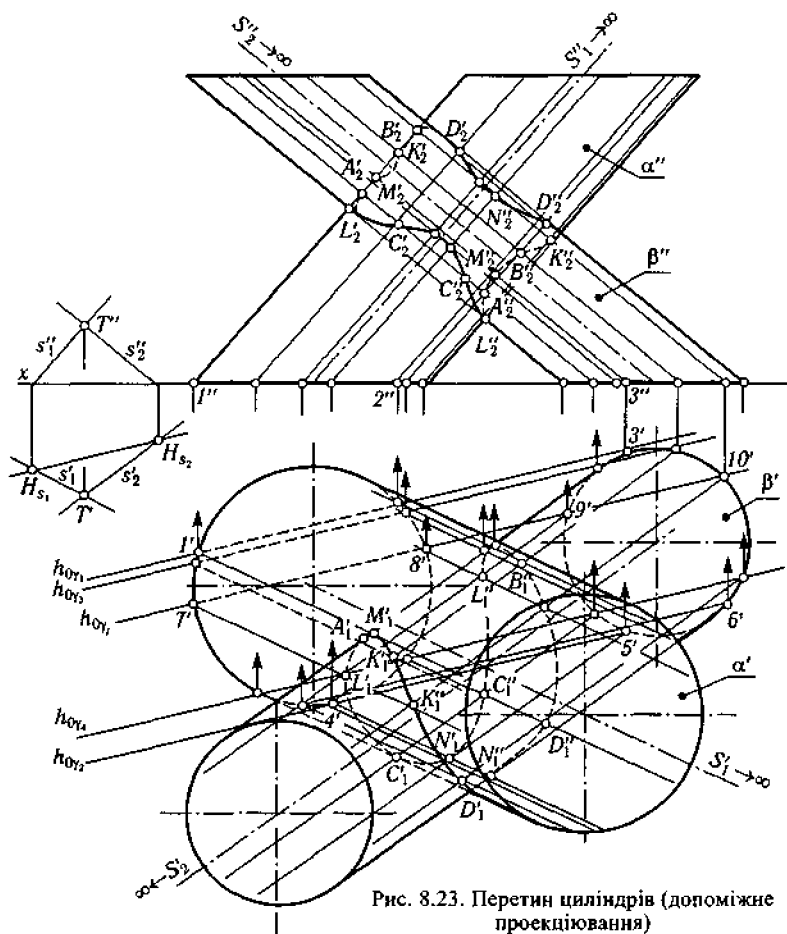
Наведемо правила відшукування точок перетину при застосуванні методу допоміжних січних площин.

1. Обидві поверхні перетинаються площиною і будуються їхні плоскі перетини.

2. Одержані криві як такі, що належать одній площині, перетинаються або торкаються одна одної. Ці точки і є точками кривої перетину поверхонь.

3. Січні площини слід проводити в таких місцях та в такій кількості, щоб виявити всі характерні й особливі точки лінії перетину, а також достатню кількість проміжних точок.

Задача 8.9. Перетин циліндрів із спільною площиною основи на Π_1 (рис. 8.23).



Визначаємо напрям допоміжного проєкціювання, проводячи прямі, паралельні твірним циліндрів α і β . Знаходимо їхні горизонтальні сліди.

Вибираємо січні площини h_{α_1} паралельними лінії $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}$, що сполучає ці сліди. Проводимо січні площини $h_{\alpha_1'}, h_{\alpha_2'}$ як дотичні до основи циліндрів α та β відповідно. Як бачимо, є врізання малого циліндра, межі якого визначатимуться т. N', N'' та M', M'' . Проєкції точок знаходимо на перетині їхніх твірних.

Аналогічно, використовуючи допоміжні площини $h_{\beta_1'}$ знаходимо проєкції проміжних т. L, A, B, C, D, R .

Визначаємо видимість — будуть видимі лише ті точки лінії перетину, що належать видимим половинам циліндрів α і β . Точки зміни видимості є точками торкання кривої крайніх твірних циліндрів; це також характерні точки.

Метод допоміжних січних площин є універсальним, однак практичні можливості його застосування обумовлені трудомісткістю побудов — січні площини для обох поверхонь мають проводитися так, щоб плоскі перетини були максимально простими, бажано прямими або колами. Іноді для цього слід використовувати ті чи інші перетворення.

Задача 8.10. Перетин сфери параболоїдом обертання (рис. 8.24).

Розташування поверхонь свідчить, що січні площини мають бути горизонтальними (тоді перетинами будуть кола). Для аналізу та побудови характерних точок було б зручніше, якби поверхні мали спільну вертикальну площину симетрії, паралельну осі x . Здійснимо таке розташування, повернувши сферу навколо осі параболоїда (слід повертати саме сферу — легше будувати показане тонкою лінією нове положення). Визначаємо характерні точки — верхню і нижню (на перетині фронтальних проєкцій контурів нового положення сфери та вихідного параболоїда і на лінії, що сполучає горизонтальні проєкції їхніх центрів) дотику до контурів поверхонь (вони ж — точки зміни видимості). Знаходимо кілька проміжних точок. Сполучаємо точки та визначаємо видимість.

У тому разі, коли не вдається вдало провести січні площини, застосовуються спеціальні методи. Однією з можливостей є ви-

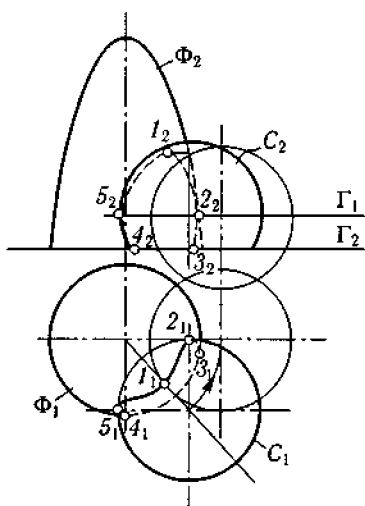


Рис. 8.24. Перетин сфери параболоїдом обертання

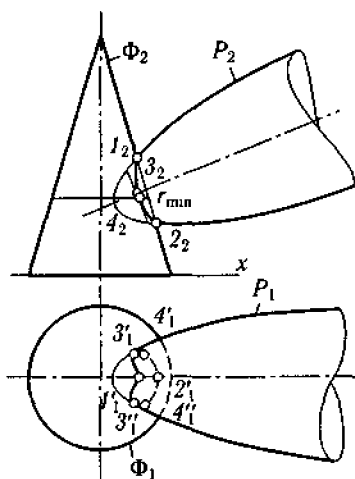


Рис. 8.25. Перетин кругового конуса і параболоїда

тину поверхонь. Сфери вибирають такими, щоб вони допомагали виявити характерні точки.

Задача 8.11. *Перетин кругового конуса і параболоїда (рис 8.25).*

Задано поверхні обертання зі спільною вертикальною площиною симетрії та осями, що перетинаються; отже, слід застосовувати метод концентричних січних сфер. З іншого боку, метод допоміжних січних площин є недоцільним, оскільки при будь-якому розташуванні січних площин перетини не будуть колами чи прямими. Центр сфер вибирається в точці перетину осей поверхонь. Верхня і нижня точки лінії перетину знайдуться на фронтальній проекції перетину контурів; найвіддаленіша від правої контурної твірної конуса точка знайдеться за допомогою сфери радіусом, що дорівнює відрізку перпендикуляра, проведеного із центра сфери до цієї твірної. Названі точки визначають межі змін радіусів сфер. Проміжним точкам відповідають сфери проміжних радіусів. Лінії перетину сфер із поверхнями на Π_2 (кола) зобразяться як відрізки прямих між точками перетинів сфер із контурами фігур; їх перетини визначатимуть пари симетричних точок лінії перетину поверхонь.

Для побудови горизонтальних проекцій слід провести твірні конуса або побудувати горизонтальні проекції кіл — перетинів конуса зі сферами — і провести до них відповідні лінії зв'язку з фронтальних проекцій точок. Сполучаємо одержані точки плавною лінією. Вгадати радіус сфери, який відповідатиме точкам зміни видимості, неможливо, але, коли лінію перетину побудовано, можна вказати їх. Фронтальні проекції збігаються та знаходяться на пе-

користання *допоміжних січних сфер (концентричних або ексцентричних — залежно від вихідних умов)*. Застосування січних сфер можливе тільки за таких умов:

- *перетинаються поверхні обертання;*
- *ці поверхні мають спільну площину симетрії.*

Якщо осі поверхонь перетинаються, то використовують метод концентричних січних сфер, а якщо ні — метод ексцентричних січних сфер.

При цьому з фіксованого центра (або кількох змінних центрів) проводять сфери, які перетинають обидві поверхні по колах; перетини цих кіл дають точки лінії пере-

ретні лінії зв'язку з віссю симетрії параболоїда, а горизонтальні — на проекціях його контурних твірних. Ураховуючи це, остаточно визначасмо видимість.

Задача 8.12. Перетин кругових конуса і тора (рис. 8.26).

Тор є окремим випадком каналових поверхонь. Він утворюється обвідною до сфери сталого радіуса, що обертається навколо центра по колу заданого радіуса. На рис. 8.26 тор є поверхнею бублика. Аналіз умов показує, що доцільним є застосування методу ексцентричних січних сфер.

Центри і радіуси сфер визначаються так. Проводимо фронтально проекціювальну площину P з центра тора так, щоб вона перетнула тор та конус у межах між їхніми основами і верхньою точкою перетину контурів фігур на Π_2 . У площині P лежить коло, яке є результатом перетину тора січною сферою. Центр сфери знаходиться в точці перетину осі конуса та перпендикуляра, проведеного до P з точки перетину віссю тора, а радіус дорівнює відстані до контуру тора. Проводимо сферу і знаходимо її перетин з конусом, який на Π_2 виглядає як відрізок прямої. Перетин відрізків — зображень ліній перетину сфери конусом та тором — дає пару симетричних точок лінії перетину поверхонь.

Проводимо ще кілька таких площин і сфер, кожен раз визначаючи нові положення центрів на осі конуса. Знаходимо проекції точок лінії перетину. Сполучасмо точки та визначаємо видимість кривої перетину і поверхонь.

Самоконтроль. Проаналізуйте зображення на рис 8.27. Скількома способами можна побудувати перетин поверхонь? Який з них є найзручнішим? Розв'яжіть задачу вибраним способом.

Тепер покажемо кілька окремих випадків, коли лінія перетину кривих поверхонь другого порядку (її порядок — чотири) розпадається на дві плоскі криві другого порядку.

Це — практично значущі випадки. Трубні та зварні з'єднання є набагато більш технологічними і якісними, якщо проходять по плоским, а не просторовим кривим. Запам'ятайте їхні ознаки.

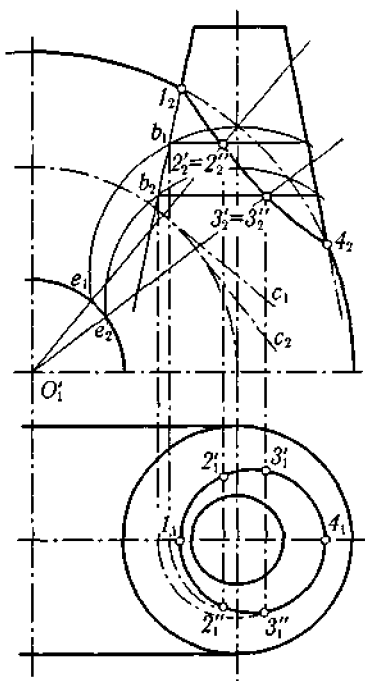


Рис. 8.26. Перетин кругових конуса і тора

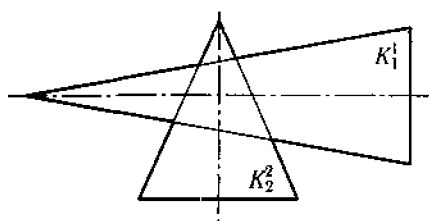


Рис. 8.27. Перетин двох кругових конусів

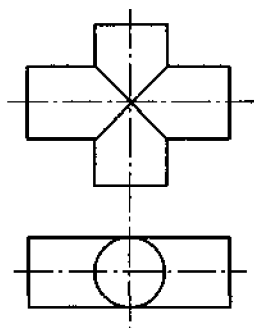


Рис. 8.28. Розпад лінії перетину циліндрів на дві плоскі криві другого порядку

Рис. 8.29. Розпад лінії перетину конусів на дві криві другого порядку

Властивість 8.2 (теорема про подвійне стикання). Якщо дві поверхні другого порядку у двох точках їх дотику мають дві спільні дотичні площини, то вони перетинаються по двох кривих другого порядку (рис. 8.28).

Укажемо на кілька наслідків цієї теореми.

Властивість 8.3 (теорема Монжа). Якщо дві поверхні другого порядку описано навколо третьої поверхні другого порядку або вписано в неї, то вони перетинаються по двох кривих другого порядку (рис. 8.29).

Самоконтроль. Порівнюючи рис. 8.27 і 8.29, перевірте своє розв'язання задачі з попереднього самоконтролю. Потім можете додати до слів царя Соломона «Мудрість знаючому життя продовжує» ще два «І полегшує»...

Властивість 8.4. Якщо дві поверхні другого порядку мають три точки дотику, то вони стикаються по кривій другого порядку.

Властивість 8.5. Якщо дві поверхні другого порядку стикаються по кривій лінії, то це крива другого порядку.

Самоконтроль. Уявіть і відобразіть умови, описані властивостями 8.4, 8.5. Наведіть кілька таких прикладів.

8.3. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Ці задачі можна поділити на три групи.

Перша група. Побудова поверхонь за заданими метричними умовами. Такі задачі багато разів розв'язуватимуться в курсі інженерної графіки, оскільки в основі деталей машин і чималої кількості архітектурних конструкцій лежать криві поверхні. Тож немає потреби зупинятись на цьому зараз.

Друга група. Визначення тих чи інших метричних характеристик кривих поверхонь. Застосовуються різні методи перетворень проєкцій; є багато аналогій з відповідними задачами для гранних поверхонь.

Третя група. Побудова розгорток для тих поверхонь, що розгортаються, та умовних (наближених) розгорток для решти поверхонь.

Задача 8.13. Побудова розгортки прямого кругового конуса (радіус основи r , довжина твірної a , рис. 8.30).

Розгортка бічної поверхні є сектором кола радіусом a з довжиною сегмента дуги $2\pi r$; отже, кут між лініями, що обмежують сектор, дорівнює $2\pi r/a$. До бічної поверхні добудовується основа, натуральні розміри якої беруться з Π_1 .

Стосовно розгортки похилого зрізаного конуса відмінність від наведеного випадку полягає в різній довжині твірних і необхідності вимірювання відстані між ними.

Задача 8.14. Розгортка похилого зрізаного конуса (рис. 8.31).

Розбиваємо основу на кілька частин, вибираючи її симетричні точки. Будь-яким способом (використано обертання навколо проєкціювальної осі, суміщеної з вершиною конуса) знаходимо їхні довжини. Виміряємо відстані між твірними. В довільному місці проводимо пряму і відкладаємо вздовж неї твірну Sd . Робимо засічки радіусами, що дорівнюють довжині твірної Se та відстані між твірною d і s . Знаходимо точку e . Продовжуємо ці дії, обходячи основу повністю. Одержані точки сполучаємо плавною лінією.

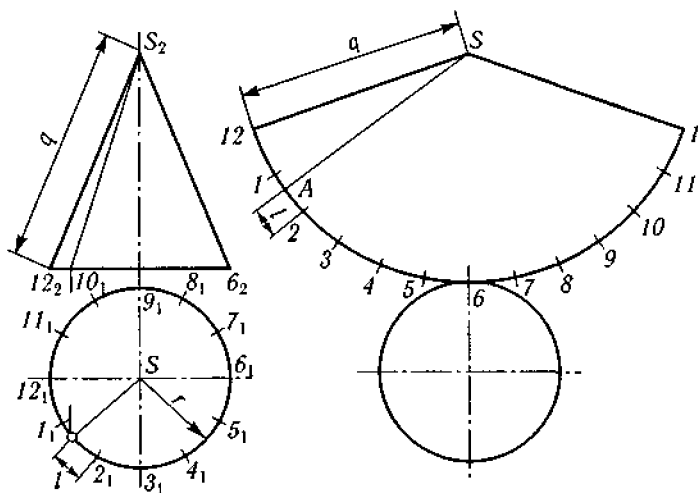
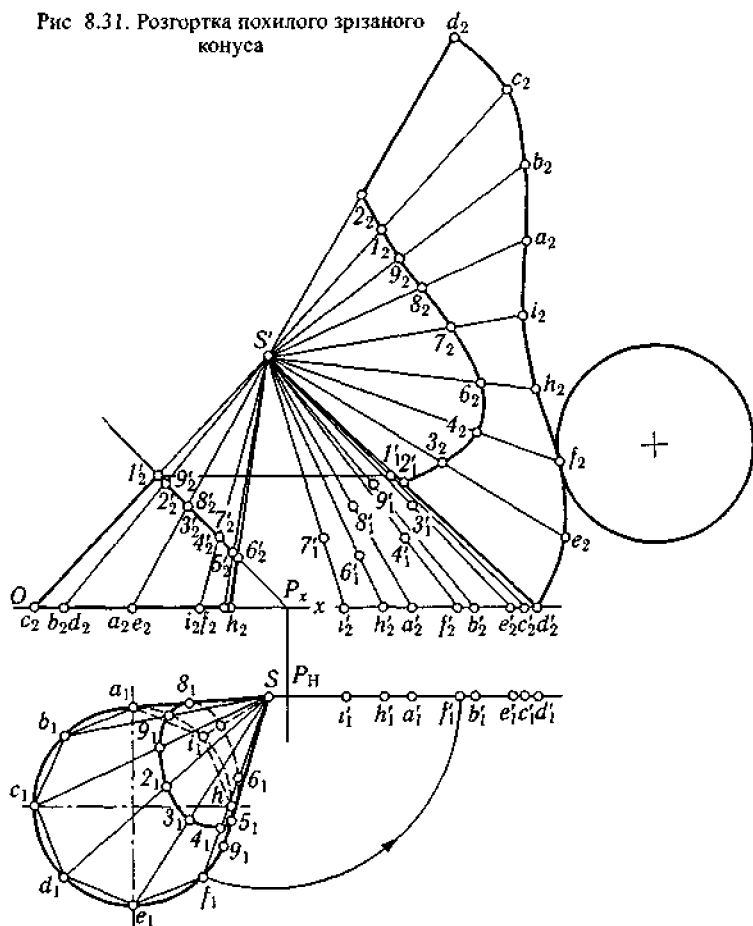


Рис. 8.30. Розгортка прямого кругового конуса

Рис 8.31. Розгортка похилого зрізаного конуса



Знаходимо т. 1...9, поділяючи твірні в тих самих пропорціях, що й на проєкціях, та сполучаємо їх. Будуємо нижню основу. В разі потреби додаємо натуральну величину перерізу.

Задача 8.15. Розгортка зрізаного прямого циліндра (рис. 8.32).

Розбиваємо основу на 12 частин. Подальші дії аналогічні побудові розгортки призми (див. розд. 6): відкладаємо відстані від однієї твірної до іншої (дорівнюють $\pi r/6$, де r — радіус кола основи), а вздовж вертикальних прямих, проведених з одержаних точок, відкладаємо довжини твірних, взяті з P_2 . Прибудовуємо нижню основу, натуральна величина якої береться з горизонтальної проєкції. Верхню основу добудовуємо зверху; її натуральну величину знаходимо за допомогою перетворення проєкцій або цей еліпс бу-

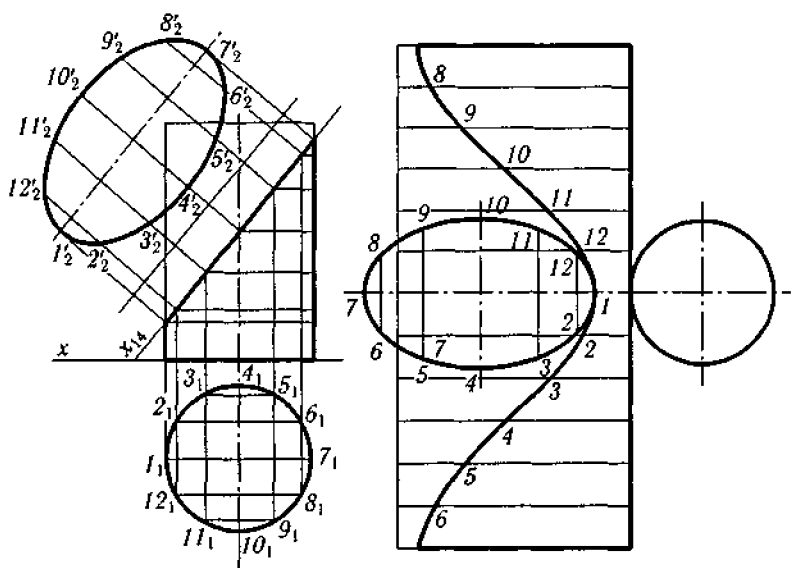


Рис. 8.32 Розгортка зрізаного прямого циліндра (розкочування)

дуємо за двома осями (див. рис. 7.8) чи вздовж перпендикулярів до великої осі відкладаємо відстані до твірних, взяті з Π_1 (ці точки сполучаємо плавною лінією). Останній спосіб тут використано.

Самоконтроль. Побудова розгортки похилого циліндра проводиться за аналогією із задачею 6.6. Задайте такий циліндр і побудуйте розгортку його бічної поверхні.

Побудуємо умовні розгортки сфери. Ця задача лежить в основі картографічних проєкцій.

Задамо на сфері сітку з меридіанів та паралелей. Замінімо кожен з кривих клітинок площиною (рис. 8.33). Сумістимо клітинки з площиною і дістанемо найпростішу з наближених розгорток. Така проєкція не буде ізометричною, конформною чи еквіреальною, тобто її точність буде невисокою. Проте просто-та компенсує ці вади, якщо будується карта малої частки сфери великого радіуса.

Спроеціюємо сферу на циліндр і розгорнемо його на площину (рис. 8.34). Ця проєкція Меркатора є конформною, а для екватора — ще й ізометричною. Постійний курс літака або корабля зобразиться прямою, нахиленою під сталим кутом до меридіанів і паралелей, що зумов-

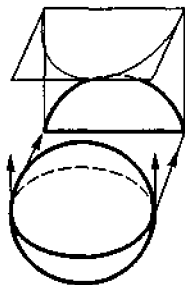


Рис. 8.33. Заміна сфери гранною поверхнею

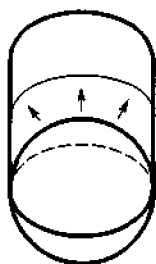


Рис. 8.34. Проекція Меркатора — сфера відображується на циліндр

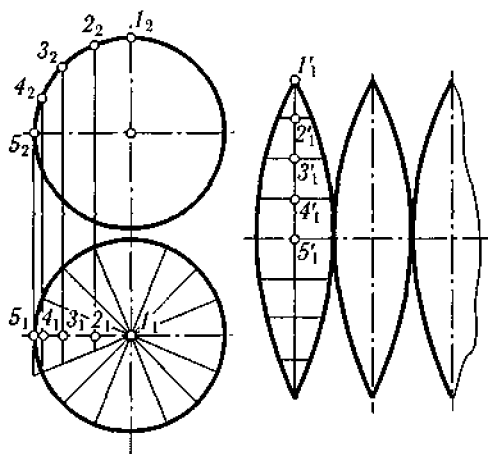
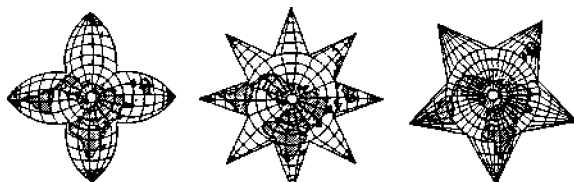
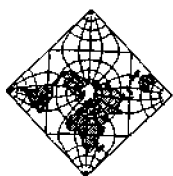


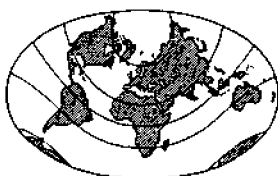
Рис. 8.35. Відображення сфери на конічні поверхні



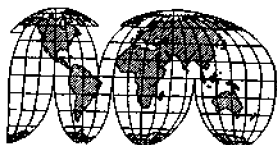
a



б



в



г



д

Рис. 8.36. Види картографічних проєкцій:

a — складені зірчасті проєкції; *б* — періодична проєкція Пірса; *в* — компенсована проєкція Бергена; *г* — надрізана проєкція Гуда; *д* — надрізана проєкція Каїля

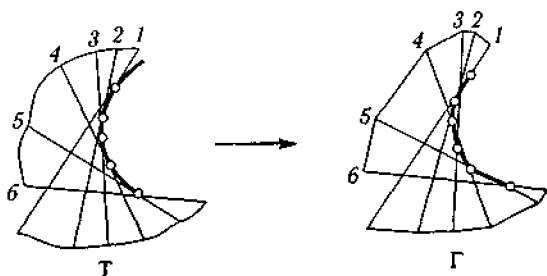


Рис. 8.37. Розгортка торса (заміна гранною поверхнею)

лює використання проєкції в навігації. Проте вона зовсім непридатна для картографування приполярних областей.

Певним компромісом є відображення окремих зон сфери на систему узгоджених конусів з їх подальшою розгорткою (рис. 8.35), що дає змогу зробити спотворення більш рівномірними.

Існує багато інших варіантів картографічних проєкцій. Найекзотичніші з них показано на рис. 8.36. Однак усі вони свідчать, що побудова ізометричних проєкцій без розривів є, на жаль, теоретично неможливою.

Застосування наближених методів іноді є доцільним при розгортанні таких поверхонь, як торси.

Задача 8.16. *Наближена розгортка торса* (рис. 8.37).

Будемо будувати розгортку частини торса між напрямною і горизонтальною площиною, обмеживши її з боків двома довільними твірними (див. рис. 8.37).

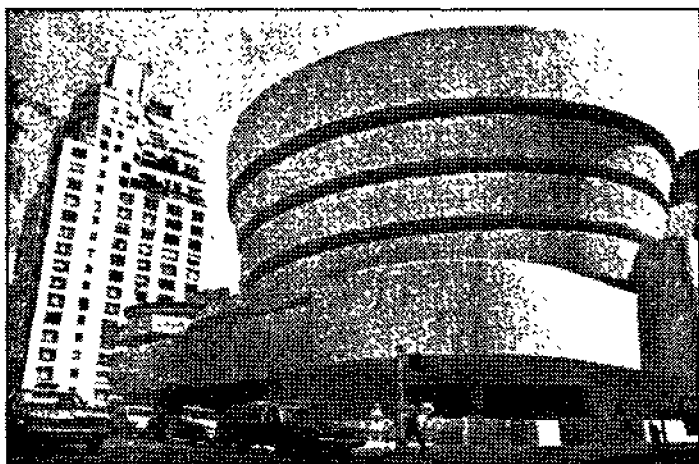


Рис. 8.38. Музей Соломона Р. Гугенхейма (архітектор Ф. Л. Райт, Нью-Йорк, 1956—1959 рр.)

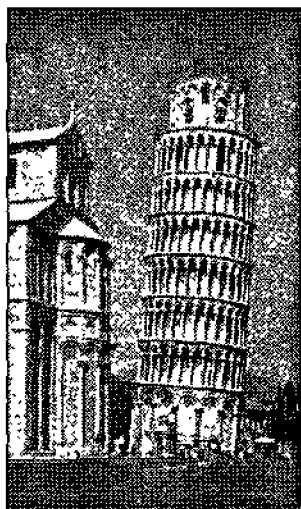
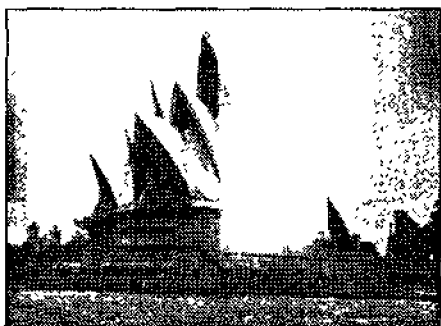


Рис. 8.39. Дзвіниця собору (архітектори Боннано Пізано і Вільгельм фон Інсбрук, Піза, 1174 р.)

Рис. 8.40. Опера в Сідней (архітектор Йорг Утзон, Австралія, 1973 р.)



Замінімо напрямну просторовою ламаною лінією, а сам торс — сукупністю трикутних граней. Далі кожна з граней суміщується з однією довільною площиною.

Самоконтроль. Виконайте сумшення самостійно і доведіть задачу до кінця.

І на завершення наведемо кілька прикладів, коли саме криві поверхні є основними формотвірними засобами архітекторів (рис. 8.38—8.40).

ЧАСТИНА

ТРЕТЯ СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Тут розглядатимуться проєкційні системи, які хоча й забезпечують зворотність креслення і є універсальними, проте на практиці використовуються в тих чи інших обмежених цілях. Зокрема, аксонометрія найчастіше застосовується в машинобудуванні для підвищення наочності креслень; перспектива — в тих самих цілях в архітектурі. Побудова тіней робить зображення ще природнішими. Нарешті, проєкції з числовими позначками є зручними для розв'язання задач вертикального планування.

9. АКСОНОМЕТРІЯ

Нагадаємо висновки, зроблені в розд. 3: аксонометрія є окремим випадком методу двох зображень; система декартових координат простору відображається паралельно на довільну площину; забезпечується зворотність; наочність більша, ніж для епіюра

Можна; розв'язання метричних задач утруднене.

Аксонометрія застосовується там, де наочність конче потрібна, частіше в машинобудівних, ніж у будівельних кресленнях.

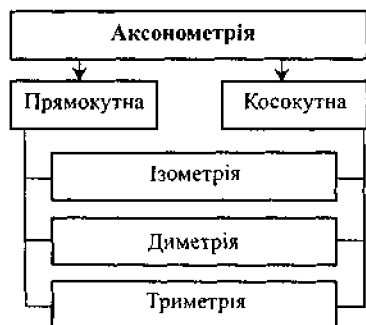
9.1. ТЕОРІЯ

Відкладемо вздовж осей координат простору одиничні відрізки і сполучимо одержані точки. Побудуємо аксонометричні зображення цього тетраедра. Оскільки можуть варіюватися напрямки проєкціювання та розташування площини зображення, дістанемо нескінченну кількість варіантів зображень. Ці міркування підсумовує *основна теорема аксонометрії* (або теорема Польке—Шварца, за прізвищами вчених, які сформулювали її незалежно один від одного в XIX ст.).

Властивість 9.1. *Будь-який повний чотирикутник є аксонометричним зображенням довільного тетраедра.*

Спотворення координатних відрізків можуть бути різними або однаковими, відповідно до чого розрізняють:

- *ізометрію* (відрізки спотворені однаково);
- *диметрію* (два відрізки спотворені однаково, третій — по-іншому);
- *триметрію* (всі відрізки спотворені по-різному).



Зміни характеризуються *коефіцієнтами спотворення* u, v, w — відношеннями довжин координатних відрізків e_x, e_y, e_z в аксонометрії до їхніх натуральних довжин. Залежно від напрямку проєкціювання відносно площини зображення розрізняють *прямокутну* і *косокутну* аксонометрії. Підсумкову класифікацію аксонометрій показано на рис. 9.1.

Дійсною є *основна формула аксонометрії*, яка пов'язує коефі-

Рис. 9.1. Класифікація аксонометрій

цієнти спотворення з кутом нахилу φ напряду проєкціювання до площини зображень:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Підкреслимо, що вона *стосується тільки координатних або паралельних їм відрізків*; усі інші матимуть відмінні від u , v , w коефіцієнти спотворення.

Досвід виконання креслень свідчить, що різні аксонометрії мають різну наочність і будуються легше або складніше. Тому стандарти регламентують використання кількох найбільш удалих аксонометрій. Розглянемо *прямокутні ізометрію та диметрію*, а також *косокутні ізометрію і диметрію*, вибрані з їх числа.

Прямокутна ізометрія

Для прямокутної аксонометрії маємо

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2,$$

звідки неважко підрахувати, що для ізометрії, тобто при $u = v = w$, коефіцієнти спотворення дорівнюватимуть $(2/3)^{1/2} \approx 0,82$, тобто довжини паралельних осям відрізків мають зменшуватися в 1,22 раза відносно натуральних.

Розташування осей показано на рис. 9.2 (визначення кутів можна замінити, відкладаючи ліворуч та праворуч від 0 по 5 і вниз по 3 одиниці). Практично при побудові використовують *зведені коефіцієнти*, відкладаючи вздовж осей натуральні довжини відрізків.

Прямокутна диметрія

При $u = 2v = w$ маємо $u = w \approx 0,94$, $v \approx 0,47$. Використовують зведені коефіцієнти 1,1 та 0,5; отже, спотворення розмірів менше, ніж в ізометрії (не 22, а 6 %). При побудові осі x ліворуч від O відкладають 8 одиниць і вниз 1 одиницю; осі y — праворуч 7 одиниць та вниз 8 одиниць (рис. 9.3). Є й інші способи відтворення розташування осей.

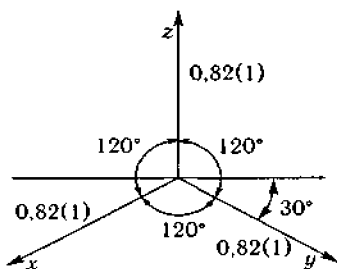


Рис. 9.2. Прямокутна ізометрія — розташування осей, коефіцієнти

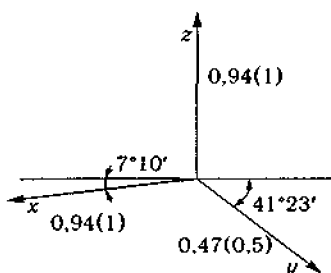


Рис. 9.3. Прямокутна диметрія — розташування осей, коефіцієнти

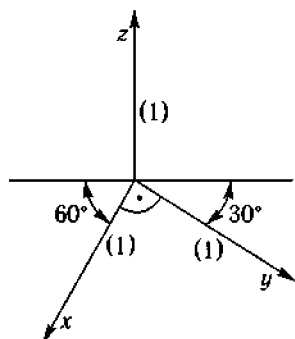


Рис. 9.4. Косокутна ізометрія — розташування осей, коефіцієнти

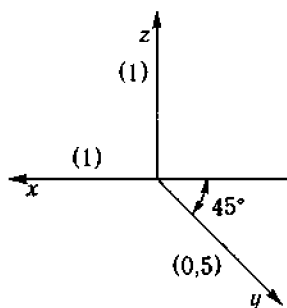


Рис. 9.5. Косокутна фронтальна диметрія — розташування осей, коефіцієнти

Косокутна ізометрія

Вона надає можливості з допустимою втратою наочності зобразити в натуральну величину кут між двома координатними осями. Це, звичайно, значно спрощує побудови у відповідній площині.

Для косокутної ізометрії (інші назви — військова або zenітна перспектива) розташування осей і зведені коефіцієнти показано на рис. 9.4. Зазначимо, що кути осей x та y відносно горизонтальної лінії можуть бути іншими, наприклад по 45° , однак прямий кут між ними має зберігатися. Застосування військової перспективи — там, де треба швидко виконати рисунок — є досить обмеженим через її невисоку наочність.

Для косокутної фронтальної диметрії розташування осей і зведені коефіцієнти показано на рис. 9.5. Збереження натуральної величини кута між осями x та z , що спрощує перехід від фронтальної проєкції до аксонометричного зображення, є її перевагою. Це важливо, оскільки найбільш інформативний, головний вигляд деталі розміщують саме на ній.

Самоконтроль. Нехай в косокутній триметрії коефіцієнти спотворень $u = 1$, $v = 0,2$, $w = 0,5$. Під яким кутом φ проводилося проєкціювання на площину зображення?

9.2. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Як і на епюрі Монжа, для забезпечення зворотності потрібні два зображення — аксонометрія та одна з вторинних проєкцій на фронтальну, горизонтальну чи профільну площини. Між цими зображеннями існують лінії зв'язку, паралельні відповідним координатним осям (рис. 9.6).

Нехай треба побудувати т. A з координатами $(10, 10, 10)$ в косокутній диметрії з коефіцієнтами спотворення $1, 1$ і $0,5$. Будемо позначати аксонометричне зображення літерами без індексів, а вторинні проекції — літерами з цифрами знизу. Починаємо з визначення вторинної проекції.

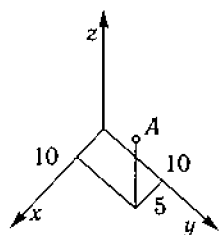


Рис. 9.6. Побудова аксонометрії точки

Відкладемо вздовж осі x відрізок завдовжки 10 одиниць, уздовж осі y — 10 одиниць; дістанемо горизонтальну вторинну проекцію. Від неї паралельно осі z відкладемо відрізок завдовжки 5 одиниць й одержимо аксонометрію т. A .

Аксонометрія може бути здобута за двома вторинними проекціями (рис. 9.7, *а*). Аксонометрія площини визначається двома прямими, відріком або трикутником слідів (рис. 9.7, *б*). Для побудови аксонометрії поверхні слід спочатку побудувати її вторинну проекцію (рис. 9.7, *в*).

Порівняємо трудомісткість побудов і наочність зображень у прямокутних ізометрії та диметрії.

Спочатку побудуємо багатогранник, форму і розміри якого визначено на епюрі Монжа (рис. 9.8, *а*).

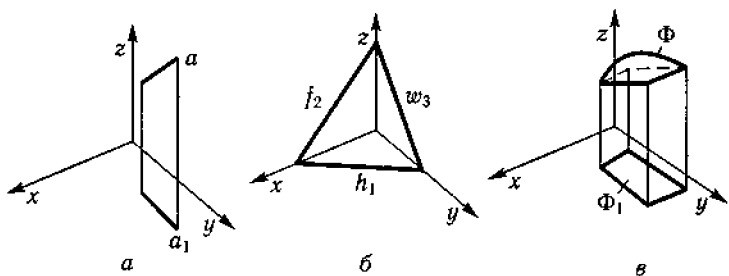


Рис. 9.7. Приклади побудови аксонометрії прямої, площини, поверхні

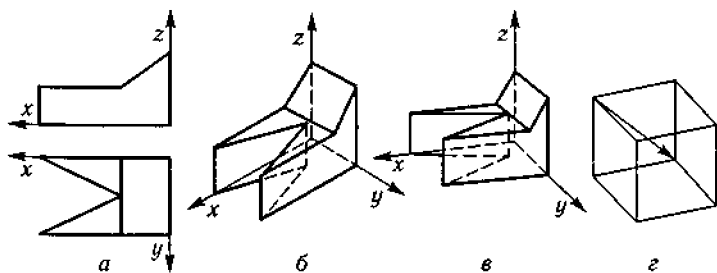


Рис. 9.8. Побудова багатогранника у прямокутних ізометрії та диметрії

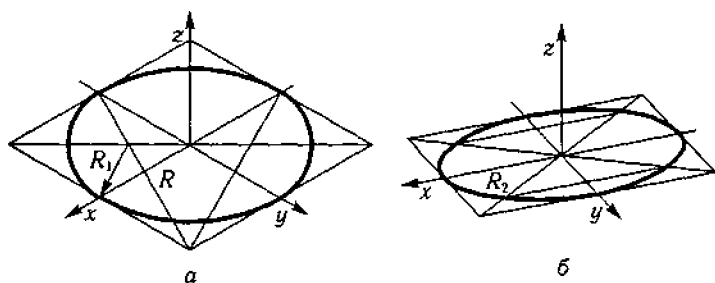


Рис. 9.9. Побудова горизонтального кола у прямокутних ізометрії та диметрії

Починаємо з визначення горизонтальних вторинних проєкцій (ізометрія — рис. 9.8, б та диметрія — рис. 9.8, в). Від одержаних точок відкладаємо на прямих, паралельних осі z , аплікати і дістаємо точки верхніх граней. Сполучимо всі точки. Визначаємо видимість, виходячи зі стандартного для аксонометрії напрямку зору по діагоналі куба з верхньої до нижньої вершини (рис. 9.8, з).

Робимо висновок, що ізометрія будується легше, але є менш наочною. Останнє стосується також багатьох інших випадків зображення гранних поверхонь.

Тепер порівняємо побудову горизонтального кола радіусом R .

В аксонометрії коло зображується як еліпс, оскільки аксонометрія є афінним перетворенням. У прямокутній ізометрії цей еліпс наближено замінюється чотирма дугами кіл, центри і радіуси яких визначаються так.

Із центра кола — початку координат — відкладаємо вздовж осей x та y його радіуси. Будуємо ромб, проводячи через одержані точки лінії, паралельні осям. Проводимо діагоналі, визначаємо центри, радіуси і точки стику дуг так, як показано на рис. 9.9, а. Провівши дугу, дістанемо еліпс. Кола у фронтальній та профільній площинах будуються так само і такими самими будуть їхні розміри. Відмінною буде лише орієнтація.

Для побудови еліпса у прямокутній диметрії доцільно застосовувати спосіб восьми точок. Відкладаємо вздовж осей радіуси кола та будуємо паралелограм (зведений коефіцієнт уздовж осі y дорівнює 0,5). Проводимо діагоналі. Чотири точки еліпса відповідають точкам перетину координатних осей зі сторонами паралелограма. Ще чотири є точками перетину прямих, що сполучають точки, відкладені на відстанях $1/8$ довжин сторін від вершин, із точками, відкладеними на відстанях $1/4$ довжин суміжних сторін від вершин, з діагоналями паралелограма (рис. 9.9, б). Сполучивши точки, дістанемо еліпс. Зазначимо, що еліпс у профільній площині буде відрізнятися орієнтацією, а у фронтальній — ще й розмірами.

Як бачимо, у прямокутній аксонометрії велика вісь еліпса є перпендикулярною до осі координат z (і цим користуються для визначення додаткових точок, про що йдеться нижче); в косокутній аксонометрії ця властивість відсутня.

Самоконтроль. Побудуйте зображення такого самого кола при його розташуванні у фронтальній площині.

Отже, побудова кола в ізометрії є легшою, проте спосіб восьми точок більш універсальний і може застосовуватись для будь-якого виду аксонометрії. У горизонтальній та профільній площинах більш наочними є ізометричні зображення, у фронтальній — диметричні.

Наведемо характеристики спотворення кола.

Для прямокутної ізометрії велика вісь еліпса становить 1,22 діаметра вихідного кола, а мала — 0,7 діаметра.

У прямокутній диметрії для горизонтального і профільного еліпсів ці величини становлять 1,06 та 0,33 відповідно, а для фронтального еліпса — 1,06 і 0,95.

Наголосимо, що це стосується кіл (й еліпсів), паралельних площинам проєкцій; при загальному розташуванні їх спотворення будуть іншими.

Наведені характеристики можна використати для визначення додаткових чотирьох точок, що зробить побудову еліпса більш точною.

Самоконтроль. Як виглядатимуть аксонометричні зображення сфери у прямокутних ізометрії та диметрії? Чи будуть вони різними? Чи впливає на це розташування вихідної сфери? Побудуйте зображення сфери діаметром 20 одиниць у цих проєкційних системах.

9.3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Спочатку — про метричні задачі.

Якщо треба визначити довжину відрізка, непаралельного осям x , y , z , або кут між прямими чи площинами загального положення, чи натуральну величину відтинку, то доцільно перейти до епюра Монжа і розв'язати задачу одним із способів, розглянутих у розд. 4 та 5. У деяких окремих випадках (зокрема, для косокутної аксонометрії) відображення на одну із вторинних проєкцій є конформним; отже, можливим є розв'язання задачі на відшукування натуральних величин кутів та відсіків переведенням фігур у положення, паралельні таким проєкціям.

У подальшому розглядатимуться тільки позиційні задачі. Відповідні побудови часто використовуються в інженерній графіці в кресленнях деталей або вузлів.

Задача 9.1. *Перетин прямої площиною* (рис. 9.10).

За цих умов (рис. 9.10) використовується спосіб допоміжних січних площин. Проводимо вертикальну площину через пряму і

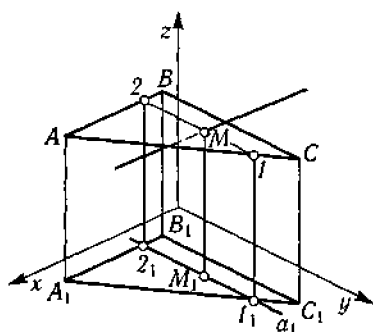


Рис. 9.10. Перетин прямої площинною

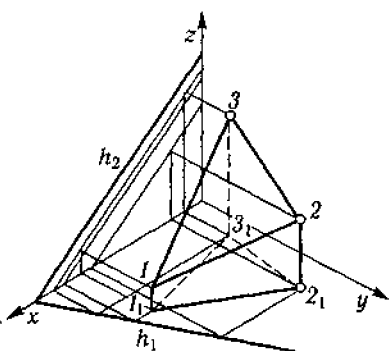


Рис. 9.11. Перетин вертикальної призми площинною

фіксуємо точку перетину її сліду на (ABC) й a ; це i є аксонометрична точка перетину площини прямою. Визначаємо видимість для аксонометричного зображення. Повна аналогія з розв'язанням основної позиційної задачі на епюрі Монжа в розд. 4: ті, хто не навчився досі, мають унікальну можливість розібратися в цьому.

Задача 9.2. Перетин вертикальної призми площинною (рис. 9.11).

Оскільки призма є горизонтально проєкціовальною, проєкція лінії перетину збігається з зображенням основи. Проводимо через

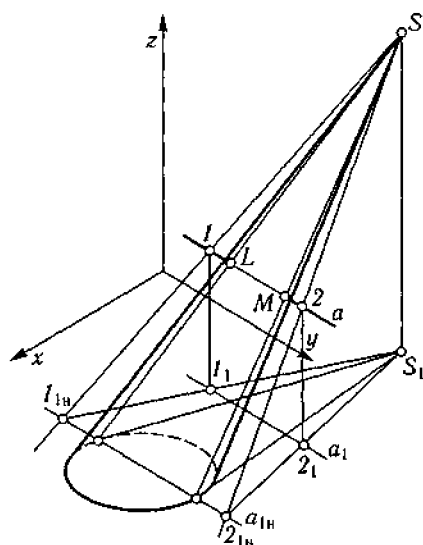


Рис. 9.12. Перетин кривої поверхні прямою лінією (допоміжне проєкціювання)

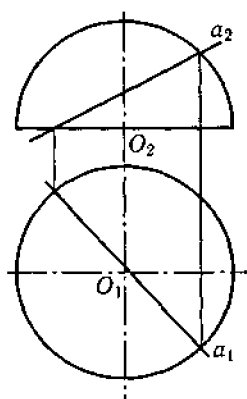


Рис. 9.13. Перетин півсфери прямою лінією

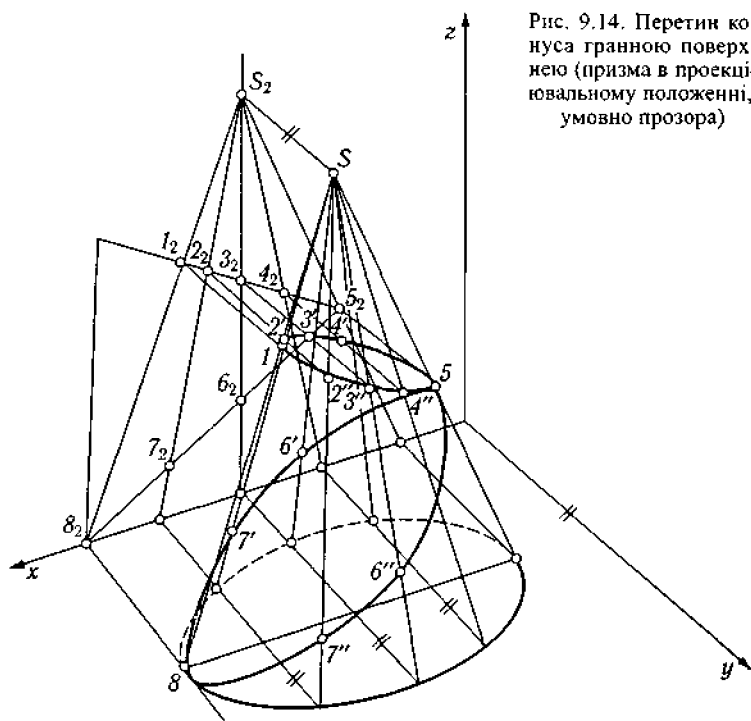


Рис. 9.14. Перетин конуса гранною поверхнею (призма в проєкційовальному положенні, умовно прозора)

вершини основи фронтальні прямі (їхні аксонометрії — паралельні фронтальному сліду) і фіксуємо точки перетину ребрами призми. Сполучаємо одержані точки та визначаємо видимість. Умови і розв'язання подібні до задачі 6.2.

Задача 9.3. *Визначення точок перетину конуса прямою* (рис. 9.12).

Застосуємо проєкціювання на площину основи конуса. Фіксуємо аксонометричні та вторинні зображення двох довільних точок прямої a і, проєкціюючи їх із вершини S на горизонтальну площину, визначаємо нову горизонтальну проєкцію a_{1H} . Знаходимо точки її перетину основою конуса і, проводячи твірні до перетину з a , визначаємо точки перетину конуса прямою. Визначаємо видимість (див. розд. 6, 8).

При побудові точок перетину прямих іншими кривими чи гранними поверхнями (не конусами, циліндрами, призмами і пірамідами) слід застосовувати метод допоміжних січних площин, доцільність якого часто залежить від правильного вибору виду аксонометрії.

Самоконтроль. Самостійно виберіть вид аксонометрії і зобразіть пряму та півсферу за умовами рис. 9.13. Побудуйте точки їх перетину, застосувавши спосіб допоміжних січних площин, і визначте видимість

Задача 9.4. *Перетин конуса призмою* (рис. 9.14).

Призма є фронтально проєкціовальною. Отже, побудови зводяться до фіксації характерних та проміжних точок на фронтальній вторинній проєкції, проведення відповідних твірних на ній і в аксонометрії та передачі точок із вторинної проєкції на аксонометричне зображення за допомогою ліній зв'язку (точки лежать на їх перетині твірними).

При визначенні видимості істотним є те, що вона не збігається з видимістю на епюрі Монжа (видимою є не половина, а більша частина конуса).

Отже, слід зафіксувати контурні твірні, побудувати їхні вторинні проєкції, знайти точки перетину призмою і повернути їх на аксонометричне зображення.

10. ПЕРСПЕКТИВА

Перспективні зображення — потужний інструмент архітектора, що використовується для пошуку об'ємно-планувальних рішень та оформлення проекту. Унікальними можливостями перспективи, особливо після створення програм автоматизації її побудови, є зображення ще не існуючих об'єктів з реальних точок зору, фотограмметрія, проектування інтер'єрів. Для ілюстрації скористуємось фотографіями історичних і сучасних споруд міста Києва, оскільки фотографічне зображення теж будується за законами перспективи.

10.1. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ

За допомогою перспективи:

- оцінюється, як впишеться споруда в рельєф місцевості й існуючу забудову (рис. 10.1);
- аналізуються естетичні якості споруд (рис. 10.2, 10.3);
- проектуються вишукані малі архітектурні форми та вибирається місце для скульптур (рис. 10.4—10.7);
- реконструюються зруйновані споруди (рис. 10.8);

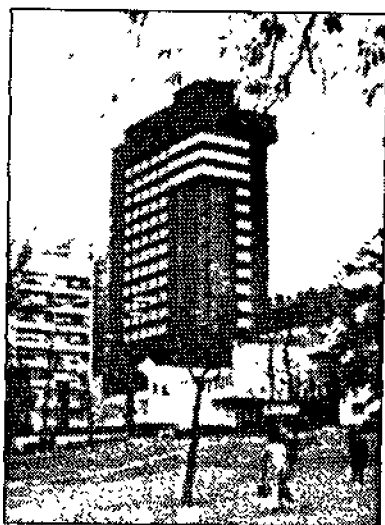


Рис. 10.1. Готель «Експрес» і Центральні залізничні каси



Рис. 10.2. «Замок Річарда» на Андріївському узвозі (з ним пов'язано багато легенд... Невідомо, коли і ким збудований...)

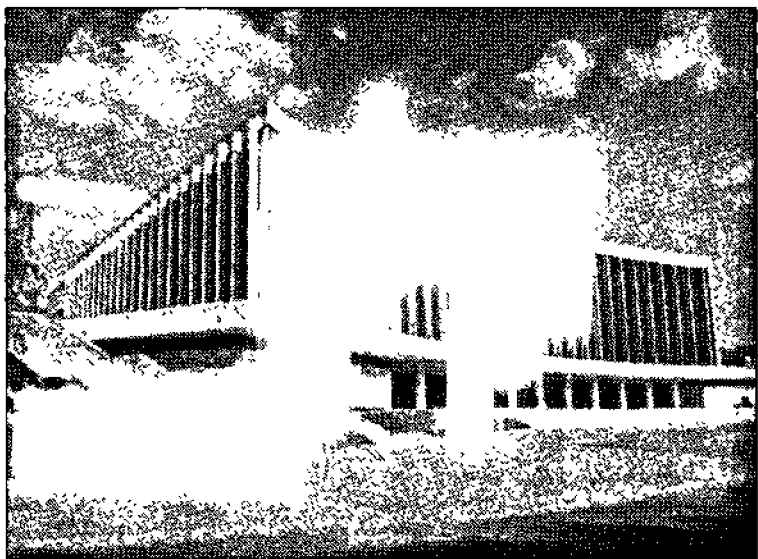


Рис. 10.3. Палац «Україна» (архітектори Є. А. Маринченко, П. М. Жилицький, І. Г. Вайнер, 1970 р., вигляд до реконструкції)



Рис. 10.4. Пам'ятник Б. Хмельницькому (скульптор М. О. Микешин, архітектор В. М. Ніколаєв, 1888 р.)



Рис. 10.5. Деталь барельєфа



Рис. 10.6. Пам'ятник Г. Сковороді (скульптор І. П. Кавалерідзе, архітектор В. Г. Гнездилов, 1976 р.)



Рис. 10.7. Один із фонтанів у старому парку (над Дніпром восени...)



Рис. 10.8. Михайлівський Золотоверхий собор, XII ст. (собор, закладений в 1108 р. Святополком — онуком Ярослава Мудрого, став, можливо, першим храмом Київської Русі, куполи якого були позолочені. Про це свідчить його



Рис. 10.9. Інтер'єр Софійського собору (мозаїка Марія Оранта XI ст.)



Рис. 10.10. Костьол святого Миколая, (студент (!) С. В. Валовський, під керівництвом архітектора В. В. Городецького, 1899—1909 рр.)

• оцінюється і «відчувається» інтер'єр. Чи не надихає вас «візантизм і слов'янство» Софійського собору (рис. 10.9), чи чуєте ви восени Бранденбурзький концерт у залі органної та камерної музики (рис. 10.10)?

Самоконтроль. Спробуйте дати обґрунтовану оцінку будівлі (на рис. 10.1) з точки зору стилістичної єдності та співвідношення з місцевістю — поліпшує чи погіршує вона ситуацію. Користуйтеся власним смаком. А може, хтось застосує давньокитайську методику фен-шуй?

Погляньте на наведені споруди в натурі приблизно з тих самих точок зору. Подумайте, як і завдяки чому виникли спотворення в перспективі. Порівняйте враження від фотографій з «живим» враженням від споруд.

назва. Собор був неодноразово зруйнований і відбудований. Останнє руйнування сталося в 30-ті роки XX ст. під час реконструкції історичної частини міста. За проектом передбачалося зведення на місці собору симетричної до сучасного будинку Міністерства закордонних справ споруди та пам'ятника В. І. Леніну (завишки 70 м) між ними. Війна завадила реалізації цих планів. Остання відбудова сталася в 1998 р.)

10.2. ПЕРСПЕКТИВА НА ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

У розд. 3 зазначалося, що перспектива є окремим випадком методу двох зображень; отже, вона має властивість оборотності. Апарат і назву елементів перспективи відображено на рис. 3.6 Реконструкцією апарату та визначенням метричних характеристик за перспективними зображеннями займається фотограмметрія; такі задачі зустрічаються при розшифруванні аерофотозйомки і реставрації втрачених споруд та пам'ятників за їх зарисовками або кресленнями (див. рис. 10.8). Існує багато видів перспективи (лінійна, нелінійна, обернена; на вертикальній і похилій площинах, поверхні) та способів її побудови.

Найчастіше застосовується (і найпростіше будується) перспектива на вертикальній площині

Перспектива прямих та точок

Розглянемо побудови на наочному зображенні (рис. 10.11). Перспективою т. A є точка перетину променя, що сполучає т. A з точкою зору S і картиною A_K . Для її побудови сполучимо проєкцію т. S на предметній площині S_1 із горизонтальною проєкцією т. A_1 і з точки перетину променя S_1A_1 картиною проведемо вертикальну пряму до перетину променем SA . Це і буде т. A_K . Зображення прямої a дістанемо, виконавши побудови для т. B . Звернемо увагу, що A_KB_K є перспективою горизонтальної проєкції прямої $A_1K_1B_1K_1$.

Перспективні зображення прямих окремого положення відшукуються значно легше, і ця обставина використовується в побудовах. Слід знати, що *точки збігу*, тобто перспективи невластивих точок, розташовуються:

- для горизонтальних прямих — на лінії горизонту (рис. 10.12, а);

а якщо вони розташовуються під кутом 45° до картини, то — в дистанційних точках (рис. 10.12, б);

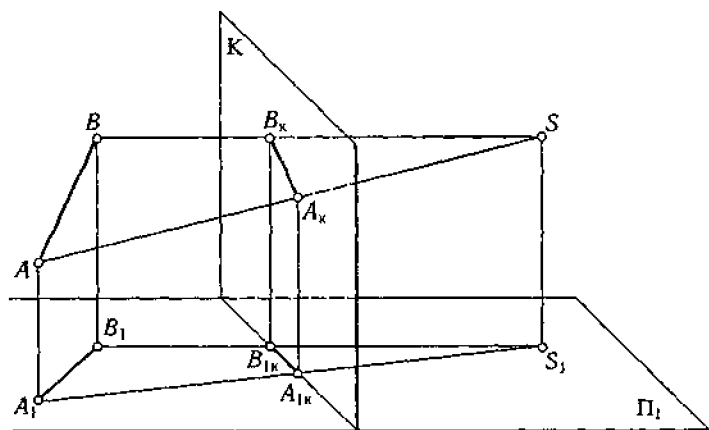


Рис. 10.11. Перспектива точок прямої

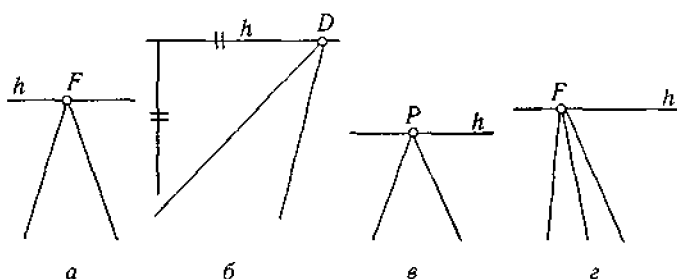


Рис. 10.12. Розташування точок збігу прямих окремого положення

• для *прямих, перпендикулярних до картини*, — в головній т. P картинної площини (рис. 10.12, в);

• для *паралельних прямих* — у точці, що є точкою перетину проєкціовального променя, проведеного з точки зору паралельно заданим прямим, картиною (рис. 10.12, г).

Крім того:

• *прямі, вторинні проєкції яких проходять через горизонтальну проєкцію точки зору*, зображаються як вертикальні прямі (рис. 10.13, а);

• *прямі, паралельні картині*, не мають власних картинних слідів і зображаються паралельно самим собі (рис. 10.13, б).

Відтак, визначаючи довільну точку як точку перетину прямих окремого положення, використовуємо ці розташування для побудови її перспективи.

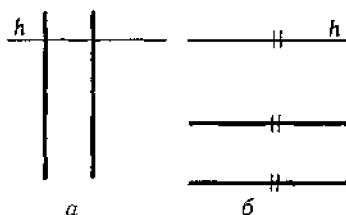


Рис. 10.13. Зображення прямих окремого положення

Перспектива плоских фігур

Перспектива характеризується певними обмеженнями взаємного розташування об'єкта, точки зору і картинної площини, зумовленими вимогою реалістичності зображення. Розглянемо їх на прикладі побудови перспективи горизонтального прямокутника.

Спочатку визначасмо апарат (рис. 10.14):

1. Проводимо головний промінь p так, щоб він не був паралельним сторонам прямокутника.

2. Картинна площина K перпендикулярна до нього; можна провести її слід через вершину прямокутника A .

3. Точку зору S на p визначимо з умови, що кут BSC має знаходитися в межах $20\text{—}40^\circ$, а промінь p — в середній третині цього

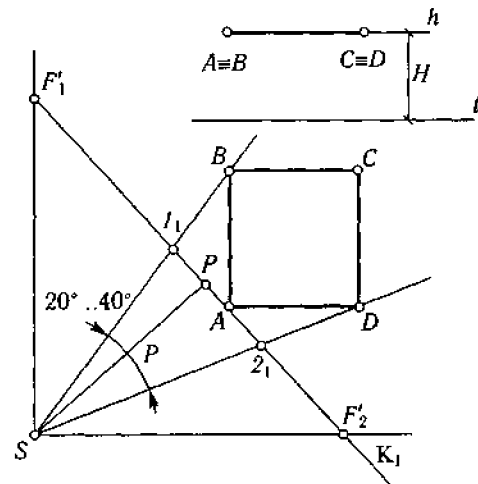


Рис. 10.14. Визначення апарату перспективи

кута; можливо, доведеться змінити розташування p та K і кілька разів повторити спроби.

4. Фіксуємо точки перетину BS і DS з K , тобто t_1 та 2_1 .

5. Знаходимо точки збігу AB і AD , тобто t_3 та F_2 .

6. Задасмо висоту точки зору — тут довільно, а в реальному проектуванні — на рівні ока людини (1,6—1,7 м) або (рідше) «на висоті пташиного польоту».

Тепер будуємо перспективу (рис. 10.15):

1. Проводимо горизонтальну пряму t — основу картини — і фіксуємо на ній $t_3 = p \cap K$. Відкладаємо на прямій t A , 1 , 2 , а також F_1 та F_2 .

2. Проводимо пряму h — лінію горизонту — на відстані H вище t . Визначаємо на ній точки збігу F_1 і F_2 .

3. Будуємо прямі AF_1 та AF_2 ; перспективи t_1 і t_2 будуть розташовуватись у точках їх перетину вертикальними лініями, проведеними з t_1 та 2_2 відповідно.

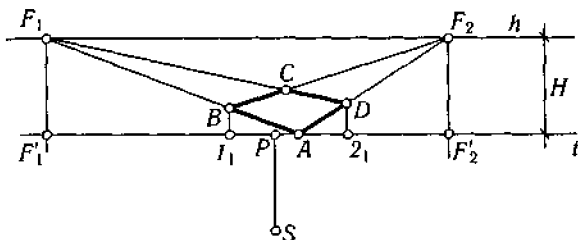


Рис. 10.15. Побудова перспективи прямокутника (спосіб архітекторів)

4. Перспективу т. D знаходимо в точці перетину прямих BF_2 і CF_1 .

Використаний спосіб побудови, відомий ще за часів Відродження, називається *способом архітекторів*.

Самоконтроль. Покажіть і назвіть усі прямі окремого положення на рис. 10.14 та 10.15, які використовувались при побудові

Звернемо увагу на те, що розміри прямокутника зменшилися порівняно з натуральними, оскільки фігура розташовується за картиною; при розташуванні *перед картиною* розміри прямокутника збільшаться; а при розташуванні в *картинній площині* — не зміняться.

Перспектива кола

Найпростіше перспективу кола побудувати, скориставшись способом восьми точок.

Для умов на рис. 10.16, а будуюмо квадрат, в який впишемо фігуру. На відміну від рис. 10.15 коло розташуємо перед картиною. Вершини квадрата фіксуємо за допомогою перетинів прямих його сторін картинною площиною (рис. 10.16, б). Звичайно, можливим є також застосування фіксації, показаної на рис. 10.15. Тепер, оскільки в перспективі половини сторін квадрата не зображуються рівними відрізками, покажемо два способи їх поділу.

Проведемо діагоналі квадрата і сполучимо точку їх перетину з точками збігу. Точки перетину цих прямих із сторонами дадуть точки, що лежать на серединах сторін (рис. 10.17, а). Застосуємо цей спосіб для відшукування чотирьох точок перспективи кола (рис. 10.17, б).

Другий спосіб ґрунтується на застосуванні теореми Фалеса (див. розд. 4). Проведемо з кінця відрізка довільну пряму, вздовж

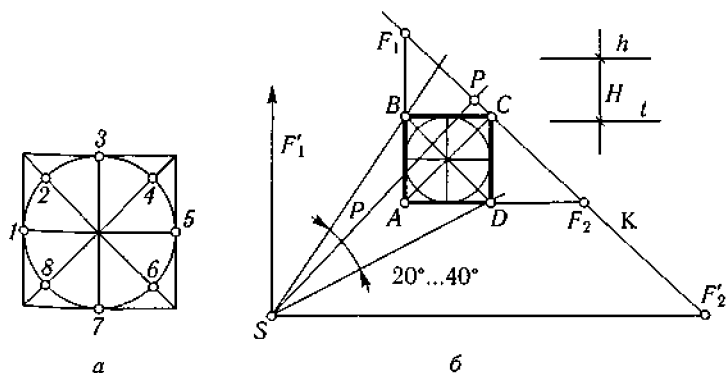


Рис. 10.16. Побудова перспективи квадрата, в який буде вписано коло

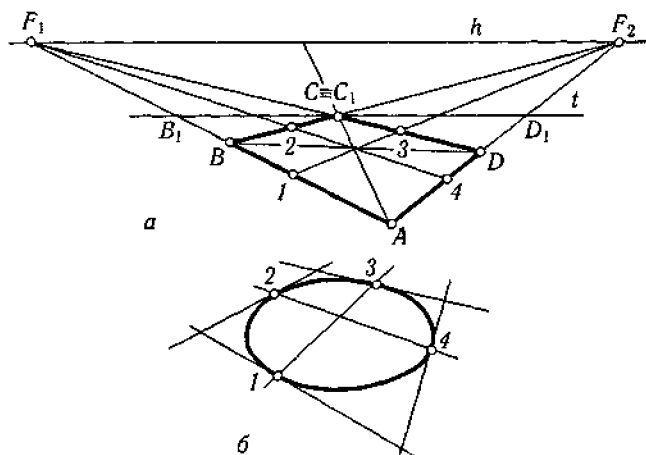


Рис. 10.17. Перший спосіб поділу сторін і побудови кола

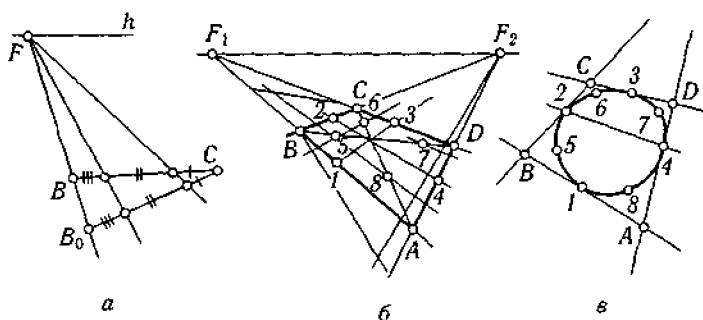


Рис. 10.18. Другий спосіб поділу сторін і побудови кола

якої відкладемо кілька відрізків, довжини яких знаходяться у потрібному відношенні. Сполучимо кінець останнього з них з кінцем вихідного та знайдемо точку збігу цієї прямої. Паралельні прямі, які проходять через кінці відкладених відрізків, матимуть ту саму точку збігу. Вони ділитимуть вихідний відрізок у тій самій пропорції, що й допоміжний (рис. 10.18, а). Поділимо таким чином сторони у пропорції $1/4$ і $1/8$ (рис. 10.18, б) й одержимо ще чотири точки. Сполучивши всі вісім точок, дістанемо еліпс — перспективне зображення кола (рис. 18, в).

Залежно від розташування точки зору коло буде зображатись різними фігурами: *еліпсом*, якщо вона знаходиться поза колом (див. рис. 10.18); *параболою*, якщо належить цій кривій, *гіперболою*, якщо знаходиться всередині кола. Такі варіанти виникають при побудові перспектив інтер'єрів, діорам тощо.

Перспектива багатогранника

При визначенні апарату слід потурбуватись про те, щоб лінії, проведені з точок збігу до вершин верхньої і нижньої основ, утворювали між собою кут у межах $20...40^\circ$ — це забезпечить реалістичність зображення. Далі зручно взяти одне з вертикальних ребер в картинній площині — тоді його висота буде натуральною. Починати побудову слід з нижньої основи. За таких зауважень побудова перспективи паралелепіпеда на рис. 10.19 є цілком зрозумілою.

Розглянемо приклад, наближений до практики проектування.

Задача 10.1. Перспектива одноповерхового будинку (рис. 10.20).

Спрощене зображення будинку, тим не менше, відображає його основні конструкції — цоколь, стіни, покрівлю, а також вікна, двері і ганок. Через відносно великі розміри помістимо перспективу будинку за картинною площиною.

Хід побудови збігається з розглянутим вище, тому звернемо увагу лише на деякі нюанси.

1. На плані (горизонтальній проекції) фіксуємо тільки вершини; розташування вікна, дверей і скатів покрівлі доцільно визначати за допомогою пропорційного поділу.

2. Оскільки жодне з вертикальних ребер не знаходиться в картині, для визначення висот використовуємо вертикальну лінію картини, що проходить через т. 2. Висотні позначки відкладаємо вздовж неї, а потім передаємо їх на перспективу проведенням паралельних прямих у відповідних площинах.

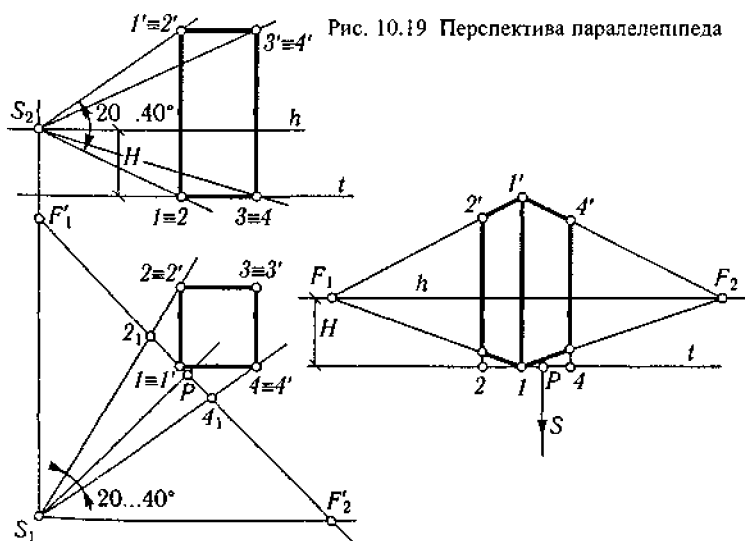


Рис. 10.19 Перспектива паралелепіпеда

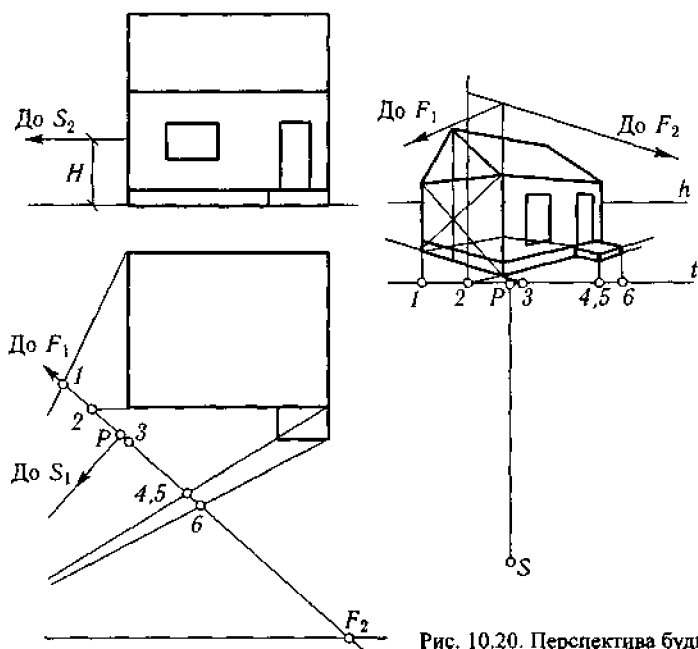


Рис. 10.20. Перспектива будинку

3. Доцільна послідовність побудови — план, потім стіни, покрівля, вікно, двері та ганок. Зазначимо, що після побудови перспективи допоміжні й невидимі лінії витираються (на рис. 10.20 вони залишені в ілюстративних цілях).

Самоконтроль. Задайте пряму призму, основою якої є правильний шестикутник, а висота вдвічі перевищує діаметр кола, в яке вписано основу. Виходячи з вимог реалістичності, самостійно задайте апарат перспективи. Побудуйте перспективне зображення призми.

10.3. ПЕРСПЕКТИВА НА ПОХИЛІЙ ПЛОЩИНІ

Цей вид перспективи застосовується, в основному, в двох випадках:

1) коли зображується висотна споруда і не можна забезпечити умов реалістичності для перспективи на вертикальній площині через існуючу забудівлю (див. рис. 10.8);

2) коли зображується інтер'єр, вертикальні розміри якого значно перевищують горизонтальні (див. рис. 10.10).

Точка зору вибирається на рівні ока людини, а головний промінь спрямовується вгору; рідше — «на висоті пташиного польоту» при спрямуванні головного променя донизу. Вертикальні кути зору можуть бути взяті вдвічі більшими за ті, які використовувались для перспективи на вертикальній площині; потрібний рівень реалістичності забезпечується (рис. 10.21).

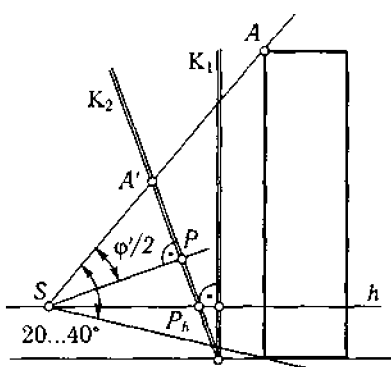


Рис. 10.21. Порівняння вертикальних кутів перспектив на вертикальній і похилій площинах

Через те що вертикальні лінії споруд не паралельні похилій картині, вони мають власну точку збігу, тобто точку перетину паралельного їм променя зору з цією площиною. Це найістотніша відмінність від перспективи на вертикальну площину. Площини, паралельні граням, перетинають картину по трьох прямих, утворюючи *трикутник збігів* з вершинами в точках збігу. На горизонтальній проекції лінія горизонту не збігається з лінією основи.

Розглянемо побудову на конкретному прикладі.

Задача 10.2. Побудова перспективи висотного будинку на похилій картині (рис. 10.22).

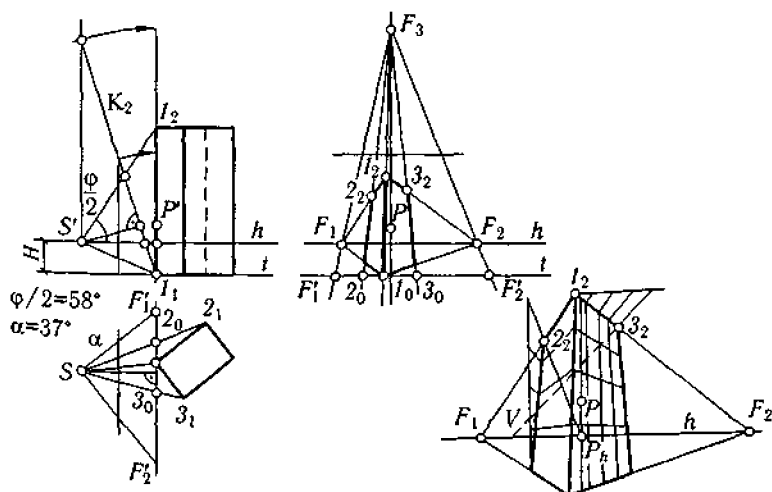


Рис. 10.22. Перспектива будинку на похилій картині

Розташування картини і головного променя, визначення точок збігу в плані не відрізняються від попереднього прикладу. Задамо висоту H точки зору. Візьмемо фронтально проекціювальну похилу площину — на фронтальній площині вона задається слідом K_2 . Третя точка збігу визначиться як точка перетину лінії, паралельної вертикальним ребрам, проведеної з S , і K_2 .

Побудова перспективи починається з проведення лінії l та відкладання вздовж неї відстаней до точок збігу і характерних точок споруди. Точка збігу вертикальних ребер F_3 знаходиться на перетині вертикальної лінії, проведеної з P , та горизонтальної лінії на рівні висоти F_3 , здобутої поворотом K_2 до суміщення з прямою $I_1 I_2$. Т. F_1 і F_2 знайдуться на перетині лінії горизонту h прямими $F'_1 F_3$ та $F'_2 F_3$ відповідно. Побудова плану відрізнятиметься тільки тим, що лінії, проведені з т. 2_1 і 3_1 будуть не вертикальними, а збігатимуться в т. F_3 . Висотну позначку т. I_2 визначимо як перетин прямої $I_2 S_2$ слідом K_2 та передамо на перспективне зображення аналогічно передачі позначки F_3 . Пропорційний поділ фасаду здійснимо звичайним способом.

Самоконтроль. Задайте прямий круговий циліндр, висота якого в'ятеро більша за діаметр. Задайте апарат перспективи на похилу площину. Побудуйте перспективу циліндра

10.4. СПОСІБ ПЕРСПЕКТИВНОЇ СІТКИ

При потребі зобразити складну забудівлю з об'єктів неправильної форми на значній території застосовується спосіб побудови перспективи на вертикальній картині, що має назву, винесену в заголовок. Суть його полягає в тому, що об'єкти «прив'язуються» до координатної сітки, побудованої на осях x , y , z , причому вісь x (*масштаб широт*) збігається з основою картини, вісь z (*масштаб висот*) є вертикальною прямою картини, а вісь y (*масштаб глибин*) має точку збігу на лінії горизонту в точці перетину головного променя картиною.

Таким чином, уздовж осей x і z відкладаються натуральні одиниці виміру, а вздовж осі y їх фіксують за допомогою дистанційної точки.

Наприклад, перспектива т. A з координатами (40, 20, 30) будеється так (рис. 10.23).

Відкладаємо вздовж осей x та z відповідно 40 і 30 одиниць. Сполучаємо одержані точки з т. P . Відкладаємо вздовж осі x 20 одиниць та сполучаємо цю точку з дистанційною т. D . Від точки перетину цієї прямої віссю y проводимо горизонтальну лінію до перетину прямою $40P$ і вертикальну лінію до перетину прямою $30P$. З одержаних точок проводимо відповідно вертикальну та горизонтальну прямі, на перетині яких дістаємо перспективу т. A .

Розглянемо приклад.

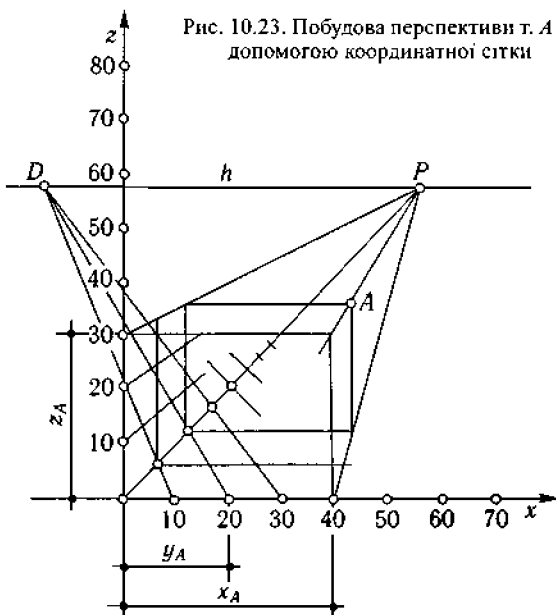


Рис. 10.23. Побудова перспективи т. А за допомогою координатної сітки

Задача 10.3. Перспектива забудовлі (рис. 10.24).

Визначаємо розташування головного променя, картини, лінії горизонту, дистанційних точок, осей координат. Будуємо координатну сітку. Визначаємо координати характерних точок споруди (рис. 10.24, а).

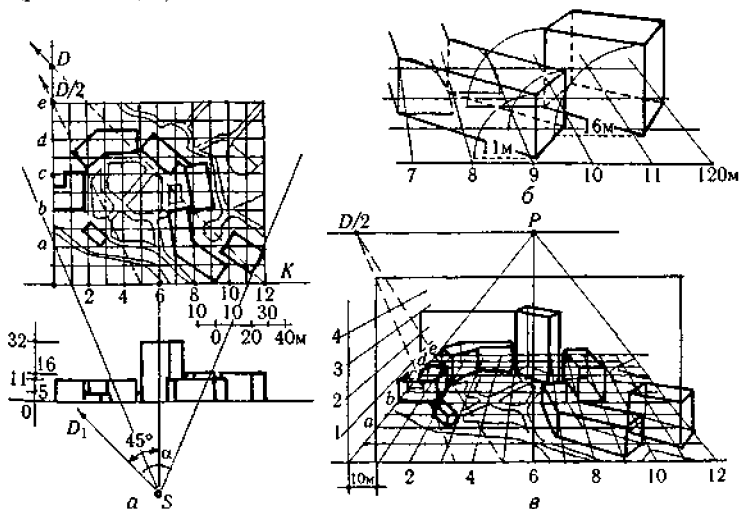


Рис. 10.24 Перспектива забудовлі із застосуванням перспективної сітки

Далі будуємо перспективну сітку. Широтні та глибинні координати точок, які не збігаються з вузлами сітки, відкладаємо за допомогою візуальної інтерполяції; вертикальні — спрощено, як показано на рис. 10.24, б. Сполучаємо характерні точки і визначаємо видимість (рис. 10.24, в).

Самоконтроль. Побудуйте описаним способом перспективу прямого кругового циліндра з висотою, що дорівнює діаметру основи, взявши точку зору на висоті, яка дорівнює трьом діаметрам основи

10.5. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Вище розглянуто прості приклади побудов з використанням найпоширеніших способів. Більш складні задачі (реконструкція апарату, віддзеркалювання, перспектива архітектурних форм, побудова перспективи на поверхні) розглядаються у виданнях для будівельних та архітектурних спеціальностей [9, 10, 14]; побудова тіней — в розд. 12.

II. ПРОЕКЦІЇ З ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ

На відміну від розглянутих систем проекції з числовими позначками не є різновидом методу двох зображень. Оборотноість забезпечується завдяки числовому позначенню висотної позначки. При розв'язуванні задач простежуються аналогі з відомими методами. Проекції з числовими позначками застосовуються для вертикального планування, коли лінійні розміри об'єкта значно перевищують його вертикальні розміри.

11.1. ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТИХ ФІГУР

Точка

Зображення т. A, B, C , розташованих вище, нижче і в площині проекцій, показано на рис. 11.1.

Домовимось не ставити знак «+», якщо точка розташовується вище площини проекцій (за стандартами позначка вказується з точністю до трьох знаків після коми, причому знак записується).

Пряма

Пряма задається двома точками (рис. 11.2, а). Довжина проекції відрізка між ними називається *закладенням*; відношення різниці висот кінцевих точок до закладення — *ухилом*; закладення при різниці висот, що дорівнює одиниці, — *інтервалом* (рис. 11.2, б).

Важливе значення має *градуювання прямої* — визначення на ній точок із сталою різницею координат. Для цього використовують відомий спосіб пропорційного поділу відрізка.

Задача 11.1. *Градуювання прямої* (рис. 11.3).

Проградуємо відрізок з висотами кінців -3 і 6 , розбивши його на 9 частин (див. рис. 11.3). Позначимо точки з цілими значеннями висот; відстані між ними дорівнюватимуть інтервалу прямої.

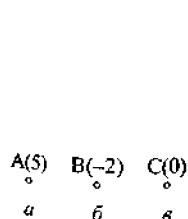


Рис 11.1 Зображення точок

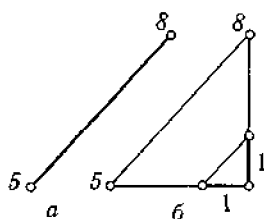


Рис 11.2. Зображення прямої

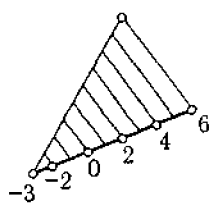


Рис 11.3 Градування прямої

Площина

Площина задається відсіком, парою прямих, трьома точками, але найчастіше — *масштабом ухилу* (проградуйованою проекцією скату, тобто лінії найбільшого нахилу до горизонтальної площини). Розберемо, як визначити масштаб ухилу при заданні площини відсіком (рис. 11.4).

Градуюємо одну зі сторін трикутника і проводимо горизонталі площини. Визначаємо лінію скату — це перпендикуляр до горизонталей. Градуємо цю лінію, скориставшись горизонталями як носіями висот. Прийнято казати, що площина має *схил* у напрямі скату від горизонталей з більшими позначками до горизонталей з меншими позначками, що й позначено на рисунку стрілкою.

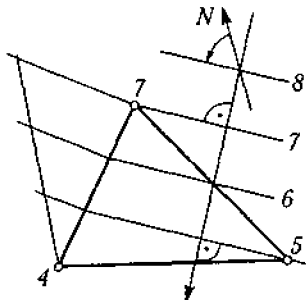


Рис. 11.4 Визначення масштабу ухилу та орієнтації площини

Іноді площину слід орієнтувати відносно сторін світу. Для цього ліворуч від спуску вводиться *напрямок простягання*. Кут між напрямом на північ і напрямом простягання, вимірний проти руху стрілки годинника, називається *кутом простягання* площини; саме він та ухил визначають її орієнтацію (див. рис. 11.4).

Поверхня

Залежно від визначника поверхня може бути задана по-різному: паралелепіпед, наприклад, визначається контуром основи і позначками верхньої та нижньої основ (рис. 11.5, а); конус — основою і вершиною та їхніми висотами (рис. 11.5, б); топографічна поверхня — горизонталями (рис. 11.5, в). В останньому випадку часто визначають лінію скату (вздовж неї збігає вода) — криву, яка в кожній точці перпендикулярна до відповідної горизонталі.

Градуювання, визначення ухилу і лінії скату для поверхні та площини аналогічні.

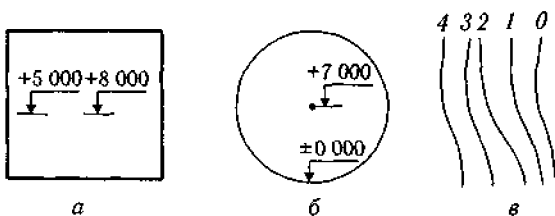


Рис. 11.5. Різні способи зображення поверхонь

11.2. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

Належність точки до прямої, площини, поверхні

Загальний принцип — перевірка відповідності висот — варіюється залежно від вихідних умов (рис. 11.6, *a—в*). У разі потреби здійснюється градування.

Плоскі перетини

Задача 11.2. Побудувати лінію перетину площин, заданих масштабом ухилу і відріком (рис. 11.7).

Переходимо від задання площини відріком до її задання масштабом ухилу і горизонталями (досить провести лише дві горизонталі). Фіксуємо дві точки перетину горизонталей обох площин з однаковими позначками. Пряма LM , проведена через них, є лінією перетину площин. Визначаємо видимість — буде видимою ліва частина відріку до лінії перетину.

Кілька наступних задач зводитимуться до задачі 11.2.

Задача 11.3. Перетин площини прямою (рис. 11.8)

Градуємо прямою i , вважаючи її за масштаб ухилів, проводимо через неї допоміжну площину, визначаючи дві її цілочислові гори-

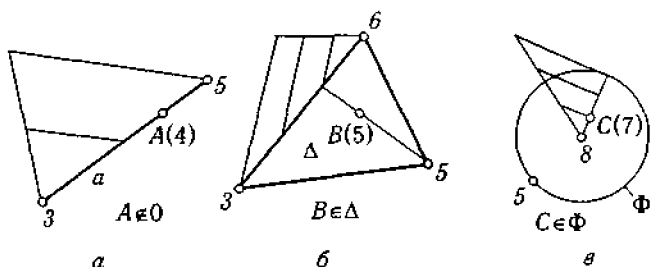


Рис. 11.6. Визначення належності точки до прямої, площини, поверхні

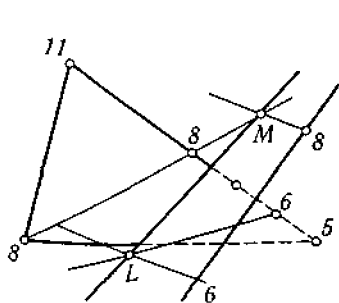


Рис. 11.7. Перетин площин

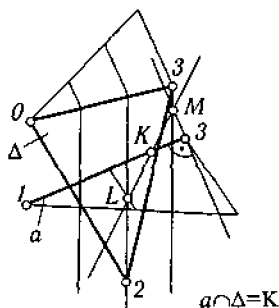


Рис. 11.8. Основна позиційна задача

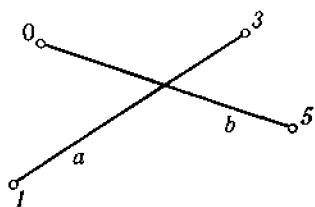


Рис. 11.9. Прямі перетинаються чи є мимобіжними?

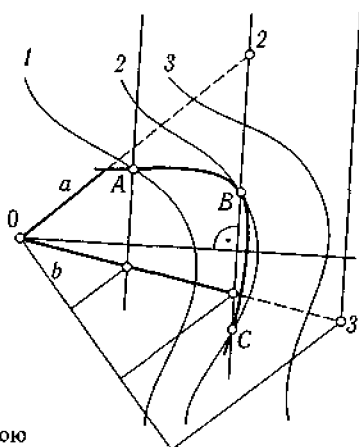


Рис. 11.10. Перетин поверхні площиною

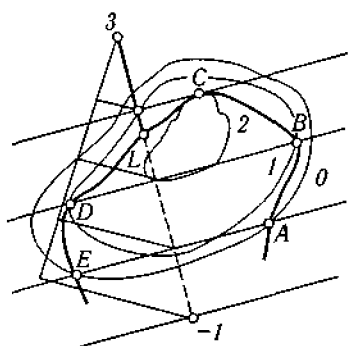


Рис. 11.11. Перетин прямої лінії рельєфом

зонталі. Аналогічно попередньому випадку будемо лінію перетину площин. Точка її перетину прямою є точкою перетину прямої вихідною площиною. Визначаємо видимість прямої відносно площини за позначками в конкуруючих точках.

Самоконтроль. Для умов, заданих на рис. 11.9, з'ясуйте, чи будуть прямі a і c мимобіжними або такими, що перетинаються. Визначте видимість конкуруючої точки.

Задача 11.4. Перетин поверхні площиною, заданою парою прямих (рис. 11.10).

Переходимо від задання площини прямими до її задання масштабом ухилу та горизонталями (на відміну від попередніх прикладів, треба провести всі цілочислові горизонталі). Знаходимо всі точки перетину горизонталей площини і поверхні з однаковими позначками (для кожної пари горизонталей може бути кілька таких точок; слід бути уважними та визначити їх усі). Сполучаємо точки плавною лінією. Визначаємо видимість.

Самоконтроль. При вертикальному плануванні проводиться згладжування рельєфу. Нехай на рельєфі проектується площина, задана в попередньому прикладі. Покажіть видимість площини і рельєфу з визначенням насипу чи виїмки при земляних роботах.

Задача 11.5. Перетин прямої лінії рельєфом (рис. 11.11).

Градуюємо пряму, проводимо через неї допоміжну площину, задаємо горизонталі цієї площини з кроком 1. Визначаємо лінію

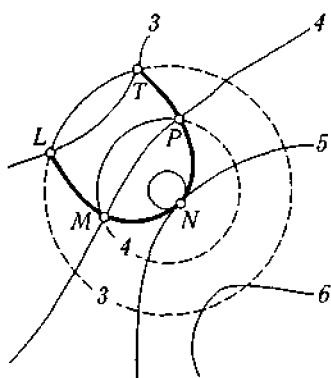


Рис. 11.12. Перетин кривої поверхні рельєфом

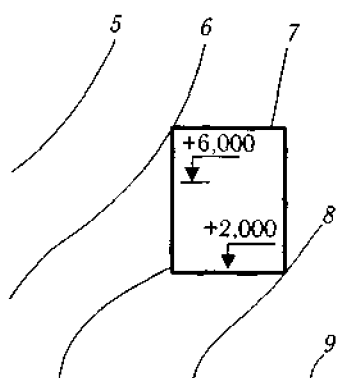


Рис. 11.13. Перетин гранної поверхні рельєфом

перетину площини та рельєфу. Точка перетину цієї лінії вихідною прямою є точкою її перетину рельєфом. У загальному випадку таких точок може бути кілька. Визначаємо видимість. Тут вона змінюватиметься один раз.

Зауважимо, що така задача трапляється при будівництві доріг — невидима частина прямої відповідає тунелю.

Перетин поверхонь

Задача 11.6. Перетин кривої поверхні рельєфом (рис. 11.12).

Знаходимо точки перетину горизонталей з однаковими позначками. Сполучаємо їх плавною лінією. Визначаємо видимість. З усіх розглянутих проєкційних систем такі задачі найпростіше розв'язуються саме на проєкціях з числовими позначками, чи не так?

Самоконтроль. Паралелепіпед на рис. 11.13 задано контуром основи і позначками верхньої та нижньої основ; рельєф — горизонталями. Що можна сказати стосовно лінії перетину поверхонь, а також видимості? Наведіть якомога більше прикладів практичного використання задач із подібними вихідними даними.

11.3. ВЕРТИКАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ — МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

Розглянемо приклади типових задач промислового, цивільного і дорожнього будівництва.

Задача 11.7. Риття котловану — побудова гранної поверхні (рис. 11.14).

За заданих умов котлован є перегорнутою зрізаною пірамідою з прямокутною основою та схилами, що мають ухил 1 : 1. Проек-

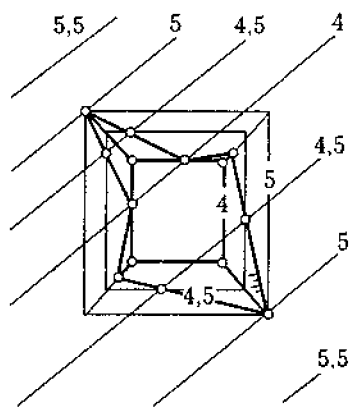


Рис. 11.14. Проектування котловану на рельєфі

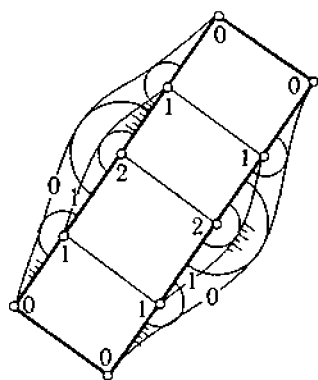


Рис. 11.15. Задання поверхні рівного схилу

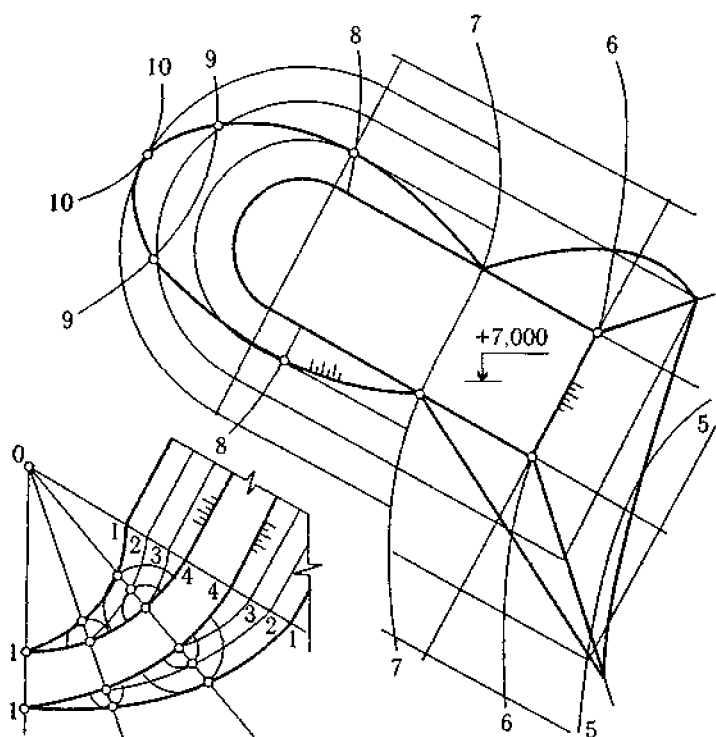


Рис. 11.16 Засгосування поверхонь рівного нахилу при проектуванні насипів

Рис. 11.17 Проектування горизонтальної площадки

туємо схили, проводячи для кожної зі сторін котловану перпендикуляр — масштаб ухилу — і визначаючи по три горизонталі, паралельні відповідним сторонам. Лінії перетину горизонталей суміжних сторін з однаковими позначками є гранями піраміди; горизонталі з позначкою 5 утворюють контур виїмки.

Поверхні рівного ухилу застосовуються при проектуванні схилів в їздів, дамб, русел каналів тому, що «не провокують» розмивання водою окремих ділянок більше, ніж інших. Насипи та виїмки позначаються *бергштрихами* (рис. 11.14, 11.15).

Одним із найчастіше використовуваних способів визначення поверхонь рівного ухилу є побудова обгортальних поверхонь до кількох конусів, що задають геометричні розміри схилу (рис. 11.15).

Задача 11.8. *Проектування в їзних насипів — побудова поверхні рівного ухилу* (рис. 11.16).

Розбиваємо контур насипу на три рівні частини і будуємо конуси, дотримуючись ухилу 1 : 1; їхні центри розташовуємо на перпендикулярах до контуру, а бічні поверхні задаємо горизонталями. Проводимо горизонталі схилів як дотичні до відповідних горизонталей конусів; та, що має позначку 1, є контуром схилу.

Задача 11.9. *Проектування горизонтальної площадки на рельєфі — комплексна метрична задача* (рис. 11.17).

Аналізуємо умови: ліворуч від горизонталі 10 слід побудувати виїмку з ухилом 2 : 1, а праворуч — насип з ухилом 1 : 1. Визначаємо масштаби ухилів для всіх схилів і проводимо горизонталі. Точки перетину горизонталей суміжних схилів між собою визначають їх стики, а точки перетину з відповідними горизонталями рельєфу — контури насипу та виїмки.

На практиці в подібних задачах дотримуються *нульового балансу земляних робіт*, тобто вибирають позначку площадки такою, щоб об'єми насипу і виїмки були приблизно рівними. Тоді не виникає потреби завозити чи вивозити землю, що зменшує кошторис робіт.

12. ПОБУДОВА ТІНЕЙ

Гра світла і тіні надає задуму архітектора додаткової виразності, виявляючи вдалі рішення та помилки. Інсоляція є вагомим складовою комфортності помешкань. Освітленість доріг і кварталів є фактором безпеки. Отже, врахування природного та визначення штучного освітлення неодмінно має здійснюватись під час проектування, а розуміння цього йде ще з часів Античності.

12.1. ЗАГАЛЬНА ПОСЛІДОВНІСТЬ ПОБУДОВИ ТІНЕЙ

Для будь-якої проєкційної системи побудова тіней включає такі чотири кроки.

Визначення типу і розташування джерела світла

При освітленні Сонцем промені вважаються *паралельними* (віддаленість від Землі дає змогу вважати Сонце невласною точкою). При освітленні штучними джерелами, як правило, промені вважаються *радіальними*; при врахуванні кількох джерел слід задати їх центри.

Розташування Сонця змінюється залежно від географічної широти місцевості, пори року та часу доби. Тому в задачах визначення інсоляції і при проектуванні забудівлі задається кілька розташувань Сонця. Існують комп'ютерні програми, що полегшують такі розрахунки. При оформленні проектних рішень розташування Сонця вважається *стандартним* (трохи відмінним для різних проєкційних систем). Стандартні розташування Сонця розглядатимуться нижче.

Побудова власної тіні

Об'єкт, на який спрямовано промені, має освітлену і неосвітлену частини; остання називається *власною тінню*. Їх межа є *контуром власної тіні*. Контур та джерело світла визначають *світловий конус* (або *циліндр*, якщо це невласна точка) (рис. 12.1).

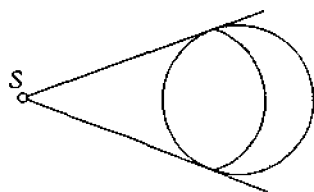


Рис. 12.1. Власна тінь і світловий конус

Отже, *побудова власної тіні зводиться до визначення її контуру*, який, у свою чергу, залежить від форми об'єкта, типу і розташування джерела світла.

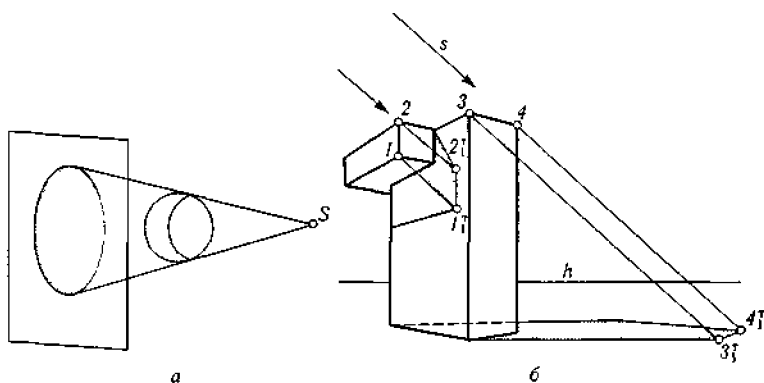


Рис. 12.2. Падаючі тіні

Побудова падаючої тіні

Падаючою називається тінь тіла на площину, поверхню чи інший об'єкт (рис. 12.2, а) або тінь частин тіла на інші його частини (рис. 12.2, б).

Із рис. 12.2 випливає, що падаюча тінь визначається тим самим світловим конусом (циліндром), що і власна. Отже, *побудова падаючої тіні* включає: визначення контуру власної тіні та задання світлового конусу; розв'язання задачі на перетин цього конуса з об'єктом.

Тонування затіненої області

Діють такі правила:

- тип тонування однаковий для всіх частин (рис. 12.3); причому затінена область тонується тим самим кольором, що й освітлена;
- область власної тіні темніша за освітлену частину;
- область падаючої тіні ще вдвічі темніша.

Розглянемо побудову тіней природного освітлення. Визначення тіней штучних джерел, у тому числі для інтер'єрів, описано в [9, 14].

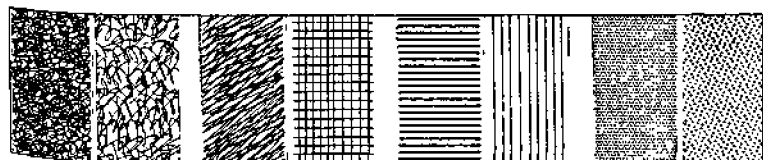


Рис. 12.3. Зразки тонування

12.2. ПОБУДОВА ТІНЕЙ НА ЕПЮРИ МОНЖА

Напря́м світлових променів вважається паралельним діагоналі куба (рис. 12.4, а); на проєкціях це виглядатиме так, як показано на рис. 12.4, б.

Тіні найпростіших фігур

Такі фігури не мають власних тіней; для побудови падаючих тіней використовуються безпосередньо їхні контури.

Ті́нню точки є точка; для її побудови на горизонтальній і фронтальній площинах проєкцій достатньо знайти сліди світлових променів, проведених через неї (рис. 12.5).

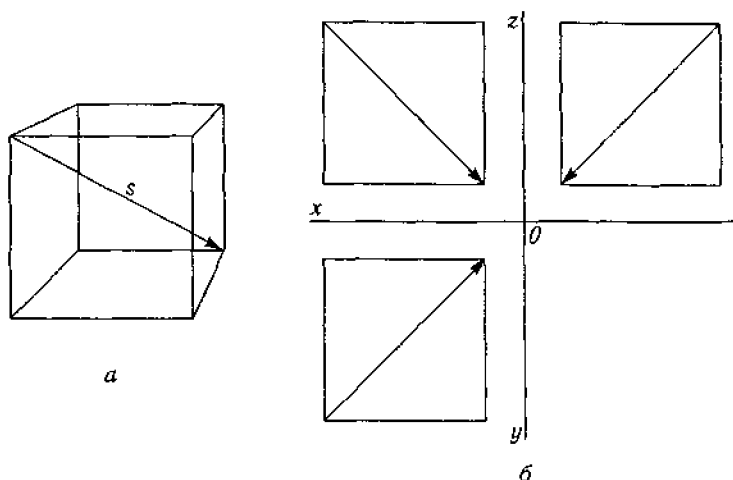


Рис. 12.4. Напря́м світлових променів на епюрі Монжа

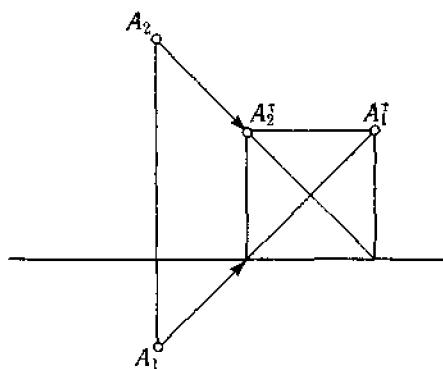


Рис. 12.5. Тінь точки на площинах проєкцій

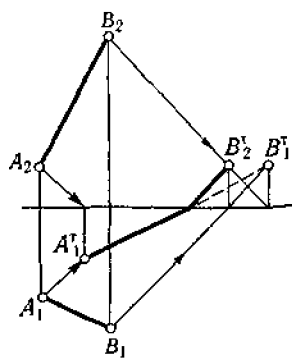


Рис. 12.6. Тінь прямої

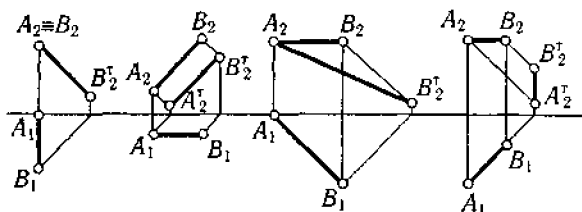


Рис. 12.7. Тіні прямих окремого положення

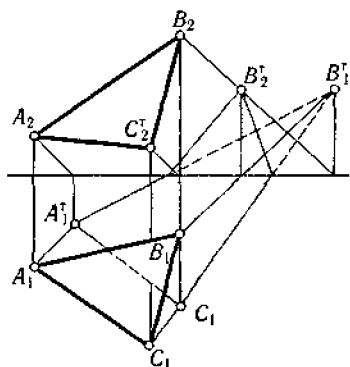


Рис. 12.8. Тінь площини загально-го положення

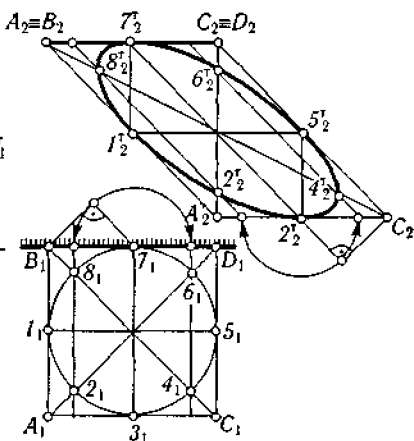


Рис. 12.9. Тінь горизонтального кола на фронтальній площині

Тінню прямої є пряма; для її визначення будемо тіні двох точок прямої (рис. 12.6). Тіні на Π_1 та Π_2 побудовані окремо, а потім виділено сумарну видиму тінь на обох проекціях. Запам'ятаймо розташування т. B_2^T і B_1^T , A_2^T й A_1^T на прямих, паралельних осі x .

Часто використовуються стандартні розташування тіней прямих окремого положення, показані на рис. 12.7.

Тінь плоского відсіку визначають обмежувальні прямі; побудова зводиться до багатократної побудови тіней таких прямих на площини проєкцій (рис. 12.8). Іноді для спрощення побудов доцільно перейти до задання площини прямими окремого положення (рис. 12.7).

Нескладні міркування приводять до такого висновку.

Властивість 12.1. Тінь плоскої фігури на паралельній до неї площині повторюватиме контур фігури.

Самоконтроль. Доведіть властивість 12.1. Побудуйте тінь горизонтального шестикутника на паралельну йому площину.

За винятком випадку, що описується властивістю 12.1, тінню кола буде еліпс. Тому для побудови тіні горизонтального кола

(рис. 12.9 а) на фронтальну площину доцільно використати спосіб восьми точок (рис. 12.9, б): вписуємо коло в квадрат; визначаємо паралелограм — тінь цього квадрата; вписуємо в нього еліпс — тінь кола.

Тіні об'ємних тіл

Спочатку слід визначити власні тіні.

Задача 12.1. Побудова тіні паралелепіпеда (рис. 12.10).

Затіненими є дві бічні грані (власну тінь не показано, оскільки одна з граней є проєкціовальною, а інша закривається передньою гранню). Контур власної тіні — ламана $A_1 - A_2 - D - C - B_1 - B_2$. Всі її ланки є прямими окремого положення, тому побудова падаючої тіні зводиться до рис. 12.7. Визначаємо контур тіні й виконуємо тонування.

Задача 12.2. Побудова тіні циліндра (рис. 12.11).

Дотичні промені проходять через твірні 1 та 5 і контур верхньої основи між ними — затіненою є половина бічної поверхні циліндра. Будуємо власну тінь (частина її є невидимою). Далі будуємо падаючі тіні твірних 1 і 5, як на рис. 12.7, а також тінь верхньої основи — на фронтальній площині вона зобразиться як частина еліпса (див. рис. 12.9). Об'єднуємо частини — контур падаючої тіні проходить через точки $5_1 - 5_2 - 4_2^T - 3_2^T - 2_2^T - 1_2^T - 1_1 -$ і виконуємо тонування.

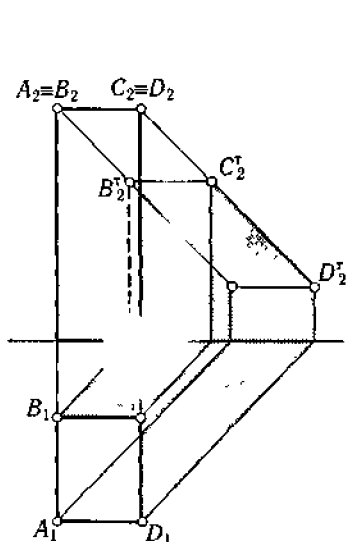


Рис. 12.10. Тінь паралелепіпеда

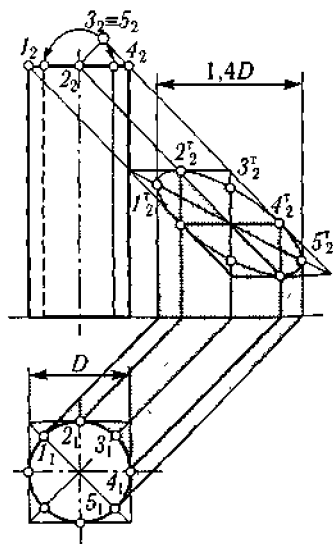


Рис. 12.11. Тінь прямого кругового циліндра

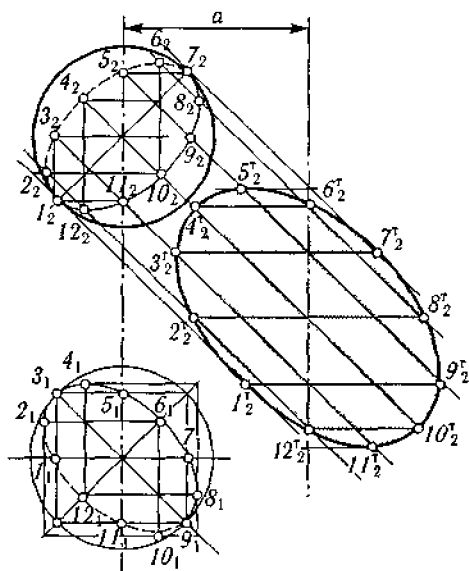


Рис. 12.12 Тінь сфери на фронтальній площині

Задача 12.3. Побудова тіні сфери на фронтальній площині (рис. 12.12, де a — відстань до фронтальної площини).

Світловий циліндр торкнеться контуру сфери в т. 1 і 7 ; відрізок між ними є великою віссю еліпса — зображенням власної тіні. Кінці спряженої осі — т. 4 та 10 — знайдемо як перетини перпендикуляра до великої осі, що ділить її навпіл, і прямих, проведених під кутом 30° до неї з т. 7 . Точки контуру власної тіні знайдуться афінним перетворенням кола на еліпс, способом восьми точок або через співвідношення, наведені в нижній частині рис. 12.12.

Визначимо апарат афінного перетворення між контурами власної і падаючої тіней (остання теж є еліпсом). Вісь перетворення перпендикулярна до напрямку світлових променів і проходить через точку перетину вертикальної прямої, що знаходиться на відстані a від центра сфери, та прямої, яка проходить через цей центр паралельно осі x . Вертикальні прями, а також прями, паралельні осі x , і світлові промені вказують напрям переміщення при перетворенні. Так знаходимо образи всіх точок. Сполучаємо побудовані точки плавною лінією і виконуємо тонування тіней.

Самоконтроль. Знайдіть власну та падаючу тіні цієї сфери способом восьми точок. Порівняйте ваше й описане розв'язування.

Задача 12.4. Побудова тіні прямого конуса (рис. 12.13).

Знайдемо тінь вершини S . Проведемо дотичні з S_1^T до горизонтальної проекції основи. Вони визначають контур падаючої тіні, а

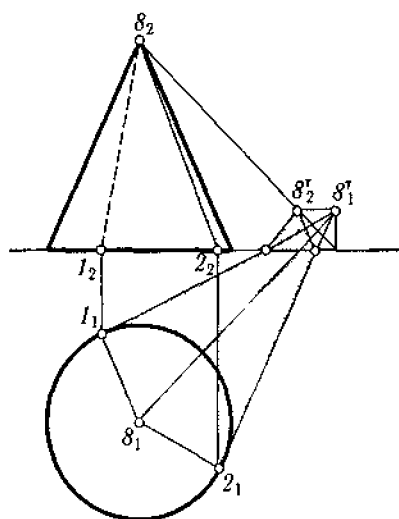


Рис. 12.13. Тінь прямого кругового конуса

точки дотику — твірні, що є межами власної тіні. Частина власної тіні на Π_2 є невидимою. Виконуємо тонування. Задача цікава тим, що порушення звичайної послідовності побудов є виправданим.

Самоконтроль. Проведіть дослідження. Знайдіть кут нахилу твірних до Π_1 , при якому освітленою буде вся бічна поверхня прямого кругового конуса. Поверніть конус на 90° . Чи буде повне освітлення? Поверніть конус ще на 90° . Коли вся бічна поверхня перевернутого конуса буде в тіні?

Тіні на похилій площині та поверхні

Задача 12.5. Побудова тіні паралелепіпеда на похилій площині (рис. 12.14).

Подібні задачі виникають при побудові тіней труб на скати дахів. Необхідність відшукувати не фронтальні чи горизонтальні сліди променів, а їх перетини з довільною площиною — це все, що змінюється порівняно із задачею 12.1. Для цього краще скористатися профільною проекцією, що й зроблено.

При побудові тіней на поверхню розв'язуються задачі на взаємний перетин кривих або кривих і гранних поверхонь. Використовуються методи допоміжних січних площин, допоміжного проєціювання (див. частину 2), сліду світлового променя, зворотних променів [9, 14] тощо. Розглянемо перший з них.

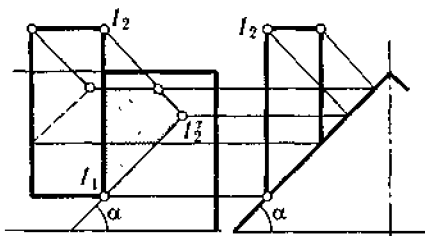


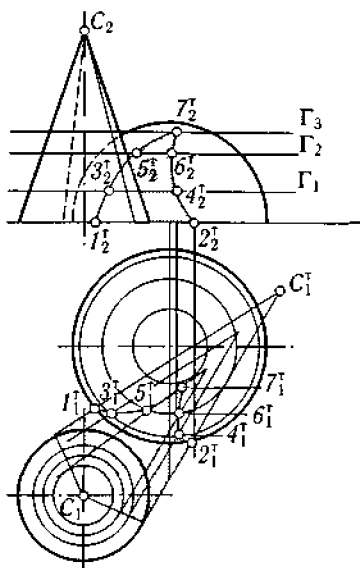
Рис. 12.14. Тінь паралелепіпеда на похилій площині

Рис. 12.15. Тінь конуса на сфері (тінь сфери не показано)

Задача 12.6. Побудова тіні прямого кругового конуса на півсфері (рис. 12.15).

Для спрощення не будемо будувати тіні самої півсфери (див. задачу 2.3, рис. 12.12). Визначимо власну тінь конуса і контур падаючої тіні на Π_1 (див. задачу 12.4, рис. 12.13). Перетин контуру з основою півсфери дасть крайні точки падаючої тіні на півсфері — т. 1 та 2. Для визначення проміжних точок проведемо горизонтальні допоміжні січні площини Γ_1 і Γ_2 . Їх перетини з конусом — кола — визначать перетини зі світловим конусом — прями. Перетини прямих з колами — результатами перетину з півсферою — дадуть проміжні точки контуру падаючої тіні. Сполучаємо ці точки та виконуємо тонування здобутого контуру.

Подібні задачі зустрічаються при побудові тіней труб й антен на похилі покрівлі чи оболонки.



Тіні на фасаді

Фасад — фронтальна проекція споруди, побудована з певними умовностями і спрощеннями. Отже, побудова тіней зводиться до розглянутих вище способів.

Задача 12.7. Побудова тіні на фасаді будинку (рис. 12.16; подвійні лінії показують розмір виступу елементів відносно основної площини фасаду).

Прокоментуємо окремі фрагменти побудови.

1. Тінь карнизу обмежено горизонтальною лінією, розташованою нижче від нього на відстані, що дорівнює звису.

2. Контур тіні козирка складається з тіней ребер: лівого нижнього проєкціювального, нижнього горизонтального, вертикального, правого верхнього проєкціювального, які мають стандартний вигляд (рис. 12.7). В ніші дверей враховано заглиблення.

3. Тінь ніш вікон і дверей повторює їхні контури на відстані, що дорівнює заглибленню ніш.

4. Контур тіні ганку обмежує тінь верхнього правого проєкціювального ребра.

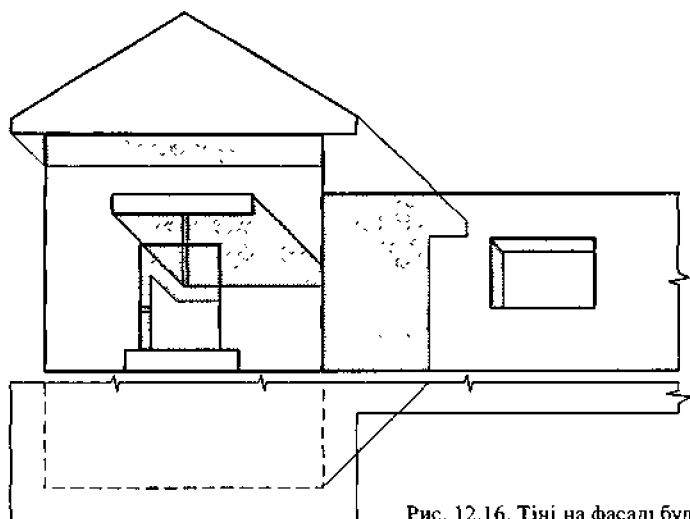


Рис. 12.16. Тіні на фасаді будинку

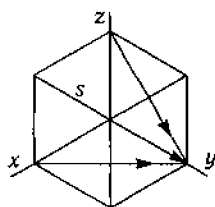


Рис. 12.17. Напрямок і вторинні проекції світлового променя для прямокутної ізометрії

5. Контури тіні виступаючої частини будинку утворюють тіні ребер козирка та виступу. Скарги не дають тіні.

6. Суміщені тіні додатково не тонуються.

12.3. ПОБУДОВА ТІНЕЙ В АКСОНОМЕТРІЇ

Оскільки аксонометричні проекції мають обмежене застосування в будівельному кресленні, необхідність у побудові тіней виникає досить рідко.

Розташування природного джерела світла припускається вздовж діагоналі куба. Відповідно вторинні проекції променя паралельні діагоналям проекцій відповідних граней куба. Слід зазначити, що для різних аксонометрій ці напрями будуть неоднаковими. Для прямокутної ізометрії їх показано на рис. 12.17.

Тіні простих фігур

Тіню точки на координатній площині є відповідний слід світлового променя (рис. 12.18, а).

Тіню прямої є пряма. Досить визначити тіні кінців її відрізка (рис. 12.18, б). Тіні прямих окремого положення показано на рис. 12.18, в.

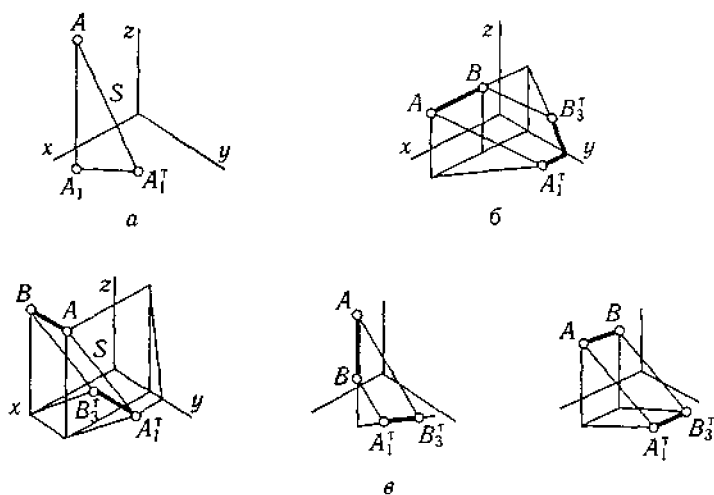
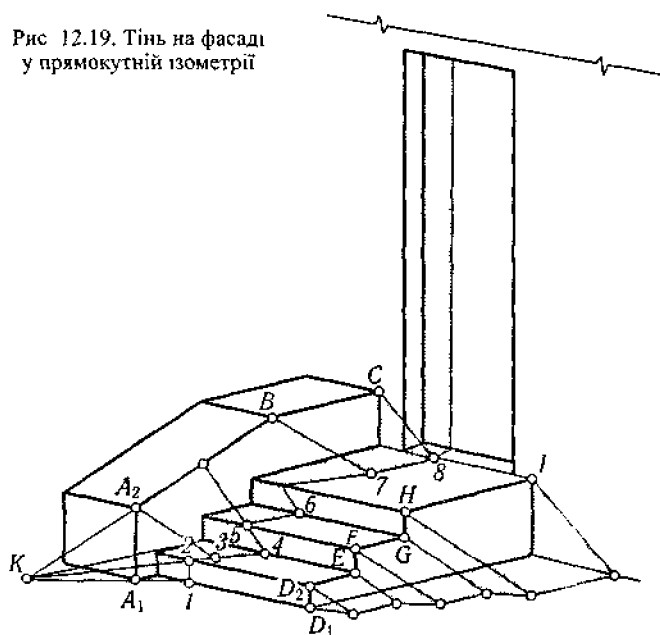


Рис. 12.18. Тіні точок і прямих на координатних площинах в аксонометрії

Рис. 12.19. Тінь на фасаді у прямокутній ізометрії



Задача 12.8. Побудова тіні на фасаді (рис. 12.19).

Тінь на сходи, площадку і стіну дає лінія $A_1 - A_2 - B - C$. Т. 1 є перетином горизонтальної проєкції світлового променя вертикальною гранню першої сходинок; т. 3 — перетином світлового

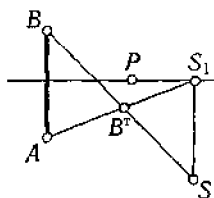


Рис 12.20. Найпоширенше розташування джерела світла

променя, що проходить через т. A_2 , горизонтальною проекцією променя, проведеного через т. K , яка є перетином горизонтальної площини першої сходинки прямою $A_2 - B$. Тіні на горизонтальних гранях інших сходинок паралельні лінії 3—4; на вертикальних — профільній проекції світлового променя; на площадці — лінії 3—4 до т. 7 і лінії $B - C$ до т. 8. Для стіни враховано заглиблення ніші дверей.

Тінь на землю та стіну праворуч дає лінія $D_1 - D_2 - E - F - C - H - I$.

Тінь в ніші дверей повторює їхній контур на відстані, що дорівнює заглибленню ніші.

Самоконтроль. Для умов задачі 12.7 (див. рис 12.16) реконструюйте, проявивши трохи фантазії, план (горизонтальну вторинну проекцію) будинку. Побудуйте його прямокутну диметрію. Визначте власні та падаючі тіні.

12.4. ПОБУДОВА ТІНЕЙ У ПЕРСПЕКТИВІ

Джерело світла може бути розташовано довільно відносно точки зору — перед глядачем, збоку або ззаду від нього. Найчастіше джерело S і його точку збігу S_1 розміщують ззаду, як показано на рис. 12.20.

Побудова тіней простих фігур

Тінню точки на предметній площині є перетин світлового променя AS його вторинною проекцією A_1S (рис. 12.21, а). Тінь прямої визначається тінню двох її точок (рис 12.21, б). Для прямих

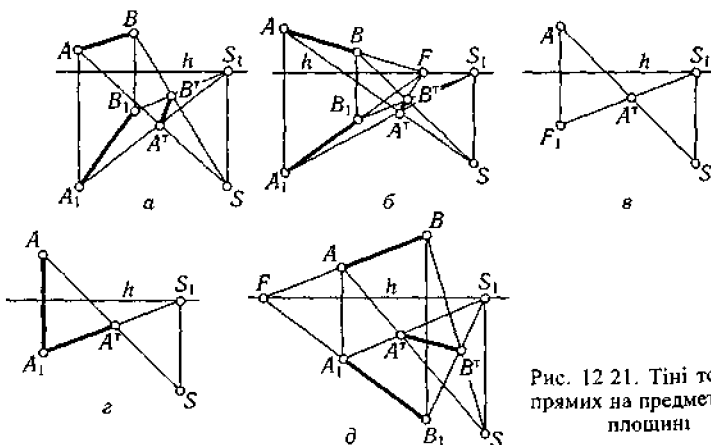
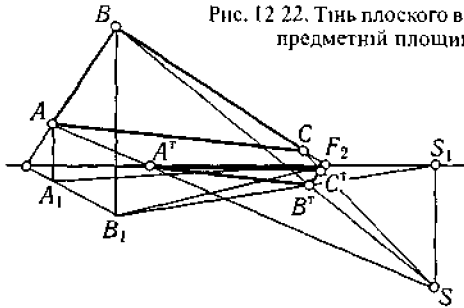


Рис. 12.21. Тіні точок і прямих на предметній площині

Рис. 12.22. Тінь плоского відсіку на предметній площині



окремого положення розташування тіней на предметній площині показано на рис. 12.21, *в—д*.

Тінь відсіку площини загального положення визначається тіннями його вершин (рис. 12.22). Для спрощення побудов можна використати той факт, що паралельні прямі мають спільну точку збігу.

В усіх наведених вище прикладах власна тінь була відсутня. Розглянемо задачі, де її побудова є необхідною.

Задача 12.9. Побудова тіні паралелепіпеда (рис. 12.23).

Контур власної тіні визначає ламана $1_1 - 1 - 2 - 3 - 3_1$. Падаюча тінь т. 1_1 збігається з т. 1_1 ; тінь прямої $1_1 1$ спрямовано до т. S_1 , а тінь т. 1 знаходиться в місці перетину цієї прямої променем IS . Тінь від прямої (12) паралельна їй; отже, пряму $1'2'$ спрямовано до т. F_2 , а т. $2'$ знаходиться в місці перетину променя $2S$ нею. Аналогічно тінь $23 - 2'3'$ спрямовано до т. F_1 . У подальших побудовах немає потреби, оскільки паралелепіпед закриває частину тіні.

Задача 12.10. Побудова тіні прямого конуса (рис. 12.24).

Тінь основи конуса збігається з нею; тінь вершини знаходиться в точці перетину світлового променя його вторинною проекцією S' . З цієї точки проводимо дотичні до основи конуса; прямі, що сполучають точки дотику з вершиною, визначають контур власної тіні.

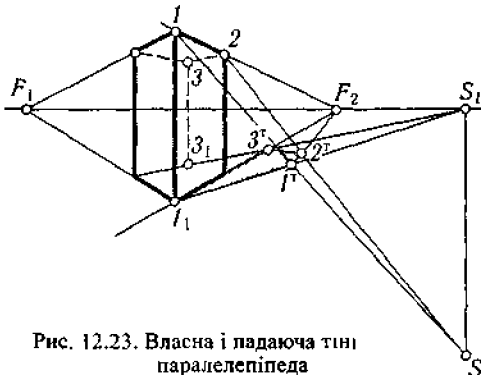


Рис. 12.23. Власна і падаюча тіні паралелепіпеда

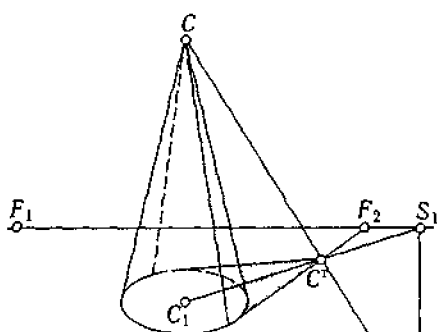


Рис. 12.24. Власна і падаюча тіні прямого конуса

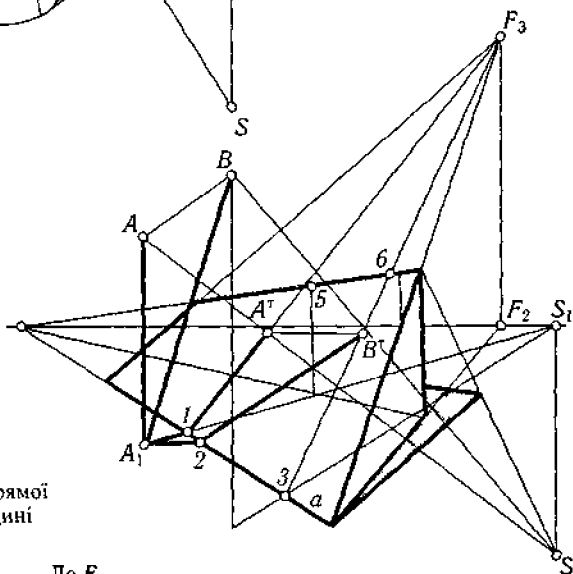


Рис. 12.25. Тінь прямої на похилій площині

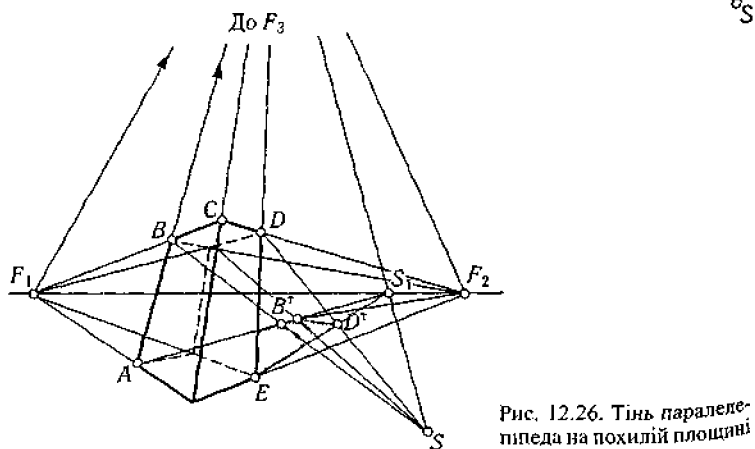


Рис. 12.26. Тінь паралелепіпеда на похилій площині

Побудова тіней на похилій площині

Задається джерело світла, відшукується контур власної тіні, визначається світловий конус. Для знаходження його перетину похилою площиною — контуром падаючої тіні — визначається перетин світлового конуса предметною площиною, що дає змогу виконати потрібні додаткові побудови.

Для побудови тіні прямої AB на рис. 12.25 проводимо прямі A_1S_1 , B_1S_1 . Т. 1 і 3 їх перетину площиною α визначають лінії $1F_3$ та $3F_3$. Точки перетину останніх відповідно лініями AS і BS дадуть т. A^1 та B^1 — тіні т. A і B на α . Знаходимо тінь прямої, сполучаючи ці точки.

Якщо сполучити т. A та B , наприклад із т. A_1 , то тоді рис. 12.25 ілюструватиме побудову тіні плоского відтинку на похилу і предметну площину. Точками зламу тіні будуть т. 1 та 2 .

Наступна задача часто зустрічається при побудові тіней труб і світлових ліхтарів на скатну покрівлю.

Задача 12.11. Побудова на похилій площині тіні паралелепіпеда (рис. 12.26).

Визначаємо контур власної тіні $A - B - C - D - E$. Тінь т. A збігається з A ; тінь т. B знайдеться так, як у попередньому прикладі. Тінь прямої BC паралельна самій прямій; отже, матиме спільну з нею точку збігу. Тінь т. C знаходиться в місці перетину цієї прямої променем CS . Далі, тінь прямої CD паралельна їй, отже, вона має ту саму точку збігу F_1 , а т. D^1 є її перетином променем DS .

Самоконтроль. Для розташування фігури, показаної на рис. 12.26, упишіть прямий круговий циліндр у паралелепіпед і побудуйте його власну та падаючу тіні.

Тіні деяких архітектурних форм

Знання того, як виглядають тіні типових форм дає змогу спростити проектування, інколи рисуючи, а не будуючи їх. Розглядаючи подальші приклади (застосується перспектива на вертикальну площину), зверніть увагу на визначення характерних точок тіней.

Задача 12.12 Побудова тіні абака (рис. 12.27).

Визначаємо власну тінь абака — плити зверху колони. Якщо остання має форму паралелепіпеда (рис. 12.27, а), то будуюмо вторинну проекцію тіні т. A на нижній грані абака — т. A^1_1 є перетином AS фронтальною гранню колони. В точці перетину AS лінією зв'язку $A^1_1A^1_2$ знаходимо т. A^1_2 . Тінь A^1_2 має точку збігу в т. F_1 . Тінь горизонтального ребра абака, що проходить через т. A перпендикулярно до AA^1_1 , є відрізком, що сполучає т. A^1_2 і 1 , — перетин верхнього ребра колони вказаним ребром.

Якщо колона циліндрична (рис. 12.27, б), то на ребрах береться кілька точок і будуються їхні тіні. Слід обов'язково визначити тіні

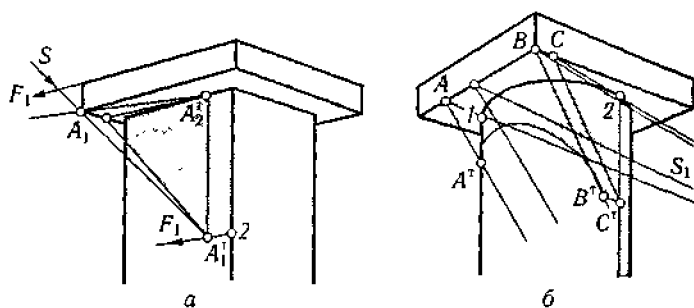


Рис. 12.27. Тіні абака і колони

характерних точок: т. A^T відповідає перетину світлового променя контурною лівою твірною колони; т. B^T є точкою перетину перпендикулярних ребер (її тінь визначить точку зламу кривої тіні); т. C відповідає дотику світлового променя до лінії перетину колони й абака (вертикальна лінія, проведена через її тінь, визначить межу власної тіні колони).

Задача 12.13. Побудова тіні порталу (рис. 12.28).

Власна тінь охопить бічну поверхню арки і ліву сторону виступу; отже, будуть дві падаючі тіні — на воротах та стіні. Характерними точками першої є тіні т. A (перехід від прямої частини арки до округленої) і т. B (найвища точка арки). Хід побудов зрозумілий

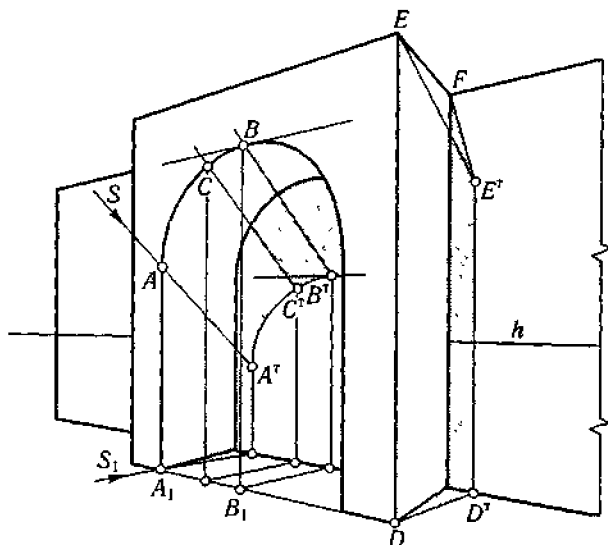


Рис. 12.28. Тіні порталу

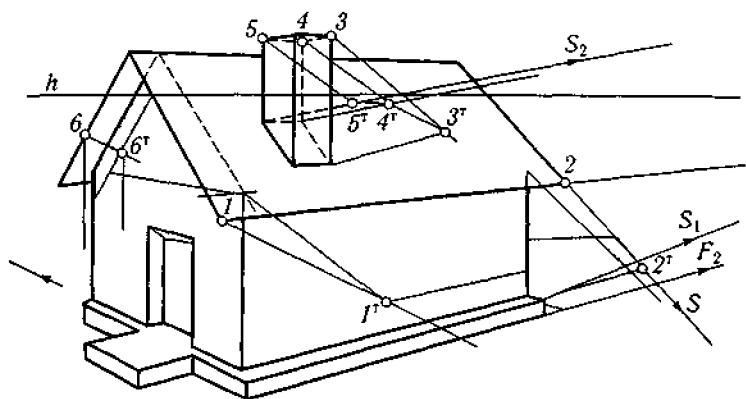


Рис. 12.29. Власні та падаючі тіні будинку

з рисунка. Тінь проміжної т. S визначається так само. Тінь на стіну даватиме ламана $D—E—F$. Тіні цих точок відшукуються звичайним способом.

Самоконтроль. Набутих навичок має бути достатньо, аби самостійно розібрати наступну задачу. Зробіть це, звертаючи увагу на прокоментовані ключові моменти розв'язання.

Задача 12.14. Побудова власних і падаючих тіней одноповерхового будинку (рис. 12.29, перспектива на вертикальній площині).

1. Визначаємо ділянки власних і падаючих тіней — їх даватимуть грані труби (тінь на похилій площині скату покрівлі), скати даху — на фронтоні та фасаді (тінь на бічні стіни на предметній площині). Частково буде затінена ніша дверей. Натомість умови освітлення підбрано так, що ганок не даватиме тіні.

2. Позначаємо контури власних тіней.

3. Будуємо падаючу тінь в ніші дверей.

4. Будуємо падаючу тінь труби на скаті покрівлі.

5. Визначаємо падаючу тінь стін будинку на предметній площині.

6. Виконуємо тонування.

12.5. ПОБУДОВА ТІНЕЙ У ПРОЕКЦІЯХ ІЗ ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ

Така побудова здійснюється досить рідко.

Залежно від розташування Сонця світловий промінь задається кутом нахилу до горизонтальної площини й *азимутом* — кутом між напрямом на північ і горизонтальною проекцією променя, вимірному за рухом стрілки годинника. Найчастіше кут нахилу до-

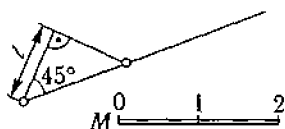


Рис. 12.30. Азимут, кут нахилу, градуювання світлового променя

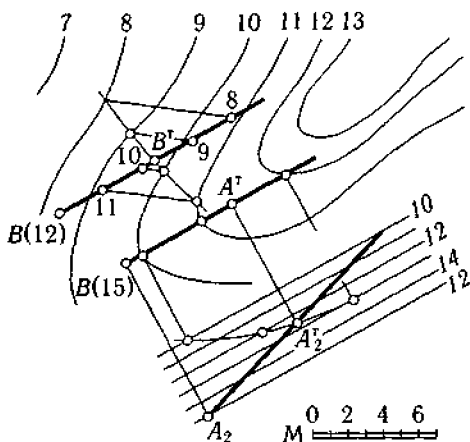


Рис. 12.31. Тінь точки на рельєфі

рівнює 45° ; у такому разі градуювання променя для побудови тіней спрощується (рис. 12.30).

Розв'язання задач на побудову тіней зводиться до використання допоміжних січних площин, як це було описано в розд. 11. Наведемо кілька нескладних прикладів.

Задача 12.15. Побудова тіні точки на рельєфі місцевості (рис. 12.31, кут нахилу променя 45°).

Градуємо промінь так, як це показано на рис. 12.30. Проводимо довільну допоміжну площину через проекцію променя, задаючи її цілочисловими горизонталями (тобто проекція променя не є лінією скату). Знаходимо лінію a її перетину рельєфом. Точка перетину a проекцією променя є тінню t . A .

Самоконтроль. Іншу можливість визначення точки перетину світлового променя рельєфом показано при побудові тіні t . Самостійно розберіть, який метод використано для цього і як виконувалися додаткові побудови.

Задача 12.16. Побудова тіні горизонтальної прямої на рельєфі (кут нахилу променя 30° , рис. 12.32).

Градуємо проекцію променя: відкладаємо від t . B по перпендикуляру до проекції променя одиницю виміру; проводимо через

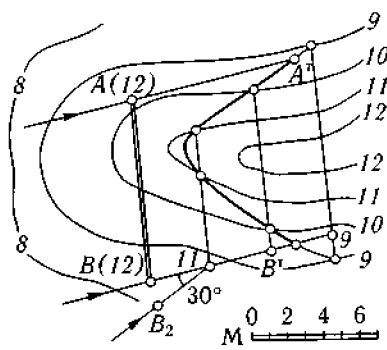


Рис. 12.32. Тінь горизонтальної прямої на рельєфі

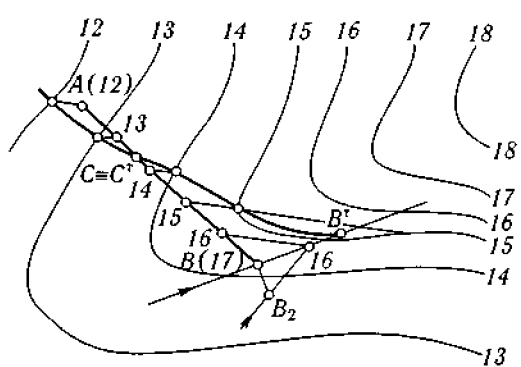


Рис. 12.33. Тінь прямої загального положення на рельєфі

цю точку лінію під кутом 30° до проекції; в точці її перетину проекцією маємо позначку 11 і т. д. Задаємо допоміжну площину цілочисловими горизонталями, паралельними (AB). Перетин її з рельєфом є тінню (AB).

Задача 12.17. Побудова тіні прямої загального положення на рельєфі (рис. 12.33).

Нехай кут нахилу світлових променів дорівнює 30° ; градуюємо проекцію променя, що проходить через т. B, а також вихідну пряму. Задаємо допоміжну площину горизонталями, проводячи їх через точки променя і прямої з однаковими позначками. Будуємо лінію перетину площини рельєфом — тінь прямої.

Побудова тіней площин і гранних поверхонь зводиться до визначення тіней відрізків та вершин ламаної — контуру власної тіні.

Самоконтроль. Задайте довільні рельєф і куб. Побудуйте тінь куба на рельєфі.

ЧАСТИНА

ЧЕТВЕРТО СУЧАСНІ НАПРЯМИ

Курси, що читаються в перших семестрах, здебільшого ґрунтуються на положеннях, здобутих наукою ще в ХІХ ст. Спробуйте, наприклад, підрахувати, скільки часу відводиться на викладання класичної механіки та скільки — ядерної фізики чи теорії відносності. Замисліться, чому це так, і перечитайте розд. 2. Основи геометричного моделювання не є винятком. Однак слід усе-таки дати поняття про зміст сучасного етапу, тобто прикладної геометрії та теорії моделювання. Наступні розділи є лише вступами до них; для повного уявлення треба перечитати багато монографій, дисертацій, наукових збірок...

13. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ

Сконструювати і розрахувати будівельну конструкцію, двигун автомобіля чи крило літака неможливо без геометричної моделі. А як має бути подана геометрична інформація?

Слід розібратись із вимогами до неї, і тоді можна буде схарактеризувати методи моделювання та особливості геометричних задач.

13.1. ВИМОГИ, ЗАДАЧІ, ВИЗНАЧЕННЯ

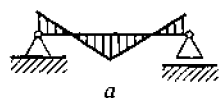
Поняття про мету і методи розрахунку

Розрахувати конструкцію означає підібрати такі форму, розміри, матеріали, щоби бути певним, що вона не розвалиться і не неприпустимо деформується під впливом монтажних та робочих навантажень протягом терміну експлуатації (техніко-економічні та інші розрахунки тут не обговорюються). Розрізняють розрахунки за двома групами граничних станів: напруження конструкції не повинні перевищувати нормативних значень допустимих напружень (перша група), а деформації — допустимих деформацій (друга група). Для кожної з груп можуть проводитися за потребою статичні або динамічні розрахунки; обов'язково мають ураховуватись характеристики матеріалу.

Між навантаженням, напруженням і деформаціями конструкції існують інтегро-диференціальні залежності, які можна відтворити графічно (ці зображення називаються *епюрами сил, моментів та переміщень*). Інтегральна залежність полягає в тому, що кожний наступний епюр приблизно відповідає інтегралу попередньої; диференціальна — в тому, що кожний попередній епюр приблизно відповідає похідній наступного. На рис. 13.1 ці залежності показано для умовної балки, навантаженої найпростішим способом.

Отже, розрахунки зводяться (в певних межах і з урахуванням нормативних та емпіричних коефіцієнтів) до відомих у математиці крайової задачі, а також задачі Коші. Задачі можуть бути розв'язані аналітично, але далеко не всі функції можна інтегрувати. Тому здебільшого використовують *числові методи* — кінцевих різниць, кінцевого елемента, Рунге—Кутта і т. д. Їх ідея полягає в тому, що *відшукується не аналітичний вираз функції φ , а її значення в окремих точках*, причому кожне значення є сумою сусідніх, узятих з певними коефіцієнтами:

$$\varphi_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \psi_{ij},$$



a



b



v

Рис. 13.1. Інтегро-диференціальна залежність для елюрів.

a — сил; б — моментів; в — прогинів балки

де n і t — межі підсумовування, a — коефіцієнти підсумовування, ψ — значення функції в окремих точках.

За наявності *крайових умов* (значень функції та похідних на межі області визначення) можлива організація ітераційного процесу, що провадиться доти, доки різниці з попередніми значеннями відносно поточних значень не перевищуватимуть наперед заданої малої величини. Практично враховуються лише найближчі сусідні значення; позиції їхніх вузлів і вагові коефіцієнти описуються обчислювальними шаблонами, подібними до наведених на рис. 13.2.

Процес буде збіжним лише за умови побудови правильних шаблонів, а це вже висуває вимоги до форми подання геометричної інформації — конструкція має бути задана в *дискретному вигляді*, тобто як *впорядковані масиви точок, ліній, відсіків серединної поверхні чи тривимірних клітинок*. Елементи масивів утворюють *сітки (сітчасті каркаси)*, як на рис. 13.3.

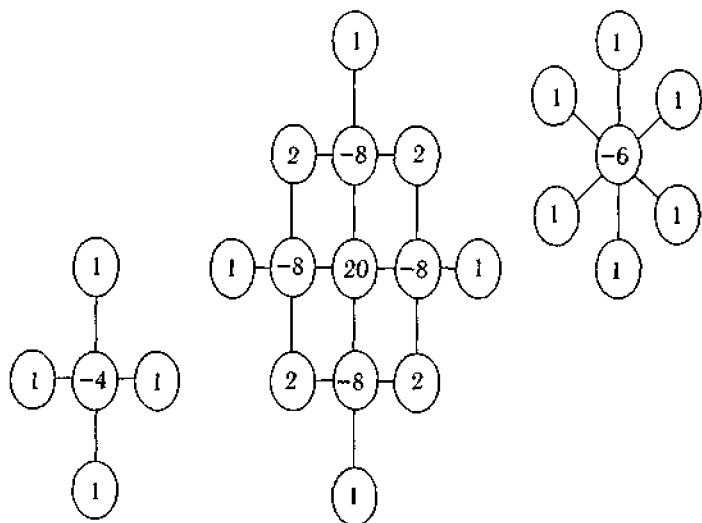


Рис. 13.2. Приклади обчислювальних шаблонів

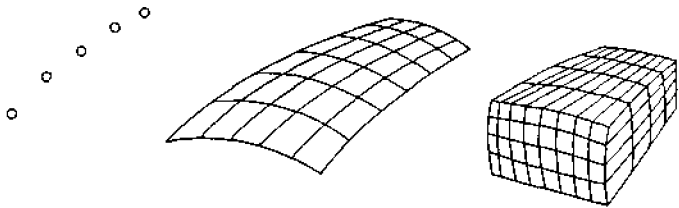


Рис. 13.3. Приклади сітчастих каркасів

Вимога впорядкованості означає *топологічну регулярність сіток* (клітинки мають бути обмежені однаковою кількістю сторін, а вузли повинні мати однакову кількість зв'язків) і *метричну подібність клітинок* (розміри сусідніх елементів мають бути близькими).

Конструювання

Геометричне конструювання полягає у відшуванні *оптимальної за певними критеріями форми конструкції*. Ця стадія проектування передує розрахунку — форма перевіряється (чи йде за ним) або коригується. Таким чином, конструктор працює з геометричною інформацією, що є дискретною чи допускає просту дискретизацію. Конструювання висуває додаткові вимоги до подання інформації: вона має бути *зручною для візуалізації та управління формою* (інтуїтивно зрозумілий і наочний зв'язок між зміною параметрів та форми), в тому числі для *локальної зміни форми, композиції і декомпозиції, розв'язання позиційних та метричних задач*. Остання вимога є далеко не тривіальною. Наприклад, при класичному поданні даних лінія перетину поверхонь трактується як спільна множина їхніх точок; при заданні поверхонь у вигляді масивів точок вона може взагалі не містити жодної з вихідних точок поверхонь! Вимога зручності зумовлюється й іншими процесами, наприклад подальшим обробленням деталі на верстаті з числовим програмним керуванням.

Ще однією вимогою, яка стосується більшості задач конструювання, є забезпечення *гладкості* кривої або поверхні. Гладкість характеризується *порядком*, який дорівнює порядку похідних, однакових у місцях стику суміжних кривих обводу або відсіків поверхні. Похідні можуть бути приблизно подані через числові співвідношення і графічні побудови.

Кореляція з даними вимірів

Одним із способів здобуття первинної інформації є натурні вимірювання деталі, топографічної поверхні тощо. При цьому масиви точок, як правило, не є регулярними. Отже, потрібно розв'язу-

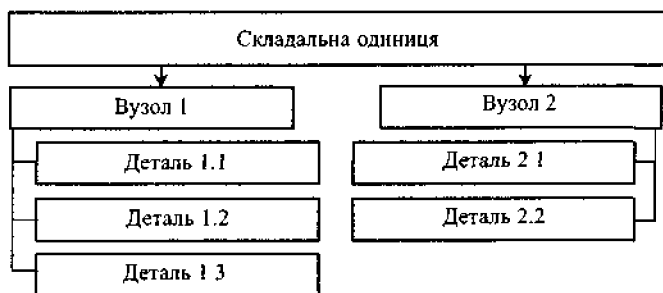


Рис. 13.4. Приклад моделювання структури об'єкта

вати задачу на *впорядкування* даних, окремими випадками якої є задачі *апроксимації* та *інтерполяції* (проведення ліній або відсіків, що обмежують клітинки, з певною наближеністю до заданих точок в першому і точно через них у другому випадках). Потреба ефективності оброблення даних висуває вимоги *однорідності, спеціалізації, структуризації*.

Підбиваючи підсумки, можна дати таке визначення.

Визначення 13.1. *Обчислювальною геометрією називається розділ прикладної геометрії, який вивчає методи геометричного моделювання та конструювання ліній і поверхонь, поданих у дискретному вигляді.*

Іншою її назвою, що широко застосовується в літературі, є *дискретна геометрія*.

13.2. МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ОБ'ЄКТІВ. ВИДИ МОДЕЛЕЙ

Різноманітність машин та споруд, вузлів, деталей, конструкцій зумовлює наявність дуже різних за складністю об'єктів моделювання. Прості лінії або поверхні припускають аналітичний опис; для складних деталей або вузлів це є практично неможливим. Тому розрізняють два етапи: *моделювання структури* і *моделювання форми*.

Моделювання структури об'єкта

Структура найчастіше задається у вигляді *графу*, *вершини* якого відповідають структурним одиницям, а *ребра* — відношенням належності або іншим операціям (рис. 13.4).

Моделювання форми

Деталізація графів залежно від цілей може бути різною. Її межею є зведення складного об'єкта до *базових елементів (примітивів)*, які припускають нескладний опис. Як такі виступають

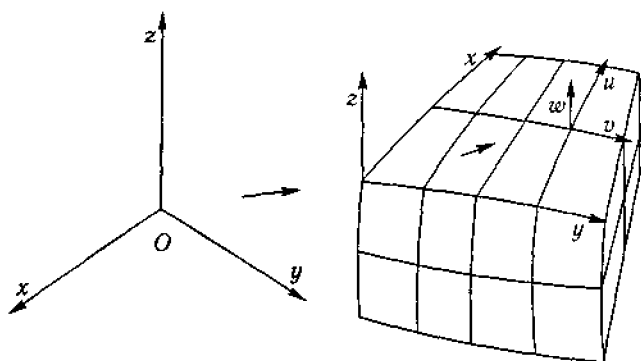


Рис. 13.5. Приклад прив'язки компонентів об'єкта до різних систем координат

тривимірні примітиви, відрізки поверхонь і площин, дуги кривих, відрізки прямих ліній, точки. Форма об'єкта є сукупністю форм базових елементів.

Системи координат

Невдалий вибір системи координат значно ускладнює моделювання, вдалий — полегшує. Наприклад, вибір світових координат з їх прив'язкою до віддалених зірок безнадійно ускладнить процес через необхідність урахування руху Сонця та обертання Землі.

Тому доцільно застосовувати кілька координатних систем окремо для конструкції, вузлів, деталей та базових елементів (рис. 13.5) і сукупність їх взаємних перетворень. Використання криволінійних координат полегшує побудову сіток, даючи змогу зменшити вимірність задачі.

Види моделей

Із викладеного вище випливає, що модель об'єкта M складається з сукупності моделей базових елементів M_i^j , теоретико-множинних, логічних та алгебричних операцій O_j^i , параметрів систем координат C^i і їх перетворень:

$$M = \{ \{ C^i, \{ M_i^j, O_j^i \} \} \},$$

де індекси i та j означають номери поточних рівнів структури та примітивів.

Залежно від складу операцій O_j^i модель належить до одного з двох основних типів:

- *алгебро-логічного*, якщо об'єднання базових елементів забезпечується завдяки теоретико-множинним і логічним операціям;

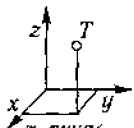
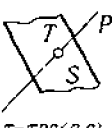
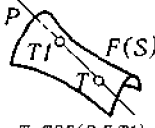
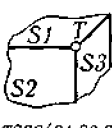
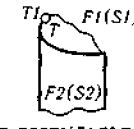


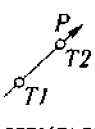
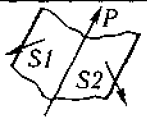
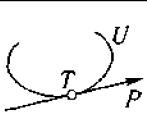

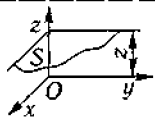
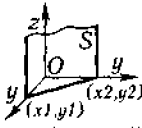
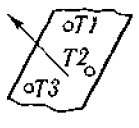
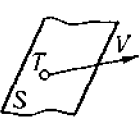
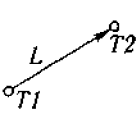
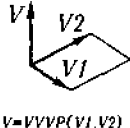
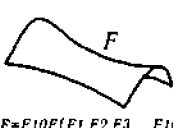
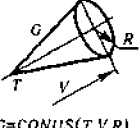
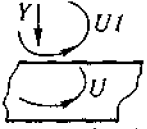

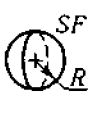
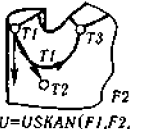
 $T = TXYZ(x, y, z)$	 $T = TPS(P, S)$	 $T = TPF(P, F, T1)$	 $T = TSSS(S1, S2, S3)$
 $T = TFFT3(F1, F2, T1)$	 $T = TFFF(F1, F2, F3, T1)$	 $T = TSIMS(T1, S)$	 $P = PTT3(T1, T2)$
 $P = PSS(S1, S2)$	 $P = PUT(U, T)$	 $S = SSH(S1, H)$	 $S = SXOY(z)$
 $S = SXY(x1, y1, x2, y2)$	 $S = STTT(T1, T2, T3)$	 $S = STVN(T, V)$	 $L = LTT3(T1, T2)$
 $V = VVVP(V1, V2)$	 $F = F10F(F1, F2, F3, F10)$	 $G = CONUS(T, V, R)$	
 $U = PROU(U1, V)$	 $SH = SECHL(D, S)$	 $SF = SFERA(T, R)$	 $U = USKAN(F1, F2, T1, T2, T3, H)$

Рис. 13.6. Приклади геометричних операторів

• *кусково-аналітичного*, якщо для об'єднання використовуються спільні крайові умови.

Існує можливість зведення логічних операцій до алгебричних за допомогою *R-функцій*; тоді утворюється чисто аналітична модель, що дає багато переваг. На жаль, широкому застосуванню *R-функцій* заважає один недолік — складні підсумкові рівняння. Наприклад, рівняння трикутника займає десь два рядки!

У свою чергу, моделі базових елементів можуть бути аналітичними, каркасними (неперервними або дискретними — сітчастими, точковими) тощо.

Наступним рівнем моделювання є *лінгвістичний*.

Базові елементи, структури, операції та перетворення геометричних моделей виражаються засобами штучних мов, зокрема мов програмування. Найпридатнішими для цього є мови, що підтримують абстракції структури й об'єкта, — перш за все об'єктно-орієнтовані. Серед них назвемо поширені C++, Object Pascal. Більш спеціалізованими мовами є Лісп і Пленер, які часто використовуються також у задачах створення штучного інтелекту. Структурі об'єкта ставиться у відповідність абстрактна структура мови, а базовим елементам — елементи цієї структури. Базові операції кожного з рівнів структури виражаються окремими процедурами. Операції та елементи об'єднуються у класи. Такий підхід застосовується вже досить давно.

На рис. 13.6 наведено приклади графічних операторів популярного свого часу графічного розширення Фортрану — ГРАФОР, який навіть не є об'єктно-орієнтованою мовою.

Самоконтроль. Уявіть процес побудови геометричної моделі двигуна літака. Як доцільно побудувати граф, що описує її структуру? Які системи координат ввести? Які вимоги мають задовольняти моделі базових елементів? Яка мова програмування здається вам найбільш удаюю для опису моделі? Поверніться до цих питань після того, як прочитаєте розділ до кінця.

Зважаючи на обсяг розділу, наведемо лише прості приклади практичної реалізації обґрунтованих вище вимог.

13.3. МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ

Забезпечення гладкості

Покажемо графічну інтерпретацію побудови кусково-аналітичної моделі кривої у формі задачі Коші.

Задача 13.1. *Провести обвід з дуг кіл, що проходить через задані точки і забезпечує перший порядок гладкості (рис. 13.7).*

Крайовими умовами є задані точки та похідна (зображена як дотична l) в першій з них. Визначаємо центр O_{12} дуги між т. 1 і 2: він розташовується на перпендикулярі до похідної a (вона ж — дотична дуги). Радіус дорівнює довжині відрізка $O_{12}1$ чи $O_{12}2$. Проводимо перпендикуляр до $O_{12}2$ — дотичну наступної дуги, що є її похідною. Повторюємо побудови для інших точок.

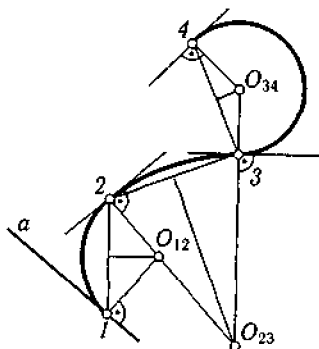


Рис. 13.7. Побудова обводу першого порядку гладкості

Управління формою кривої

Розглянемо забезпечення наочності зв'язку між параметрами і формою кривої на прикладі *інженерного способу* задання еліпса, параболи або гіперболи. Цей спосіб ілюструє розв'язання крайової задачі та є окремим випадком конфігурації Паскаля (див. розд. 7), коли названі криві визначаються за допомогою чотирьох параметрів.

Задача 13.2. Побудувати еліпс, що проходить через t . A та B і має похідні a та c в цих точках (рис. 13.8).

Знаходимо $C = a \cap c$. З'єднуємо t . C з t . E — серединою відрізка AB . Проводимо прямі $A1$ і $B2$, що перетинають (BC) та (AC) . Проводимо прямі $C3$, $3 = A1 \cap B2$ і $B4$, $4 = C3 \cap A1$. Т. $H = B4 \cap A1$ належить еліпсу. Варіюючи положення променів, дістаємо потрібну кількість точок. Плавно сполучаємо їх.

Самоконтроль. Змініть положення t . a і c . Побудуйте криву. Зверніть увагу, як змінилася її форма. Проведіть дослідження — знайдіть, при якому розташуванні t . a та c задаються парабола і гіпербола.

Сплайни

Хоча розглянуті способи є дуже зручними, вони не забезпечують задання та управління кривими високих порядків гладкості, що є конче необхідним при проектуванні літальних апаратів, турбін тощо. Використання поліномів високих степенів, яке здавалося б природним, теж придатне не завжди через іноді «неправильну» поведінку кривих між заданими точками (рис. 13.9, таке явище називається *осциляцією*).

Тому застосовують складніші моделі, зокрема *сплайни* — функції, складені з «кусків» багаточленів з тим чи іншим порядком гладкості в точках стику.

Визначення 13.2. Сплайном $S(t)$ порядку m , заданим на відрізку $[a, b]$ з вузлами $t_i (i = 1, \dots, n; a < t_1 < \dots < t_n < b)$ називається неперервна на цьому відрізку функція, якщо на кожному з проміжків, обмежених точками a, t_i, b , вона є багаточленом степеня, не

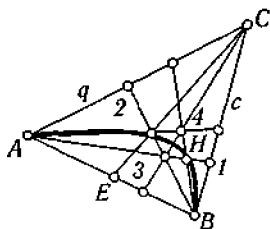


Рис. 13.8. Інженерний спосіб побудови еліпса

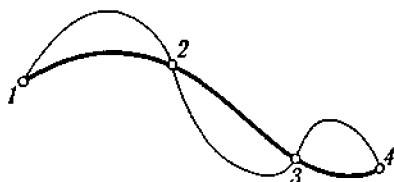


Рис. 13.9. Осциляція при поліномній інтерполяції кривої

більшого за m , а в кожному з вузлів t_i її похідна $s^{(v)}(t)$ ($1 \leq v \leq m$) може мати розрив.

Визначення 13.3. Дефектом k сплайна називається максимальне з чисел k_i , що характеризують розрив $m - k_i + 1$ похідної у вузлі t_i .

Відтак найважливішими характеристиками сплайна є найбільший порядок багаточленів m , а також дефект k .

Залежно від визначення багаточленів існує багато видів сплайнів — ермітові, B -сплайни, кубічні і т. д., які є або *локальними (фінітними)*, тобто мають ненульові значення на обмеженій відносно вихідних даних області визначення, або *глобальними* (ненульові на всій області визначення). Крайові умови теж можуть бути різними. Для прикладу розглянемо B -сплайни.

Визначення 13.4. B -сплайном називається сплайн степеня m дефекту 1, поданий як

$$S = \sum_{i=-m}^n b_i B_i^m(s),$$

де b_i — деякі сталі коефіцієнти;

$$B_i^m(s) = (s_{i+m+1} - s_i) \sum_{j=1}^{i+m+1} \frac{(s_j - s)_+^m}{\omega_{m+1,i}(s_j)}, \quad i = -m, \dots, n-1$$

— нормалізовані B -сплайни, а

$$\omega_{m+1,i}(t) = \prod_{j=1}^{i+m+1} (t - s_j),$$

$t_+^m = \begin{cases} t^m, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ — зрізана степенева функція.

Важливими властивостями B -сплайнів є обмеженість інтервалу задання вузлами $[t_{i-p}, t_i]$, тобто локальність, і лінійна незалежність. Для обчислення B -сплайнів використовуються рекурентна залежність (її перші чотири функції зображено на рис. 13.10) та крайові умови.

Зробимо «лінгвістичний відступ». Англійське слово spline означає «рейка», «планка». Гнучка лінійка, закріплена в кількох точ-

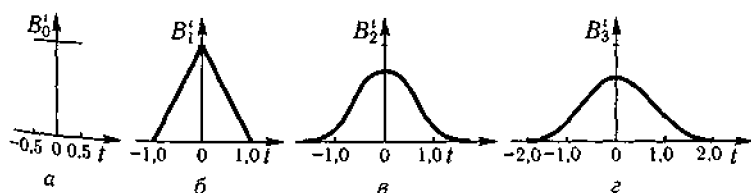


Рис. 13.10. Графіки B -сплайнів:

a — нульового степеня; b — першого степеня, v — другого степеня; z — третього степеня

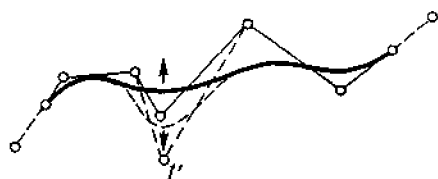


Рис. 13.11. Залежність апроксимувальної кривої від зміни положення вузла

ках, використовувалась для проведення плавної лінії через ці точки. Тепер наведемо кілька аналогій: лінійка — балка, епюри на рис. 13.1 — графіки B -сплайнів на рис. 13.10, формула числових методів — визначення B -сплайнів. Бачимо, як ті самі закономірності проявляються на різних рівнях абстракції.

Метод Безье

Цей метод забезпечує наочне управління формою кривих високих порядків гладкості, що апроксимує задані точки. Точки сполучаються відрізками прямих, а одержаній ламаній ставиться у відповідність багаточлен, степінь якого дорівнює кількості точок. Найчастіше для цього використовуються *багаточлени Бернштейна*, але застосування B -сплайнів дає кращі результати, оскільки забезпечує можливість локального управління формою (на рис. 13.11 штриховою лінією показано зміну вигляду апроксимувальної кривої на основі B -сплайнів при зміні положення одного з вузлів).

13.4. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

У процесі моделювання поверхонь мають бути задоволені ті самі вимоги і розв'язані ті самі задачі впорядкування, апроксимації та інтерполяції, що й при моделюванні кривих. Алгоритми розв'язання теж багато в чому подібні. Розглянемо загальні принципи, приклад упорядкування даних і застосування відсіків.

Принципи моделювання

Нехай поверхню задано параметрично як вектор-функцію $r = r(u, v)$, а вихідні дані — набір крайових умов, точок тощо — як $R(u, v)$. Процедуру моделювання можна подати як $p(r; u, v) = \varphi_{u,v} R(u, v)$, де $\varphi_{u,v}$ — породжуючий оператор. Оскільки побудова оператора в просторі функцій двох змінних є складною задачею, більшість способів зводиться до його подання як композиції одновимірних операторів φ_u та φ_v . Найчастіше використовуються *декартовий добуток і суперпозиція*.

У першому випадку при кінцевій кількості значень $R(u, v)$ процедура моделювання має вигляд

$$p(r; u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \varphi_{i,m}(u) \varphi_{j,n}(v) R(u_i, v_j),$$

де $\varphi_{i,m}(u)$ та $\varphi_{j,n}(v)$ — апроксимаційні, або інтерполяційні, функції однієї змінної.

У другому випадку поверхня подається як

$$p(r; u, v) = (\varphi_u + \varphi_v - \varphi_u \varphi_v) R(u, v).$$

Вихідні дані пов'язуються з функціональними, естетичними, технологічними та іншими вимогами.

Перехід від точкового задання до лінійного каркаса

Нехай вихідні дані подано невпорядкованим масивом точок (рис. 13.12), а в процесі моделювання слід перейти до задання поверхні каркасом ліній (це можуть бути різні сплайни залежно від вимог до гладкості, точності тощо).

У процесі підготовки даних із множини точок вибираються впорядковані множини для кожної із ліній каркаса, виходячи з таких критеріїв:

- дві лінії однієї сім'ї не мають спільних точок;
- межі поверхні розділяються кутовими точками на чотири частини так, щоб початкові та кінцеві точки ліній однієї сім'ї знаходились на протилежних сторонах і в заданих точках;
- лінії проходять через задані точки або є наближеними до них (рис. 13.13, а).

Далі для кожної з підмножин точок однієї сім'ї будується сплайн, який відображає відповідну лінію. Вводиться впорядкована сітка (з однаковою кількістю точок для всіх ліній) та обчислюються координати

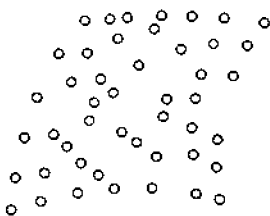


Рис. 13.12. Вихідні дані для моделювання поверхні

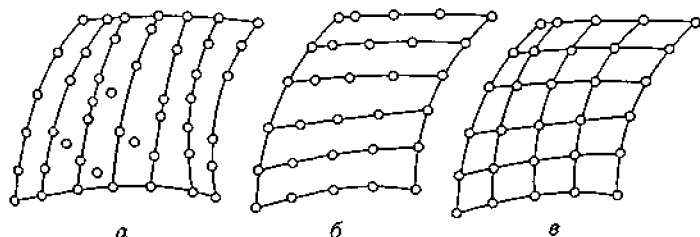


Рис. 13.13. Перехід до задання поверхні каркасом ліній

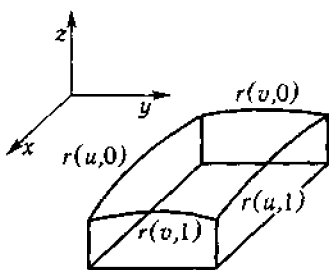


Рис. 13.14. Найпростіша апроксимація поверхні методом Кунса

як траєкторій руху точки по поверхні з підібраними зовнішніми зусиллями і зв'язками [16].

Перехід від лінійного каркаса до задання відсіками

По дві суміжні лінії з кожної сім'ї визначають межі відсіку поверхні (ці умови можуть доповнюватись значеннями похідних, заданими або обчисленими). Така інформація використовується для визначення рівнянь відсіків, що апроксимують поверхню. Однією з можливостей цього є *метод Кунса* (рис. 13.14).

У простому варіанті відсік визначається тільки за чотирма граничними кривими $r(u,0)$, $r(u,1)$, $r(0,v)$, $r(1,v)$:

$$p(u,v) = r(u,0)(1-v) + r(u,1)v + r(0,v)(1-u) + r(1,v)u - r(0,0)(1-u)(1-v) - r(0,1)v(1-u) - r(1,0)u(1-v) - r(1,1)uv$$

Самоконтроль. Який порядок гладкості поверхні забезпечується в цьому випадку?

Для забезпечення високих порядків гладкості лінійні функції спряження замінюються багаточленами високих степенів, а граничні умови доповнюються похідними в напрямках, перпендикулярних до граничних кривих.

13.5. МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄМНИХ ТІЛ

У цьому випадку, який ще називається *твердотільним моделюванням*, вимоги до геометричної інформації подібні до попередніх. Відмінності зумовлені особливостями застосування, а саме: акцентом на забезпечення наочності об'ємно-планувальних композицій в будівництві при генерації пейзажів (див. розд. 14), зображенні складальних одиниць у машинобудуванні. Вони виражаються

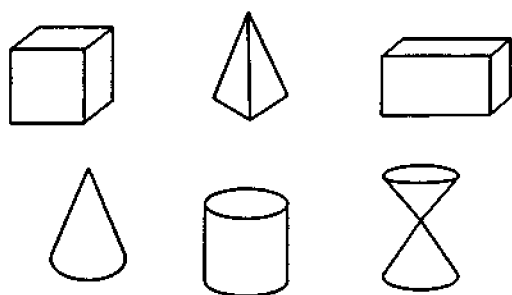


Рис. 13.15. Базові тривимірні елементи

в певному заниженні вимог до точності подання, іншому наборі базових елементів та операцій, описові структури об'єктів.

До базових елементів належать, як правило, нескладні багатогранники, прості поверхні обертання, у спеціалізованих системах — найпоширеніші деталі й конструкції (рис. 13.15). Користувач має справу з наочними зображеннями примітивів у тих чи інших проєкційних системах.

До операцій належать об'єднання, перетин, доповнення, інші алгебричні операції, трансформації, переміщення тощо.

Лінгвістичні засоби мають суміщати в межах структур об'єктів описи зв'язків об'ємних примітивів і допустимі операції. Приклади графічних редакторів, де реалізовано такі структури, наведено в розд. 14.

Останнім часом твердотільне моделювання стає провідною технологією конструювання об'єктів.

13.6. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Розглянемо на кількох прикладах позиційних задач, як змінюються (або замінюються) деякі з описаних у другій частині посібника алгоритмів.

Належність точки поверхні або лінії

При неявному поданні поверхні ϕ у вигляді $\phi(x, y, z) = 0$ належність точки встановлюється прямою підстановкою її координат. При параметричному заданні $z^i = z^i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, після підстановки координат точки розв'язуються два рівняння з трьох відносно x та y . Якщо точка належить поверхні, то її третя координата збігається з обчисленою з третього рівняння після підстановки в нього здобутих значень.

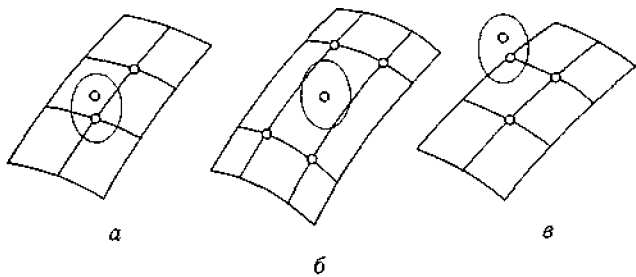


Рис. 13.16. Визначення належності точки поверхні, поданої каркасом точок

При аналітичному заданні лінії дії аналогічні.

Таким чином, за наявності аналітичного опису (в тому числі за допомогою R -функцій) задача розв'язується просто і немає потреби в застосуванні методів нарисної геометрії.

У разі якщо поверхню подано дискретно — каркасом точок, існують два шляхи визначення.

По-перше, можна перейти від подання поверхні точками до лінійного каркаса, потім — до відсіків і для кожного з них виконати перевірку описаним вище способом. Зрозуміло, що трудомісткість такої перевірки є занадто високою через неможливість заздалегідь вказати, для якого з відсіків має здійснюватись перевірка.

По-друге, можна ввести поняття околу точки та вважати, що точка належить поверхні, якщо в околі знаходиться хоча б одна точка каркаса (рис. 13.16, *a*). Зрозуміло, що правильність перевірки залежатиме від того, наскільки вдало підібрано окіл відносно загущення каркаса: на рис. 13.16, *в* перевірка дала б неправильні результати.

Урахувати ці обставини при написанні програми автоматичного розрахунку дуже важко. Такі самі труднощі виникають при перевірці належності точки лінії. Тому доцільно застосовувати *інтерактивне моделювання*, коли проміжні результати виводяться на монітор, а користувач має змогу приймати рішення про подальший хід моделювання (наприклад, визначати, які відтинки мають бути перевірені, або як відкоригувати окіл) — і тут уже реалізуються описані в другій частині алгоритми. Це значно підвищує ефективність розрахунків.

Взаємний перетин поверхонь

Побудова перетину зводиться до перевизначення лінії, знайденої з рівнянь, що описують вихідні поверхні, до параметричного вигляду. При цьому доцільно застосовувати метод допоміжних січних площин або поверхонь. Загальна схема розв'язання задачі така.

Для поверхонь $\varphi_1(x, y, z) = 0$ і $\varphi_2(x, y, z) = 0$ вводиться явна залежність однієї з координат від параметра t , наприклад $z = z^3(t)$. Далі параметру t надають значень з інтервалу $t_1 \leq t \leq t_N$. Для кожного $t_i, i = 1, 2, \dots, N$, обчислюють $z^3(t_i)$ і координати $z^1(t_i), z^2(t_i)$ з рівнянь $\varphi_1(x, y, z^3(t)) = 0$ та $\varphi_2(x, y, z^3(t)) = 0$. В результаті лінія перетину поверхонь задається впорядкованою за параметром t множиною точок $p_i(z^1_i, z^2_i, z^3_i)$. Для аналітичного задання лінії розв'язується задача апроксимації чи інтерполяції кривої за множиною точок p .

Із незначними змінами ця сама схема застосовується для перетину інших фігур. При цьому можливі спрощення.

Наприклад, якщо відшукується точка перетину кривої лінії, заданої параметрично, з поверхнею, заданою неявно, то для визначення координат точки досить підставити рівняння кривої $z^i = z^i(t)$, $i = 1, 2, 3$, в рівняння поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ і розв'язати вираз $\varphi(z^1(t), z^2(t), z^3(t)) = 0$ відносно параметра t . Результатом підстановки знайденого розв'язку t_i у рівняння кривої будуть координати z^1_i, z^2_i, z^3_i точки перетину кривої з поверхнею (наявність кількох розв'язків означає, що таких точок буде кілька).

Таким чином, тут теж іноді доцільно використовувати суто аналітичні розв'язки, а іноді — алгоритми нарисної геометрії. Областю ефективного застосування інтерактивних методів є пошук особливих і характерних точок кривих, що є результатами перетинів поверхонь.

Самоконтроль. Проведіть невелике дослідження. Нарисуйте кілька варіантів розташування поверхонь обертання (загальний випадок, проекційвальне положення, виконання теореми Монжа тощо). Уявіть хід і трудомісткість розв'язання задачі на їх взаємній перетин. Порівняйте за цими показниками аналітичні та графічні методи.

14. КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Фотографії планет, креслення машин, ігри, зв'язок — не можна вже й уявити всі сфери застосування комп'ютерної графіки.

І не треба, оскільки наш віртуальний світ ніколи не стане таким, як раніше.

14.1. ВИЗНАЧЕННЯ, ЗАДАЧІ, КОМПОНЕНТИ

Визначення 14.1. *Комп'ютерною графікою називається сукупність технічних, математичних, лінгвістичних і програмних засобів, що забезпечують взаємодію користувача та комп'ютера на рівні графічних образів.*

Лінгвістична складова згадувалася в розд. 13; розглянемо інші компоненти комп'ютерної графіки.

Задачі

Групи різних за складністю задач, а також відповідні комплекси технічних і програмних засобів коротко схарактеризовано в табл. 4.

Суперкомп'ютерів потужністю десятки і сотні мільярдів операцій за секунду потребують задачі глобального прогнозування економіки, погоди і т. д. Суперкомп'ютери (тоді вони були набагато менш потужні, ніж зараз) використовувались у 80-ті роки ХХ ст. для прогнозування наслідків ядерного конфлікту між СРСР і Сполученими Штатами Америки, відомого як «теорія ядерної зими». Медико-генетичні дослідження, зокрема розшифрування геному людини, теж потребують максимальної потужності.

Прикладом використання потужних спеціалізованих комп'ютерів був здійснений в 1986 р. під керівництвом академіка Р. З. Сагдєєва проект «Вега», коли космічний апарат наблизився до Венери та сфотографував її, потім використав тяжіння Венери для зміни траєкторії, зблизився з ядром комети Галєя, сфотографував його і передав фотографії на Землю. Високі швидкості, необхідність точного націлювання камери, оброблення та передача зображень у режимі реального часу (використовувались растрові зображення, де різні за яскравістю ділянки кодувались умовними кольорами), надвисока надійність — ось вимоги до задіяних комп'ютерів. Дру-

Таблиця 4 Системи комп'ютерної графіки

Група задач	Задачі	Обладнання	Програмне забезпечення
1	Дослідження складних систем	Спеціально спроектовані суперкомп'ютери	Спеціально розроблені операційні системи (ОС) та програми
2	Спеціальні задачі	Замовлені мікросхеми, периферія	Спеціальні ОС і програми
3	Дослідження, розрахунки, тренажери, відеоефекти та відеомонтаж	Мейнфрейми, комп'ютерні мережі, професійна і стандартна периферія	ОС на основі UNIX, спеціально розроблені та стандартні програми
4	Наукові дослідження, проектні роботи, професійна поліграфія	Робочі станції (PC-сумісні, Sun, HP, Alpha), професійна периферія	ОС Unix (клони), Windows XP/2000, MAC, OS/2; пакети InDesign, Xpress, Photoshop, AutoCAD, ArhiCAD, MathCad тощо
5	Проектні роботи, ігри, поліграфія	Персональні комп'ютери (ПК), ноутбуки, стандартна периферія	ОС Windows-XP/2000, Linux, MAC, Be; пакети Bryce 3D, Painter, Auto-CAD, ArhiCAD, MathCad

гий приклад — системи відображення інформації, зокрема навігаційні системи сучасних літаків.

Завданням, що потребувало створення мережі з кількох сотень робочих станцій, стала розробка спеціальних ефектів для кінофільму «Титанік». Мережа мала працювати кілька місяців! З цього випливає, що створення відеоефектів на професійному рівні характеризується надзвичайно великими вимогами до обчислювальної техніки і потребує повного використання можливостей всіх її складових.

Мейнфреймів (так називаються комп'ютери середньої потужності) потребують розрахунки літаків та космічних апаратів, складних оболонок тощо.

Для задач четвертої і п'ятої груп як таких, що обов'язково траплятимуться в подальшій фаховій діяльності, наведемо детальніші характеристики технічних та програмних комплексів. Слід зауважити, що ці характеристики невпинно прогресують у міру успіхів комп'ютерної індустрії.

Самоконтроль. Наведіть власні приклади використання комп'ютерної графіки для розв'язання задач перших трьох груп.

Технічні засоби

Сукупність технічних засобів для робочих станцій і ПК відображено на рис. 14.1.

Електронна обчислювальна машин (ЕОМ):

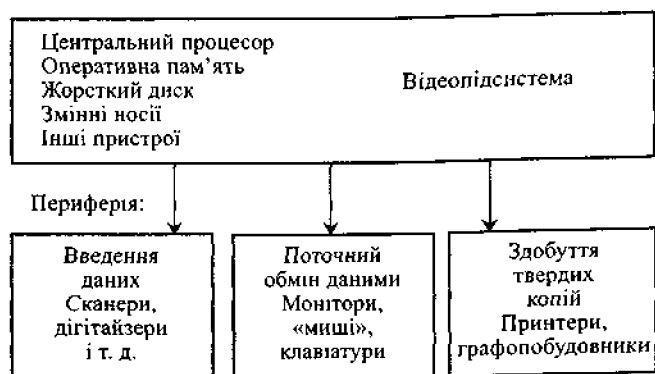


Рис. 14.1. Основні технічні засоби для робочих станцій і ПК

Електронні обчислювальні машини. Вони виконують необхідні перетворення та розрахунки на всіх стадіях оброблення графічної інформації і забезпечують координацію периферійних пристроїв. Бажаною умовою є *реальність часу* — користувач не повинен довго чекати, поки з'являться результати. Відтак технічні вимоги є досить високими.

Для виконання простих чи середньої складності робіт найчастіше використовуються ПК або *робочі станції*, що мають одно- або багатопроцесорні конфігурації на основі 32-розрядних процесорів CISC-архітектури фірми Intel (Pentium IV) або AMD (Athlon) з тактовою частотою понад 2—3 ГГц. Ємність оперативної пам'яті DDR SDRAM або Rambus — понад 512 Мбайт. Для виконання складних робіт, які потребують більшої потужності та розширеної адресації, застосовуються конфігурації на основі 64-розрядних процесорів RISC-архітектури: Alpha від Compaq, Ultra SPARK від Sun, PA від Hewlett-Packard, Power від IBM, потужність яких сягає мільярдів операцій за секунду.

Ємність жорсткого диска — понад 40 Гбайт, інтерфейс — Ultra Wide SCSI. Змінні носії — магнітооптичні та лазерні диски. Це зумовлено великими обсягами графічної інформації і необхідністю її багатократного перезапису.

Відеопідсистема також має бути досить потужною, оскільки повинна забезпечувати якісне оброблення як 2D (двовимірної), так і 3D (тривимірної) графіки з високими частотами та високою роздільною здатністю. Використовуються продукти фірм Intense3D,

Oxygen, Elsa та ін. Із найпопулярніших на час написання посібника відеопроцесорів можуть застосовуватися Matrox Parhelia, Nvidia GeForce 4 чи 5, ATI RADEON 9800. Останні мають спеціальні геометричні співпроцесори, які апаратно реалізують деякі ефекти, що підсилюють реалістичність зображення. Іншими важливими характеристиками відеопідсистеми є частота цифро-аналогового перетворювача DAC, ємність (не менш як 128 Мбайт) і частота відеопам'яті (використовується спеціальна графічна пам'ять VRAM, SDRAM та ін.; останнім часом — DDR SDRAM). Зазначимо також, що для професійної графіки найважливішою є повна підтримка графічних можливостей протоколу Open GL.

Пристрої введення і відображення. Метою оброблення креслень, фотографій тощо на стадії введення є надання їм цифрової форми, яка є прийнятною для ЕОМ. Пристрої, що забезпечують це, називаються *дигітайзерами*; серед непрофесіоналів більш поширеним є термін *сканери* (крім того, є також конструктивні відмінності).

Два основних типи цих пристроїв забезпечують сканування всієї площі документа або окремих ліній. Переміщення відносно світлочутливого елемента виконується автоматично або вручну. Практично всі сучасні сканери забезпечують можливість передачі кольору — дуже цінна властивість для поліграфії. Сканери істотно різняться за розмірами, типами світлочутливих елементів, роздільною здатністю, якістю оцифровування і передачі кольору, швидкістю.

Зазначимо, що ціна «домашніх» пристроїв (у межах кількох десятків доларів) десь на два порядки менша, ніж ціна професійних.

Пристрої поточного обміну забезпечують «спілкування на рівні графічних образів», а також слугують для введення команд, цифрових та інших даних у процесі *інтерактивної* (діалогової в режимі реального часу) взаємодії користувача з ЕОМ.

Для введення цифрової і символічної інформації використовуються клавіатури; для позиціонування — «миші» та, рідше, трекболи, джойстики, світлові пера.

Найважливішим пристроєм цієї групи є монітор. Найчастіше застосовуються монітори на основі електронно-променевих трубок (ЕПТ) і рідких кристалів (LCD).

До переваг LCD-моніторів належать: низький рівень випромінювання і енерговитрат, висока якість статичного зображення (контраст, яскравість), відсутність проблем недостатнього фокусування і бликів, недосяжна для ЕПТ-моніторів роздільна здатність (до 2000 × 5000 точок для спеціалізованих моніторів фірми IBM). Проте їх використання обмежено, в основному, медициною та системами відображення інформації через недосконалість зміни

роздільної здатності, а також недостатню динаміку зміни зображення. Втім в останніх моделях ці недоліки значно зменшено.

Таким чином, найпоширенішими є ЕПТ-монітори. Професійні монітори для виконання проектних робіт повинні задовольняти такі вимоги: мати діагональ понад 19—21 дюймів, підтримувати роздільну здатність не менш як 1600×1200 точок (для порівняння комфортна робота в офісних пакетах забезпечується при 800×600 точок) на ергономічних частотах (не менше 85 Гц), мати відносно низький рівень випромінювання, точне фокусування по всій площині екрана, забезпечувати незмінність зображення при зміні кольору, мати багатий набір регулювань. Якщо монітор використовується для роботи з кольором, то він повинен мати спеціальне вимірювальне обладнання і пристрої, що підтримують незмінними його колористичні характеристики протягом довгого часу. Застосовуються монітори з тіньовою маскою, апертурною решіткою, покриттям Chroma Clear. Ціна професійних моніторів є дуже високою; наприклад, монітори фірми Varco, спеціалізовані для роботи з кольором, коштують до 50 тис. доларів.

Пристрої виведення. Вони використовуються для здобуття креслень, документів і специфікацій. Іноді геометричні дані спрямовуються безпосередньо до верстатів з числовим програмним керуванням.

Для друкування документів порівняно невеликого формату застосовуються принтери, в інших випадках — графопобудовники (плотери).

Серед трьох основних типів принтерів матричні використовуються для друку текстових документів, струминні — для кольорового друку документів та фотографій в невеликому обсязі в умовах малого офісу і лазерні (почасти сублимаційні та світло-діодні) — для чорно-білого і кольорового друку в поліграфічній галузі, тобто там, де потрібні великі обсяги друку та можливість тривалого зберігання відбитків. Ціна професійних кольорових лазерних принтерів сягає високого рівня; наприклад, твердочорнильні моделі Tektronix Phaser коштують кілька тисяч доларів.

Розміри, продуктивність, інші технічні характеристики плотерів є дуже різними, проте конструктивно вони належать лише до двох типів: планшетних, коли пишучий елемент переміщується відносно аркуша, і барабанних, коли аркуш переміщується відносно пишучого елемента. Перевагою другого типу є можливість викреслювати необмежені в одному з напрямів зображення. Дуже різняться плотери ціною; найдорожчі з них, виготовлені за спеціальними замовленнями, коштують десятки тисяч доларів.

Самоконтроль. Охарактеризуйте склад технічних засобів, що забезпечують оброблення зображень. Наведіть вимоги до кожного з етапів оброблення. Спробуйте сконструювати робочу станцію, призначену для розрахунку корпусу літака числовими методами.

Математичне забезпечення

В основі математичного забезпечення комп'ютерної графіки лежить обчислювальна геометрія, тобто моделі та методи, розглянуті в розд. 13. Найчастіше вимоги до гладкості не є занадто високими, що набагато спрощує моделювання. Специфічні задачі, пов'язані з моделюванням великих сцен і забезпеченням реалістичності зображення (вилучення невидимих ліній, побудова тіней, фарбування, ефекти, динаміка), описано в п. 14.2.

Програмне забезпечення

Обсяг програмного забезпечення досяг величини, що унеможливує навіть стислий огляд пакетів. Це змушує зупинитись лише на найпопулярніших із них.

Серед пакетів автоматизованого проектування першим за обсягом інсталяційної бази є АВТОКАД фірми Autodesk (остання версія — АВТОКАД-2004 — є сімнадцятою). Пакет забезпечує повний цикл графічних робіт, починаючи від креслення простих деталей і закінчуючи тривимірними зображеннями складних вузлів та машин з необхідними розрізами і розмірами в основних проекційних системах. Зручним є використання кольору (для спецефектів краще застосовувати, наприклад, 3D Studio). Важливими є забезпечення групової роботи, простий обмін даними, наявність багатьох бібліотек елементів та вузлів, можливість розширення функцій модулями, написаними спеціальною мовою Autolisp. Пакет давно русифіковано. Основною сферою його застосування є машинобудування (автору відомо книгу з АВТОКАДу, цілком побудовану на будівельних прикладах). До недоліків належать: непропорційно висока ціна, великий обсяг, мала швидкодія (це виправляється в останніх версіях), заплутаний інтерфейс — наслідки застарілої ідеології, що лежить в основі пакета. Більш сучасними, зручними і не менш функціональними конкурентами є Pro/Engineer, Euclid, Solid Works, Solid Edge, Mechanical Desktop, IronCAD (рис. 14.2).

Серед вітчизняних розробок на увагу заслуговує КОМПАС.

Найпоширенішим пакетом автоматизації архітектурного проектування є ArchiCAD; русифіковано його восьму версію. Пакет забезпечує всі стадії проектування, має багаті бібліотеки будівельних елементів і конструкцій, надає широкі та зручні можливості оформлення креслень (залежно від масштабу автоматично змінює детальність зображення, будує дахи, легко розміщує віконні, а також дверні прорізи, дає змогу проводити анімацію, працювати в мережі та ін.). За ортогональними кресленнями пакет автоматично будує перспективу. Використовуються також інші проекційні системи.

Серед більш спеціалізованих альтернатив на увагу заслуговує пакет INTEAR (розроблено під керівництвом професора К. О. Са-

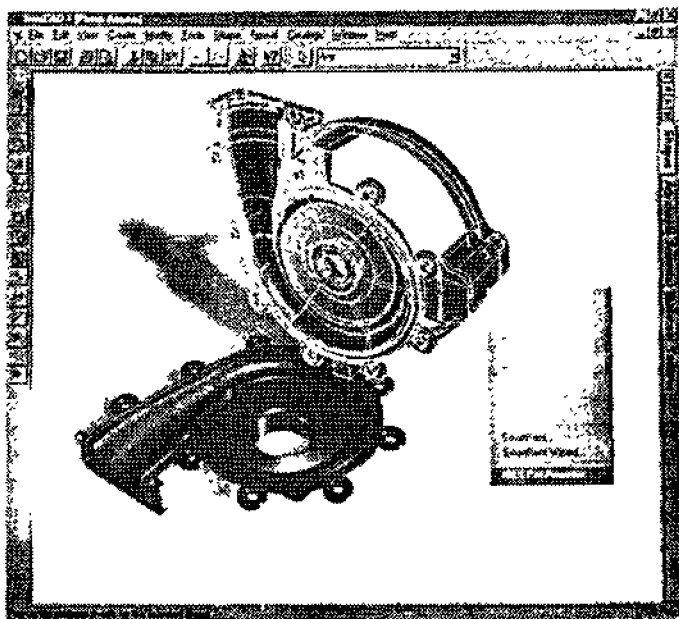


Рис. 14.2. Головне меню пакета IproCAD

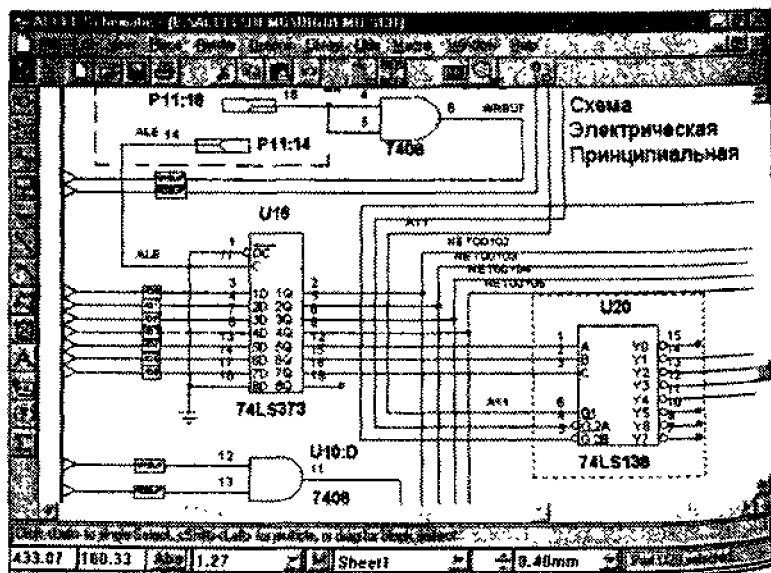


Рис. 14.3. Інтерфейс редактора Schematic у складі ACCEL EDA

зона), найбільш доцільний на стадії ескізного проектування будівель. Іншою його перевагою є невимогливість до ресурсів; він працює в середовищі DOS.

Популярним пакетом проектування електронних плат аналогових і цифрових пристроїв є P-CAD. Його тринадцята Windows-версія називається ACCEL EDA. Пакет складається з п'яти основних модулів: Library Manager (менеджер бібліотек), Schematic (рис. 14.3, редактор електричних принципів схем), PCB (редактор друкованих плат), Autorouters (автотрасувальники), Relay (програма забезпечення колективної роботи).

Для дизайну поліграфічної продукції найбільш придатними є пакети фірм Adobe (InDesign) і Quark (Xpress). Для оброблення растрових зображень найчастіше використовується Adobe Photoshop, векторної графіки — Corel Draw.

Імітацію пензля художника й автоматизацію роботи митця здійснює програма Painter (доступною є восьма версія); генерація пейзажів здійснюється за допомогою професійної програми Bryce 3D (поточною є п'ята версія). На жаль, тут немає можливості згадати інші вдалі програми.

Самоконтроль. Охарактеризуйте графічні пакети, які використовуються для автоматизації проектування в машинобудуванні та будівництві. Додайте до наведених у тексті прикладів власні.

14.2. ПОБУДОВА РЕАЛІСТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Покажемо побудову зображення за допомогою програми Bryce 3D, коментуючи всі операції. Основною проекційною системою програми є перспектива, яка задається координатною сіткою предметної площини, лінією горизонту і маркером (рис. 14.4).

Для здобуття зображення в *області індикації* (тут — на всій площині екрана) здійснюються операції *кадрування* (відображення області формування зображення на область індикації) та *відсікання* (вилучення ліній за межами області індикації).

За допомогою спеціального інструментарію можна змінити елементи апарата перспективи. Ці зміни можна простежити як у самій перспективі (рис. 14.5, а), так і в плані (рис. 14.5, б).

При цьому відбуваються перетворення координат. Використовуються *однорідні координати* ($3 + 1$ — вимірні координати; додатковий вимір — скалярний множник — додається у зв'язку з необхідністю описувати невластні елементи проективного простору) і застосовується матрична форма запису. Підсумкові перспективні координати розраховують за формулою

$$V_n = V_r T_1 T_2 T_3 T_4,$$

де V_n — вектор перспективних координат точки; V_r — вектор однорідних тривимірних координат точки; T_1, T_2, T_3, T_4 — матриці пе-

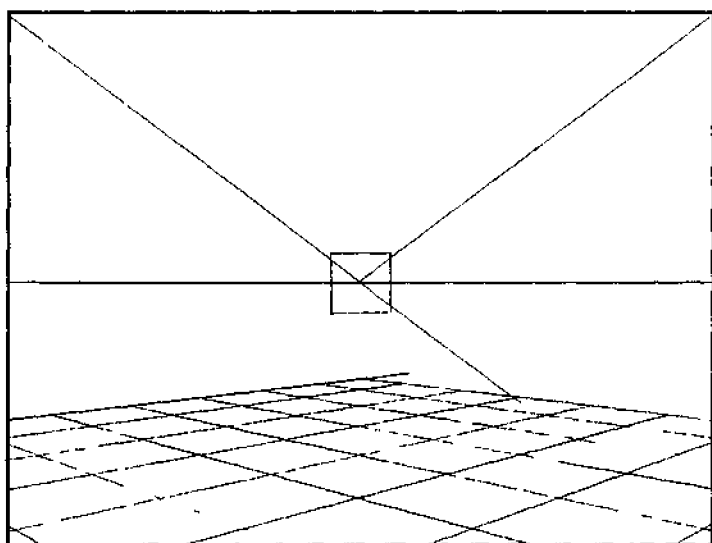


Рис. 14.4. Апарат перспективи у програмі Bryce 3D

ретворень простору відповідно паралельного перенесення, повороту навколо осі y , повороту навколо осі x , перспективного перетворення.

При суміщенні початку координат із головною точкою картинної площини, осей x та y з осями u, v картинної системи координат і розташуванні точки зору на від'ємній частині z на відстані k від картини формула набере вигляду

$$[u, v, 0, 1] = [x, y, z, 1] T_1 T_2 T_3 T_4,$$

де

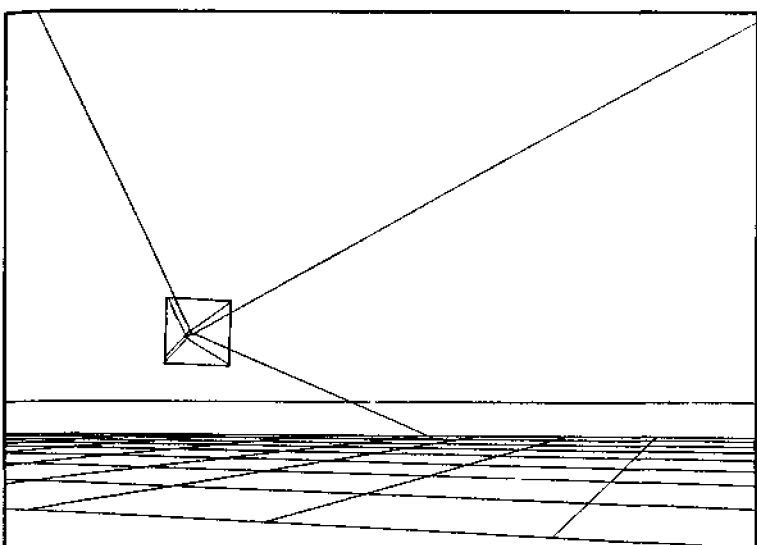
$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix},$$

l, m, n — зміщення паралельно осям x, y, z відповідно;

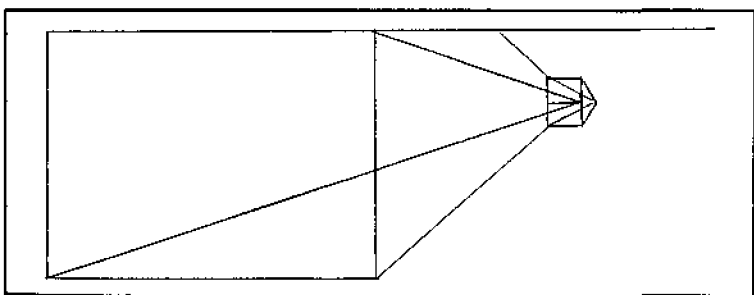
$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

α — кут повороту навколо осі y ;

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



a



б

Рис. 14.5. Зміна апарата перспективи

β — кут повороту навколо осі x ;

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тепер на картину можна помістити ті чи інші примітиви. Програма Вгусе 3D має багатий набір тривимірних примітивів, серед яких є не тільки прості геометричні фігури, а й зразки рельєфу, зображення людини тощо. Для цього досить «зачепити» їх «мишею» і перенести з палітри у верхній частині екрана до екрана редактора. Зображення примітивів спочатку є лінійними каркасами (рис. 14.6).

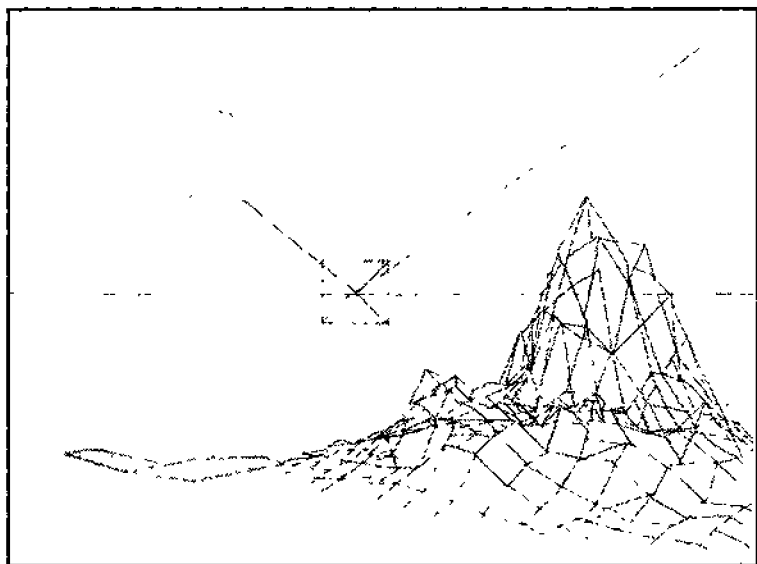


Рис. 14.6. Розміщення примітивів на картині

Примітиви можна збільшувати, зменшувати, повертати, склеювати — відповідні операції програмно реалізовані. Зробимо це за допомогою наявного інструментарію.

Тепер надамо зображенню реалістичності.

Перш за все проводиться *вилучення невидимих ліній*. В основі цієї операції лежить спосіб конкуруючих точок, однак в алгоритмах, що застосовуються практично, робляться ті чи інші спрощення, спрямовані на скорочення розрахунків. Наприклад, в *алгоритмі Робертса* процедура здійснюється в три етапи: відсікання по краях екрана, вилучення закритих ліній, перевірка на закриття іншими об'єктами в межах піраміди видимості. В *алгоритмі Варнока* екран поділяється на маленькі області, вилучення ліній в яких є нескладною операцією, потім організовується послідовний перехід від однієї області до іншої.

Наступним кроком є *фарбування* (*rendering*; будемо наводити англійські назви, оскільки вони зустрічаються в літературі без перекладу), для чого на контур зображення накладається *текстура* (*texture*, зображення матеріалу).

Далі *будується тінь*. Результат здійснення названих операцій показано на рис. 14.7.

Застосовувані методи побудови тіней принципово не відрізняються від описаних у розд. 12; практичні алгоритми спрямовані на спрощення розрахунків. Одним з найбільш удалих є *заміщення за*

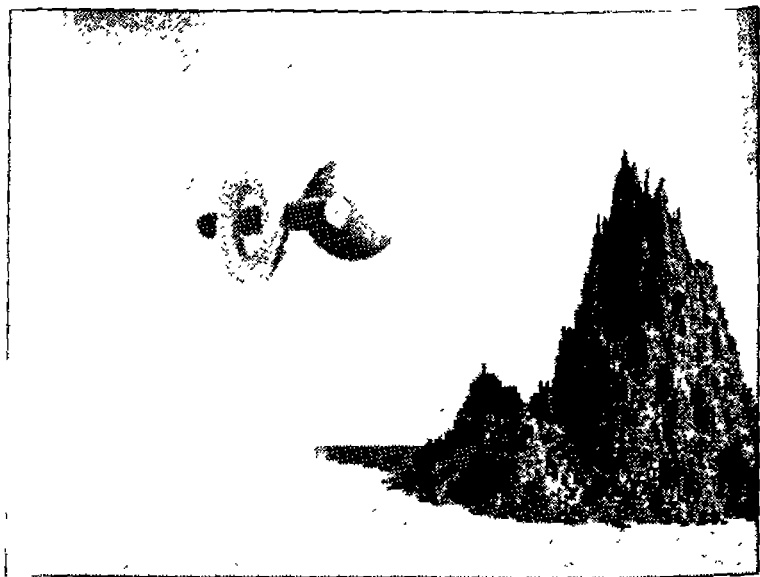


Рис. 14.7. Вилучення невидимих ліній, накладання текстур, побудова тіней

Гуро (*Gouraud shading*), що забезпечує плавну зміну кольору в міру віддалення від джерела світла. Останнім часом застосовується така процедура: накладаються текстури з уже побудованими тінями, що, звичайно, скорочує розрахунки. У відеопроцесорах останнього покоління апаратно реалізується функція *transformation & lighting*, яка реалізує розрахунки затінення при різних джерелах світла.

Звернемо увагу на ступінчастий контур зображення, що, звичайно, погіршує його якість. Для боротьби з цим застосовують *anti-aliasing* — згладжування контуру. Це дуже потрібна в Вгусе 3D операція, оскільки програма реалізує фрактальні алгоритми оброблення зображень, платою за ефективність яких і є вказаний недолік.

Ось інші ефекти, покликані підвищити реалістичність зображень:

- *Alpha-blending* — альфа-змішування — накладання текстур з різним значенням параметра прозорості альфа, що дає змогу коректно робити мультитекстурування;

- *Bi-linear filtering, tri-linear filtering* — визначення кольору кожної точки (пікселя) за інтерполяцією відповідно чотирьох і восьми сусідніх;

- *Color dithering, texture dithering* — стиснення палітри кольорів (текстур), що дає змогу завдяки деякому погіршенню якості прискорити обчислення;

- *Color key* — кольоровий код — характеризує зміну кольору залежно від віддаленості елемента;

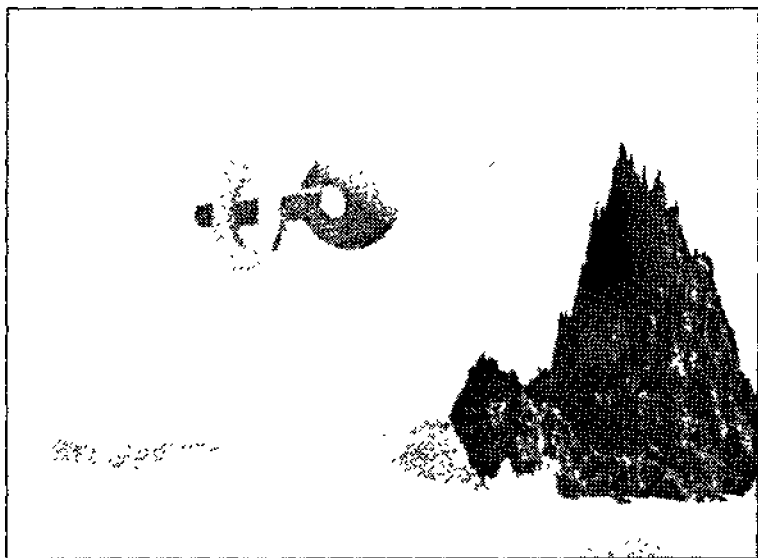


Рис. 14.8 Зображення з наявними ефектами



Рис. 14.9. Зміна часу доби

- *Depth cueing* — імітація глибини завдяки зменшенню яскравості зображення;
- *Fogging* — імітація туману або задимлення;
- *MIP-mapping* — зберігання кількох розмірів текстур для прискорення накладання при зміні розмірів об'єкта;
- *Perspective corrected texture mapping* — накладання текстур із корекцією перспективи;
- *X/Y interpolation* — інтерполяція кольорів при зміні розмірів кадру;
- *Z-buffering* — запам'ятовування координати глибини — віддалений елемент не показується.

Застосуємо всі ефекти і подивимось на результат (рис. 14.8).

Що ж, здобуте зображення можна прийняти за станцію Соляріс або візит НЛО під час Всесвітнього потопу.

Крім названих ефектів програма *Вгусе 3D* дає змогу змінювати умови освітлення, імітуючи різні розташування Сонця і Місяця, а також змінювати хмарність та редагувати текстури, роблячи їх, наприклад, прозорими.

Подивимось, як виглядатиме пейзаж увечері, при заході Сонця, коли блискучі напівпрозорі поверхні станції віддзеркалюють його холодні промені (рис. 14.9). Якби ж поліграфічні можливості давали змогу зробити це все в кольорі та ще й з анімацією!

Більше того, можна створювати *анімацію*, задаючи траєкторію Сонця і Місяця, а також скомпонованого об'єкта. Можна навіть задавати алгоритми руху хмар чи росту трави!

Купуючи відеокарту, слід обов'язково звертати увагу, які з названих ефектів підтримуються відеопроцесором, інакше реалістичного зображення не буде.

Самоконтроль. Розберіть основні етапи побудови зображень. Які математичні операції реалізуються при цьому? Як вони співвідносяться з методами нарисної геометрії? Які ефекти підвищують реалістичність зображень? Що можна сказати про їх апаратну та програмну реалізацію?

15. БАГАТОВИМІРНА ГЕОМЕТРІЯ

Багатовимірна геометрія є одним із найабстрактніших витворів людського розуму, і тим не менше вона знаходить чимало конкретних та дуже важливих застосувань.

15.1. ПРИКЛАДИ Й УЗАГАЛЬНЕННЯ

Розглянемо просту економічну задачу. Слід вибрати процесор для ПК так, щоб він був найкращим з погляду співвідношення продуктивності та ціни. Задачі такого типу називаються *оптимізаційними*. Їх розв'язання припускає нескладну геометричну інтерпретацію. Введемо на площині систему координат «ціна — продуктивність» і зобразимо всі процесори, які випускалися в 2000 р. Це буде дискретна множина точок (рис. 15.1).

Введемо додаткові обмеження максимальних і мінімальних величин продуктивності та ціни, виходячи з реальних потреб і можливостей (товсті лінії на рис. 15.1). Така оптимізація називається *умовною*. Неважко побачити, що неможливо досягти одночасного поліпшення ціни та продуктивності і треба шукати певний компроміс (це — *оптимізація за Парето*). Компроміс виражається у вигляді *узагальненої цільової функції* (крива на рис. 15.1), екстремальному значенню якої в зоні обмежень відповідає оптимальний вибір. У нашому випадку це процесор Athlon фірми AMD з частотою 550 МГц. Можемо врахувати додаткові показники, наприклад вірогідність відмови процесора протягом терміну експлуатації, ціну материнської плати, енерговитрати. Щоб їх виразити, знадобляться 5-вимірний простір і п'ять координатних осей; цільова функція зобразиться як *гіперповерхня* в цьому просторі. Отже, природне узагальнення двовимірної задачі привело до багатовимірного простору.

Наведемо ще кілька прикладів. Рівновага процесів під час хімічних реакцій залежить від кількох чинників та виражається гіперповерхнею багатовимірного простору. Стан технічної системи описується іноді сотнями чи тисячами параметрів і може бути виражений многовидом багатовимірного простору. Простір-час у теорії відносності виражається як чотиривимірний псевдоевклідовий простір Мінковського. Існує теорема Нетер, яка пов'язує закони збереження з симетріями простору-часу. Фізики підрахували, що для вираження

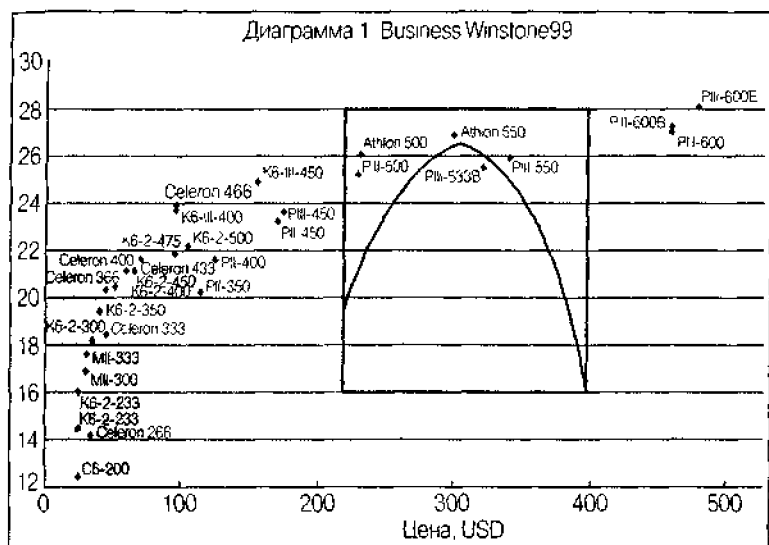


Рис. 15.1. Оптимізація вибору процесора

відомих законів збереження необхідним є n -вимірний простір. Отже, цілком можливо, що ми, навіть того не підозрюючи, живемо в просторі з n вимірами!

Концепцію багатовимірного простору можна простежити ще в працях античних філософів (Діофант, III ст.) і середньовічних дослідників. Однак творцями багатовимірної геометрії вважаються А. Келі, Г. Г. Грасман і Л. Шлефлі, які публікували свої дослідження в середині XIX ст. Півтори сотні років розвитку позбавили багатовимірну геометрію містичного забарвлення та узагальнили її положення на неевклідові (в тому числі проєктивний і афінний) простори та простори нецілої і від'ємної розмірності, про що вже згадувалося в розд. 2.

Не вдаючись до сучасних складних уявлень, розберемо хід побудови багатовимірного евклідового простору, способи зображення, а також деякі нескладні властивості.

Самоконтроль. Наведіть власні приклади оптимізаційних задач, які припускають інтерпретацію у просторах великої вимірності. Подумайте, наскільки коректно інтерпретувати такі різноякісні характеристики, як ціна, продуктивність, надійність тощо, як виміри одного простору.

15.2. АКсіОМИ І ВЛАСТИВОСТІ

У принципі, аксіоматика багатовимірного простору є узагальненням системи аксіом Гільберта. Так само виконуються п'ять груп аксіом: належності, порядку, конгруентності (або рухів), нерозривності та паралельності.

Вісім аксіом належності фіксують відношення «належності» для точок, прямих, площин, наприклад: для будь-яких двох точок існує пряма, що проходить через кожну з них; для двох відмінних точок існує не більше однієї прямої, яка проходить через кожну з цих точок, і т. д. Не виконується сьома аксіома: якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще принаймні одну спільну точку. Аксіома є визначальною для тривимірного простору; якщо ж існують дві площини лише з однією спільною точкою, то простір, як мінімум, чотиридимірний. Отже, в групі залишається сім аксіом.

Чотири аксіоми порядку визначають відношення «між»: наприклад, якщо т. B лежить між точками A та C , то A, B, C — різні точки однієї прямої і т. B також лежить між точок C та A ; серед будь-яких трьох точок прямої існує не більш як одна точка, яка лежить між двома іншими, і т. д.

П'ять аксіом конгруентності описують відношення «конгруентність»: наприклад, якщо для двох трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ маємо $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$ і т. д. Заміна цих аксіом, що реалізуються при повороті та паралельному перенесенні, на аксіоми, які відповідають афінним чи проєктивним перетворенням, означає перехід до афінної або проєктивної багатовимірної геометрії.

Дві аксіоми неперервності визначають відношення «неперервності». Так, нехай AB і CE — два відрізки. Тоді на прямій AB існує кінцева множина т. A_1, A_2, \dots, A_n таких, що т. A_1 лежить між т. A та A_2 , т. A_2 — між т. A_1 й A_3 і т. д., причому відрізки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруентні відрізку CE і т. B лежить між т. A та A_n . Прийняття іншої аксіоми є ознакою багатовимірної неархімедової геометрії.

Одна аксіома п'ятої групи задає відношення «паралельності»: нехай задано пряму a і т. A , що не належить a . Тоді в площині, яка визначається прямою a і т. A , існує не більш як одна пряма, що проходить через т. A і не перетинає пряму a . Твердження про існування двох паралельних прямих задає багатовимірну геометрію Лобачевського.

Таким чином, маємо таке визначення.

Визначення 15.1. *Багатовимірною евклідовою геометрією називається розділ геометрії, що вивчає форми і відносини простору, для якого виконуються наведені вище аксіоми.*

Існує рівнозначне визначення багатовимірною простору в термінах векторної алгебри.

Визначення 15.2. *Скінченновимірним евклідовим простором E^n називається векторний простір, в якому: існує базис з n лінійно незалежних векторів; будь-який $n + 1$ вектор є лінійно залежним; визначено скалярний добуток двох будь-яких векторів, причому скалярний квадрат ненульового вектора є додатним.*

Із невиконання сьомої аксіоми належності випливає, що цікавих властивостей слід чекати там, де перетинаються підпростори різної вимірності. Наведемо приклади.

Властивість 15.1. Якщо в E^n перетинаються підпростори Π^m і Π^k , то результат залежатиме від їх співвідношення з n : якщо $m + k \geq n$, то результатом є підпростір Π^l , $l = m + k - n$; якщо $m + k < n$, то підпростори не перетинаються, а знаходяться в просторі Π^p , $p = m + k + 1$.

Так, для E^4 маємо:

- $\Pi^2 \cap \Pi^2 \rightarrow \Pi^0$ (перетином площин є точка);
- $\Pi^3 \cap \Pi^3 \rightarrow \Pi^2$ (перетином гіперплощин є площина);
- $\Pi^1 \cap \Pi^2 \rightarrow \Pi^4$ (пряма і площина не перетинаються, а визначають новий чотиривимірний простір).

Велика кількість тверджень тривимірної геометрії припускає узагальнення на багатовимірний випадок, а їх виведення зводиться до простої індукції. Наприклад, якщо зафіксувати вимірність вершин, ребер і граней як P^0, P^1, P^3 відповідно і продовжити цей ряд на об'єкти P^4, \dots, P^n простору E^{n+1} , то формула Ейлера (див. розд. 6) для багатогранників трансформується так.

Властивість 15.2. Різниця сум двоїстих елементів багатогранників простору E^{n+1} дорівнює $P^0 - P^1 - P^2 - \dots + (-1)^{n-2} P^{n-2} + (-1)^{n-1} P^{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$.

Самоконтроль. Перевірте, чи існує у п'ятивимірному просторі багатогранник із характеристиками $P^0 = 12, P^1 = 8, P^2 = 12, P^3 = 16, P^4 = 12$.

Іноді зміна вимірності кардинально змінює властивості. Наприклад, кількість правильних багатогранників для E^3 дорівнює 5 (див. розд. 6). У чотиривимірному просторі їх 7, але індукція не спрацьовує: у просторі п'яти і більше вимірів існує тільки по три правильних багатогранника (аналогі тетраедра, куба і двоїстого йому октаедра).

У багатовимірному просторі досить часто можна застосовувати узагальнення формул аналітичної геометрії. Так, відстань між т. $A(x^1, x^2, \dots, x^n)$ і $B(y^1, y^2, \dots, y^n)$ у просторі E^n обчислюється за звичною формулою $AB = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2}$.

Гіперплощина (підпростір вимірністю на одиницю менший, ніж простір) в E^4 виражатиметься рівнянням

$$Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + E = 0,$$

або в матричній формі та якщо площина проходить через точки з координатами $(x^1, \dots, x^4), (y^1, \dots, y^4), (z^1, \dots, z^4), (t^1, \dots, t^4)$,

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 & t^1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 & 1 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 & 1 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Існують й інші аналогії.

Самоконтроль. Запишіть формулу гіперплощини п'ятивимірного простору, що проходить через $A(0, 0, 0, 20, 20)$, $B(10, 10, 10, 30, 30)$, $C(1, 12, 24, 12, 13)$, $D(20, 20, 20, 30, 30)$ і $E(40, 20, 30, 10, 0)$. Знайдіть відстань між A та E .

15.3. ЕПЮРИ ТА ЗОБРАЖЕННЯ

При побудові *нарисної геометрії багатовимірного простору* виникає та сама проблема оборотності креслення, що й для тривимірного випадку: проєкційні системи мають надавати можливість відтворення об'єкта за плоскими зображеннями. Шляхи розв'язання проблеми, які розглядалися в розд. 3, узагальнюються також на багатовимірний простір.

Крім того, простір доповнюється невластими елементами з відповідною зміною аксіом; причини і наслідки цього також описано в розд. 3. Розглянемо кілька проєкційних систем, що найчастіше застосовуються для зображення об'єктів багатовимірного проєктивного простору.

Векторіальні (федорівські) проєкції

Слід домовитись, паралельно яким лініям відкладаються вектори, що відповідають координатним осям. Точка зображатиметься проєкцією та сукупністю векторів. Так, точка п'ятивимірного простору A^5 буде зображатись як (A_1, a, b, c) , де a, b, c — вектори, що відповідають координатам $(x^3, -x^4, x^5)$ (рис. 15.2). Такий спосіб є зручним, однак не досить наочним.

Епюр Шуте

Цей епюр є своєрідним узагальненням епюра Монжа. Слід домовитись про напрями координатних осей. Проєкційні зв'язки перпендикулярні до осей. Проєкції точки чотиривимірного простору будуються так, як показано на рис. 15.3.

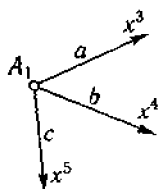


Рис. 15.2 Точка E^5 у векторіальних проєкціях

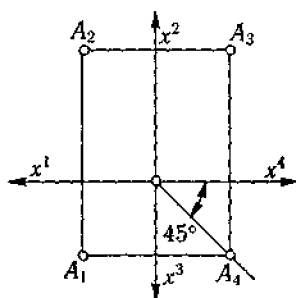


Рис. 15.3 Точка E^4 на епюрі Шуте

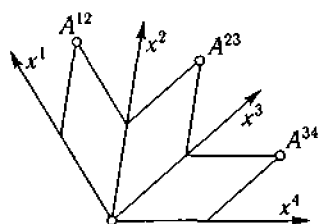


Рис. 15.4 Точка E^4 на епюрі Гумена

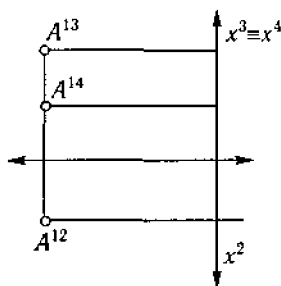


Рис. 15.5. Проекції точки E^4 на кресленні Радищева

Епюр Гумена

Цей епюр був запропонований професором НТУУ КПІ М. С. Гуменом. Від попереднього він відрізняється напрямом осей і зв'язків. Проекції точки чотиривимірного простору показано на рис. 15.4.

Креслення Радищева

Ідея цього епюра полягає в суміщенні координатних осей та поділі площин проєкцій на окремі зони, що відповідають відрізням координатних осей. При цьому зберігається звичний характер проєктивних зв'язків, але втрачається можливість відкладати великі значення координат. Проекції точки чотиривимірного простору зображено на рис. 15.5.

Відомо ще кілька епюрів, які мають ті чи інші переваги.

Прості фігури

Для прикладу наведемо визначення і зображення багатогранників.

Визначення 15.3. *N -вимірним багатогранником (або n -багатогранником) називається замкнена обмежена область в E^n , межа якої складається з кінцевої кількості $(n-1)$ -багатогранників.*

Так, призма заповнюється паралельними відрізками, проведеними з усіх точок $(n-1)$ -багатогранника основи; піраміда — відрізками, проведеними з окремої точки до всіх точок $(n-1)$ -багатогранника основи; N -куб є прямою призмою, гранями якої є $(n-1)$ куби.

Об'єми багатовимірних багатогранників узагальнюються за допомогою індукції: V^1 — довжина, V^2 — площа, V^3 — об'єм і т. д.

Наприклад, об'єм призми

$$V = Sh,$$

де S — $(n-1)$ — об'єм основи; h — висота.

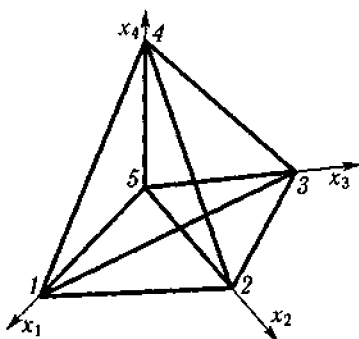


Рис. 15.6. Симплекс E^4

Об'єм піраміди

$$V = Sh/n,$$

де n — вимірність багатогранника.

Найпростіший багатогранник, який має важливе теоретичне значення, називається *симплексом простору*. Визначником симплекса є $n + 1$ точка простору E^n загального розташування. Так, симплексом E^1 (прямої) буде відрізок, E^2 (площини) — трикутник, E^3 — тетраедр і т. д. Симплекс простору характеризує його вимірність і дає можливість дати відповідну графічну ілюстрацію.

Задача 15.1. Зобразити симплекс чотиривимірного простору (рис. 15.6).

Симплекс E^4 буде задаватись п'ятьма точками, які є його вершинами.

Визначивши напрями осей, відкладемо довільні координати цих точок. Процедурі відкладання слід виконувати дуже ретельно, аби не помилитись. Сполучасмо одержані вершини. В результаті дістаємо 4-піраміду, кожною з граней якої будуть 3-піраміди, як це показано на рис. 15.6.

Самоконтроль. Яку з описаних вище епюр використано?

Побудуйте симплекс E^3 , узявши довільні координати вершин, і підрахуйте його об'єм. Використайте одну з описаних вище епюр, але не таку, як на рис. 15.6.

Порівняйте побудоване зображення з симплексом на рис. 15.6 з погляду наочності та простоти побудови.

Розв'язування задач

Розв'язування позиційних і метричних задач є необхідним для будь-якого застосування багатовимірної геометрії. Використовуються звичайні методи нарисної геометрії, узагальнені на простори більшої вимірності. Наприклад, щоб визначити належність точки до поверхні, слід перевірити її належність до твірної поверхні на всіх зображеннях; щоб побудувати перетин гіперповерхонь, треба використовувати проєкціювальні положення; аналогічним є склад характерних та особливих точок кривих ліній.

Самоконтроль. Скопіюйте рис. 15.6. Перевірте, чи належатиме точка з координатами (10, 14, 20, 30) поверхні симплекса E^4 , показаного на цьому рисунку. Спробуйте встановити процедуру визначення видимості для чотиривимірного простору за аналогією з тривимірним простором. Спробуйте визначити видимість заданої точки.

16. МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Поняття *складної системи* було введено в науковий обіг Л. фон Берталанфі у 50-ті роки ХХ ст. Із фахівців з прикладної геометрії складні системи першим почав досліджувати професор К. І. Вальков на рубежі 70-х років. Відтак цей науковий напрям є надзвичайно молодим, тому не дивно, що розробляється багато теорій, які в чомусь доповнюють, а в чомусь і суперечать одна одній.

Отже, зацікавлені студенти матимуть багато можливостей для наукової роботи. Із методичних міркувань будемо проводити паралелі з описом багатовимірної геометрії (див. розд. 15).

16.1. ПРИКЛАДИ Й УЗАГАЛЬНЕННЯ

Розглянемо уважніше задачу багатокритеріальної оптимізації. Навіть в описаному в розд. 15 простому випадку є певні натяжки формалізації: якісно відмінні ціна і продуктивність, що мають свої одиниці виміру, вводилися до складу рівняння цільової функції за допомогою суб'єктивно заданих коефіцієнтів. Для систем, які описуються великою кількістю різнорідних параметрів, питання коректного визначення аргументів, коефіцієнтів й обмежень цільових функцій, зведення їх до однорідної форми, визначення вимірності та метрики простору, труднощі пошуку екстремумів функцій *практично унеможливають оптимізацію*. Натомість оптимальність природних складних систем — біологічних співтовариств тощо, виражена як пристосованість до зовнішніх умов, є результатом не формальних процедур, а еволюції, тобто зовсім іншої стратегії оптимізації.

Аналізуючи приклади систем (живі організми, суспільства, геологічні та космічні утворення), констатуємо наявність *відкритості, цілісності, незвідності до окремих складових* (це називається *емерджентністю і неадитивністю*), *гомеостазу, регенерації, еволюції та самоорганізації, неоднорідності, непорівнянності, зміни якості й кількості компонентів, розвитку і старіння, «стріли часу», вибіркості, нелінійності, порогового ефекту взаємодії*.

Порівняння з властивостями апарата моделювання та оптимізації приводить до висновку про невідповідність властивостям систем уже на аксіоматичному рівні. Так, простір, як це впливає з наведених у розд. 15 аксіом, однорідний, ізотропний, з фіксованою вимірністю, тоді як системи неоднорідні, незрівнянні, зі змінною кількістю компонентів. Множини адитивні, системи неадитивні. Елементи прості, незмінні, незалежні, компоненти складні, змінні, залежні і т. д. Тому *потрібні нові моделі, аксіоми яких від-*

повідали б властивостям складних систем, нові стратегії оптимізації.

Далі автор викладає власний погляд на побудову таких моделей і стратегій.

16.2. КОНЦЕПЦІЇ ТА АКсіОМИ

Щойно зроблений висновок означає необхідність розробки спеціальних засобів опису і методів дослідження та побудови геометричної системи

$$G = (E, O, R),$$

де E — непорожня множина геометричних об'єктів; O — сім'я операцій $o_j: E^m \rightarrow E (i \in I)$; R — сім'я відношень $r_j \subseteq E^{mj} (j \in J)$.

Отже, вводиться концепція ***C-простору*** (Sp, \circ), який слід розуміти як результат розпаду універсуму на частини, названі ***суб'єктом*** (C) та ***об'єктом*** (O)¹, який через своє граничне положення є водночас апаратом, що забезпечує настроювання конкретного O на конкретний C , та моделлю C або O . Відповідні C -відображення називаються ***тернарною зв'язкою*** ($TЗ$), ***внутрішнім і зовнішнім розщепленнями***. Зв'язок елементів Sp задається ***Γ -операторами***.

Далі будується аксіоматична модель C -простору.

Аксіоми першої групи задають структуру простору та визначають роль зовнішніх впливів у його еволюції.

1.1. Вплив C й O (спостереження) переводить C -простір у стан актуального існування.

1.2. C -простір є носієм потенційно існуючих множин, що містять потенційно існуючі елементи — хвилі та солітони.

Такий вибір елементів пояснюється необхідністю відобразити різну мінливість компонентів, а також специфічні операції; звідси модель Sp називається ***хвильовою***.

1.3. Вплив C й O ініціює розширення C -простору на актуально існуючі C -множини.

1.4. Вплив C й O ініціює розширення C -множин на актуально існуючі C елементи.

1.5. Вплив C й O ініціює перехід від хвиль до солітонів і навпаки; його припинення — зникнення елементів.

Аксіома другої групи координус зміни шарів Sp .

2.1. Хід розширення C -простору визначає структуру C -множин і модальність стану C -елементів — збудження або згасання; стан елементів характеризує структуру C -множин та спрямованість змін C -простору.

Аксіоми третьої групи встановлюють набір операцій (абстракції реальних хвильових взаємодій).

¹ C й O не мають семантичного навантаження (як, наприклад, змінні x та y у класичній математиці).

3.1. Суперпозиція актуально існуючих однокомпонентних хвиль переводить їх в однокомпонентні хвилі з лінійно зміненими характеристиками.

3.2. Коінциденція актуально існуючих перпендикулярних S -елементів переводить їх в елемент, кількість перпендикулярних компонентів якого дорівнює сумарному числу перпендикулярних компонентів вихідних хвиль і солітонів.

3.3. Інтерференція актуально існуючих хвиль переводить їх у хвилі зі зміною числа хвиль та компонентів і нелінійною зміною характеристик.

3.4. Дифракція актуально існуючих S -елементів переводить хвилі у хвилі зі зміною кількості хвиль та компонентів і нелінійною зміною характеристик; солітони — в солітони зі збереженням набору компонентів та зміною напрямку руху.

3.5. Не існує такої послідовності двох або більше суперпозицій, яка переводила б S -елементи в їхній вихідний стан.

3.6. Не існує такої послідовності двох або більше коінциденцій, яка переводила б S -елементи в їхній вихідний стан.

3.7. Не існує такої послідовності двох або більше інтерференцій, яка переводила б хвилі в їхній вихідний стан.

3.8. Не існує такої послідовності двох або більше дифракцій, яка переводила б хвилі в їхній вихідний стан.

3.9. Існує принаймні одна послідовність двох дифракцій, яка переводить солітони в їхній вихідний стан.

Аксиоми четвертої групи регламентують вимірювання.

4.1. Спостереження дифракції координатної системи й актуально існуючої хвилі простору, що вимірюється, призводить до зміни координатної системи — результату вимірювання — та зміни хвилі, яка вимірюється.

4.2. Спостереження дифракції координатної системи й актуально існуючого солітона простору, що вимірюється, призводить до зміни координатної системи — результату вимірювання — та зміни руху солітона.

Повнота, несуперечливість, невивідність аксіом перевіряються у процесі побудови теорії самоорганізації.

Самоконтроль. З'ясуйте, наскільки аксіоми відображають наведені в п. 16.1. властивості. Порівняйте їх з аксіомами Гільберта (див. розд. 15), знайдіть якомога більше відмінностей.

16.3. САМООРГАНІЗАЦІЯ S -ПРОСТОРУ

Наведемо основні результати теорії самоорганізації S п під впливом одного O й одного S (існують складніші сценарії).

Утворення S -множин (розширарування) обмежують симетрія S та O відносно S -простору і цілісність універсуму.

Властивість 16.1. Припустимими є тільки такі розшарування, які зберігають косу симетрію S -простору.

Через те розрізняються суб'єктна ($S\Gamma^+$) й об'єктна ($S\Gamma$) половини. Розшарування відбувається за сценаріями з утворенням тільки рівнобіжних, перпендикулярних або тих та інших елементів.

Властивість 16.2. Нехай для P_i існує M груп симетрії і для S_{ik} виконується рівність $S_{ik} = S_{jt}$. Утворення перпендикулярних структур припиниться, коли кількість реалізованих груп симетрій для кожного шару $L = M$ і надалі можливе утворення тільки рівнобіжних структур.

Існує зв'язок між законами зберігання та групами симетрії, аналогічній теоремі Нетер.

Властивість 16.3. Припустимими є тільки такі розшарування, характеристики S -елементів і S -множин поточної стадії яких знаходяться в гармонійному відношенні з характеристиками елементів та множин попередньої стадії, з коефіцієнтом, що дорівнює характеристичі «золотого перерізу»:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Кількість елементів n залежить від розшарування m :

$$n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} ((\Phi + 1)^m + (\Phi + 1)^{-m}),$$

тобто виражається числами Фібоначчі (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...).

У процесі розшарування змінюються тип і стан елементів; впливи S й O є обов'язковими умовами цього.

Властивість 16.4. При розшаруванні S -множини з потенціалом π кожному елементу передається потенціал π_n^1 :

$$\pi_n = \frac{\pi\Phi}{n},$$

де n — індекс поточного шару.

Звідси впливає така властивість.

Властивість 16.5. Усі пов'язані з потенціалом характеристики шару різнооб'ємні відносно наступних шарів і не можуть бути виражені ними, тобто відрізняються якісно. Навпаки, характеристики наступних шарів можуть виражатися характеристиками поточного шару.

Важливим є такий наслідок: шеннонівське оцінювання кількості інформації, кодованої з використанням S -елементів, має проводитися для кожного шару окремо.

¹Під потенціалом π розуміють характеристику здатності $S\Gamma$ до взаємодій та зміни, «захоплену» частину універсуму. Потенціал є інтуїтивною характеристикою, як, наприклад, енергія, маса, заряд; він виражається в умовних одиницях відносно потенціалу $S\Gamma$.

Потенціал π хвилі завдяки l з амплітудою A визначається як

$$\pi = f(l/2, A),$$

де f — експериментальна функція пропорційності.

Довжина l_k хвилі шару k відносно попереднього шару

$$l_k = \frac{l_{k-1}}{2n},$$

якщо шари включають елементи одного типу, а знаменник дорівнює n .

Як одиниця часу t приймається час, що дорівнює періоду хвилі. Кожний шар k має свою одиницю часу t_k :

$$\frac{t_k}{t_{k-1}} = \frac{l_k}{l_{k-1}},$$

де k — номер шару.

Існує обмеженість розшарування у часі, зумовлена скінченністю часу існування першої хвилі S_1 — процеси розшарування і *згортки* (процес переходу структур S_1 від актуального до потенційного існування) мають сумарну тривалість, що дорівнює часу існування першої хвилі. Відтак час S_1 характеризується розшаруванням і «стрілою часу», яка виражає необоротність еволюції.

До характеристик елементів належать: потенціал, довжина, амплітуда, частота, фаза, період, модальності стану й існування, ознаки паралельності та перпендикулярності, міри нелінійності й відношення довжин, відношення потенціалів.

Деякі з цих характеристик пов'язані між собою. Залежно від їх співвідношення виводяться *умови реалізації С-операцій та їх окремих випадків*. При цьому використовується спеціальна система умовних позначень. Наприклад, для коінциденції маємо **умову 16.1**: нехай для розшарувань $\{P\}$, що відповідають $\{O^*\}$, існує впорядкований набір хвиль і солітонів:

$$l_1 \perp l_2 \perp l_3 \dots \perp l_n, \quad l_1 > l_2 > l_3 \dots > l_n,$$

де n — кількість розшарувань у $\{P\}$.

Тоді необхідними та достатніми умовами коінциденції для однокомпонентних елементів буде виконання таких умов:

$$l_n/l_1 = m_{11}, l_n/l_2 = m_{12}, \dots, l_n/l_{n-1} = m_{1n-1},$$

$$l_{n-1}/l_1 = m_{21}, \dots, l_{n-1}/l_{n-2} = m_{2n-2},$$

...

$$l_2/l_1 = m_{n-11},$$

$$\forall \Delta\pi_i = \sum_{j=1}^n \Delta\pi_j, i \neq j,$$

$$\{U\} \vee \{U\},$$

$$d < d^*,$$

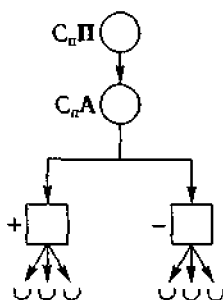
де m, k, l — цілі числа, а $\Delta\pi_i, \Delta\pi_j$ — зміни потенціалів.

Уводиться список характеристик, які можуть бути виміряні, описуються вибір координатної системи і процедури вимірювання.

Самоконтроль. Як бачимо, хвильовий S_n не є хаотичним, як могло б здатися на перший погляд. Навпаки, він демонструє тенденції до закономірної самоорганізації, параметри якої визначаються характером зовнішніх впливів. Порівняйте ці закономірності з наведеними в п. 16.1 властивостями складних систем і зробіть висновок про адекватність моделі.

16.4. С-ВІДОБРАЖЕННЯ І ГРАФІЧНІ МОДЕЛІ С-ПРОСТОРУ

Доцільність побудови цієї теорії, яка є нічим іншим, як *нарисною геометрією С-простору*, зумовлена необхідністю дотримання певних вимог до подання даних при застосуванні обчислювальної техніки та обробленні експериментальних даних. Першим кроком є визначення *калібрувальних інваріантів* (властивості, незалежні від природи систем) і *калібрування* (прив'язки відносних одиниць до одиниць фізичних величин). Потім обґрунтовуються *об'єктні моделі* (ОМ) С-простору. Залежно від інваріантів, що залишаються незмінними, виділяються: $ОМ_3$ — *калібровані моделі* (зберігаються абсолютні значення параметрів), $ОМ_2$ — *динамічні моделі* (зберігається динаміка розшарування-згортки) і, нарешті, найпростіші $ОМ_1$ — *статичні моделі*, як на рис. 16.1 (зберігаються належність та послідовність утворення елементів, кількість елементів й операцій; вимірність, групи і порядки симетрії, розподіл відносних величин π та t_0).



Проводяться класифікація, визначення схем і можливостей застосування різних С-відображень. Зокрема, робиться висновок, що *ТЗ* доцільно використовувати при моделюванні інтуїтивних, *РВ* — підсвідомих і *Г-опе-*

Рис. 16.1. $ОМ_1$ у вигляді орієнтованого С-графу (РЗ-діаграми)

раторів — аналітичних форм розпізнавання і прийняття рішення; РЗ — для побудови ОМ.

Зупинимось на останньому докладніше. Оскільки інваріанти OM_1 є топологічними та проєктивними, для їх відтворення потрібні дві групи відображень.

Властивість 16.6. Сім'я $\{PЗ\}$ включає підсім'ї топологічних $\{ТРЗ\}$ і проєктивних $\{ПРЗ\}$ відображень. Кожне РЗ є результатом послідовного здійснення операції: $PЗ = ТРЗ * ПРЗ$.

Наслідок. Відображення сім'ї $\{PЗ\}$ є функторами.

Властивість 16.7. Нехай функтор $T: p_1 \rightarrow K^1$ забезпечує взаємно однозначне відображення S -елементів у вершини, а послідовність розширвань — у ребра лінійного комплексу так, що одному шару відповідає одна зірка. Тоді $T \in \{ТРЗ\}$.

Так обґрунтовується можливість графічного моделювання у вигляді S -графів і РЗ-діаграм. Для сценаріїв розширвання (СР), де фігурують кілька S або O , внаслідок чого відбуваються взаємодії елементів та зміни топології, ця властивість узагальнюється.

Властивість 16.8. Нехай функтор $T_i: \{p_i\} \rightarrow K^1*$ забезпечує взаємно однозначне відображення S -елементів у вершини, а розширвань — у ребра K^1 так, що одному шару кожного розширвання відповідає не менше, ніж одна зірка, а кожній операції, що змінює сценарій, — один простий цикл. Тоді $T_i \in \{ТРЗ\}$.

Пропонується показувати розподіл π за допомогою площ вершин графа (l й A можуть зображатися як довжини сторін прямокутника-вершини), а t — як довжин ребер (це називається метризацією графа чи діаграми). Модальності стану можна зображувати різними кольорами.

Досліджуються можливості збереження цих пропозицій для різних сценаріїв самоорганізації.

Властивість 16.9. Нехай $p \rightarrow C^*$ -граф і нехай проведено метризацію за потенціалом (часом) таку, що співвідношення довжин ребер дорівнюють співвідношенням потенціалів (одиниць часу). Тоді ортогональне проєкціювання зберігає їх.

Отже, послідовність побудови графічних ОМ така:

- визначення актуальної розмірності простору;
- абстрагування від хвильової моделі та побудова S -графа в E^n за умови збереження інваріантів;
- топологічні перетворення кривих на відрізки прямих для спрощення зображення;
- проведення локальних розгорток;
- побудова зображення;
- метризація;
- доповнення графічної ОМ текстовими поясненнями, аналітичними залежностями тощо.

16.5. ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНОГО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ

Описаний апарат застосовується для вдосконалення *ергаческих систем* (ЕС) «людина — машина — середовище».

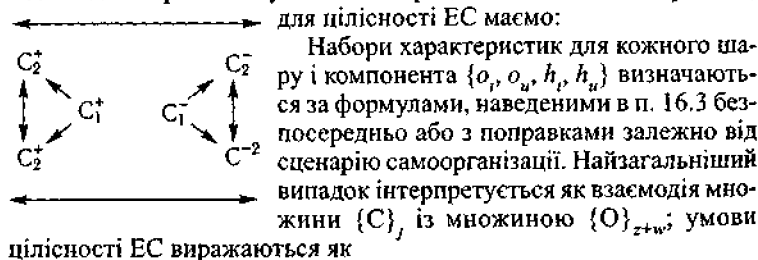
Визначення структури системи

Схему взаємодій ЕС показано на рис. 16.2.



Рис. 16.2. Зв'язок людського і машинного компонентів ЕС

Структура інтерпретується згідно з формальними схемами, які відповідають різним ступеням інтеграції компонентів. Наприклад,



$$\rightarrow \{(C_1, C_{k1}, A, O_1) \dots \dots (C_p, C_{mn}, O_{1+n})\} C^{**} \rightarrow CP \rightarrow$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \{(C_p, C_{xp}, O_y) \dots \dots (C_p, C_{yw}, O_{z+w})\},$$

де кількість C дорівнює j , кількість O — $(z + w)$; індекси k, m і l, n означають кількість шарів та елементів шарів, необхідних для утворення $i + n$ об'єктів, що беруть участь у взаємодії; A — модальність актуального існування множин й елементів Sp ; C^{**} — C -граф, що відповідає цьому варіанту; CP — подання сценарію у вигляді C -графів, що відповідають взаємодії кожного з C з усіма O .

Далі обґрунтовуються ергономічні рекомендації щодо:

- компенсації негативних зовнішніх впливів на стан оператора (з умов реалізації окремих випадків коінциденції);

- вибору оптимальної кількості операторів і підсистем ЕС (за СР);

- компонування систем відображення інформації (СВІ) (вибір схеми, виходячи зі сценаріїв самоорганізації; визначення пропорцій згідно з розподілом потенціалів шарів).

Розрахунок розмірів компонентів СВІ інтерпретується як реалізація калібрування. Для цього використовуються нормативні дані та вимоги техніки безпеки, які забезпечують антропометричну, біомеханічну й інформаційну сумісність; в інших розрахунках застосовуються допустимі значення температурних, вібраційних, електромагнітних та інших впливів.

Удосконалення діяльності операторів ЕС

Оптимізація проводиться на основі *моделі взаємодії людини з навколишнім середовищем* (МЛС). Аналіз фактичних даних приводить до висновку про те, що найзагальніший випадок організації ЕС буде тоді, коли Сп формується внаслідок взаємодії {С} й {О}, а умови цілісності системи мають вигляд

$$У \rightarrow (\{C\}_o, Сп, \{O\}_p) \rightarrow СР \vee СР^* \vee СР^{**},$$

причому

$$СР \rightarrow n(\{C\}_{i=1, \dots, n, xy}, \{O\}_{i=1, \dots, n}),$$

$$СР^* \rightarrow (m - n)(\{C\}_{i=n+1, \dots, m, ix}, \{O\}_{m-n}),$$

$$СР^{**} \rightarrow (o - m)(\{C\}_{o-m, i=o-m, \dots, o, j=p-m, \dots, px}, \{O\}_{p-m}),$$

де $n, m, o, p, o > p$ — кількість С та О; i, j — порядкові номери розшарувань Сп, що відповідають взаємодіям різноманітних С і О; x, y — номери шарів та їхніх С-елементів і С-множин.

Визначаються та розраховуються:

- рівні організації, послідовність і пріоритети (із СР). Встановлюється їх відповідність фізичним, психічним, фізіологічним та анатомічним структурам;

- вагові коефіцієнти (пропорційні потенціалам);

- кількість елементів шарів і кількість незалежних характеристик (похідні чисел Фібоначчі);

- межі змін характеристик, що не ведуть до порушення організації (з недопущення розшарування-згортки);

- механізми обмінів між елементами та рівнями (з умов симетрії, а також законів збереження). Так описуються явища компенсації, регенерації, збереження гомеостазу.

Схема дає змогу формалізувати *умови надійності* (кількість й узгодженість задіяних шарів), *якості* (зменшення адаптації), *ефективності* ЕС (використання швидкісних обмінів). Схема викорис-

Таблиця 5 Узгодження моделі сприйняття

Шар	Кількість елементів	Предмет сприйняття	Сприйняття	Психічні стани	Ритм мозку
Перший	1	Цілісність системи	Інтуїтивне	Розширена свідомість	—
Другий	1	Цілісність на неорганізованому фоні	Те саме	Спокій, сон без сновидінь	Δ (0,5...4 Гц)
Третій	2	Бінарна оцінка організованості (добре, погано)	Плюс емоції	Відпочинок	Θ (4...7 Гц)
Четвертий	3	Тернарна організованість у просторі-часі	Плюс міркування	Пильнування	α (8...13 Гц)
П'ятий	5	Сенсорні подразники (світло, рівновага, втома і т. д.)	Плюс рецепторні (три групи)	Сенсорне сприйняття; розмірковування	β (14...35 Гц)
Шостий	8	Основні кольори, звуки і т. д.	Те саме	Збудження	γ (34...55 Гц)
Сьомий	13	Градації кольору, звуку тощо	—«—	Те саме	Те саме

товувалася в розрахунках із метою узгодження інтенсивності праці оператора з природними і біологічними ритмами.

На основі МЛС розроблено моделі сприйняття, розпізнавання та прийняття рішення, дій управління; за їх допомогою обґрунтовано рекомендації щодо вдосконалення діяльності оператора, системи відображення інформації, взаємодії з середовищем.

Наприклад, *модель сприйняття* узгоджується з МЛС і даними психології та фізіології (табл. 5).

Далі визначається оцінка відносної ваги різних видів сприйняття p , якою враховують: область дії — за сумою потенціалів задіяних рівнів; значущість для фахової діяльності (k_1); умови сприйняття (k_2); зв'язок із розпізнаванням і прийняттям рішення. Тоді

$$p = \frac{\sum_{j=i_1}^{i_n} \pi_j k_1 k_2}{i_j - i_n + 1}$$

Розрахунки за цією формулою обґрунтовують рекомендацію — забезпечення надійності потребує організації інтуїтивної СВІ в такий спосіб:

- дані про роботу устаткування подаються у формі, зручній для інтуїтивного сприйняття;

- візуальні дані використовуються як засіб управління емоційним станом оператора і підтримки настроювання на інтуїтивне сприйняття;

- звуковий супровід дублює, а за необхідності посилює емоційне настроювання; він не повинен створювати перешкоду для переговорів.

На основі МЛС розв'язуються такі задачі:

1. Визначення кількості об'єктів, яку може одночасно сприймати диспетчер (розрахунки, рекомендації щодо можливості збільшення нормативних показників за умови правильного групування).

2. Оцінювання впливу геометрії приміщення на стан оператора (потенціал, необхідний для адаптації, визначає ступінь впливу; розбіжності топологій графа приміщення і моделі сприйняття — його «адреси»; невідповідність груп та порядків симетрії — напрями обмінів. Абсолютні значення й одиниці виміру визначаються у процесі калібрування. Даються рекомендації щодо функціонального призначення приміщень різної форми, розрахунку їхніх розмірів.

Модель розпізнавання і прийняття рішення дає змогу ввести специфічні визначення компактності образу, інформативності та подібності зображень, коректності кодування, надійності розпізнавання і дати варіанти розв'язання задач:

1. Виявлення механізмів природжених переваг розпізнавання — гештальтів, виходячи з послідовності формування образу та пріоритетів ознак з цією моделлю.

2. Проектування прогностичних систем (на основі реалізації OM_2 пропонуються засоби візуалізації, а також інтерпретації тенденцій розвитку).

Модель дій управління будується у вигляді предметно-функціонального зваженого графа. На її основі даються рекомендації щодо вибору органів управління, вводяться показники оптимальності компонування (міри відхилення, ефективності, узгодженості). Пропонується вибір кодів, підказів, рухів управління, відповідних технічних засобів для інтуїтивної СВІ.

Стратегія оптимізації систем відображення

Метою оптимізації є побудова ефективної, безпечної і надійної ЕС за гігієнічними, антропометричними, психофізіологічними, психологічними, біомеханічними, інформаційними та естетичними показниками. Склад показників для конкретної системи визначає кількість аргументів оптимізації $x = \{x_i\}_{i=1}^n$. Проводиться групу-

вання x_i за рівнями МЛС, виходячи з кількісних і якісних характеристик шарів, визначається кількість розшарувань S_p й уточнюється кількість n аргументів. Виходячи з прогнозованої кількості операторів і підсистем (уточнюється у процесі проектування), а також ступеня забезпечення сумісності як цілісності або інтеграції, уточнюється сценарій самоорганізації. Групи та порядки симетрій, а також вимірність S_p визначаються з попередніх даних й уточнюються у процесі самоорганізації. Розподіл потенціалів та інших характеристик розраховується з поправками на зміну сценарію і виражається з точністю до калібрувальних інваріантів у вигляді ОМ — *формального виразу цілі оптимізації*.

Визначаються обмеження — зміни параметрів не повинні призводити до *необоротного порушення цілісності системи*, що дає змогу розрахувати допустимі межі змін при неповних або неточних даних.

Цільові функції відображають відхилення від мети оптимізації. Вагові коефіцієнти приймаються пропорційними значенням потенціалів шарів. Ураховуються умови сприйняття пріоритетності рецепторів. Найкращому варіанту відповідає екстремум узагальноної цільової функції.

Остаточна оцінка готового виробу визначається методом експертних оцінок. При цьому застосування МЛС і моделі сприйняття дає змогу провести ранжирування показників ергономічності та провести їх кореляцію з естетичними якостями.

Описана стратегія застосовується для оптимізації як проектних рішень, так і процесу проектування ЕС.

Удосконалення відбору і контролю операторів

Спочатку будується графічна ОМ суб'єктивного простору оператора у вигляді комплексної епюри.

Уводяться квазіметричні відношення, що відображають зв'язки психологічних характеристик. Наприклад, відстань d вводиться як міра збіжності:

$$d = l + |\operatorname{sgn}_k \pi_k - \operatorname{sgn}_i \pi_i|,$$

де l — кількість переходів між шарами елементів k та вздовж S -діаграми; π_k, π_i — їхні потенціали; $\operatorname{sgn} = \{+, -, 0\}$ залежно від модальності стану.

Згідно з моделями діяльності оператора визначаються і ранжуються професійні якості, а також вибираються методи їх психологічного дослідження. Описуються інструкції тестування, вимоги до матеріалу, процедури оброблення, складання і графічного подання психологічного портрета, висновку про професійну придатність оператора.

ВИСНОВКИ

Як і на зорі людства, як і протягом усієї його історії, так і нині зображення є знаряддям гармонізації внутрішнього світу та засобом налагодження стосунків зі світом зовнішнім. Змінився лише рівень розуміння: на місце напівінстинктивних відчуттів прийшли раціональне знання й інструменти — малюнки вохрою на стінах печер навіть не можна порівняти з кресленнями, виконаними за допомогою комп'ютера!

Отже, культура зображень й особливо її теорія — основи геометричного моделювання — є ключем до надбань світової культури взагалі, а не тільки її технічної складової.

І сказати про це можна засобами поезії:

Изящным росчерком пера
Мы на листе изображаем
Мосты, машины, города —
И суть их ближе понимаем.
В сплетеньях граней и стихий
Нам грезится чертеж природы,
Узлы неведомых орбит
И мироздания стройны своды.
С улыбкой детской мудреца
Мы микрокосмосом играем,
Движеньем тайных струн души,
Рисуя янтры, управляем.

СПИСОК ТЕРМІНІВ

Автоматизоване проектування	Автоматизированное проектирование	Computer-aided design, CAD
Аксиома	аксиома	axiom
АксонOMETрія	аксонOMETрия	axonometry
Алгоритми видалення невидимих ліній	алгоритмы удаления невидимых линий	algorithm of invincible lines removal
Аналiтична геометрія	аналитическая геометрия	analytic geometry
Анімація	анимация	animation
Апарат проєкціонування	аппарат проєцирования	apparatus of projection
Апроксимація	аппроксимация	approximation
Архімедова спіраль	архимедова спираль	spiral of Archimedes
Афінна геометрія	аффинная геометрия	affine geometry
Афiнне перетворення	аффинное преобразование	affine transformation
Багатовимірна геометрія	Многомерная геометрия	Polymeasure geometry
Багатогранник	многогранник	polyhedron
Багатокутник	многоугольник	polygon
База даних	база данных	database
Безье криві	Безье кривые	Besier curves
Біномаль	Бинормаль	binormal
Бісекторна площина	биссекторная плоскость	bisector plane
Бісектриса кута	бисектриса угла	bisectrix of angle
Бічна поверхня	боковая поверхность	lateral surface
В -сплайн	В -сплайн	В -spline
Вектор	вектор	vector
Векторна алгебра	векторная алгебра	vector algebra
Велика вісь еліпса	большая ось эллипса	big axis of ellipse
Вершина	вершина	vertex
Взаємно однозначна відповідність	взаимно однозначное соответствие	one-to-one correspondence
Візуальні ефекти	визуальные эффекты	visual effects

Вікно	окно	window
Визначник	определитель	determinant
Вимірність простору	мерность пространства	dimension of space
Висота	высота	height
Відображення	отображение	mapping
Відповідність	соответствие	correspondence
Відрізок	отрезок	line segment
Відсік площини	отсек плоскости	segment of plane
Відстань	расстояние	distance
Вісь симетрії	ось симметрии	axis of symmetry
Вузлова точка	узловая точка	nodal point
В'язка	связка	bundle
Гармонійна четвірка точок	Гармоническая четверка точек	Harmonic four points
Гауссова кривина	Гауссова кривизна	curvature of Gaussian
Гвинтова лінія	винтовая линия	screw line
Гвинтова поверхня	винтовая поверхность	screw surface
Гексаедр	гексаедр	hexaedron
Геометрична модель	геометрическая модель	geometric model
Геометрична фігура	геометрическая фигура	geometric figure
Геометрія	геометрия	geometry
Геометричне перетворення	геометрическое преобразование	geometric transformation
Геометричні побудови	геометрические построения	geometric construction
Гіпербола	гипербола	hyperbola
Гіперболічний параболоїд	гиперболический параболоид	hyperbolic paraboloid
Гіперплощина	гиперплоскость	hyperplane
Гладка крива	гладкая кривая	smooth curve
Головна нормаль	главная нормаль	principal normal
Головні кривини	главные кривизны	principal curvatures
Головні осі	главные оси	principal axis
Горизонталь	горизонталь	horizontal
Горизонтальна площина	горизонтальная плоскость	horizontal plane
Горизонтально-проекціювальна площина (пряма)	горизонтально-проецирующая плоскость (прямая)	horizontal-projection plane (straight)
Грань	грань	face
Граф	граф	graph
Графік	график	graph
Графопобудовник	графопостроитель	plotter
Двовимірні перетворення	Двумерные преобразования	2D-transformation
Двогранний кут	двугранный угол	dihedral angle
Двоїстості принцип	двойственности принцип	duality principle
Дезарга теорема	Дезарга теорема	Dezarg theorem
Декартова система координат	Декартова система координат	Cartesian coordinate system

Дизайн	дизайн	design
Диметрія ортогональна	диметрия ортогональная	dimetry orthogonal
Директриса	директриса	directrix
Дискретизація	дискретизация	discretization
Диференціальна геометрія	дифференциальная геометрия	differential geometry
Діагональ	диагональ	diagonal
Діаметр	диаметр	diameter
Довжина	длина	length
Додекаедр	додекаэдр	dodecahedron
Дотична	касательная	tangent
Друкувальний пристрій	печатающее устройство	printer
Евклідів простір	Евклидово пространство	Space of Euclidian
Евклідова геометрія	Евклидова геометрия	Euclidian geometry
Евольвента	эвольвента	evolvent
Еволюта	эволюта	evolute
Еквідистанта	эквидистанта	equidistant
Екран	экран	screen
Екстраполяція	экстраполяция	extrapolation
Елемент	элемент	element
Еліпс	эллипс	ellipse
Епюр	эпюр	epure
Засоби графічні	Средства графические	Graphical means
Звичайна точка	обычная точка	normal point
Звороту точка	возврата точка	cuspidal point
Зображення	изображение	image
Золотий переріз	золотое сечение	gold section
Зрізаний конус	усеченный конус	truncated cone
Зсув	сдвиг	shift
Ізометрія	Изометрия	Isometry
Ікосаедр	икосаэдр	icosahedron
Інваріант	инвариант	invariant
Інтерполяція	интерполяция	interpolation
Інтерактивне проекту- вання	интерактивное проекти- рование	interactive projecting
Кадрування	Кадрирование	Windowing
Каналова поверхня	каналовая поверхность	channel surface
Каркас	каркас	frame
Картинна площина	картинная плоскость	view plane
Катет	катет	side
Квадрант	квадрант	quadrant
Квадрат	квадрат	square
Коло	окружность	circle
Конгруентність	конгруэнтность	congruence
Конічні перерізи	конические сечения	conic sections
Конкуруючі точки	конкурирующие точки	concurrent points
Коноїд	коноид	conoid

Конус	конус	cone
Координатні площини (осі)	координатные плоскости (оси)	coordinates planes (axis)
Косокутна проекція	косоугольная проекция	oblique projection
Крива другого порядку	кривая второго порядка	conic
Кривина	кривизна	curvature
Куб	куб	cube
Куля	шар	ball
Кут	угол	angle
Ламана лінія	Ломаная линия	Polygonal line
Лінійчата поверхня	линейчатая поверхность	linear surface
Лінія найбільшого нахилу	линия наибольшего уклона	line of maximal inclination
Масштабування	Масштабирование	Zoom
Медіана	медiana	median
Меню	меню	menu
Метод скінченних елементів	метод конечных элементов	finite-elements method
Метод скінченних різниць	метод конечных разностей	finite-differences method
Метрична задача	метрическая задача	metric problem
Мимобіжні прямі	скрещивающиеся прямые	crossing lines
Множин теорія	множеств теория	set theory
Мова програмування	язык программирования	programming language
Монжа метод	Монжа метод	Mongle method
Набір перетворень	Набор преобразований	Set of transformations
Напря́м	направление	direction
Нарисна геометрія	начертательная геометрия	descriptive geometry
Невласні елементи	несобственные элементы	improper elements
Неевклідова геометрія	неевклидова геометрия	non-Euclidian geometry
Нормаль	нормаль	normal
Нормальна площина	нормальная плоскость	normal plane
Обвідна	Огибающая	Envelope
Об'єднання	объединение	union
Об'єкт	объект	object
Об'єм	объем	volume
Образ	образ	image
Обчислювальна геометрія	вычислительная геометрия	computational geometry
Однорідні координати	однородные координаты	homogeneous coordinates
Окіл	окрестность	neighbourhood
Октаедр	октаэдр	octahedron
Октант	октант	octant
Опуклий багатокутник	выпуклый много- угольник	convex polygon

Опукла крива (поверхня)	выпуклая кривая (поверхность)	convex curve (surface)
Ортогональна проекція	ортогональная проекция	orthogonal projection
Основи геометрії	основы геометрии	basis of geometry
Особлива точка	особая точка	singular point
Парабола	Парабола	Parabola
Паралелепіпед	Параллелепипед	parallelepiped
Паралелограм	параллелограмм	parallelogram
Паралельне перенесення	параллельный перенос	parallel transformation
Паралельні прямі	параллельные прямые	parallel straight lines
Параметр	параметр	parameter
Параметризація	параметризация	parametrization
Паскаля теорема	Паскаля теорема	Pascal theorem
Перегину точка	перегиба точка	point of inflection
Переріз	сечение	intersection
Перетворення координат	преобразование координат	coordinate transformation
Перпендикуляр	перпендикуляр	perpendicular
Перспектива	перспектива	perspective
Піраміда	пирамида	pyramid
Плоска крива	плоская кривая	plane curve
Площина	плоскость	plane
Поверхня	поверхность	surface
Повне зображення	полное изображение	complete image
Подвійна точка	двойная точка	double point
Подібність	подобие	similitude
Позиційна задача	позиционная задача	position problem
Полігональна сітка	полигональная сетка	polygonal network
Польке — Шварца теорема	Польке — Шварца теорема	theorem of Polke — Schwarz
Призма	призма	prism
Примітив	примитив	primitive
Похила	наклонная	inclined straight line
Початок координат	начало координат	origin of coordinates
Правильний багато- гранник (багатокутник)	правильный многогранник (много- угольник)	regular polyhedron (polygon)
Проективна геометрія	проективная геометрия	projective geometry
Проективний простір	проективное пространство	projective space
Проективні координати	проективные координаты	projective coordinates
Проекція	проекция	projection
Просте відношення трьох точок	простое отношение трех точек	simple ratio three points
Пряма	прямая	straight line
Радіус	Радиус	Radius
Растр	растр	raster
Регенерація зображення	регенерация зображення	regeneration of image

Редактор графічний	редактор графический	graphic editor
Рівні фігури	равные фигуры	equal figures
Розгортна поверхня	развертываемая поверхность	involutive surface
Розгортка	развертка	involute
Ромб	ромб	rhomb
Рух	движение	motion
Самодотику точка	Самокасания точка	Self-tangency point
Самоперетину точка	самопересечения точка	Self-intersection point
Сегмент	сегмент	segment
Сектор	сектор	sector
Симетрія	симметрия	symmetry
Сім'я ліній	семейство линий	family of curves
Січна	секущая	secant
Сканер	сканер	scanner
Скрут	кручение	torsion
Слід	след	trace
Спіраль	спираль	spiral
Сплайн	сплайн	spline
Спряжені діаметри	сопряженные диаметры	adjoins diameters
Спрямна площина	спрямляющая плоскость	rectifying plane
Стична площина	соприкасающаяся плоскость	osculating plane
Структура даних	структура данных	data structure
Сфера	сфера	sphere
Сцена тривимірна	сцена трехмерная	3D window
Твірна	Образующая	Generatrix
Теорія поверхонь	теория поверхностей	theory of surfaces
Топологія	топология	topology
Точка	точка	point
Точка сходу	точка схода	collection of point
Трансцендентні криві	трансцендентные кривые	transcendental curves
Трапеція	трапеция	trapezium
Тривимірне моделювання	трехмерное моделирование	3D modelling
Тригранник супровідний	тригранник сопровождающий	moving trihedral
Трикутник	треугольник	triangle
Триєдр	триэдр	trihedral
Угнутість	Вогнутость	Concavity
Управління сегментами	Управление сегментами	control of segments
Файл зображення	Файл изображения	File of image
Фігура	фигура	figure
Фокальний радіус	фокальный радиус	focal radius
Фокус	фокус	focus
Форма геометрична	форма геометрическая	geometrical form
Фрагмент	фрагмент	fragment

Фрагментація	фрагментация	fragmentation
Фронталь	фронталь	frontal
Функція	функция	function
Хорда	Хорда	Chord
Центр	Центр	Center
Центральний кут	центральный угол	central angle
Центр кривини	Центр кривизны	Center of curvature
Центр симетрії	центр симметрии	center of symmetry
Циклоїда	циклоида	cycloid
Циліндрична поверхня	цилиндрическая поверхность	cylindrical surface
Циліндричні координати	цилиндрические координаты	cylindrical coordinates
Циліндроїд	цилиндроид	cylindroid
Цисоїда Діоклеса	циссоида Диоклеса	cissoid of Diocl
Штрихування	Штриховка	Hatching (shading)

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берже М. Геометрия: В 2 т. — М.: Мир, 1984. — Т. 1—2.
2. Бубеников А. В. Начертательная геометрия. — М.: Высш. шк., 1985. — 288 с.
3. Вальков К. И. Лекции по основам геометрического моделирования. — Л., 1970. — 239 с.
4. Вольберг О. А. Лекции по начертательной геометрии. — М.: Учпедгиз, 1947. — 348 с.
5. Гильберт Д. Основания геометрии. — М.: ОГИЗ, 1948. — 491 с.
6. Иванов Г. С. Теоретические основы начертательной геометрии. — М.: Машиностроение, 1998. — 158 с.
7. Ковальов С. М. Параметричний аналіз в геометрії. — К.: КДТУБА, 1999. — 82 с.
8. Ковалев Ю. Н., Колотов К. С., Королюк С. В. Рабочая тетрадь по начертательной геометрии. — К.: КИИГА, 1993. — 47 с.
9. Корова Ю. И. Начертательная геометрия. — М.: Стройиздат, 1987. — 320 с.
10. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. — М.: Высш. шк., 1981. — 262 с.
11. Курс начертательной геометрии на базе ЭВМ / А. М. Тевлин, Г. С. Иванов, Л. Г. Нартова и др.; Под ред. А. М. Тевлина. — М.: Высш. шк., 1983. — 175 с.
12. Михайленко В. С., Найдич В. М. Тлумачення термінів з прикладної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки. — К.: Урожай, 1998. — 198 с.
13. Михайленко В. С., Найдич В. М., Підкоритов А. М., Скидан І. А. Інженерна та комп'ютерна графіка. — 2-ге вид., переробл. — К.: Вища шк., 2001. — 350 с.
14. Нарисна геометрія / В. С. Михайленко, М. Ф. Євстифєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко. — К.: Вища шк., 1993. — 271 с.
15. Нетренко А. И., Семенов О. И. Основы построения систем автоматизированного проектирования. — К.: Вища шк., 1985. — 294 с.
16. Справочник по машинной графике / В. Е. Михайленко, В. А. Анпилогова, Л. А. Кириевский и др. — К.: Будівельник, 1984. — 184 с.
17. Филитов П. В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. — Л.: Изд-во при Ленингр. ун-те, 1979. — 320 с.
18. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и производстве. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
19. Фоли Дж., ван Дэм А. Основы интерактивной машинной графики: В 2 т. — М.: Мир, 1985. — Т. 1—2.
20. Хокс Б. Автоматизированное проектирование в производстве. — М.: Мир, 1991. — 296 с.
21. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. — М.: Просвещение, 1969. — 368 с.
22. Шнур Г., Краузе Ф. Л. Автоматизированное проектирование в машиностроении. — М.: Машиностроение, 1988. — 648 с.

Навчальне видання

Ковальов Юрій Миколайович

ОСНОВИ
ГЕОМЕТРИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректор *Л. О. Зеленько*
Комп'ютерна верстка *А. А. Коркішко*

Підп. до друку 30.03.2003. Формат 84×108/32. Папір офс. № 1.
Гарнітура Times New Roman. Офс. друк. Ум. друк. арк. 12,18.
Обл.-вид. арк. 13,22. Вид. № 10369. Зам. № 3-394

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г
Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000 серія ДК № 268

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа»,
у ВАТ «Білоперківська книжкова фабрика»,
09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4

ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

