МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кіровоградський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Кафедра математики

УДК 519.1

Узгоджено **Затверджено**

ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ ТА СКІНЧЕННІ СУМИ

МАГІСТЕРСЬКА РОБОТА

з математики
Ягодзінського Сергія Миколайовича

Науковий керівник:
доктор фізико–математичних наук, професор
Волков Юрій Іванович

Кіровоград 2001

Зміст

ВСТУП

Листаючи сторінки всесвітньої історії, неважко помітити, що людство виділило кілька етапів свого розвитку, кожен з яких вирізняється своїми звичаями, традиціями, політичними режимами, характером впливу на суспільство, і, що найголовніше, - рівнем науки і техніки. Аналіз наукового знання показує, що безпосереднім завданням науки в усі часи було отримання об'єктивних фактів про оточуючий світ та на основі цього, - створення ефективних джерел виробництва матеріальних благ.

Це й обумовило бурхливий розвиток фізики, математики, хімії, біології та інших природничих наук, що особливо простежується в епоху Нового Часу, коли вперше почали проявлятися тенденції до технологічної і матеріально-виробничої орієнтації науки, що свідчило про інтеграцію знань у процесі науково-технічного прогресу.

Постійно зростаючі проблеми і вимоги суспільства, збільшення кількості населення Землі ставили все складніші завдання, вирішити які класичними методами виявилося неможливим або занадто довгим процесом, що мало враховував випадковість та дискретність природних процесів. Серед таких проблем відзначимо наступні: питання автоматизованого управління виробництвом, випробовування ядерної і бактеріологічної зброї, швидкий обмін інформацією, та пов'язаний з цим рівень економічного зростання, квантова фізика, генна інженерія та інші.

Таким чином, виникла потреба працювати зі стохастичними процесами, які до того ж часто мали дискретні характеристики. "Бог не играет в кости", - такою була рецензія А. Ейнштейна до книги Планка по квантовій механіці, але досвід і час розставили свої акценти і вирази "випадкова величина", "математичне сподівання", "ймовірність", "арифметичний розподіл" все частіше звучать при описанні оточуючого світу та суспільства.

В останні десятиріччя особливо актуальними стали об'єкти і методи дискретної математики, що пов'язано з можливістю застосування ЕОМ в цій сфері наукової діяльності. Замінивши визначений інтеграл скінченними сумами, а диференціальні рівняння – різницевими, людина перейшла від банальних і екологічно небезпечних випробувань новітніх технологій до їх комп'ютерного моделювання з наступним аналізом можливих наслідків в суспільстві та природі, зберігши при цьому засоби математики основними в природознавстві. Але, навіть такі аргументи не дозволяють сказати, що сучасна студентська молодь вільно володіє об'єктами дискретної математики та теорії ймовірностей, не говорячи вже за учнів загальноосвітніх шкіл.

І хоча методична і педагогічна частина не є головною метою роботи, все ж вважаємо за доцільне привести слова доктора фізико-математичних наук, професора Волкова Ю.І. про те, що "в співвідношенні розділів математики, що вивчаються в педагогічних вузах та школі, повинно значно півсилитись роль дискретних розділів на противагу неперервним… таке посилення буде досить сприятливим для цілей викладання, оскільки дискретна математика… значно доступніша, ніж класичний аналіз; вона скоріше може зацікавити тих, хто навчається, викличе менше труднощів і тому більше підходить для викладання" [3]. Тому, переглянувши вітчизняну та зарубіжну літературу, було вирішено зупинитися на двох розділах: "Скінченні суми та методи їх знаходження" і "Дискретні розподіли та їхні характеристики", що обумовлено розпорошеністю цього матеріалу по різним підручникам і науковим монографіям. Окрім цього скінченні суми, як зазначалося, є дискретним аналогом визначених інтегралів, а різницеве числення, на якому базується один з основних методів підсумовування, - аналог диференціального числення.

Отже, **метою роботи є:**

1. вивчення сум, їх властивостей, методів підсумовування та ілюстрація цього матеріалу на прикладах студентських математичних олімпіад, чому присвячений перший розділ "Скінченні суми та методи їх знаходження". Основна ціль розділу - проаналізувати можливість застосування

різноманітного математичного апарату для знаходження сум. Детально розглянута теорія зворотних рівнянь та різницевого числення та на основі цього знайдені універсальні формули для обчислення сум, породжених многочленами, квазімногочленами та функціями виду $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x\cdot\ldots\cdot(x+m)}$, сум $\sum\limits_{x=0}^{n-1}\lambda^x f(x)\cos\alpha x$, $\sum\limits_{x=0}^{n-1}\lambda^x f(x)\sin\alpha x$;

2. розгляд дискретних розподілів та їхніх основних характеристик, твірних функцій та властивостей, пов'язаних з ними; доведена теорема неперервності та вказано її застосування в дискретній теорії ймовірності та при обчисленні сум.. В тому числі проведено аналіз рівняння

$$\frac{\partial P}{\partial x}V(x)-\frac{\partial P}{\partial z}z+xP=0,$$

введене Волковим Ю.І. та пов'язані з цим рівнянням розподіли типу **В**. Цей матеріал викладається в другому розділі “Дискретні розподіли та їхні характеристики”;

3. детальне вивчення дискретних розподілів, зокрема, таких характеристик як математичне сподівання, дисперсія, моменти та семіінваріанти послідовностей випадкових величин, підказало новий оригінальний спосіб відшукання деяких видів сум, ілюстрація якого на конкретних вправах стала метою третього розділу “Застосування дискретної теорії ймовірностей для знаходження скінченних сум”. Тут же приведені деякі узагальнені результати, отримані Волковим Ю.І. [4,5], що стосується теми дослідження.

Ціль роботи. Окрім детального висвітлення двох розділів дискретної математики, зроблена спроба пов'язати їх, що знайшло своє втілення в розробці незвичного методу знаходження сум. Втім, методи підсумовування, як і дискретні розподіли, не являються самоціллю роботи. Скоріш за все, ми намагалися показати глибокі внутрішні зв'язки між різними математичними дисциплінами та проілюструвати як інколи просто розв'язуються складні задачі якщо їм надати трошки іншого смислового навантаження. Основна ціль розв’язаних в роботі вправ – демонстрація теоретичного матеріалу та сучасних тенденцій студентський математичних олімпіад.

Робота призначена як для вчителів математики та студентів, так і для викладачів педагогічних вузів. Окрім цього, вона буде корисна всим, хто цікавиться математикою, її нестандартними задачами та цікавими закономірностями, а також може слугувати як додаткова література при підготовці до олімпіад з математики та інформатики.

І. Скінченні суми та методи їх знаходження

1. Властивості сум

В дискретній математиці суми відіграють не менш важливу роль, аніж визначені інтеграли в класичному аналізі, а тому коректне застосування цього апарату та вільне користування ним є неодмінною складовою наукової культури кожного, хто пов’язав своє життя з математикою.

Використовують два способи позначення сум:

- *сигма-позначення* $\sum_{k=1}^{n} a_k$, (1) де a_k - загальний член суми, k - параметр підсумовування;
- *запис суми в розгорнутому вигляді*: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Наприклад, сума квадратів перших n натуральних чисел, запишеться:

1) використовуючи сигма-позначення - $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Тут $a_k = k^2$;

2) в розгорнутому вигляді - $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Таким чином, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Наведений приклад показує рівнозначність обох позначень. В той же час кожен з них має свої межі застосування. Проілюструємо сказане, розглянувши $\sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^k$. Підставляючи поступово $k = 1$, $k = 2$ і так далі до $k = 10$ знайдемо відповідно перший, другий, … десятий член суми. Випишемо її:

$$\sum_{k=1}^{10} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 10 \cdot 2^{10}.$$

В цьому випадку говорять про представлення суми в розгорнутому вигляді. Отже, якщо сигма-позначення дає зручний і компактний запис, то розгорнутий вигляд дозволяє представити суму “в усій красі”, що в багатьох випадках спрощує як розв’язання так і розуміння матеріалу взагалі.

Повернемося до сигма- позначення сум. Вираз (1) є скороченим записом суми всіх членів a_k, порядковий номер яких лежить в межах від 1 до n. В загальному випадку запишемо: $\sum\limits_{Q(k)} a_k$, що позначає суму всіх членів a_k таких, що їх номер k задовольняє умові $Q(k)$, де $Q(k)$ - висловлення відносно k.

Наприклад,

1) $\sum\limits_{1 \le k \le n} a_k$ - сума всіх a_k, порядкові номери яких задовольняють подвійну нерівність $1 \le k \le n$;

2) $\sum\limits_{\substack{k=2m-1 \\ k \le n,\, m \in N}} a_k$ - сума тих a_k, порядкові номери яких – непарні числа, але менші за деяке наперед задане число n;

3) $\sum\limits_{n_1+n_2+\ldots n_k} \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$ -узагальнена формула бінома Ньютона, де підсумовування ведеться всіх наборах невід'ємних чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, що задовольняють рівність $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Очевидним є той факт, що для кожного конкретного n обчислити значення суми (1), яке йому відповідає, принципових труднощів не створює, хоча і вимагає громіздких операцій. А тому в нашому розумінні задача на підсумовування вважається розв'язаною, якщо вдається виразити $\sum\limits_{Q(k)} a_k$ в замкненому вигляді як функцію від членів a_k та їх кількості n. Однак досить часто доводиться мати справу з сумами, які не виражаються в замкненому вигляді. В цьому разі розглядають задачу на знаходження не точного, а наближеного виразу для шуканої суми. Наприклад, зовні проста сума

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

що носить назву гармонійної не виражається в скінченному вигляді. Це ж стосується суми $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k^2}$, яка є аналогом відомого інтегралу Пуассона, що має широке застосування в теорії ймовірностей та математичному аналізі.

Властивості сум.

1. Добуток деякого дійсного числа c і суми рівний сумі, кожен член якої помножено на це число, і навпаки.

$$c\cdot\sum_{Q(k)}a_k=\sum_{Q(k)}c\cdot a_k .$$

2. Якщо кожен член $\sum_{Q(k)}a_k$ можна представити у вигляді $a_k=b_k+c_k$, то

$$\sum_{Q(k)}a_k=\sum_{Q(k)}(b_k+a_k)=\sum_{Q(k)}b_k+\sum_{Q(k)}c_k .$$

3. Нехай K - скінченна множина цілих чисел і $p(k)$ задана на цій множині перестановка. Тоді

$$\sum_{k\in K}a_k=\sum_{p(k)\in K}a_{p(k)} .$$

Властивість 3 стверджує, що члени суми можна переставляти в будь-якому порядку при умові, що $p(k)$ є перестановкою всіх елементів множини K, тобто $(\forall\, i\in K)\ (\exists!\, k):\ p(k)=i$. Наприклад $\sum_{Q(k)}a_k=\sum_{Q(i)}a_i=\sum_{\substack{Q(m-n)\\ m\in Z}}a_{m-n}$.

Незважаючи на деяку складність у формулюванні ця властивість має дуже широке застосування, зокрема, це стосується суми перших n натуральних чисел, виразити яку, шляхом перегрупування членів вдалося дев'ятирічному Гауссу в 1786 році.

4. Об'єднання індексів підсумовування.

Нехай K і K' - довільні скінченні множини цілих чисел, тоді

$$\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K'}a_k=\sum_{k\in K\cup K'}a_k+\sum_{k\in K\cap K'}a_k . \qquad (*)$$

Доведення розіб'ємо на два випадки:

1) $K\cap K'=\varnothing$. Доведення очевидне і слідує з діаграм Ейлера-Венна.

2) $K\cap K'=K''\neq\varnothing$.

Множину K' можна представити як об'єднання множин $K'\setminus K$ та K''. Врахувавши, що $K'\setminus K\cap K''=\varnothing$ з 1-го випадку слідує

$$\sum_{k\in K'}a_k=\sum_{k\in K'\setminus K}a_k+\sum_{k\in K''}a_k .$$

Тоді рівність (*) перепишеться у вигляді

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'\setminus K} a_k + \sum_{k\in K''} a_k .$$

З того, що $K \cap (K' \setminus K) = \varnothing$ і згідно випадку 1:

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'\setminus K} a_k = \sum_{k\in K'\cup K} a_k .$$

Оскільки, за побудовою, $K'' = K \cap K'$ маємо: $\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cup K'} a_k + \sum_{k\in K\cap K'} a_k$.

Ця властивість частіше всього зустрічається у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{, при } 1 \le m \le n\text{; } m, n - \text{цілі} . \qquad (**)$$

Очевидно, що рівність (**) є наслідком рівності (*) при $K = \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $K' = \{m, m+1, \ldots, n\}$, причому $K \cap K' = \varnothing$.

В наступному розділі ми повернемося до перелічених властивостей та виведемо на основі них деякі з методів обчислення скінченних сум. Але навіть вже цього матеріалу досить для розв'язання цілого класу задач, що передбачають перегрупування членів суми, використання відомих тотожностей та раніше вивченого матеріалу.

Приклад 1.1. *Знайти формулу суми членів арифметичної прогресії.*

Як відомо, загальний член арифметичної прогресії можна подати у вигляді: $a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$, де a_1 - перший член послідовності, d - різниця. Тоді запишемо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(a_1 + (k-1)d\right) \overset{вл.1,2}{=} a_1\sum_{k=1}^{n} 1 + d\sum_{k=1}^{n} k - d\sum_{k=1}^{n} 1 = a_1 n + \frac{1}{2}dn(n+1) - dn =$$
$$= n\left(a_1 + \frac{1}{2}d(n+1) - \frac{1}{2}d\right) = n\left(a_1 + \frac{1}{2}d(n-1)\right).$$

Розглянута вище вправа показує, що інтуїтивно зрозумілі властивості скінченних сум дають змогу вже на перших етапах вивчення теми "Послідовності", отримати з учнями якісно новий результат, який спиратиметься лише на раніше вивчений матеріал та сторонній "туманних" евристичних здогадок.

Приклад 1.2. *Нехай* $\varphi(n)$ - *кількість натуральних чисел, які не перевищують* n *і взаємнопрості з* n. *Довести, що їх сума чисел рівна* $\frac{n}{2}\varphi(n)$.

Отже, необхідно довести, що $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k = \frac{n}{2}\varphi(n)$, де (k,n) - найбільший спільний дільник чисел n і k. Нагадаємо, зазначена в умові функція $\varphi(n)$ є функцією Ейлера, яка широко застосовується в алгебрі та теорії чисел. Для розв'язування задачі скористаємося тим, що коли n і k взаємно прості, то числа n і $\mathrm{n-k}$ також є взаємно простими. Цей факт і є ключовим моментом, адже, замінивши k на $\mathrm{n-k}$ отримуємо:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = 2 \cdot S, \text{ де } \mathrm{S} \text{ - шукана сума.}$$

Скориставшись властивістю 2 запишемо:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = \sum_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (k+n-k) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} n = n \cdot \varphi(n) = 2 \cdot S.$$

Таким чином $S = \frac{n}{2}\varphi(n)$, що й треба було довести.

Приклад 1.3. *Нехай* n - *складене число і* $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ - *його дільники. Довести, що* $\frac{2}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{m-1} \ln d_k$ *є цілим числом.*

Неважко помітити, що добуток рівновіддалених дільників в нерівності дорівнює n: $d_k \cdot d_{m-k} = n$. Таких рівностей, врахувавши повторення, існує стільки скільки існує дільників числа n, тобто $(\mathrm{m}+1)$. Отже, можемо записати: $n^{m+1} = (d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m)^2$.

Прологарифмуємо останню рівність за основою e:

$$(m+1)\ln n = 2\ln(d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m).$$

Використавши те, що $\ln(\mathrm{N}_1 \cdot \mathrm{N}_2) = \ln \mathrm{N}_1 + \ln \mathrm{N}_2$ отримаємо

$$(m+1)\ln n = 2\sum_{k=0}^{m} \ln d_k.$$

Звідки: $\frac{2}{\ln n}\sum_{k=1}^{m-1}\ln d_k = (m-1)$. Оскільки $(\mathrm{m}-1)$ - ціле число, то робимо висновок про розв'язання поставленої проблеми.

Отже, бачимо, що вміле використання властивостей скінченних сум дає змогу розв'язувати вправи, які охоплюють як шкільний курс математики, так і теоретичну базу молодших курсів фізико-математичних факультетів вузів. В той же час, застосування властивостей при згортанні сум вимагає додаткової уваги і обережності в перетвореннях, а, в більшості випадків і перевірки отриманих результатів. Тому далі ми розглянемо найпоширеніші методи знаходження скінченних сум, що дозволить більш детально познайомитися з властивостями арифметичних розподілів. До того ж цей матеріал може розглядатися студентами та вчителями шкіл як самостійний та використовуватися при підготовці учнівських олімпіад та для роботи з обдарованою молоддю.

2. Методи обчислення скінченних сум

В даному пункті в оглядовому порядку розглядаються основні методи підсумовування послідовностей, що базуються як на штучних перетвореннях так і на строгій математичній основі, що дає змогу порівняти різні шляхи роз'язання поставленої задачі. Незважаючи на стислість викладу матеріалу, проороблена велика кількість вправ, що ілюструють можливості та межі застосування того чи іншого методу та дозволяють закріпити теоретичні відомості практичними навичками, а використання нетипового математичного апарату сприятиме розвитку логічного мислення та відчуття глибоких внутріпредметних зв'язків.

2.1. Методи, що базуються на властивостях сум

Розглядаючи основні властивості скінченних сум, ми дійшли до висновку про їх ефективне застосування при розв'язуванні певного класу задач. Легко помітити, що в кожному прикладі використовується прийом перегрупування членів із подальшим вивченням поведінки відповідних сум. Цей прийом покладено в основу одного з методів підсумовування – метода зведення. Розглянемо його. Позначимо через S_n шукану суму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (*)$$

Розглянемо $S_n + a_{n+1}$:

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \overset{k \to k+1}{=} a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\,.$$

Отже,

$$S_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_{n+1}\,.$$

Сума $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$, зазначена в останній рівності, дуже схожа на S_n. Тепер якщо вдається, використовуючи властивості 1-4 пункту 1, виразити $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ через S_n, то, звівши подібні доданки, отримуємо замкнений вираз для шуканої суми.

Приклад 1.4. *Знайти суму квадратів перших n натуральних чисел.*

Позначимо через $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ і розглянемо $S_n + (n+1)^3$.

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) \overset{\text{вл.}1,2}{=} S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 =$$
$$= S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Отримали $$S_n + (n+1)^3 = S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Звідси $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Приклад 1.5. З*найти* $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$.

Функція $f(x) = x \cdot 2^x$ - квазімногочлен. Під квазімногочленами в математиці прийнято вважати функції, що є лінійними комбінаціями добутків многочленів на показникові функції.

Виділення квазімногочлена в окрему математичну структуру обумовлено кількома причинами, серед яких виділимо можливість опису за допомогою них реальних фізичних, хімічних та біологічних процесів. Тому часто приходиться мати справу із сумами, що містять квазімногочлени.

Слідуючи загальній схемі методу зведення, запишемо:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k .$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 2S_n + \frac{2^{n+2} - 2}{2 - 1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

Отже, $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2 .$$

Пригадайте як у школі вчитель малював таблицю:

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$,

з якої напрошувався наступний результат: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\mathrm{n} - 1) = \mathrm{n}^2$. Потім, користуючись методом математичної індукції, доводилося, що дійсно, сума перших n непарних чисел рівна квадрату їх кількості.

І дійсно, в багатьох випадках вдається простежити залежність значення суми від кількості

Приклад 1.6. *Обчислити суму* $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$, *де* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.
Випишемо кілька перших значень шуканої суми.

$1 \cdot 1! = 1$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$

Легко помітити, що $1 = 2! - 1$, $5 = 3! - 1$, $23 = 4! - 1$, $119 = 5! - 1$, звідки виникає наступне припущення: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Провівши доведення методом математичної індукції, переконуємося в правильності отриманого результату.

Ми не можемо дати жодних порад щодо того як “відчути істину”; інколи це вдається зробити формалізувавши певні перетворення та властивості, інколи – проробивши деяку кількість дослідів вбачають закономірність, але, не зважаючи на це, *довести існуючий результат часто важливіше, ніж відшукати його*[1].

Що ж стосується скінченних сум, то властивості 1-4 розділу I дозволяють коректно виконувати перетворення над ними в процесі доведення методом математичної індукції.

Приклад 1.7. *Довести, що* $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

При $n = 1$ рівність виконується. Дійсно, $\sum\limits_{k=1}^{1} \sin k\alpha = \dfrac{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha}{\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \sin\alpha$.

Припустимо, що при $n = m$ $\sum\limits_{k=1}^{m} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (*)

Доведемо, що при $n = m+1$ $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \sin k\alpha = \dfrac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (**)

[1] Яскравим історичним прикладом цього є відкриття Колумбом нового континенту, що був названий Америкою саме на честь вченого Амеріго Веспуччі, який довів, що це дійсно Новий Світ.

Розглянемо

$$\sum_{k=1}^{m+1}\sin k\alpha \overset{вл.2,4}{=} \sum_{k=1}^{m}\sin k\alpha + \sin(m+1)\alpha \overset{(**)}{=} \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin(m+1)\alpha =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{(m+1)\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin(m+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{m\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{m\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{m\alpha}{2}\cos\alpha + \cos\frac{m\alpha}{2}\sin\alpha\right) = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin\frac{(m+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Отже, рівність (*) виконується для довільного натурального n.

2.2. Застосування диференціального та інтегрального числення

З часу винайдення Ньютоном та Лейбніцем диференціального та інтегрального числення світ дуже змінився, а наука завдяки цьому, дійсно стала Наукою – чіткою і строгою, без розмитих тверджень та інтуїтивних доведень. Поступово з'ясувалося, що з допомогою поняття похідної та інтеграла ефективно розв'язуються багато елементарних задач: доведення нерівностей, розв'язування рівнянь, обчислення сум і т.п.

Аналізуючи власний педагогічний досвід та роботу, проведену із студентами старших курсів, приходимо до невтішного висновку: як учні так і більшість майбутніх учителів догматують та абсолютизують отриманні знання, розглядаючи при цьому кожен математичний розділ відірвано від інших, втрачаючи таким чином інтегративну функцію науки, що є неодмінним атрибутом при комплексному підході до поставлених проблем.

Тому застосування диференціального та інтегрального числення до розв'язування задач з підсумовування дозволить не лише розвивати в учнів логічне мислення та математичну культуру, а й закладе міцний фундамент, на якому будуватимуться нові наукові звершення.

Опишемо ідею, що використовується при залучені похідної та первісної до обчислення скінченних сум [2]. Часто виконати певні тотожні перетворення виявляється занадто складно. Тоді даний вираз розглядають як функцію f від деякої змінної x, зміст якої з'ясовується при конкретних умовах. Після такої заміни може статися, що або $f'(x)$, або $F(x)$ - первісна легше піддаються спрощенню. Виконавши відповідні перетворення над похідною чи первісною, повертаємося до початкової функції та значення незалежної змінної x.

Приклад 1.8. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. (*)

Розглянемо шукану суму як функцію $f(x)$.

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \qquad (**)$$

Неважко помітити що

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n \qquad (***)$$

є первісною функції $f(x)$. З другого боку, вираз (***) є не чим іншим як геометричною прогресією із знаменником $q = x$. Тоді

$$F(x) = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}.$$

Пригадавши зв'язок $F(x)$ та $f(x)$, знаходимо

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = f(x) = F'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},\ x \neq 1.$$

При $x = 1$ сума (*) отримуємо "гауссівську суму" $1 + 2 + \ldots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$.

Вправа 1.8. розкриває суть методу, але часто приходиться мати справу із сумами, в яких змінна відсутня. В цьому разі важливо вдало підібрати функцію $f(x)$, яка породжує шукану суму при деякому значенні змінної.

Приклад 1.9.*Виразити в замкненому вигляді* $1 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + 2^{2\mathrm{n}-2} \cdot (2\mathrm{n} - 1)$.

Оскільки роль x має відігравати один і то й же вираз, то першою задачею є відшукання інваріанту, притаманного всім доданкам суми. Неважко помітити, що це 2. Робимо висновок про те, що шукана сума є окремим випадком функції

$$f(x)=1+3x^2+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{2n-2}, \text{ при } x=2.$$

Знайдемо первісну функції $f(x)$

$$F(x)=x+x^3+x^5+\ldots+x^{2n-1},$$

яка є геометричною прогресією із знаменником $q=x^2>1$. Згорнемо $\mathrm{F}(\mathrm{x})$

$$F(x)=\frac{x(x^{2n}-1)}{x^2-1}.$$

Повертаючись до $f(x)$, отримуємо

$$f(x)=F'(x)=\frac{(2n-1)x^{2n+2}-(2n+1)x^{2n}+x^2+1}{(x^2-1)^2},\ x\neq\pm1.$$

Звідси при $x=2$ виразимо значення шуканої суми

$$1+2^2\cdot3+2^4\cdot5+\ldots+2^{2\mathrm{n}-2}\cdot(2\mathrm{n}-1)=\frac{(2n-1)2^{2n+2}-(2n+1)2^{2n}+5}{9}=\frac{2^{2n}(6n-3)+5}{9}.$$

В деяких випадках розв’язання задачі на підсумовування передбачає знаходження не первісної $F(x)$ до побудованої функції $f(x)$, а похідної $f'(x)$. Виконавши перетворення над функцією $f'(x)$, повертаємося до $f(x)$ ($f(x)$ - первісна до $f'(x)$). Слід мати на увазі, що $f(x)$ визначається з точністю до сталої, значення якої уточнюється з початкових умов.

Приклад 1.10. *Спростити вираз*

$$2C_n^0+\frac{2^2C_n^1}{2}+\frac{2^3C_n^2}{3}+\ldots+\frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}. \qquad (*)$$

1) Сталим компонентом кожного доданку є двійка. Тому робимо висновок, що вираз (*) – значення функції

$$f(x)=xC_n^0+\frac{x^2C_n^1}{2}+\frac{x^3C_n^2}{3}+\ldots+\frac{x^{n+1}C_n^n}{n+1} \text{ при } x=2. \qquad (**)$$

2) Знайдемо похідну

$$f'(x)=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+\ldots+x^nC_n^n. \qquad (***)$$

Прирівнюючи запис (***) із формулою бінома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

при $a=1$, $b=x$, перепишемо (***)

$$f'(x)=(1+x)^n .$$

Оскільки $f(x)$ - первісна функції $f'(x)$, то не складає особливих труднощів знаходження замкненого виразу для $f(x)$.

$$f(x)=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}+c .$$

З умови (**) випливає, що $f(0)=0$. З останньої рівності визначимо сталу c.

$$0=\frac{(1+0)^{n+1}}{n+1}+c ;\ \ c=-\frac{1}{n+1} .$$

Звідси $f(x)=\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$. Підставляючи в останню рівність $x=2$, отримуємо

$$2C_n^0+\frac{2^2 C_n^1}{2}+\frac{2^3 C_n^2}{3}+\ldots+\frac{2^{n+1} C_n^n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1} .$$

Зробимо підсумок. Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення скінченних сум передбачає:

1) дослідження та відшукання[1] функції $f(x)$, яка породжує дану суму при певному значенні незалежної змінної;
2) проаналізувати перспективи використання похідної $f'(x)$ чи первісної $F(x)$ на предмет можливості виконання тотожних перетворень;
3) повернутися до функції $f(x)$, використовуючи одне із співвідношень:

   а) $f(x)=F'(x)$;

   б) $f(x)=\int f'(x)dx+c$;

4) з допустимих початкових умов визначити значення сталої c.
5) підставити в отриманий вираз для $f(x)$ значення змінної x, яке відповідає умові 1) та записати отриманий результат як відповідь.

[1] Якщо це можливо.

2.3. Геометрична інтерпретація сум

Однією з найяскравіших ілюстрацій властивостей сум є можливість інтерпретувати алгебрагічні задачі мовою геометричних об'єктів, що дозволяє розвивати в учнів та студентів творчу уяву та прагнення до отримання нових результатів.

Методи, що допускають геометричну інтерпретацію спираються на властивість адитивності сум, яка ця властивість як аксіома притаманна і поняттю площі.

Приклад 1.11. *Знайти суму* $1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

Нам вже відомо, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Знайдемо тепер цей результат, користуючись властивістю адитивності. Для цього розглянемо прямокутники із сторонами $a = 1,\ b = k^3,\ k = \overline{1..n+1}$ (Мал. 1.1).

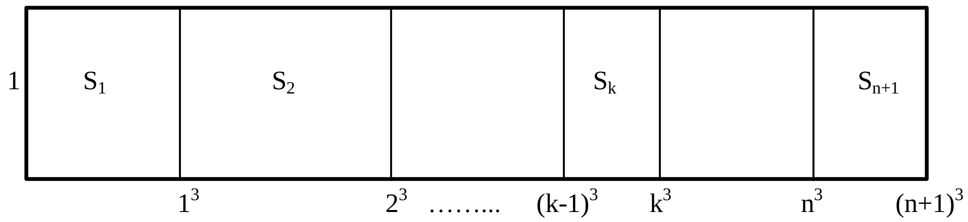

Рис. 1.1 Геометричне тлумачення суми квадратів перших n натуральних чисел.

Очевидно що

$$S_1 + S_2 + ... + S_{n+1} = (n+1)^3 \cdot 1. \qquad (*)$$

За побудовою

$$S_k = k^3 - (k-1)^3.$$

Тобто, рівність (*) перепишеться у вигляді

$$1 + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \ldots + ((n+1)^3 - n^3) = (n+1)^3 \cdot 1$$

Так як $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, то з (**) отримуємо

$$1 + (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1) + \ldots + (3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1) = (n+1)^3.$$

Перегрупуємо члени в останній рівності

$$3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+3\left(1+2+\ldots+n\right)+\left(n+1\right)=\left(n+1\right)^3.$$

Звідси

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{3}\left(\left(n+1\right)^3-\frac{3}{2}n\left(n+1\right)-\left(n+1\right)\right)=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}.$$

Аналогічним чином можна знайти суми кубів, четвертих, п’ятих і т.д. степенів чисел натурального ряду.

Поряд із цими геометричну інтерпретацію допускають й інші суми. В цьому випадку найважливішим етапом є підбір площ S_k, які при кожному конкретному k перетворюються в якийсь з доданків шуканої суми.

Приклад 1.12. *Побудувати геометричну інтерпретацію суми*

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$$

Розглядаючи метод математичної індукції було показано, що ця сума рівна $(n+1)!-1$. Тепер нашою задачею буде геометрично отримати цей результат, аналогічно попередній вправі. Розглянемо прямокутники зі сторонами $a=1$ і $b_k=k\cdot k!=(k+1)!-k!$ $k=\overline{1..n+1}$ (Мал. 1.2).

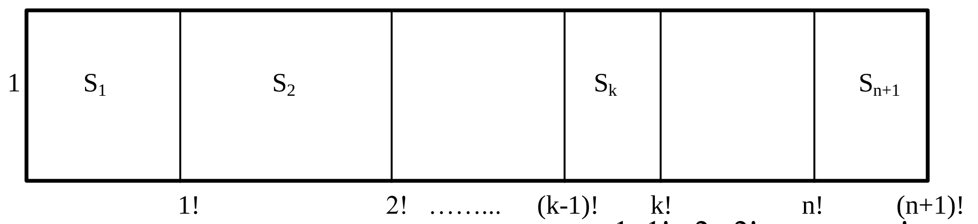

Рис. 1.2 Геометричне тлумачення суми $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$.

Площа кожного прямокутника $S_k=k\cdot k!\cdot 1$, а $S_1+S_2+\ldots+S_{n+1}=(n+1)!$.
Врахувавши, що S_2 відповідає першому доданку суми, S_3 - другому і т.д., запишемо

$$S_2+\ldots+S_{n+1}=1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=\left(n+1\right)!\text{-}S_1=\left(n+1\right)!\text{-}1.$$

На закінчення пункту пропонуємо ознайомитися з геометричною інтерпретацією для суми геометричної прогресії із знаменником $|q|<1$

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots. \qquad (*)$$

Розглянемо малюнок 1.3.

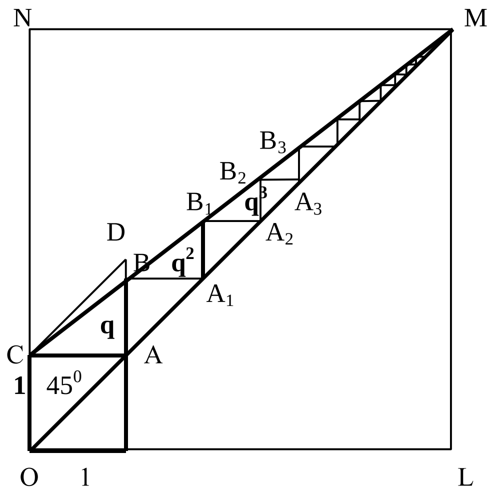

Рис. 2.3 Інтерпретація нескінченної спадної геометричної прогресії

Відрізки $OC=1$, $AB=q$, $A_1B_1=q^2$, $A_2B_2=q^3$ і т.д. графічно зображають члени прогресії (*). Це слідує з подібності відповідних трикутників.

Наприклад, $\Delta ACB \sim \Delta A_1BB_1$:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1B}{AC};\ \frac{A_1B_1}{q}=\frac{q}{1}\Rightarrow A_1B_1=q^2.$$

Аналогічними міркуваннями доводимо, що $A_kB_k=q^k,\ k=2,3,...$.

З умови $OC+AB+A_1B_1+\ldots+A_nB_n+\ldots=ML$ випливає: ML - графічно зображає суму (*). Знайдемо ML. Для цього скористаємося тим, що $\Delta CBD \sim \Delta OCM$, а $\Delta ACD \sim \Delta LOM$. Складемо відповідні пропорції:

$$\frac{BD}{OC}=\frac{CD}{OM}=\frac{AD}{ML};\ \frac{BD}{OC}=\frac{AD}{ML}\Rightarrow ML=\frac{OC\cdot AD}{BD}=\frac{1}{1-q},$$

що відповідає результату, отриманому алгебраїчним шляхом.

Приходимо до висновку

$$1+q+q^2+...+q^n+...=\frac{1}{1-q},\ \text{де}\ |q|<1.$$

Висновок. В пунктах 2.1., 2.2., 2.3. представлені штучні методи обчислення скінченних сум, які базуються на супутньому математичному апараті та не вимагають опанування додаткового матеріалу. В той же час, залучення звичних для учнів і студентів засобів до нетипових завдань, розкриває глибокий зміст та широке застосування матеріалу, що вивчається. Окрім того, методи, що передбачають виконання штучних перетворень, є необхідними і достатніми засобами при розв’язанні олімпіадних завдань.

Звичайно, описані випадки підсумовування не є вичерпними, але вони максимально наближені до реаліїв сьогодення математичної освіти.

В наступних пунктах глави буде розглянута теорія, що дозволить поставити задачу з підсумовування на більш міцну теоретичну основу, вироблено загальні методи обчислення деяких класів сум. Зокрема, розглянуто зв'язок сум та рекурентних рівнянь, а також висвітлено теорію різницевого числення та її застосування до підсумовування послідовностей.

2.4. Суми та рекурентні послідовності

Нехай задано деяку послідовність чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Знайдемо суму

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \qquad (*)$$

Для цього до a_1 спочатку додамо a_2, потім до утвореної суми додамо a_3 і т.д. Таким чином, обчислення суми (*) зводиться до наступних міркувань:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1;\\
&S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2;\\
&S_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = S_2 + a_3;\\
&S_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4;\\
&\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\\
&S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

На кожному кроці $\mathrm{S_k}$ визначається через $\mathrm{S_{k-1}}$. В цьому випадку говорять про рекурентно задану послідовність.

Означення. Послідовність називається заданою рекурентно, якщо кожний наступний її член виражається через попередні члени послідовності.

Отже, ми з'ясували, що сума

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

еквівалентна рекурентності

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_k = S_{k-1} + a_k, \quad \mathrm{k} > 0 \end{cases} \qquad (**)$$

задача з підсумовування звелася до розв'язання співвідношення (**). Наприклад, для геометричного ряду можна побудувати наступні формули:

а)

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_k = S_{k-1} + aq^{k-1} \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = aq, \\ S_{k+2} = (1+q)S_{k+1} - qS_k \end{cases}$$

Неважко помітити, що перша рекурентність містить в ролі параметра номер деякого елемента суми - k, друга рекурентність – його немає. Ця ознака примушує нас розглянути два методи розв'язання рекурентних рівнянь: репертуарний (випадок а) і метод, що базується на теорії різницевих рівнянь (випадок б).

Репертуарний метод. Частіше всього використовується у випадках, коли сума породжена многочленом степені не вище 5-го, та зводить рекурентне співвідношення до методу невизначених коефіцієнтів [9].

Нехай a_k - загальний член суми, що рівний сталій плюс деяке кратне k. Тоді система (**) прийме вигляд:

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + \beta + \gamma k, \quad k > 0 \end{cases} \qquad (***)$$

Загальний розв'язок рекурентності (***) виражається формулою:

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma,$$

де $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ - невизначені коефіцієнти. Знайдемо їх.

Підстановка $S_n = 1$ дає $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \Rightarrow A(n) = 1$.

Підстановка $S_n = n$ дає $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0 \Rightarrow B(n) = n$.

Підстановка $S_n = n^2$ дає $\alpha = 0,\ \beta = -1,\ \gamma = 2 \Rightarrow C(n) = \dfrac{n^2 + n}{2}$.

Приклад 1.13. *Знайти суму* $\sum_{k=0}^{n}(a + bk)$ *за допомогою репертуару.*

Система (***) в даному випадку запишеться так:

$$\begin{cases} S_0 = a, \\ S_k = S_{k-1} + a + bk. \end{cases}$$

Отже, $\alpha = a$, $\beta = a$, $\gamma = b$.

Врахувавши значення коефіцієнтів $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ запишемо значення шуканої суми.

$$A(n)\cdot a + B(n)\cdot a + C(n)\cdot b = a + na + \frac{n^2+n}{2}b = \frac{(n+1)(2a+nb)}{2}.$$

Приклад 1.14. *Виразити суму* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ *в замкненому вигляді.*

Аналізуючи вправу, підмічаємо суттєвий недолік репертуарного методу – його не універсальність, оскільки рекурентність (***) в розглядуваному випадку вимагає суттєвих доповнень, а саме:

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ S_k = S_{k-1} + (-1)^k\left(\beta + \gamma k + \delta k^2\right), \quad \text{при} \quad \mathrm{k} > 0 \end{cases}$$

і загальний розв’язок

$$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta,$$

де $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ - невизначені коефіцієнти.

Обчислимо їх значення, використовуючи допоміжні підстановки

$$S_n = 1 \;\Rightarrow\; A(n) = 1;$$

$$S_n = (-1)^n \;\Rightarrow\; A(n) + 2B(n) = (-1)^n;$$

$$S_n = (-1)^n n \;\Rightarrow\; -B(n) + 2C(n) = (-1)^n n;$$

$$S_n = (-1)^n n^2 \;\Rightarrow\; -B(n) + 2C(n) = (-1)^n n.$$

Отже, $D(n) = (-1)^n \dfrac{n^2+n}{2}$ і є шуканою сумою.

Постає питання: чи не можна якимось чином узагальнити репертуарний метод так, щоб він міг бути застосований до широкого класу сум ? Відповідь на це запитання дає наступна теорема [12].

Теорема. Нехай дано послідовність $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}, \ldots$ Якщо існує натуральне k і числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{k}$ такі, що

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \ldots + \alpha_k a_n \qquad (n \ge k \ge 1), \tag{1}$$

то $S_{n+k} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_{n+1} - \alpha_k S_n,$ (2)

де $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$.

Доведення.

Побудуємо n - часткові суми:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Неважко помітити, що

$$\begin{aligned} &a_1 = S_1, \\ &a_2 = S_2 - a_1 = S_2 - S_1, \\ &a_3 = S_3 - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_n = S_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_n - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Підставимо у рівність (1) отримані значення членів послідовності (a_n).

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = \alpha_1 (S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + \alpha_2 (S_{n+k-2} - S_{n+k-3}) + \ldots + \alpha_k (S_n - S_{n-1}),$$

звідки

$$S_{n+k} = (1+\alpha_1) S_{n+k-1} + (\alpha_2 - \alpha_1) S_{n+k-2} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1}) S_n + (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_{n-1}, \text{ де } \alpha_{k+1} = 0.$$

Замінивши n на $(n+1)$ отримуємо рівність (2).

Теорему доведено.

Отже, теорема говорить, що коли послідовність (a_n) може бути задана рекурентно (рівність 1), то послідовність n- часткових сум задовольняє рекурентне рівняння (2), яке не містить членів послідовності в явному вигляді.

Розв’язанням таких рівнянь займається теорія скінченних різниць, яка буде висвітлена в наступному пункті.

На теперішньому етапі нашою задачею буде усвідомлення можливості зведення суми до рекурентного рівняння k-го порядку (порядок рекурентного рівняння дорівнює кількості членів послідовності, через які виражається кожний наступний її член) та вироблення навичків з цього питання.

Приклад 1.15. *Побудувати рекурентні рівняння (1) та (2) для*

a) арифметичної прогресії;

b) геометричної прогресії;

c) послідовності квадратів натуральних чисел;

d) послідовності чисел Фібоначчі;

e) послідовності (a_n)*, де* $a_n = na^n$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

<u>Арифметична прогресія.</u>

За означенням арифметичної прогресії $a_{n+1} = a_n + d$, де d - різниця прогресії. Зведемо це рівняння до типу (1). Для цього достатньо розглянути систему двох рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + d, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n. \tag{1'}$$

Тобто, $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = -1$; $\alpha_3 = 0$, а $(1')$ – рекурентне рівняння 2-го порядку. Визначивши α_1 та α_2, запишемо рекурентне рівняння для суми членів арифметичної прогресії.

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n \tag{2'}$$

<u>Геометрична прогресія.</u>

Очевидно, що $a_{n+1} = a_n q$. Звідси $\alpha_1 = q$, $\alpha_2 = 0$. Підставляючи отримані значення коефіцієнтів в рівність (2) отримаємо

$$S_{n+2} = (1+q)S_{n+1} - qS_n$$

рекурентне рівняння другого порядку для суми геометричного ряду.

<u>Послідовність квадратів натуральних чисел.</u>

Розглядається послідовність (a_n), де $a_n = n^2$. Запишемо систему рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1, \\ a_{n+2} = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2 = (n+1)^2 + 2n + 3 = a_{n+1} + 2n + 3 = a_{n+1} + 2n + 3. \end{cases}$$

Або

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2n + 3. \end{cases}$$

Звідки

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2.$$

Але це ще не рівняння, подібне (1). Тому запишемо

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2.$$

Віднявши почленно останні дві рівності матимемо

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$$

Очевидно, що $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -3$; $\alpha_3 = 1$; $\alpha_4 = 0$.

На основі цього запишемо рекурентне рівняння для сум

$$S_{n+4} = (1+\alpha_1)S_{n+3} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+2} + (\alpha_3 - \alpha_2)S_{n+1} + (\alpha_4 - \alpha_3)S_n,$$

Або $S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} - 4S_{n+1} - S_n$ - рекурентне рівняння 4-го порядку.

<u>Послідовність чисел Фібоначчі.</u>

Послідовністю Фібоначчі (F_n) називається послідовність, кожен наступний член якої рівний сумі двох попередніх, причому $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Таким чином, (F_n) має вигляд:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 56, ...

З означення випливає рекурентність

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Отже, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Тоді часткові суми послідовності чисел Фібоначчі задовольняють наступне рекурентне рівняння 3-го порядку

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n.$$

Зауваження. Рівняння (1) та (2) не враховують початкових умов конкретної послідовності. Тому при побудові загального розв’язку виникатиме необхідність уточнення отриманого результату.

2.5. Підсумовування методом скінченних різниць

Розглянуті в попередніх пунктах методи підсумовування є, по суті, штучними, тобто такими, що вимагають виконання певних тотожних перетворень. Причому, кожний окремий приклад вносить свої корективи в процес розв'язку. Тому цілком природньо постає задача побудови деякого загального методу, що міг би бути поширений на певний клас сум. Таким, до деякої міри універсальним методом, виявився метод скінченних різниць, що грунтується на теорії різницевого числення [7,8,11].

Приклад 1.16. *(Всеукраїнська студентська олімпіада, 2000 рік).*

Довести, що число $\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right)$ *не має дільників менших за 2002.*

Виконуючи певні тотожні перетворення над загальним членом суми, приходимо до цікавого результату:

$$a_k = k!\left(k^2+k+1\right) = k!\left((k+1)^2-k\right) = (k+1)!(k+1) - k!k\ .$$

Таким чином

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right) = \sum_{k=1}^{2001}\left[(k+1)!(k+1)-k!k\right] = (2!\cdot 2-1!\cdot 1)+(3!\cdot 3-2!\cdot 2)+$$
$$(4!\cdot 4-3!\cdot 3)+(5!\cdot 5-4!\cdot 4)+\ldots+(2002!\cdot 2002-2001!\cdot 2001) = 2002!\cdot 2002-1$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot\left(k^2+k+1\right) = 2002!\cdot 2002-1\,.$$

Проаналізуємо. До даної послідовності чисел (a_k) побудовано іншу послідовність (b_k), де $b_k = k!\cdot k$ таку, що $a_k = b_{k+1} - b_k$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1}-b_k\right) = b_{n+1}-b_1\,.$$

Цей прийом і покладено в основу підсумовування методом скінченних різниць. Але, перш ніж перейти до знаходження сум коротко розглянемо деякі теоретичні відомості з цього питання.

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x і нехай h таке число, що $f(x)$ визначена і в точці $x+h$.

Означення. Операція переходу від $f(x)$ до $f(x+h)-f(x)$ називається оператором знаходження різниці, або різницевим оператором і позначається

$$\Delta_h f = f(x+h)-f(x).$$

Не втрачаючи загальності, покладемо $h=1$. Справді, замінюючи $f(x)$ на $g(t)$, де $g(t)=f(hx)$, $t=\dfrac{x}{h}$, отримуємо

$$\Delta g = g(t+1)-g(t)=f(h(t+1))-f(ht)\overset{t\to\frac{x}{h}}{=}f(x+h)-f(x)=\Delta_h f\ .$$

Тоді різницевий оператор визначиться наступним чином

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x). \qquad (1)$$

Властивості різницевого оператора.

1. Якщо c - стала, то $\Delta(cf)=c\Delta f$.
2. (Адитивність). Нехай функції f і g визначені в точках x та $x+1$. Тоді $\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g$.
3. (Лінійність). Якщо c_1, c_2 - сталі, а f і g визначені в точках x та $x+1$, то $\Delta(c_1 f+c_2 g)=c_1\Delta f+c_2\Delta g$.
4. (Аналог похідної добутку). $\Delta(f\cdot g)=g\cdot\Delta f+f\cdot\Delta g+\Delta f\cdot\Delta g$.

Доведення. За означенням

$$\Delta(f\cdot g)=f(x+1)g(x+1)-f(x)g(x)=f(x+1)(g(x+1)-g(x))+g(x)(f(x+1)-f(x))=$$
$$=f(x+1)\Delta g+g(x)\Delta f=f(x+1)\Delta g-f(x)\Delta g+f(x)\Delta g+g(x)\Delta f=$$
$$=\Delta g(f(x+1)-f(x))+f(x)\Delta g+g(x)\Delta f=f(x)\Delta g+g(x)\Delta f+\Delta g\Delta f.$$

Властивість доведено.

Неважко помітити, що різницевий оператор є аналогом похідної при $\Delta x=1$ (приріст аргументу), а операція знаходження різниці – аналог диференціювання. Постає питання: “а що виступає в ролі оберненої операції – інтегрування ?”

Означення. Антирізницею функції $f(x)$ називається така функція $F(x)$, що $\Delta F(x)=f(x)$ (2) і позначається

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x) \tag{3}$$

Властивості антирізницевого оператора.

1. $\Delta^{-1}(\Delta f(x)) = f(x)$.

2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ дві різні антирізниці функції $f(x)$, то

$$F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ - довільна періодична з періодом $T = 1$ функція.

Приклади застосування різницевих та антирізницевих операторів до деяких типів функцій дивись в додатку Д.2.

Тепер повернемося до задачі обчислення скінченних сум.

Нехай в рівності (2) x послідовно рівний $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ (n-1)$. Отримуємо:

$$\begin{cases} F(2) - F(1) = f(1), \\ F(3) - F(2) = f(2), \\ F(4) - F(3) = f(3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(n) - F(n-1) = f(n-1), \end{cases}$$

звідки знаходимо:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) = F(n) - F(1). \tag{4}$$

В тому випадкові, коли обидві функції $f(x)$ і $F(x)$ відомі, формула (4) може служити для обчислення сум:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n-1) = F(x+n) - F(x),$$

або, за аналогією формули Ньютона-Лейбніца:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = F(x+k)\Big|_0^n = F(x+n) - F(x).$$

На практиці частіше використовується випадок, коли $x = 0$. Тут маємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = F(k)\Big|_0^n = F(n) - F(0) \tag{5}$$

Приклад 1.17. *(Київська олімпіада 11 клас, 1961 р.) Знайти суму n доданків* $arctg\dfrac{1}{1+1+1^2} + arctg\dfrac{1}{1+2+2^2} + \dots + arctg\dfrac{1}{1+n+n^2}$.

Згідно формули (5)

$$\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{1+k+k^2} = \Delta^{-1} arctg\frac{1}{1+k+k^2}\Bigg|_1^{n+1} = arctgk\Big|_1^{n+1} = arctg(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Підсумок. Можна з впевненістю сказати, що задача на знаходження суми, породженої деякою функцією $f(x)$, розв'язана повністю. Треба знайти антирізницю $\Delta^{-1} f(x)$ і скористатися формулою (5). В той же час не для будь-якої, навіть елементарної функції, її антирізниця виражається через елементарні функції, наприклад для $f(x) = \frac{1}{x}$. В цьому випадку розглядають або задачу наближеного обчислення сум. Але нас будуть цікавити функції, антирізниця яких виражається в скінченному вигляді.

Зауваження. Інколи загальний член суми вдається представити не як різницю двох сусідніх членів деякої послідовності, а як різницю

$$a_k = b_{k+m} - b_k, \text{ де } \mathrm{m} \in \mathrm{Z}.$$

Тоді ми рекомендуємо виписати відповідну суму в розгорнутому вигляді та виконати відповідні тотожні перетворення.

Приклад 1.18. *(Університет Дружби Народів, олімпіада з математики, 1977 р.) Знайти границю* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

Представимо дріб у вигляді суми елементарних дробів.

$$\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(k+3)!} - \frac{1}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}\right) = 1 - \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{7!} + \ldots +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}$$

Тепер задача знаходження границі при $n \to +\infty$ набуває тривіального характеру

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+3k^2+11k+5}{(k+3)!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}.$$

В попередньому пункті ми відзначили, що обчислення деяких сум зводиться до розв'язування рекурентного рівняння $(k+1)$ -го порядку

$$S_{n+k+1}=(1+\alpha_1)S_{n+k}+(\alpha_2-\alpha_1)S_{n+k-1}+\ldots+(\alpha_k-\alpha_{k-1})S_{n+1}-\alpha_k S_n, \qquad (6)$$

де α_1, α_2, …, α_k - дійсні числа. Для розв'язування рівняння (6) скористаємося теорією різницевих рівнянь.

Нехай x приймає тільки натуральні значення. Тоді $\varphi(x)$ - послідовність

$$\varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ldots,\varphi(n),\ldots$$

Означення. Рівняння, яке можна записати у вигляді

$$\Delta\varphi(x)-g(x)\varphi(x)=0 \qquad (7)$$

відносно невідомої функції $\varphi(x)$ називається лінійним однорідним різницевим рівнянням першого порядку (ЛОРР).

Загальний розв'язок рівняння (7), приведений в [5], має вигляд

$$\varphi(x)=c\prod_{k=0}^{x-1}(g(k)+1),\ \text{де}\ c\in R.$$

Означення. ЛОРР другого порядку називається рівняння виду

$$\Delta^2\varphi(x)+a\Delta\varphi(x)+b\varphi(x)=0, \qquad (8)$$

де $\Delta^n f$ - різниця n - го порядку функції f.

Загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$\varphi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - деякі часткові лінійно незалежні розв'язки, тобто

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_1(1)\\ \varphi_2(0) & \varphi_2(1)\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (*)$$

Сталі c_1, c_2 визначаються, як правило, з початкових умов задачі.

З огляду на рекурентність (6) рівняння (8) зручно записати у вигляді

$$\varphi(x+2)+p\varphi(x+1)+q\varphi(x)=0, \qquad (9)$$

де $p = a - 2$, $q = a + b + 1$.

Основна задача – знайти часткові розв’язки $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ рівняння (9).

Означення. Рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (10) називається характеристичним рівнянням лінійного однорідного різницевого рівняння (9) другого порядку.

В залежності від того, якими є корені рівняння (10) *розглядають* наступні *випадки*:

1) $\lambda_1,\ \lambda_2 \in R$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Очевидно, що умова (*) виконується і функція

$$\varphi(x) = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x \qquad (11)$$

загальний розв’язок рівняння (9).

2) $\lambda_1,\ \lambda_2 \in R$ і $\lambda_1 = \lambda_2$ В цьому випадку лінійно незалежними частковими розв’язками рівняння (9) будуть функції $\varphi_1(x) = x\lambda^x$ та $\varphi_2(x) = \lambda^x$. Тоді загальний розв’язок прийме вигляд:

$$\varphi(x) = c_1 x\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x. \qquad (12)$$

3) $\lambda_1,\ \lambda_2$ - комплексні. Запишемо загальний розв’язок, що відповідає розглядуваному випадкові.

$$\varphi(x) = \rho^x\left(c_1\cos\alpha x + c_2\sin\alpha x\right), \qquad (13)$$

де ρ - модуль, α - аргумент одного з комплексних коренів характеристичного рівняння (10).

Детальніше з цим матеріалом можна познайомитися в [7].

Як показує теорія і практика обмежитися лише різницевими рівняннями 2-го порядку ми не можемо, а тому виникає потреба в узагальнені отриманих результатів. Оскільки теорія різницевих рівнянь нас цікавить лише як засіб знаходження скінченних сум, то скористаємося відомими фактами та наслідками.

Означення. Лінійним однорідним різницевим рівнянням k-го порядку з сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$\varphi(x+k) + a_1\varphi(x+k-1) + a_2\varphi(x+k-2) + \ldots + a_k\varphi(x) = 0. \qquad (14)$$

Означення. Рівняння $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$ (15)

називається характеристичним рівнянням ЛОРР (14).

Аналогічно ЛОРР другого порядку, розглянемо побудову загального розв'язку рівняння (14) в залежності від коренів рівняння (15).

1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{k}} \in R$ і $\lambda_i \neq \lambda_{\mathrm{j}}$, якщо $i \neq j$.

$$\varphi(x) = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x + \ldots + c_k\lambda_k^x \qquad (16)$$

2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{m}}$ - дійсні корені (15) кратності $s_1, s_2, \ldots, s_{\mathrm{m}}$ відповідно.

Тоді кореню λ_j відповідатиме сума $\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_{s_j}x^{s_j-1}\right)\cdot \lambda_j^x$, а простому кореню відповідатиме доданок $c_i\lambda_i^x$. Таким чином

$$\varphi(x) = \left(c_{11} + c_{12}x + \ldots + c_{1s_1}x^{s_1-1}\right)\cdot \lambda_1^x + \ldots + \left(c_{m1} + c_{m2}x + \ldots + c_{ms_1}x^{s_m-1}\right)\cdot \lambda_m^x \qquad (17)$$

Аналогічно будують систему лінійно незалежних розв'язків і у випадку комплексних коренів.

Отже, різницеві рівняння дозволяють виразити в скінченному вигляді функцію, яка задовольняє деяке рекурентне співвідношення. Оскільки нас цікавлять перш за все суми, то спробуємо розв'язати деякі з побудованих в попередньому пункті рекурентних співвідношень.

Приклад 1.19. *Знайти суми*

a) *арифметичної прогресії* $\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{d}, \mathrm{a}+2\mathrm{d}, \ldots, \mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\mathrm{d}$*;*

b) *геометричної прогресії* $1, \mathrm{q}, \mathrm{q}^2, \mathrm{q}^3, \ldots, \mathrm{q}^{\mathrm{n}}$*;*

c) *послідовності чисел Фібоначчі* $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$,

якщо відомо, що вони (суми) задовольняють наступні рекурентні рівняння:

a) $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+3} = 3\mathrm{S}_{\mathrm{n}+2} - 3\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1} + \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$*;* (*)

b) $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+2} = (1+\mathrm{q})\mathrm{S}_{\mathrm{n}+1} - \mathrm{q}\mathrm{S}_{\mathrm{n}}$*;* (**)

c) $\mathrm{S}_{\mathrm{n}+3} = 2\mathrm{S}_{\mathrm{n}+2} - \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$. (***)

Розпочнемо з *геометричної прогресії*. Перепишемо рівняння (**) у вигляді

$$S_{n+2} - (1+q)S_{n+1} + qS_n = 0$$

Складемо характеристичне рівняння

$\lambda^2 - (1+q)\lambda + q = 0,\ |q| > 1.$

Звідси $\lambda_1 = q$, $\lambda_1 = q$. Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$ при $|q| > 1$, то $S_n = c_1 q^n + c_2$.

З початкових умов ($S_1 = 1, S_2 = 1 + q$) випливає, що $c_1 = \dfrac{q}{q-1}$, $c_2 = \dfrac{1}{1-q}$.

Тоді

$$S_n = \frac{q^{n+1}}{q-1} + \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

Для *арифметичної прогресії* характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Тобто,

$$S_n = \left(c_1 + c_2 n + c_3 n^2\right) \cdot 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2.$$

Враховуючи, що

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = 2a + d, \\ S_3 = 3a + d \end{cases}$$

отримуємо значення сталих: $c_1 = 0$, $c_2 = a - \dfrac{1}{2}d$, $c_3 = \dfrac{d}{2}$.

$$S_n = \left(a - \frac{1}{2}d\right)n + \frac{1}{2}d \cdot n^2 = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Не складає особливих труднощів і відшукання суми чисел *послідовності Фібоначчі*, врахувавши корені характеристичного рівняння $1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Розглянута вище теорія дозволяє знайти загальні формули для сум, що породжені функціями, антирізниці яких виражаються в скінченному вигляді.

I. Нехай сума $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)$ породжена многочленом

$$f(x) = b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

де $b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots b_1, b_0 \in R$, $b_{m-1} \neq 0$. Тоді

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = \Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right)\Big|_0^n.$$

Таким чином ставиться задача відшукання антирізниці для многочлена $(m-1)$-го порядку. Для цього спочатку знайдемо

$$\Delta\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right).$$

Проробивши кілька вправ подібного характеру при конкретних значеннях коефіцієнтів і степені многочлена, приходимо до висновку:

$$\Delta\left(a_m x^m + \ldots + a_0\right) = x^{m-1}C_m^1 a_m + x^{m-2}\left(C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}\right) + \ldots + \sum_{i=1}^{m} C_i^i a_i , \qquad (18)$$

який можна довести методом математичної індукції по m.

Позначимо:

$$\begin{cases} b_{m-1} = C_m^1 a_m , \\ b_{m-2} = C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}, \\ b_{m-3} = C_m^3 a_m + C_{m-1}^2 a_{m-1} + C_{m-2}^1 a_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 = C_m^m a_m + C_{m-1}^{m-1} a_{m-1} + \ldots + C_1^1 a_1 . \end{cases} \qquad (19)$$

Згідно означення антирізниці

$$\Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

де $a_0 = \tau(x)$ - довільна періодична з періодом $T = 1$ функція.

З системи (19) m лінійних рівнянь з m невідомими, виразимо коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$, користуючись методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \ldots & 0 \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \ldots & C_1^1 \end{vmatrix} = C_m^1 \cdot C_{m-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_1^1 = m! \neq 0$$

Оскільки визначник основної матриці відмінний від нуля при будь-якому натуральному значенні m, то розв'язок існує і він єдиний.

$$\Delta_{a_m} = \begin{vmatrix} b_{m-1} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{m-2} & C_{m-1}^1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & C_{m-1}^{m-1} & \ldots & C_1^1 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \ldots & b_{m-1} \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \ldots & b_{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \ldots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_1x+b_0\right)=\frac{\Delta_{a_m}}{\Delta}x^m+\frac{\Delta_{a_{m-1}}}{\Delta}x^{m-1}+\ldots+\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}x+\tau(x)$$

Отже,

$$\sum_{x=0}^{n-1}\left(b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_1x+b_0\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_m}x^m+\Delta_{a_{m-1}}x^{m-1}+\ldots+\Delta_{a_1}x\right)\Big|_0^n. \qquad (20)$$

Приклад 1.20. *Знайти суму* $\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)$.

В цьому випадку маємо: $b_0=1$; $b_1=0$, $b_2=2$, $m=4$. Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_4}k^4+\Delta_{a_3}k^3+\Delta_{a_2}k^2+\Delta_{a_1}k\right)\Big|_0^n, \text{ де}$$

$$\Delta=4!;\ \Delta_{a_4}=6;\ \Delta_{a_3}=4;\ \Delta_{a_2}=-18;\ \Delta_{a_3}=32.$$

Остаточно

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)=\frac{1}{24}\left(6k^4+4k^3-18k^2+32k\right)\Big|_0^n=\frac{1}{24}\left(6n^4+4n^3-18n^2+32n\right).$$

Зауваження. В кожному конкретному випадку обчислення суми, породженої многочленом можна проводити користуючись безпосередньо методом невизначених коефіцієнтів. В той же час, при зростанні степені многочлена бажано застосовувати формулу (20).

Інший підхід пропонується в [11]. Якщо $f(x)$ - деяка ціла функція m-го степені, то її можна подати у вигляді

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x(x-1)+\ldots+A_mx(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1). \qquad (21)$$

Тоді, пригадуючи значення антирізниці для узагальненого степеня, запишемо:

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(x)=A_0n+A_1\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+A_m\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{m+1}.$$

Коефіцієнти $\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_\mathrm{m}$ є числами Стірлінга, застосування яких до знаходження сум буде описано в наступному пункті.

Наприклад,

$$x^3=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2) \text{ і тоді}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^3=\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)(n-2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

II. Нехай сума $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ породжена квазімногочленом, тобто $\mathrm{f}(x) = \left(\mathrm{b_m} x^{\mathrm{m}} + \mathrm{b_{m-1}} x^{\mathrm{m-1}} + \ldots + \mathrm{b_1} x + \mathrm{b_0}\right) \cdot \lambda^x$, де $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

З лінійності різницевого оператора випливає, що різниця від квазімногочлена є квазімногочлен. Це дає змогу використати метод невизначених коефіцієнтів для знаходження антирізниці

$$\Delta^{-1}\left(\left(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) \cdot \lambda^x\right).$$

Приклад 1.21. *Знайти суму* $\sum_{k=0}^{n-1} \left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k$.

Слідуючи загальній схемі, запишемо

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k = \Delta^{-1}\left(\left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k\right).$$

Оскільки антирізниця від квазімногочлена є квазімногочлен, то

$$\Delta^{-1}\left(\left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k\right) = \left(ak^2 + bk + c\right) \cdot 2^k,$$

де a, b, c - невизначені коефіцієнти.

За означенням антирізниці

$$\Delta\left(\left(ak^2 + bk + c\right) \cdot 2^k\right) = \left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k.$$

Знайдемо

$$\Delta\left(\left(ak^2 + bk + c\right) \cdot 2^k\right) = 2^k \cdot \left(ak^2 + (4a + b)k + 2a + 2b + c\right).$$

З рівності многочленів

$$ak^2 + (4a + b)k + 2a + 2b + c = k^2 + 1$$

визначаємо: $a = 1$, $b = -4$, $c = 7$.

Отже, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k = \Delta^{-1}\left(\left(k^2 + 1\right) \cdot 2^k\right) = \left(k^2 - 4k + 7\right) \cdot 2^k \Big|_0^n = \left(n^2 - 4n + 7\right) \cdot 2^n - 7$.

Спробуємо узагальнити отриманий результат. З того, що

$$\Delta\left(\left(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) \cdot \lambda^x\right) = \lambda^x \cdot \left(C_m^0 a_m (\lambda - 1) x^m + \right.$$
$$+ \left(C_m^1 \lambda a_m + C_{m-1}^0 a_{m-1} (\lambda - 1)\right) x^{m-1} + \left(C_m^2 \lambda a_m + C_{m-1}^1 \lambda a_{m-1} + C_{m-2}^0 a_{m-2} (\lambda - 1)\right) x^{m-2} + \ldots +$$
$$\left. + \left(C_m^{m-1} \lambda a_m + C_{m-1}^{m-2} \lambda a_{m-1} + \ldots + C_1^0 a_1 (\lambda - 1)\right) x + C_m^m \lambda a_m + C_{m-1}^{m-1} \lambda a_{m-1} + \ldots + C_0^0 a_0 (\lambda - 1)\right),$$

маємо

$\Delta^{-1}\left(\left(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right) \cdot \lambda^x\right) = \left(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) \cdot \lambda^x$, де

$$\begin{cases} b_m = C_m^0 a_m(\lambda - 1), \\ b_{m-1} = C_m^1 a_m \lambda + C_{m-1}^0 a_{m-1}(\lambda - 1), \\ b_{m-2} = C_m^2 a_m \lambda + C_{m-1}^1 a_{m-1}\lambda + C_{m-2}^0 a_{m-2}(\lambda - 1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_0 = C_m^m a_m \lambda + C_{m-1}^{m-1} a_{m-1}\lambda + \dots + C_1^1 a_1 \lambda + C_0^0 a_0(\lambda - 1). \end{cases}$$

Оскільки визначник основної матриці $\Delta = (\lambda - 1)^{m+1} \neq 0$ при $\lambda \neq 1$, то розв'язок існує і єдиний. Тоді

$$\sum_{x=0}^{n-1} \left(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0\right) \cdot \lambda^x = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_m} x^m + \Delta_{a_{m-1}} x^{m-1} + \dots + \Delta_{a_0} x\right) \cdot \lambda^x \Big|_0^n . \quad (22)$$

Приклад 1.22. *Обчислити* $\sum_{k=0}^{9} \left(k^2 + 4k + 3\right) \cdot 3^k$.

В цьому випадку $b_0 = 3$, $b_1 = 4$, $b_2 = 1$, $\lambda = 3$. Згідно вищевикладеного маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_2^0 \cdot 2 & 0 & 0 \\ C_2^1 \cdot 3 & C_1^0 \cdot 2 & 0 \\ C_2^2 \cdot 3 & C_1^1 2 & C_0^0 \cdot 2 \end{vmatrix} = 2^3; \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & C_1^0 \cdot 2 & 0 \\ 3 & C_1^1 2 & C_0^0 \cdot 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} C_2^0 \cdot 2 & 1 & 0 \\ C_2^1 \cdot 3 & 4 & 0 \\ C_2^2 \cdot 3 & 3 & C_0^0 \cdot 2 \end{vmatrix} = 4; \quad \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} C_2^0 \cdot 2 & 0 & 1 \\ C_2^1 \cdot 3 & C_1^0 \cdot 2 & 4 \\ C_2^2 \cdot 3 & C_1^1 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Тепер $\sum_{k=0}^{9} \left(k^2 + 4k + 3\right) \cdot 3^k = \frac{3^k}{8}\left(4k^2 + 4k\right)\Big|_0^{10} = 3247695.$

III. Числу λ можна надавати і комплексні значення.

Таким чином можна вивести деякі вирази для сум

$$\sum_{x=0}^{n-1} \rho^x f(x) \cos \alpha x \quad \text{та} \quad \sum_{x=0}^{n-1} \rho^x f(x) \sin \alpha x,$$

де $\lambda = \rho e^{\alpha i}$, $f(x)$ - многочлен.

Легко пересвідчитися в тому, що функції

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \rho^x \left(\Phi_0(x) \cos \alpha x + \Phi_1(x) \sin \alpha x\right) \\ F_2(x) &= \rho^x \left(\Phi_0(x) \sin \alpha x - \Phi_1(x) \cos \alpha x\right) \end{aligned} \quad (23)$$

задовольняють рівняння

$$\begin{aligned}\Delta F_1(x) &= \rho^x f(x)\cos\alpha x\\ \Delta F_2(x) &= \rho^x f(x)\sin\alpha x,\end{aligned} \tag{24}$$

де $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ - многочлени того ж степені, що й $f(x)$. Для їх визначення вживають спосіб невизначених коефіцієнтів.

Підбираючи кожен раз функцію $f(x)$ та параметри ρ і α можна отримувати різноманітні суми, що містять тригонометричні вирази.

Приклад 1.23. *Знайти суми*

а) $1+\rho\cos\alpha+\rho^2\cos 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha$ *;*

б) $\rho\sin\alpha+\rho^2\sin 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha$.

Покладемо в рівностях (23) і (24) $f(x)=1$. Тоді $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ - многочлени 1-го степені.

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \rho^x\left(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x\right)\\ F_2(x) &= \rho^x\left(A\sin\alpha x-B\cos\alpha x\right).\end{aligned}$$

Звідси знаходимо $\Delta F_1(x)$ та $\Delta F_2(x)$. Прирівнюючи вирази (23) і (24) приходимо до системи:

$$\begin{cases}A(\rho\cos\alpha x-1)+B\rho\sin\alpha x=1,\\ B(\rho\cos\alpha x-1)-A\rho\sin\alpha x=0,\end{cases}$$

з якої виводимо

$$A=-\frac{1-\rho\cos\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2};\ B=-\frac{\rho\sin\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

Отже,

$$1+\rho\cos\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha=\frac{(1-\rho\cos\alpha)(1-\rho^n\cos^n\alpha)+\rho^{n+1}\sin\alpha\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2};$$

$$\rho\sin\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha=\frac{\rho\sin\alpha(1-\rho^n\cos n\alpha)-(1-\rho\cos\alpha)\rho^n\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

При $\rho=1$ отримуємо раніше обчислені суми.

IV. Просто виражається сума $\sum_{x=1}^{n-1} f(x)$, коли

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)},$$

$\varphi(x)$ - многочлен степені не вище $(\mathrm{m}-1)$-го. В противному разі, виділивши цілу частину, знову приходимо до поставленої задачі.

Оскільки

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\Delta^{-1}x^{(-m)}=\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1},\ \text{то}$$

$$\sum_{\mathrm{x}=1}^{\mathrm{n}-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\left.\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1}\right|_1^n=\frac{1}{-m+1}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}-\frac{1}{(m-1)!}\right) \quad (24)$$

З іншого боку $\varphi(x)$ можна представити у вигляді

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x+m)+A_2(x+m)(x+m-1)+\ldots+A_{m-1}(x+m)(x+m-1)\cdot\ldots\cdot(x+2).$$

Тоді, за властивістю адитивності сум

$$\sum_{x=1}^{n-1}\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=A_0\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m)}+A_1\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m+1)}+\ldots+A_{m-1}\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-2)}, \qquad (25)$$

де кожна з сум обчислюється по формулі (24).

Приклад 1.24. *(Московський автомобільний дорожній інститут, студентська олімпіада з математики, 1976р.) Знайти границю*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right).$$

Знайдемо спочатку суму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}k^{(-3)}=-\frac{1}{2}k^{(-2)}\Bigg|_1^{n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}.$$

Приклад 1.25. *Обчислити суму* $\sum_{x=1}^{7}\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Тут $\varphi(x)=4x+6$ представимо у вигляді $\varphi(x)=-6+4(x+3)$. Тоді

$$\sum_{x=1}^{7}\frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=-6\sum_{x=1}^{7}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}+4\sum_{x=1}^{7}\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=$$

$$=-6\Delta^{-1}x^{(-4)}\Big|_1^8+4\Delta^{-1}x^{(-3)}\Big|_1^8=\frac{2}{x(x+1)(x+2)}\Bigg|_1^8-\frac{2}{x(x+1)}\Bigg|_1^8=\frac{77}{120}$$

Отже, якщо степінь многочлена $\varphi(x)$ менший або більший за m, то обчислення суми IV не викликає особливих труднощів.

При умові, що степінь $\varphi(x)$ рівний m останній доданок в (25) прийме вид: $A_m\sum_{x=1}^{n-1}\frac{1}{x}$. Ми вже говорили, що ця сума носить назву гармонійної і не виражається в скінченному вигляді.

Далі розглянемо підсумовування частинами, яке інколи називають перетворенням Абеля та є дискретним аналогом інтегрування частинами. Детально про підсумовування частинами можна ознайомитися в [1,11], ми ж зупинимося на розв’язуванні вправ.

Приклад 1.26. *Довести рівність*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k=a_nb_n-a_0b_0-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) \tag{26}$$

Доведення.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_k\overset{k\to k+1}{=}\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k-\sum_{k=-1}^{n-2}a_{k+1}b_{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k-a_0b_0+a_nb_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_{k+1}=a_nb_n-a_0b_0-\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

Рівність (1), яка часто виражається такою тотожністю:

$$\sum_{k=m}^{n}u(k+1)v(k+1)=U(n+1)v(n+1)-U(m)v(m)-\sum_{k=m}^{n}U(k)\Delta v(k), \tag{27}$$

де $\mathrm{U}(\mathrm{k})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\mathrm{u}(\mathrm{i})$ носить назву перетворення Абеля скінченних сум.

Формула підсумовування частинами спрощує підрахунки сум виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\lambda^{k-1};\quad \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cos k\alpha;\qquad \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\sin k\alpha;\quad \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k-1}\cos k\alpha;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k-1}\sin k\alpha.$$

Приклад 1.27. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k}$.

Покладемо в (27) $u(k)=3^{k-1}$; $\nu(k)=k-1$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)\cdot n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(3^{k}-1\right)=\frac{n3^{n+1}}{2}-\frac{3}{4}\left(3^{n}-1\right).$$

Приклад 1.28. *Обчислити суми, користуючись перетворенням Абеля.*

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}\cos k\alpha;\qquad S_2=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}\sin k\alpha.$$

Розглянемо ці суми паралельно. Відомо [3], що

$$\Delta\cos k\alpha=-2\sin\left(k\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2};\quad \Delta\sin k\alpha=2\cos\left(k\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2};\quad \Delta^{-1}\lambda^{k-1}=\frac{\lambda^{k-1}}{\lambda-1}.$$

Застосуємо формулу (26) для S_1 і S_2.

$$S_1=\frac{\lambda^{n}}{\lambda-1}\cos(n+1)\alpha-\frac{\cos\alpha}{\lambda-1}+\frac{2\sin\alpha/2}{\lambda-1}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\lambda^{k}=\frac{\lambda^{n}}{\lambda-1}\cos(n+1)\alpha-\frac{\cos\alpha}{\lambda-1}+\frac{\lambda\sin\alpha}{\lambda-1}S_2+\frac{2\lambda\sin^{2}\alpha/2}{\lambda-1}S_1.$$

Аналогічно для другої суми матимемо:

$$S_2=\frac{\lambda^{n}}{\lambda-1}\sin(n+1)\alpha-\frac{\sin\alpha}{\lambda-1}-\frac{\lambda\sin\alpha}{\lambda-1}S_1+\frac{2\lambda\sin^{2}\alpha/2}{\lambda-1}S_2.$$

З системи двох останніх рівностей знаходимо

$$S_1=\frac{\lambda^{n}\left(\lambda\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha\right)+\cos\alpha-\lambda}{\lambda^{2}-2\lambda\cos\alpha+1};S_2=\frac{\lambda^{n}\left(\lambda\sin n\alpha-\cos(n+1)\alpha\right)+\sin\alpha}{\lambda^{2}-2\lambda\cos\alpha+1}.$$

Таким чином, перетворення Абеля дозволяє знаходити доволі непрості суми навіть не вникаючи в теорію різницевого числення та комплексних чисел. Це робить його зручним інструментом на уроках математики в школі, при підготовці олімпіадних завдань вчителем.

На закінчення пункту розглянемо застосування чисел Стірлінга та чисел Бернуллі для знаходження скінченних сум. Ці числа, які виникли в теорії множин та математичному аналізі і знайшли широке застосування в дискретній математиці, спрощуючи як обчислення так і розуміння самого матеріалу. Що стосується теми нашого дослідження, відзначимо, що спеціальні числа дозволяють приховати всі нюанси теорії різницевого числення та подати їх у вигляді цікавих закономірностей та властивостей. Це, в свою чергу дає просту і зрозумілу схему обчислення деяких видів сум.

Числа Стірлінга

Розглядаючи суми, породжені многочленами, квазімногочленами та дробами виду $\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}$, де $\varphi(x)$ - ціла функція степені менше або більше m, ми зазначали, що задача значно спрощується, коли $f(x)$ та $\varphi(x)$ представити через суму узагальнених степенів:

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x(x-1)+\ldots+A_mx(x-1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1). \quad (28)$$

Тоді, врахувавши, що $\Delta^{-1}x^{(m)}=\frac{x^{(m+1)}}{m+1}$, зводимо задачу з підсумовування до тривіального випадку. Після цього ставиться обернена задача:

$$x^{(n)}=B_1x+B_2x^2+\ldots+B_nx^n\,. \quad (29)$$

Виявилося, що числа $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\ldots,\mathrm{B}_\mathrm{n},\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_\mathrm{m}$ пов’язані між собою та мають ряд цікавих закономірностей і властивостей. Вони отримали назву чисел Стірлінга першого та другого роду і позначаються s_{nk} і S_{nk} відповідно, де n - степінь многочлена, що розкладається, k - степінь в розкладі (28) чи (29), при якому стоїть коефіцієнт s_{nk} чи S_{nk}.

Розглянемо дві основні теореми, що відображають сказане вище.

Теорема 1. *Числа Стірлінга першого роду є коефіцієнтами розкладу узагальненого степеня за многочленами* x^k*, тобто*

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s_{nk} x^{k} \; . \qquad (30)$$

Теорема 2. *Числа Стірлінга другого роду є коефіцієнтами розкладу многочлена* x^n *за узагальненими степенями* $x^{(k)}$*, тобто*

$$x^{n} = \sum_{k=1}^{n} S_{nk} x^{(k)} \, . \qquad (31)$$

Доведення [3] цих тверджень проводять методом математичної індукції. Числа Стірлінга мають багато різноманітних властивостей [9] із деякими з яких можна познайомитися в додатку Д.2. Ми ж обмежимося лише тими, що стосуються підсумовування. Звичайно, ці числа не набули б такого поширення, якби не існувало простої схеми їх отримання.

Числа Стірлінга першого роду задовольняють наступне рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} s_{11} = 1, \\ s_{nk} = s_{(n-1)(k-1)} - (n-1) s_{(n-1)k}, \quad n \geq 2, \; k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Це дає можливість побудувати трикутник Стірлінга для чисел першого роду.

Таблиця 1. Числа Стірлінга першого роду

n	s_{n0}	s_{n1}	s_{n2}	s_{n3}	s_{n4}	s_{n5}	s_{n6}	s_{n7}
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Приклад 1.29. *Представити в канонічному вигляді многочлен*

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Тобто $f(x) = x^{(5)}$. Використовуючи співвідношення (30) запишемо.

Знайшовши 6 рядок таблиці 1 та підставивши значення чисел s_{5k}, отримаємо

$$f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x.$$

Числа Стірлінга другого роду задовольняють таким рекурентностям:

$$\begin{cases} S_{11} = 1, \\ S_{(n+1)k} = S_{n(k-1)} + kS_{nk}, \quad n \ge 1,\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Тоді таблиця чисел S_{nk} прийме вигляд.

Таблиця 2. Числа Стірлінга другого роду

n	S_{n0}	S_{n1}	S_{n2}	S_{n3}	s_{n4}	s_{n5}	s_{n6}	s_{n7}
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Приклад 1.30. *Знайти суму* $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(k^4 + 2k + 4\right)$.

Для розв'язання подібної задачі, ми використовували метод невизначених коефіцієнтів, який приводив до чотирьох визначників п'ятого порядку. Зараз же скористаємося числами Стірлінга.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4 + 2k + 4\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k^4 + 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 4 = \sum_{k=0}^{n-1} k^4 + n(n-1) + 4n = \sum_{k=0}^{n-1} k^4 + n(n+3).$$

Знайдемо суму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^4$. Для цього представимо многочлен $f(x) = x^4$ через узагальнений степінь, використовуючи таблицю 2.

$$x^4 = x + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)}.$$

Тоді $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^4 = \Delta^{-1} k^4\Big|_0^n = \left(\dfrac{k^{(2)}}{2} + \dfrac{k^{(3)}}{7\cdot 3} + \dfrac{k^{(4)}}{6\cdot 4} + \dfrac{k^{(5)}}{5}\right)\Bigg|_0^n = \dfrac{n^{(2)}}{2} + \dfrac{n^{(3)}}{21} + \dfrac{n^{(4)}}{24} + \dfrac{n^{(5)}}{5}$.

Для отримання остаточного результату застосуємо теорему 1 та табл. 1.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4+2k+4\right)=\frac{1}{30}n\left(6n^4-15n^3+10n^2+30n+89\right).$$

Числа Бернуллі

Перш за все відзначимо, що числа Бернуллі мають широке застосування в математичному аналізі, теорії комплексних функцій, інженерних розрахунках та в дискретній математиці. Звичайно, існує досить складна теорія, детально викладена в [7].

Оскільки нашою задачею є методи підсумовування, то підемо найприроднішим – історичним шляхом виникнення даного поняття. Такий підхід, як показує педагогічний досвід, є найпродуктивнішим та сприяє кращому сприйняттю учнями та студентами. Як правило, цікаві закономірності в математику приносить дослід. А в XVI–XVIII ст. “чиста” математика лише зароджувалася і дослід був вельми поширеним апаратом здобуття нових знань. Так, підбираючи формули для суми m-них степенів натурального ряду, Якоб Бернуллі помітив цікаву закономірність.

Нехай

$$S_m(n)=1^m+2^m+\ldots+(n-1)^m. \tag{32}$$

Розглядаючи формули для кількох перших сум:

$$S_0(n) = n;$$
$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n;$$
$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$$
$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2;$$
$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n;$$
$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2;$$
$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n;$$
$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2,$$

Бернуллі визначив такі факти:

а) в формулі для $S_m(n)$ коефіцієнт при n^{m+1} рівний $1/(m+1)$;

б) коефіцієнт при n^m завжди рівний $-1/2$;

в) коефіцієнт при n^{m} рівний $\frac{\mathrm{m}}{12}$;

г) коефіцієнт при $\mathrm{n}^{\mathrm{m-1}}$ рівний 0 і т.д.

В загальному випадку [8]

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + \ldots + C_{m+1}^m B_m n\right). \qquad (33)$$

Коефіцієнти $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{m}$ дістали назву чисел Бернуллі або бернулієвих чисел і визначаються з такого рекурентного рівняння

$$\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

З (34) знаходимо кілька перших чисел Бернуллі.

Таблиця 3. Числа Бернуллі.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$

Якось Якоб написав в своїх мемуарах: “… в продовж половини четверті години я знайшов суму десятих степенів першої тисячі натуральних чисел”. Це говорить про те, що, в основному, числа Бернуллі використовуються при знаходженні суми степенів перших n натуральних чисел.

Приклад 1.31. *Знайти суму* $\sum_{k=1}^{n-1} k^6$.

Використовуючи формулу (33) та значення чисел Бернуллі запишемо:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = \frac{1}{7}\left(B_0 n^7 + C_7^1 B_1 n^6 + C_7^2 B_2 n^5 + C_7^3 B_3 n^4 + C_7^4 B_4 n^3 + C_7^5 B_5 n^2 + C_7^6 B_6 n\right).$$

Остаточно

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6 = \frac{1}{7}\left(n^7 - \frac{7}{2}n^6 + \frac{21}{6}n^5 - \frac{7}{6}n^3 + \frac{1}{6}n\right).$$

Як бачимо, цей спосіб ефективніший за метод невизначених коефіцієнтів та за використання чисел Стірлінга. А оскільки суми степенів перших n натуральних чисел зустрічаються часто, вчитель має володіти доступним учнівському розумінню методом здобуття відповідних формул.

В додатку Д.3. приведені формули для перших 11 степенів чисел натурального ряду. Кидається у вічі те, що при парних показниках степеня сума ділиться на $n(n-1)$, а при непарних – на $[n(n-1)]^2$. Доведемо цей факт, користуючись числами Бернуллі.

Теорема. *Сума* $S_m(n) = 1^m + 2^m + ... + (n-1)^m$ *при непарних* m *ділиться на* $[n(n-1)]^2$*, а при парних – на* $n(n-1)$.

Доведення.

Формула (33) стверджує, що

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + \ldots + C_{m+1}^m B_m n\right).$$

Знайдемо $S_m(0)$ та $S_m(1)$:

$$S_m(0) = 0$$

$$S_m(1) = \frac{1}{m+1}\left(B_0 + C_{m+1}^1 B_1 + ... + C_{m+1}^m B_m\right) \overset{\text{рівність(34)}}{=} 0 \text{ при } m \neq 0.$$

Отже, для довільного натурального m сума $S_m(n)$ ділиться на многочлен $n(n-1)$. Доведемо тепер, що при $m = 2p+1$ $S_m(n)$ ділиться на $[n(n-1)]^2$.

Припустимо, що $S_m(n)$ ділиться на $(n-1)^2$. Тоді $S_m(n)$ можна подати у вигляді

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left(n^2 - 2n + 1\right)\left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-1} + \ldots + A_{m-1} n\right),$$

де $A_1, A_2, ..., A_{m-1}$ - невизначені коефіцієнти. Для їх визначення скористаємося рівністю многочленів

$$B_0 n^{m+1} + C_{m+1}^1 B_1 n^m + C_{m+1}^2 B_2 n^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^m B_m n = \left(n^2 - 2n + 1\right)\left(A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-1} + \ldots + A_{m-1} n\right).$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} B_0 = A_1, \\ C_{m+1}^1 B_1 = A_2 - 2A_1, \\ C_{m+1}^2 B_2 = A_1 - 2A_2 + A_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{m+1}^k B_k = A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{m+1}^{m-2} B_{m-2} = A_{m-3} - 2A_{m-2} + A_{m-1}, \\ C_{m+1}^{m-1} B_{m-1} = A_{m-2} - 2A_{m-1}, \\ C_{m+1}^m B_m = A_{m-1}. \end{cases} \qquad (*)$$

Тепер, якщо m непарне, то $B_m = 0$, з чого випливає рівність нулю коефіцієнта при першому степені n - A_{m-1} в рівності (33). Всі інші коефіцієнти визначаються з системи (*) однозначно. Отже, при непарному m $S_m(n)$ можна представити у вигляді

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} n^2 (n-1)^2 \left(A_1 n^{m-3} + A_2 n^{m-4} + \ldots + A_{m-2}\right).$$

З другого боку, те, що $S_m(n)$ ділиться на n^2 випливає з рівності нулю коефіцієнта B_m при непарних значеннях m (див. формулу 34). Враховуючи в останній рівності те, що $A_1 n^{m-3} + A_2 n^{m-4} + \ldots + A_{m-2}$ не ділиться на n^2 (в силу нерівності нулю коефіцієнта A_{m-2} при непарних m) отримуємо такий наслідок. Нехай твердження *A* таке: $S_m(n)$ ділиться на n^2, а твердження *B*: $S_m(n)$ ділиться на $(n-1)^2$ при непарних m. Тоді, в силу сказаного вище випливає така еквіваленція: $A \Leftrightarrow B$. А оскільки ми показали істинність твердження *A*, то звідси випливає, що припущення *B* також істинне.

Теорема доведена.

II. Дискретні розподіли та їхні характеристики

Розділ присвячено основним фактам дискретної теорії ймовірностей, на основі яких розглядаються твірні функції послідовності випадкових величин та дискретні розподіли і їх характеристики: таблиця розподілу, математичне сподівання, дисперсія та генератриса.

1. Основні відомості дискретної теорії ймовірностей

Основними поняттями теорії ймовірностей є стохастичний експеримент, подія, ймовірність, простір елементарних подій, незалежні події [3,10,15,16].

Під *випадковою величиною* розуміють числову величину ξ, яка з'являється в результаті стохастичного експерименту.

Наприклад,

- при киданні грального кубика можливі 6 елементарних подій, кожній з яких поставимо у відповідність кількість вічок, що випала. Тоді множина значень випадкової величини ξ скінченна: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- випробування полягає в тому, що робиться постріл по мішені. Простір елементарних подій – множина всіх точок площини мішені. Якщо за випадкову величину взяти відстань від центра мішені до точки попадання, то отримаємо, що множина значень ξ - невід'ємні дійсні числа з деякого відрізка, а тому вона має континуальну потужність.

Означення. Випадковою величиною називається функція $\xi = \xi(\omega)$, яка визначена на множині елементарних подій.

В подальшому нас будуть цікавити тільки дискретні випадкові величини.

Означення. Випадкова величина називається *дискретною*, якщо значення, які вона може набувати, утворюють тільки скінченну або зчисленну множину.

Для того, щоб задати дискретну випадкову величину (далі просто випадкову величину) достатньо для кожного з можливих значень ξ вказати ймовірність його набуття: $p_k = P(\xi = x_k)$.

Означення. Таблицю виду

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

де в першому рядку стоять усі можливі значення випадкової величини ξ, а в другому – ймовірності того, що ξ набуває ці значення називають *таблицею розподілу* випадкової величини ξ. При цьому $\sum_k p_k = 1$.

Наприклад, випадання герба чи орла при грі в орлянку описується наступною таблицею розподілу:

ξ	1 (успіх)	0(невдача)
p	$1/2$	$1/2$

Означення. Випадкові величини ξ та η називаються незалежними, якщо вони визначені на одному просторі елементарних подій і

$$(\forall\, i, k \in N) \Rightarrow P(\xi = x_i, \eta = y_k) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_k).$$

Досвід показує, що коли відомий розподіл (функція чи таблиця) випадкової величини, то це повністю її характеризує, проте часто достатньо знати лише кілька чисел, котрі якоюсь мірою її описують. Такі числа називають *числовими характеристиками* випадкової величини. Це ж саме стосуватиметься і дискретних розподілів. Найважливішими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія, моменти та семіінваріанти.

Нехай є випадкова величина ξ.

Означення. *Математичним сподіванням* випадкової величини ξ називається число $M\xi$, що визначається формулою

$$M\xi = \sum_k x_k p_k \,. \tag{1}$$

Властивості математичного сподівання.

1. Якщо c – стала, то $M(c)=c$.

Доведення випливає безпосередньо з означення.

2. Якщо c – стала, то $M(c\xi)=cM(\xi)$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин: $M(\xi+\eta)=M(\xi)+M(\eta)$. Або $M(c_1\xi_1+c_2\xi_2)=c_1M(\xi_1)+c_2M(\xi_2)$.

Доведення слідує з означення та властивості адитивності сум.

4. Якщо ξ і η незалежні випадкові величини, то $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$.

Означення. *Дисперсією* випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $(\xi-M\xi)^2$, тобто

$$D\xi = M\left((\xi-M\xi)^2\right)=\sum_k (x_k-M\xi)^2 p_k = M\xi^2-(M\xi)^2. \qquad (2)$$

По суті, дисперсія показує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

Властивості дисперсії.

1. $Dc=0$.

2. $D(c\xi)=c^2D(\xi)$.

Доведення випливає з означення.

3. Якщо, ξ і η незалежні випадкові величини, то дисперсія суми дорівнює сумі їх дисперсій, тобто

$$D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta).$$

Доведення. Оскільки ξ і η незалежні випадкові величини, то за властивість 4 математичного сподівання маємо: $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$. Тоді

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta)^2-(M(\xi+\eta))^2=M\xi^2+2M\xi\cdot M\eta+M\eta^2-$$
$$-(M\xi)^2-2M\xi\cdot M\eta-(M\eta)^2=M\xi^2-(M\xi)^2+M\eta^2-(M\eta)^2=D(\xi)+D(\eta)$$

Властивість доведена.

Приклад 2.1. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка дорівнює кількості успіхів при n випробуваннях Бернуллі, якщо в кожному випробуванні ймовірність успіху рівна p, тобто $\xi = \xi_1 + \xi_2 ... + \xi_n$, де ξ_i - ймовірність успіху при i-му випробуванні.

Нагадаємо, що випробуванням Бернуллі називається експеримент, який складається з n послідовних випробувань, в кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p, а невдачі - $1-p$. Таким чином, випадкова величина ξ, - кількість успіхів в експерименті Бернуллі, може приймати значення $0, 1, ..., n$. Відомо [3], що ймовірність настання k успіхів в серії з n випробувань обчислюється за формулою:

$$p_{n,k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n. \tag{3}$$

Це так званий біноміальний розподіл, до якого ми повернемося пізніше. З побудови біноміального розподілу випливає, що кожна з випадкових величин ξ_i, $i = 1, ..., n$ задовольняє розподілу Бернуллі

ξ_i	1	0
p_i	p	$1-p$

Тоді $M\xi_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$, де $i = 1, ..., n$. Врахувавши незалежність випадкових величин ξ_i, знаходимо математичне сподівання випадкової величини, яка рівна кількості успіхів у випробуванні Бернуллі:

$$M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + ... + M(\xi_n) = np,$$

або, згідно означення математичного сподівання

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np. \tag{*}$$

Що стосується дисперсії, то міркуючи аналогічно, отримуємо

$$D\xi = np(1-p).$$

Звернемо увагу на наступний момент: з рівності (*) випливає, що

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np, \text{ при } 0 < p < 1.$$

Таким чином, використовуючи апарат теорії ймовірностей можна обчислювати деякі суми, не будуючи при цьому спеціальних методів. Дослідженням цього питання ми займемося в розділі 3.

Означення. Випадкова величина ξ називається *цілочисельною*, якщо вона приймає цілі невід'ємні значення. Розподіл такої випадкової величини називається *арифметичним розподілом*.

ξ	0	1	2	…	n	…
p	p_0	p_1	p_2	…	p_n	…

Наприклад,

- *біноміальний розподіл* є арифметичним розподілом

ξ	0	1	2	…	n
p	p_0	p_1	p_2	…	p_n

де $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;

- розподіл Пуассона є арифметичним розподілом

ξ	0	1	2	…	k	…
p	p_0	p_1	p_2	…	p_k	…

де $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$.

2. Генератриси

2.1. Послідовності та їх генератриси

Означення. Нехай задано послідовність $g_0, g_1, g_2, ..., g_k, ...$ дійсних чисел. Якщо ряд

$$g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \ldots + g_k z^k + \ldots = G(z). \qquad (1)$$

збіжний в деякому інтервалі $-z_0 < z < z_0$, то функція $G(z)$ називається *генератрисою або твірною функцією* послідовності (g_k).

Вимога до збіжності, як і форма запису твірної функції є формальною, а в більшості задач теорії ймовірностей можна відкинути всі строгі правила, які використовуються при роботі зі степеневими рядами. До того ж апарат твірних функцій, завдяки формалізації перетворень, дозволяє отримувати результати, а їх доведення можна провести методом математичної індукції. В той же час, коли це потрібно, твірна функція може розглядатися як функція комплексного змінного.

Приклад 2.2. Знайти генератрису послідовності одиниць.

З формули (1) отримаємо $g_0 = g_1 = g_2 = \ldots g_n = \ldots = 1$. Тоді

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^k + \ldots = \frac{1}{1-z} = G(z), \text{ при } |z| < 1$$

Приклад 2.3. Побудувати твірну для послідовності $0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, \ldots$

Складемо ряд (1) $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \sin z$.

В додатку Д.4. приведені найпоширеніші послідовності та їх твірні функції. Далі розглянемо перетворення твірних функцій та їх властивості.

Означення. Нехай є дві послідовності (f_k) та (g_k), де $k = 0, 1, \ldots$

Згорткою послідовностей (f_k) і (g_k) називають послідовність, кожен елемент якої визначається за формулою $c_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$ і позначається $\{f_k * g_k\}$.

Властивості твірних функцій.

1. *Теорема запізнення.* Якщо $G(z)$ твірна функція послідовності (g_k), то послідовність (g_{k-1}) має твірною функцією $zG(z)$.

Доведення. Випишемо послідовність $(g_{k-1}): 0, g_0, \ ..., $ яка твірну $0 + g_0 z + ...$, яку інакше можна переписати у вигляді $z(g_0 + g_1 z + ...) = zG(z)$. Вл. доведено.

Наслідок. В загальному випадку послідовність (g_{k-m}) має твірну $z^m G(z)$.

2. Якщо послідовність (g_k) має твірною $G(z)$, то для послідовності (g_{k+1}):

$$\frac{G(z) - g_0}{z} \text{ є генератрисою.}$$

Наслідок. Узагальнимо цей результат. Послідовність, яка отримується з даної зсувом на m елементів вправо має наступну твірну

$$\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - ... - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m}.$$

3. Якщо $G(z)$ твірна (g_k), $G(az)$ генератриса послідовності $(a^k g_{k+1})$.

4. *Властивість лінійності.* Якщо (f_k) має генератрису $F(z)$, (g_k) - $G(z)$, то функція $c_1 F(z) + c_2 G(z)$ є твірною для послідовності $c_1 f_k + c_2 g_k$.

5. Якщо $G(z)$ твірна (g_k), то для послідовності (kg_k) генератрисою є функція $zG'(z)$.

Наслідок. Проводячи аналогічні міркування для послідовностей $(k+1)(k+2) \cdot ... \cdot (k+m) g_{k+m}$, розглядають для твірних похідні вищих порядків.

6. *Теорема про згортку.* Якщо $F(z)$ - твірна (f_k), а $G(z)$ - (g_k), то генератрисою згортки $\{f_k * g_k\}$ буде функція $F(z)G(z)$.

Доведення. Розглянемо добуток твірних функцій

$$F(z)G(z) = (f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + ...) \cdot (g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + ...) = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) z + ...$$

Коефіцієнти при степенях z є членами згортки послідовностей.

Теорему доведено.

Доведення цих властивостей проводиться на основі означення твірної функції та формальних дій над степеневими рядами [4,9,15].

Спробуємо застосувати ці властивості при розв'язанні задач.

Приклад 2.4. Знайти твірну функцію для послідовності $\langle 1, 2, 3, 4, ...\rangle$. Очевидно, що дана послідовність утворюється з послідовності $\langle 1, 1, 1, 1, ...\rangle$, множенням кожного її елемента на його номер, тобто kg_k. Згідно прикладу 2.2. твірною для послідовності одиниць є функція $G(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Врахувавши властивість 5, відзначаємо, що для послідовності натуральних чисел генератриса обчислюється за формулою: $zG'(z)$. Знайшовши похідну, остаточно запишемо

$$F(z) = zG'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Одним з найширших застосувань твірних функцій є розв'язування рекурентних рівнянь, а отже, - ще один метод знаходження скінченних сум. Нехай послідовність (g_k) задовольняє деякому рекурентному рівнянню. Ставиться задача отримання замкненого виразу для g_n. В цьому випадку користуються наступним *алгоритмом*:

1) записати рівняння, котре виражає g_n через інші члени послідовності (пригадайте рекурентність для арифметичної прогресії: $g_{n+2} = 2g_{n+1} - g_n$);

2) врахувавши, що генератрисою для g_n є $G(z)$, використовуючи правила зсуву вправо і вліво на m елементів (вл. 1, 2) записати твірні для послідовностей $g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_{n+k}$;

3) підставити отриманні значення генератрис в рекурентне рівняння та виразити з нього $G(z)$ в замкненому вигляді;

4) розкласти $G(z)$ в степеневий ряд по z і взяти коефіцієнт при z^n, - це і буде замкнений вираз загального члена послідовності.

Такий метод досягається завдяки тому, що між множиною всіх послідовностей і множиною генератрис можна встановити взаємно однозначну відповідність, що реалізується з допомогою z-перетворення, так інколи називають операцію переходу від послідовності до її твірної. Таким чином, одна аналітична функція представляє цілу послідовність, і навпаки, - кожна послідовність відповідає деякій функції.

Приклад 2.5. Знайти замкнений вираз для послідовності Фібоначчі

$$\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... \rangle.$$

Як відомо з попереднього розділу, числа Фібоначчі задовольняють такому рекурентному рівнянню:

$$g_{k+2} = g_{k+1} + g_k. \qquad (*)$$

Згідно алгоритму, зазначимо: $G(z)$ - генератриса для послідовності (g_k), тоді для g_{k+1} і g_{k+2} твірні обчислюються відповідно з вл. 2 за формулами

$$g_{k+1} : \frac{G(z)-0}{z} \qquad g_{k+2} : \frac{G(z)-0-1\cdot z}{z^2}.$$

Підставимо значення генератрис в рівняння (*) та виразимо з нього $G(z)$.

$$\frac{G(z)-z}{z^2} = \frac{G(z)}{z} + G(z), \text{ або } G(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

Для розкладу в степеневий ряд отриманого дробово-раціонального виразу скористаємося наступним **твердженням** [9]: якщо $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, де $Q(z) = a_0(1-a_1 z)(1-a_2 z)\ldots(1-a_m z)$ і числа $a_1, \ldots, a_m$ різні, а степінь многочлена $P(z)$ менший m, то коефіцієнт при z^n в розкладі $F(z)$ рівний

$$g_n = t_1 a_1^n + t_2 a_2^n + \ldots + t_m a_m^n, \text{ де } t_k = \frac{-a_k P\left(1/a_k\right)}{Q'\left(1/a_k\right)}. \qquad (**)$$

В нашому випадку $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_1 = \frac{-1}{-1-2/a_1} = \frac{a_1}{a_1+2}$, $t_2 = \frac{a_2}{a_2+2}$.

Підставивши ці значення в формулу (**) отримаємо

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

2.2. Твірні функції в теорії ймовірностей

В попередньому пункті ми відзначили, що між множиною твірних функцій і множиною послідовностей чисел існує взаємно однозначна відповідність, а маючи генератрису можна отримати всі інші властивості того чи іншого ряду. Цей факт виявляється особливо цінним в теорії ймовірностей при вивченні цілочисельних випадкових величин [4].

Оскільки цілочисельна випадкова величина ξ приймає лише невід'ємні цілі значення $0, 1, 2, 3, \ldots$, то на ймовірності $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ можна дивитися як на послідовність, якій відповідає єдина твірна функція, котра, "вбираючи в себе" розподіл ξ, повністю описує її з точки зору основних характеристик (див. главу 1 розділу II). В той же час, маючи твірну деякої випадкової величини, дуже просто знайти ймовірності прийняття ξ певного числового значення. Для цього необхідно розкласти генератрису в степеневий ряд і обрахувати коефіцієнт при відповідному степені z.

Нехай ξ приймає значення $0, 1, 2, 3, \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$

Означення. Функція

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \tag{1}$$

називається *твірною функцією розподілу*.

Наприклад,

- біноміальний розподіл: $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = (pz + (1-p))^n$;
- розподіл Пуассона: $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$.

Властивості.

1. Нехай ξ та η незалежні випадкові величини, що мають арифметичний розподіл і $P_\xi(z)$, $P_\eta(z)$ відповідно їх генератриси, то

$$P_{\xi+\eta}(z) = P_\xi(z) \cdot P_\eta(z); \tag{2}$$

2. *Основні характеристики* випадкової величини ξ.

Оскільки $P'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k z^{k-1}$ і $P'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k$, то пригадуючи означення *математичного сподівання*, запишемо

$$M\xi = P'(1), \tag{3}$$

де $P(z)$ - твірна функція розподілу;

3. Знайдемо *дисперсію*

$D\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k^2 p_k=\sum_{k=0}^{\infty}p_k\left(k(k-1)z^{k-2}+kz^{k-1}\right)\Big|_{z=1}=P''(1)+P'(1)-\left(P'(1)\right)^2$. Тому

$$D\xi = P''(1)+P'(1)-P'^2(1). \tag{4}$$

Наприклад,

- біноміальний розподіл:

  $P'(z)=np(pz+(1-p))^{n-1}$; $P'(1)=np$ - математичне сподівання,

  $P''(1)=n(n-1)p^2$; $P''(1)+P'(1)-P'^2(1)=np(1-p)$ - дисперсія;

- розподіл Пуассона:

  $P'(z)=\lambda e^{\lambda(z-1)}$; $M\xi=P'(1)=\lambda$ - математичне сподівання,

  $P''(z)=\lambda^2 e^{\lambda(z-1)}$; $D\xi=P''(1)+P'(1)-P'^2(1)=\lambda^2$ - дисперсія.

Приклад 2.6. Проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A або відбувається, або ні, але ймовірність успіху в кожному з випадків змінюється: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ відповідно. Яка ймовірність того, що при n випробуваннях матимемо k успіхів.

Очевидно, що $\xi=\xi_1+\xi_2+..\xi_n$ - цілочисельна випадкова величина, причому ξ_i приймає значення 1 з імовірністю p_i і 0 з імовірністю q_i, де $p_i+q_i=1$. Тоді $P_{\xi_i}(z)=q_i+p_i z$ - твірні функції розподілу. За властивістю 1 генератриса розподілу випадкової величини ξ обчислюється за формулою

$$P_\xi(z)=P_{\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots\cdot\xi_n}(z)=P_{\xi_1}(z)\cdot P_{\xi_2}(z)\cdot P_{\xi_3}(z)\cdot\ldots P_{\xi_n}(z)=\prod_{k=1}^{n}(g_k+p_k z).$$

Залишається знайти коефіцієнт при z^k,- це і буде ймовірність k успіхів.

2.3. Теорема неперервності

Розглянуті в попередньому пункті вправи скоріше за все демонструють викладку теоретичного матеріалу, а не відповідають реальним задачам і природним процесам, а тому більшість дискретних розподілів, зокрема біноміальний, описують "ідеальні" ситуації. До того ж при зміні ймовірностей деякої події від випробування до випробування (див. приклад 2.6.), знайти основні характеристики такої випадкової величини буває досить складно. В випадках, коли кількість випробувань занадто велика чи взагалі невідома користуються асимптотичними формулами обчислення ймовірності деякої події. В цьому суть теореми неперервності.

Теорема неперервності. Нехай задано послідовність арифметичних розподілів $p_k(n)$, $n = 1, 2, 3, ...;\ k = 0, 1, 2, ...$, причому $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(n_0) = 1$ n_0 фіксоване. Для того, щоб при кожному фіксованому k існувала границя

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n) = p_k \text{ і } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \qquad (1)$$

необхідно і досить, щоб при кожному фіксованому z послідовність генератрис

$$P_n(z) \to P(z), \qquad (2)$$

яка є твірною послідовності p_k.

Доведення. Необхідність. Нехай виконується рівність (1). Доведемо (2). Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді

$$|P_n(z) - P(z)| = \left|\sum_{k\geq 0} p_k(n) z^k - \sum_{k\geq 0} p_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{N} |p_k(n) - p_k| z^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} |p_k(n) - p_k| z^k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} |p_k(n) - p_k| z^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k(n) z^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k z^k < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

так як останні дві суми є залишковими членами збіжної геометричної прогресії, то їх можна зробити як завгодно малими вибравши відповідне N.
Достатність. Доведення проводиться методом від супротивного [15].

Теорему доведено.

Розглянемо застосування даної теореми.

Теорема Пуассона. Нехай випадкова величина ξ належить до біноміального розподілу. Тоді ймовірність k успіхів у серії з n випробувань рівна $p_{n,k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Позначимо p_n - імовірність успіху при n випробуваннях, причому p_n і n задовольняють рівність

$$\lim_{n\to\infty} p_n \cdot n = \lambda = const. \qquad (3)$$

Тоді, якщо виконується (3), то

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (4)$$

Доведення. Доведемо теорему, використовуючи теорему неперервності.

При фіксованому значенні k $P_n(z) = (q_n + p_n z)^n$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) \overset{(3)}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ p_n\to 0}} (p_n z + (1-p_n))^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p_n\to 0}} \left(1 + p_n(z-1)^{\frac{1}{p_n(z-1)}}\right)^{np_n(z-1)} = e^{\lambda(z-1)}$$

Отже, послідовність твірних функцій біноміального розподілу збігається до генератриси Пуассонівського розподілу.

Теорему доведено.

Приклад 2.7. Класична задача про пожари. Нехай у місті n будинків, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ - імовірність пожару для кожного будинку відповідно. Тоді $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n \approx \lambda$ - середня кількість пожарів у місті. Випадкова величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ - кількість пожарів, де ξ_i розподілені за законом

ξ_i	1	0
p	p_i	$1-p_i$

Знайти ймовірність того, що відбудеться рівно k пожарів.

Запишемо твірну функцію даного розподілу, користуючись вл.1 генератрис

$$P_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)\cdot \ldots \cdot (p_n z + q_n), \text{ де } q_i = 1 - p_i.$$

Тоді

$$\ln P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + p_k(z-1)).$$

Врахувавши малу ймовірність пожару, запишемо

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+p_k\left(z-1\right)\right)\approx\sum_{k=1}^{n}p_k\left(z-1\right)\approx\left(z-1\right)\lambda.$$

Згідно теореми Пуассона, при великих n $P_n\left(z\right)=e^{\lambda(z-1)}$. Отже, ймовірність того, що у місті відбудеться k пожарів становить

$$p_{n,k}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Таким чином, теорема неперервності та теорема Пуассона дозволяють опустити громіздкі обчислення, пов'язані з випробуваннями Бернуллі і замінити їх наближеним значенням ймовірності розподілу Пуассона.

***3. Цілочисельні розподіли типу* B**

Глава присвячена розгляду прикладів арифметичних розподілів, які найчастіше зустрічаються при розв'язуванні задач, подано їх опис, основні характеристики, твірні функції. До того ж розглядаються розподіли типу **B**,, які ввів Волков Ю.І. [4].

Приклади арифметичних розподілів.

1. *Біноміальний розподіл.*

Параметри: n - кількість випробувань; k - кількість успіхів.

Імовірність k *- успіхів* обчислюється за формулою [3]:

$p_{n,k}=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}$, де p - імовірність успіху в кожному випробуванні.

Твірна функція розподілу: $P\left(z\right)=pz+\left(1-p\right)^n$.

Математичне сподівання: $M\xi=np$.

Дисперсія: $D\xi=np\left(1-p\right)$.

2. *Розподіл Пуассона.*

Параметри: λ - стала; $k=0,1,2,...$

Імовірність успіху: $p\left(k;\lambda\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Твірна функція розподілу: $P\left(z\right)=e^{\lambda(z-1)}$.

Математичне сподівання: $M\xi = \lambda$. *Дисперсія*: $D\xi = \lambda$.

3. *Геометричний розподіл.*

Розглянемо послідовність випробувань Бернуллі. Нехай ξ - кількість невдач до першого успіху. Розподіл такої випадкової величини називають геометричним розподілом.

ξ	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
p	p	pq	pq^2	$\dots$	pq^k	$\dots$

Твірна функція: $G(z) = \sum\limits_{k \ge 0} pq^k z^k = \dfrac{p}{1 - qz}$.

Математичне сподівання: $M\xi = G'(1) = \dfrac{q}{p}$. *Дисперсія*: $D\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

4. *Від'ємний біноміальний розподіл.*

Параметри: r - кількість успіхів; ξ - кількість невдач до r-го успіху.

Твірна функція розподілу: $P(z) = \left(\dfrac{p}{1 - qz}\right)^r$.

Розклавши генератрису в ряд, знайдемо *імовірності*

$$p(\xi = k) = \frac{r(r+1)\cdot\ldots\cdot(r+k-1)}{k!} p^r q^k, \text{ де } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Математичне сподівання: $M\xi = P'(1) = \dfrac{rq}{p}$. *Дисперсія*: $D\xi = \dfrac{rq}{p^2}$.

Якщо уважна придивитися до основних характеристик розглянутих розподілів, то виявляється, що математичне сподівання і дисперсія пов'язані. Позначимо через x математичне сподівання, а через $V(x)$ дисперсію.

Наприклад,

- біноміальний розподіл: $x = np; V(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{n}\right); P(z, x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}(z-1)\right)^n$;
- розподіл Пуассона: $x = \lambda; V(x) = x; P(z, x) = e^{x(z-1)}$.

Можна перевірити, що твірні функції цих розподілів задовольняють рівняння

$$\frac{\partial P}{\partial x}V(x)-\frac{\partial P}{\partial z}z+xP=0,\ \ P(1,x)=1\ \ \forall x\,, \tag{1}$$

введене Волковим Ю.І. [4].

Означення. Кажуть, що розподіл належить до типу **B**, якщо його генератриса задовольняє диференціальне рівняння (1).
Легко перевіряється належність біноміального, від'ємного біноміального, геометричного, розподілу Пуассона до типу **B**.

В якості прикладу розглянемо розподіли *Ноака* [5].

Нехай $w(y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k,\ \ a_k\ge 0,\ \ 0\le y<R$, - аналітична в околі точки 0 функція, де R – радіус збіжності. Розглянемо цілочисельну випадкову величину, яка має розподіл

$$p_k=P(\xi=k)=a_k\,\frac{y^k}{w(y)},\ \ k=0,1,2,\ldots \tag{*}$$

Генератриса цього розподілу: $P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,\frac{y^k}{w(y)}z^k=\frac{1}{w(y)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k z^k=\frac{w(yz)}{w(y)}$.

Використовуючи формули пункту 2.2. знайдемо математичне сподівання і дисперсію

$$M\xi=P'(1)=\frac{w'(y)}{w(y)};\ \ D\xi=y^2\,\frac{w''(y)}{w(y)}+y\,\frac{w'(y)}{w(y)}-y^2\,\frac{w'^2(y)}{w^2(y)}. \tag{**}$$

Наприклад,

- біноміальний розподіл: якщо $w(y)=(1+y)^n$, то в цьому випадку

$$P(z)=\left(\frac{1+zy}{1+y}\right)^n;\ \ x=\frac{ny(1+y)^{n-1}}{(1+y)^n}=\frac{ny}{1+y}\ \Rightarrow$$

$$y=\frac{x}{n-x};\ \ P(z,x)=\left(\frac{1+z\,\frac{x}{n-x}}{1+\frac{x}{n-x}}\right)^n=\left(1+\frac{x}{n}(z-1)\right)^n,$$

тобто отримали генератрису біноміального розподілу.

- розподіл Пуассона: при $w(y)=e^y$ отримаємо відому генератрису:

$$P(z)=\frac{e^{xy}}{e^y}=e^{y(x-1)};\ \Rightarrow\ x=\frac{ye^y}{e^y}=y;\ \ P(z,x)=e^{x(z-1)}$$

III. Застосування дискретної теорії ймовірностей

для знаходження сум

1. Загальні зауваження

В попередніх розділах ми розглянули дискретні розподіли та скінченні суми і методи їх знаходження. Там же було зазначено, що існує тісний взаємозв'язок між ними.

Дійсно з означення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, випливає, що обчисливши якимось чином ці характеристики (наприклад з допомогою генератрис) можна знаходити доволі непрості суми виду, які у випадку цілочисельних розподілів набирають вигляд

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} kp_k \text{ та } D\xi = \sum_{k=0}^{n} \left(k - M\xi\right)^2 p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 p_k - \left(M\xi\right)^2 .$$

При цьому величина p_k визначається для кожного розподілу окремо. Таким чином задача з підсумовування набирає імовірнісної інтерпретації

Такі міркування і покладені в основу нового метода обчислення скінченних сум.

Приклад 3.1. Знайти суму

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k} ,\ 0 \le x \le 1 .$$

При розв'язанні даної задачі будемо дивитися на x як на імовірність деякої події. Тоді

$p_{n,k} = C_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k}$ - імовініcть k успіхів у випробуваннях Бернуллі.

Отже, $\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k} = M\xi$, а $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n = x + x + ... + x = nx$. Тому

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k \left(1-x\right)^{n-k} = nx .$$

Приклад 3.2. Обчислити значення суми

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\ ,\ 0 \le x \le 1.$$

Знову ж таки будемо дивитися на x як на ймовірність деякої події. Перепишемо суму наступним чином

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left((k-nx)^2 + 2knx - n^2x^2\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

За властивістю сум розіб'ємо її на три

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k-nx)^2 + 2knx - n^2x^2\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2nx \sum_{k=0}^{n} nx C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= D\xi + 2n^2x^2 - n^2x^2 = D\xi + n^2x^2.$$

Оскільки випадкова величина ξ в випробовуванні Бернуллі є сумою незалежних випадкових величин ξ_i, то, користуючись властивістю (3) про диспесію суми та знайшовши $D\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, запишемо остаточний результат:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) + n^2x^2.$$

Аналогічні дії приводять до обчислення сум виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!};\quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!};\quad \sum_{k=0}^{n} kx(1-x)^k;\quad \sum_{k=0}^{n} k^2 x(1-x)^k;$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \frac{r(r+1)\cdot\ldots\cdot(r+k-1)}{k!} x^r (1-x)^k;\quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{r(r+1)\cdot\ldots\cdot(r+k-1)}{k!} x^r (1-x)^k$$

та деяких інших, що описують дискретні цілочисельні розподіли.

Приклад 3.3. Обчислити суму

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!}. \qquad (*)$$

Шукана сума дуже схожа на означення дисперсії для Пуассонівського розподілу. Тому перепишемо (*) у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!} e^{-2} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left((k-2)^2 + 4k - 4\right) \frac{2^k}{k!} e^{-2}.$$

Так як $\lambda = 2$, то $M\xi = 2 = D\xi$. Тому остаточно матемимо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2\cdot 2^k}{k!}=e^2\sum_{k=0}^{\infty}(k-M\xi)^2\frac{2^k}{k!}e^{-2}+4e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k}{k!}e^{-2}-4e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=$$
$$=e^2D\xi+4e^2M\xi-4e^2=6e^2 .$$

2. Обчислення моментів і семіінваріантів

Використовуючи апарат дискретної теорії ймовірностей, з'явилася можливість розширити клас сум, котрі піддаються обчисленню. В той же час математичне сподівання і дисперсія, на які ми спиралися є лише першими двома членами з нескінченного ряду різноманітніх числових характеристик. Ми зупинимося лише на основних характеристиках, зокрема семіінваріантах та моментах.

Нехай задана деяка випадкова величина і $G(z)$ - твірна функція розподілу. Тоді коефіцінти σ_m ряду

$$\ln G(e^t)=\frac{\sigma_1}{1!}t+\frac{\sigma_2}{2!}t^2+\frac{\sigma_3}{3!}t^3+\frac{\sigma_4}{4!}t^4+\dots \quad (1)$$

називаються семіінваріантами [9].

З другого боку

$$\ln G(z)=\ln G(e^t)=\ln\sum_{k\geq 0}p_k z^k=\ln\sum_{k\geq 0}p_k e^{kt}=\ln\left(1+\frac{\beta_1}{1!}t+\frac{\beta_2}{2!}t^2+\dots\right), \quad (2)$$

де

$$\beta_m=\sum_{k\geq 0}k^m p_k \quad (3)$$

моменти випадкової величини ξ m - го порядку.

Права частина формули (1) є не що інше як ряд Тейлора для логарифмічної функції. Тому коефіцієнти σ_m виражаються по формулі

$$\sigma_m=\left(\ln G(e^t)\right)^{(m)}_{t=0}. \quad (4)$$

Користуючись формулою (4), з рівності (2) можна виразити семіінваріанти σ_m через моменти β_m. Тоді отримаємо таку систему [9].

$$\sigma_1 = \beta_1;$$
$$\sigma_2 = \beta_2 - \beta_1^2;$$
$$\sigma_3 = \beta_3 - 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3; \qquad (*)$$
$$\sigma_4 = \beta_4 - 4\beta_1\beta_3 + 12\beta_1^2\beta_2 - 3\beta_2^2 - 6\beta_1^4 .$$
....

Таким чином, обчислення моментів, а отже, - і сум (3) зводиться до знаходження семіінваріантів.

Перший спосіб базується на застосуванні формули (4). Після знаходження семіінваріантів з системи (*) отримуємо величини β_m та значення відповідних сум.

Приклад 3.4. Знайти суми

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}; \ \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}; \ \sum_{k=1}^{n} k^3 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}..$$

Значення перших двох сум нам відомо (див. главу 1 цього розділу). Спробуємо їх обчислити новим методом, не користуючись явно властивостями математичного сподівання і дисперсії, а використовуючи моменти. Будемо дивитися на x як на ймовірність деякої події. Тоді маємо справу з випробуваннями Бернуллі, оскільки в ролі p_k в формулі (3) виступає імовірність k успіхів в серії з n експериментів. Отже, твірною функцією розподілу є функція

$$G(z) = ((1-x) + xz)^n .$$

Згідно (1) запишемо

$$\ln G(z) = \ln G(e^t) = n\ln(x(e^t - 1) + 1).$$

Таким чином

$$f(t) = n\ln(x(e^t - 1) + 1). \qquad (**)$$

Знайдемо похідні функції $f(t)$ в точці $t = 0$

$$\sigma_1 = f'(0) = nx; \ \sigma_2 = f''(0) = nx(1-x); \ \sigma_3 = f'''(0) = nx(1-x)(1-2x).$$

Тоді система (*) прийме вид

$nx = \beta_1;$

$nx(1-x) = \beta_2 - \beta_1^2;$

$nx(1-x)(1-2x) = \beta_3 - 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3$,

з якої визначаємо:

$$\beta_1 = nx;\ \ \beta_2 = nx(1-x) + n^2x^2;\ \ \beta_3 = nx\left(1-3x+2x^2+3nx-3nx^2+n^2x^2\right).$$

Отже, остаточно, враховуючи формулу (3), матимемо

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx;\\
&\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) + n^2x^2; \qquad (***)\\
&\sum_{k=1}^{n} k^3C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx\left(1-3x+2x^2\right) + n^2x^2(3-3x+nx).
\end{aligned}$$

Пригадавши главу 1 цього розділу, переконуємося у вірності перших двох сум. Виконаємо перевірку для суми $\sum_{k=1}^{n} k^3C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ при $\mathrm{n} = 3,\ x = 0{,}2$.

Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{3} k^3C_3^k\, 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{3-k} = 1^3C_3^1\, 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^2 + 2^3C_3^2\, 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^1 + 3^3C_3^3\, 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^0 = 1{,}368.$$

З другого боку з (***) маємо

$$\sum_{k=1}^{3} k^3C_3^k\, 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{n-k} = 3\cdot 0{,}2\left(1-3\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}2^2\right) + 3^2 \cdot 0{,}2^2(3-3\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}2) = 1{,}368$$

Таким чином, маючи твірну функцію розподілу, використовуючи формулу (4) можна знаходити доволі непрості суми. В той же час із збільшенням степеня m суми $\sum_{k=0}^{n} k^m p_k$, відшукати похідну $f^{(m)}(t)$ в точці $t = 0$, як і розв’язати систему (*), стає досить важким завданням з точки зору виконання тотожних перетворень. Тому постає задача відшукання універсальних формул для семіінваріантів. Ця задача була розв’язана Волковим Ю.І. і детально проаналізована в [4], де доведено в загальному випадку наступна теорема.

Другий спосіб.

Теорема. Нехай ξ цілочисельна випадкова величина, x та $V(x)$ - її математичне сподівання та дисперсія відповідно. Тоді *семіінваріанти* задовольняють наступне рекурентне співвідношення

$$\sigma_{k+1} = V(x)\frac{\partial \sigma_k}{\partial x}, \ \sigma_1 = x, \ k = 1, 2, \dots \qquad (5)$$

Як зазначено в [4] в деяких випадках з цього співвідношення можна дістати формули семіінваріантів в явному вигляді (моменти виражаються через семіінваріанти з системи (*)). Розглянемо випадок, коли $V(x)$ є многочлен другого степеня відносно x (див. розподіли типу **В**).

Приклад 3.5. Нехай $V(x) = x(ax+b)$, де a, b - довільні числа. Тоді розв'язком рекурентного рівняння (4) є функції

$$\sigma_{k+1}(x) = x(ax+b)\sum_{m=1}^{k} m! b^{k-m} S_{k,m} (ax)^{m-1}, \ k = 1, 2, 3, \dots \qquad (6)$$

де $S_{k,m}$ - числа Стірлінга другого роду (див. розділ І та додаток Д.2.)

Отже, використання формули (6) зводить знаходження семіінваріанту $k+1$-го порядку до обчислення суми k доданків і не вимагає громіздких перетворень як в попередніх випадках.

Проаналізуємо формулу (6).

– при $a = -1, \ b = 1$ та $x = np$ дістаємо біноміальний розподіл та явні формули для його семіінваріантів

$$\sigma_{k+1}(x) = np(1-p)\sum_{m=1}^{k} m! S_{k,m} \cdot p^{m-1}, \ k = 1, 2, 3, \dots;$$

– покладаючи $a = 1, \ b = 1$ та $x = \dfrac{n(1-p)}{p}$ дістаємо явні формули для семіінваріантів негативного біноміального розподілу

$$\sigma_{k+1}(x) = \frac{n(1-p)}{p^2}\sum_{m=1}^{k} m! S_{k,m} \cdot p^{1-m}(1-p)^{m-1}, \ k = 1, 2, 3, \dots;$$

– задаючи $a = 0, \ b = 1, \ x = \lambda$ отримуємо семіінваріанти для розподілу Пуассона

$$\sigma_k = \lambda, \ \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Покажемо, що формули (4) і (5) еквівалентні, тобто при їх використанні отримуються однакові результати. Для біноміального розподілу з використанням (4) були знайдені семіінваріанти. Перевіримо цей результат, застосувавши формулу (5).

$$k = 1 \ \Rightarrow \ \sigma_2(x) = np(1-p)\sum_{m=1}^{1} m!S_{k,m} \cdot p^{m-1} = np(1-p)\cdot 1!\cdot S_{1,1} \cdot p^0 = np(1-p);$$

$$k = 2 \ \Rightarrow \ \sigma_3(x) = np(1-p)\sum_{m=1}^{2} m!S_{k,m} \cdot p^{m-1} =$$

$$= np(1-p)\cdot\left(1!\cdot S_{2,1}\, p^0 + 2!\cdot S_{2,2}\, p^1\right) = np(1-p)\cdot(1-2p).$$

Оскільки семіінваріанти отрималися однаковими, то і моменти, а отже і відповідні суми, теж. Тому розглянуті підходи до застосування моментів та семіінваріантів для знаходження скінченних сум еквівалентні, проте підхід, котрий передбачає розв’язування рекурентності (5), оправдовує себе лише у випадку необхідності обчислення характеристик як завгодно великого порядку. В більшості ж випадків буває достатньо скористатися першим способом.

Таким чином, вивчення скінченних сум, методів їх обчислення, основних питань різницевого числення та дискретних розподілів показало глибокі взаємозв’язки між цими розділами математики, які можна пропонувати студентам педагогічних вузів до опрацювання. Поряд з цим вивчення розподілів типу **B**, відшукання семіінваріантів для розподілів, у яких функція $V(x)$ є многочленом загального вигляду та деякі інші питання роботи залишають достатній простір для подальшого дослідження та поповнення курсу.

Висновки

1. Вивчено властивості скінченних сум, систематизовано методи їх знаходження, що інтегрують у собі різні розділи математики.
2. Узагальнено метод невизначних коефіцієнтів для сум, породжених многочленами, квазімногочленами та тригонометричними функціями, подано універсальні формули для розглядуваних випадків.
3. Застосовано теорію спеціальних чисел до доведення теореми про підсумовування степенів натуральних чисел.
4. Розв’язані задачі студентських математичних олімпіад практично підтверджують розроблені теоретичні положення.
5. Висвітлені основні дискретні розподіли та їхні характеристики, зокрема моменти, семіінваріанти та твірні функції розподілу.
6. Вивчено розподіли типу **B**.
7. Проаналізовано взаємозв’язок дискретних розподілів та скінченних сум, розглянуті задачі з підсумовування, надаючи їм ймовірнісної інтерпретації.
8. Подано деякі методичні рекомендації, що стосуються можливості викладення даного матеріалу студентській молоді.

Література

[1] **Бекишев Г.А., Кратко М.І.** Підсумовування послідовностей. – К.: Вища школа, Головне видавництво, 1981. – 64с.

[2] **Бродский Я.С., Слипенко А.К.** Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 120с.

[3] **Волков Ю.І., Войналович Н.М.** Елементи дискретної математики: Навчальний посібник, 2000. – 176с.

[4] **Волков Ю.І.** Додатні оператори. Наближення. Імовірність. – К., 1992.

[5] **Волков Ю.І., Лигун А.А., Капустян В.Е.** Специальные вопросы теории приближения и оптимального управления распределёнными системами. – К.: Выща шк.,1990. –208с.

[6] **Вышенский В.А. и др.** Сборник задач киевских математических олимпиад. – К.: Выща школа, 1984. – 240с.

[7] **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. – М., 1967. – 376с.

[8] **Гельфонд А.О.** Числення скінченних різниць. – К.:, 1935. – 215с.

[9] **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.–703с.

[10] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука. Главная ред. физ. – мат. лит., 1977. – 832с.

[11] **Марков А.** Числення скінченних різниць. – Харків, 1936. –236с.

[12] **Маркушевич А.И.** Возвратные последовательности. – М.:, 1951, - 48с.

[13] **Садовничий В.А., Подколозин А.С.** Задачи студенческих задач по математике. – М.: Наука, Гл. ред. физ.–мат. лит., 1978. – 208с.

[14] **Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В.** Задачи студенческих математических олимпиад. – М.: Изд-во Мос. ун-та, 1987. – 310с.

[15] **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528с.

[16] **Шефтель З.П.** Теорія ймовірностей: Підручник. – К.: Вища шк, 1994.

[17] **Філософія:** Курс лекцій, за ред. І.Ф.Надольного. - .К.: Віка, 2000. – 516с.

Додатки

Д.1. Різниці та антирізниці елементарних функцій

I. Різниці.

1) $\Delta(ax+b)=[a(x+1)+b]-[ax+b]=a$;

2) $\Delta x^{(k)}=kx^{(k-1)}$, де

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)} &= x(x-1)(x-2)...(x-k+1) \\ x^{(-k)} &= \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdot...\cdot(x+k-1)} \end{aligned}\right\} \text{узагальнений степінь, } k\in N;$$

3) $\Delta a^{x}=a^{x+1}-a^{x}=(a-1)a^{x}$;

4) $\Delta\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x(x+1)}$;

5) $\Delta arctgx=arctg\dfrac{1}{1+x(x+1)}$;

6) $\Delta\sin(\alpha x)=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\alpha x+\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

II. Антирізниці.

1) $\Delta^{-1}a^{x}=\dfrac{a^{x}}{a-1}$;

2) $\Delta^{-1}x^{(k)}=\dfrac{x^{(k+1)}}{k+1}$;

3) $\Delta^{-1}\cos\alpha x=\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\Delta^{-1}\dfrac{1}{\cos\alpha x\cos\alpha(x+1)}=\dfrac{tg\alpha x}{\sin\alpha}$;

5) $\Delta^{-1}arctg\dfrac{1}{1+x+x^{2}}=arctgx$.

Д.2. Основні властивості чисел Стірлінга

Рекурентні співвідношення

$$S_{nk} = S_{(n-1)(k-1)} + kS_{(n-1)k};$$

$$s_{nk} = s_{(n-1)(k-1)} - (n-1)kS_{(n-1)k}.$$

Часткові випадки

$$S_{n0} = s_{n0} = 0 \text{ при } n \neq 0;$$

$$S_{n1} = 1, \text{ для } n > 0;$$

$$S_{n1} = 1, \; n > 0;$$

$$S_{nk} = s_{nk} = 0 \text{ при } n \neq 0.$$

Перетворення степенів

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{nk} x^{(k)};$$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s_{nk} x^k.$$

Деякі суми, пов'язані з числами Стірлінга

$$\sum_k (-1)^{n-k} s_{nk} S_{km} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases};$$

$$\sum_k (-1)^{n-k} S_{nk} s_{km} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases};$$

$$\sum_k C_n^k S_{km} = S_{(n+1)(m+1)};$$

$$\sum_k C_k^m s_{nk} = s_{(n+1)(m+1)};$$

$$\sum_k C_m^k k^n (-1)^{m-k} = m! S_{nm};$$

$$\sum_k \frac{s_{km}}{k!} = \frac{1}{n!} s_{(n+1)(m+1)}.$$

Д.3. Суми степенів чисел натурального ряду

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3=\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+(n-1)^4=\frac{1}{30}n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)$$

$$1^5+2^5+3^5+\ldots+(n-1)^5=\frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)$$

$$1^6+2^6+3^6+\ldots+(n-1)^6=\frac{1}{42}n(n-1)(2n-1)(3n^4-6n^3+3n+1)$$

$$1^7+2^7+3^7+\ldots+(n-1)^7=\frac{1}{22}n^2(n-1)^2(3n^4-6n^3-n^2+4n+2)$$

$$1^8+2^8+3^8+\ldots+(n-1)^8=\frac{1}{90}n(n-1)(2n-1)(5n^6-15n^5+5n^4+15n^3-n^2-9n-3)$$

$$1^9+2^9+3^9+\ldots+(n-1)^9=\frac{1}{20}n^2(n-1)^2(n^2-n-1)(2n^4-4n^3-n^2+3n+3)$$

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots+(n-1)^{10}=\frac{1}{66}n(n-1)(2n-1)(n^2-n-1)(3n^6-9n^5+2n^4+11n^3+3n^2-10n-5)$$

$$1^{11}+2^{11}+3^{11}+\ldots+(n-1)^{11}=\frac{1}{24}n^2(n-1)^2(2n^8-8n^7+4n^6+16n^5-5n^4-26n^3-3n^2+20n+10)$$

Д.4. Послідовності та їх твірні функції

Послідовність	**Твірна функція**
1. $\langle 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...\rangle$	$1;$
2. $\langle 0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ...\rangle$	$z^m;$
3. $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...\rangle$	$\dfrac{1}{1-z};$
4. $\langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...\rangle$	$\dfrac{1}{1+z};$
5. $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\rangle$	$\dfrac{1}{1-z^2};$
6. $\langle 1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 1, 0, ...\rangle$	$\dfrac{1}{1-z^m};$
7. $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\rangle$	$\dfrac{1}{(1-z)^2};$
8. $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\rangle$	$\dfrac{1}{1-2z};$
9. $\langle 1, n, C_n^2, C_n^3, C_n^4, \ldots\rangle$	$(1+z)^n;$
10. $\langle 1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots\rangle$	$\dfrac{1}{1-az};$
11. $\left\langle 0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\rangle$	$\ln\dfrac{1}{1-z};$
12. $\left\langle 0, 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \ldots\right\rangle$	$\ln(1+z);$
13. $\left\langle 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{120}, \ldots\right\rangle$	$e^z.$