

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ С УЧЕТОМ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ У ЕЕ ВЕРШИНЫ

Plashchynska<sup>1</sup> A., Bashta<sup>2</sup> O., Dzhuryk<sup>2</sup> O.

1 - S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine (inmech@creep.kiev.ua)

2 - National Aviation University, Kyiv, Ukraine

## MODELING OF FATIGUE CRACK PROPAGATION IN VIEW BIAxIAL STRESS STATE AT ITS TIP

*Представлен теоретический подход к моделированию процесса распространения усталостных трещин при плоском напряженном состоянии. Модель построена на основе концепций механики разрушения и механики непрерывной поврежденности, что позволяет рассматривать инкубационный период и стадию роста трещины с единых позиций. Плоское напряженное состояние в окрестности вершины трещины сводится к эквивалентному линейному с помощью смешанного критерия усталостного разрушения. Асимметричное циклическое нагружение сводится к эквивалентному по числу циклов разрушения симметричному циклическому нагружению на основе использования критерия эквивалентности напряжений для асимметричного циклического нагружения. Исследовано влияние учета двухосности напряжений на кинетику усталостной трещины в тонкой бесконечной пластине при одноосном асимметричном растяжении-сжатии.*

*Ключевые слова:* усталостная трещина; тонкая пластина; двухосное напряженное состояние; асимметричное циклическое нагружение; эквивалентное напряжение; поврежденность.

### Введение

Построение теоретических моделей и разработка расчетных методов является одним из перспективных путей решения актуальной проблемы механики – прогнозирования усталостной долговечности элементов конструкций.

В работах [1-3] построена математическая модель распространения усталостных трещин в тонких изотропных бесконечных пластинах при одноосном симметричном растяжении-сжатии. В основу модели положен подход, объединяющий методы механики трещин и методы механики непрерывной поврежденности. Модель устанавливает зависимость скорости роста усталостных трещин от амплитуды циклического напряжения и предела текучести материала, а также позволяет учесть двухстадийность процесса усталостного разрушения, включая инкубационную стадию и стадию распространения трещины. Развитие модели направлено на учет различных факторов, влияющих на кинетику усталостного разрушения. Представленный подход апробирован на задачах расчета кинетики роста усталостных трещин в пластинах с различными концентраторами напряжений при различной степени асимметрии цикла нагружения [4-7]. Учет асимметрии цикла нагружения в модели осуществлен при помощи критерия эквивалентных напряжений для асимметричного нагружения [8].

Экспериментально было доказано, что напряжения, действующие вдоль трещины, оказывают влияние на предельное состояние тел с трещинами [9]. При моделировании усталостного разрушения этот факт необходимо учесть, используя соответствующие критерии разрушения.

Целью настоящей работы, является получение разрешающих уравнений модели с учетом всех компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины и оценка их влияния на кинетику усталостной трещины. В работе приведена обобщенная постановка задачи о распространении усталостной трещины в тонких бесконечных пластинах с учетом двухосности напряженного состояния у вершины трещины. Для перехода от плоского напряженного состояния к эквивалентному линейному использован смешанный критерий усталостного разрушения [10-12]. Получены соотношения для определения длительности инкубационной стадии, скорости роста и длины усталостных трещин при асимметричном циклическом растяжении-сжатии. Исследовано влияние учета второго напряжения у вершины трещины на результаты расчета ее кинетики.

### 1. Постановка задачи и исходные соотношения

Рассмотрим процесс усталостного разрушения тонкой бесконечной пластины с центральной трещиной нормального отрыва начальной полудлины  $\ell_0$ . Берега трещины свободны от нагрузки, а на краях пластины перпендикулярно направлению трещины приложено одноосное асимметричное циклическое нагружение, вызывающее номинальные циклические напряжения  $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a g(ft) \quad (1.1)$$

Асимметричное циклическое нагружение (1.1) можно заменить эквивалентным по числу циклов разрушения  $n = n_R$  симметричным циклом нагружения

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{a,eqv} \cdot g(ft) \quad (1.2)$$

где  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$  – среднее и амплитудное напряжения цикла;  $\sigma_{a,eqv}$  – амплитудное напряжение эквивалентного симметричного цикла;  $g(\cdot)$  – известная периодическая функция;  $t$  – физическое время;  $f$  – частота нагружения;  $n = ft$  – число циклов нагружения. Примем, что экстремальные величины напряжений  $\sigma_{max}$  и  $\sigma_{min}$  не зависят от времени (стационарный режим) и достаточно быстро (частота  $f > 10$  Гц) изменяются от цикла к циклу, напряжения  $\tilde{\sigma}$  не превышают значения предела текучести материала  $\sigma_Y$ . В этом случае основной массив пластины деформируется линейно-упруго, разрушение реализуется в многоциклового области ( $n \approx 10^5$  циклов).

Усталостную трещину представим согласно модифицированной модели Дагдейла для циклического нагружения [13].

Процесс усталостного разрушения рассматриваем как процесс накопления поврежденности. Считаем, что в произвольной точке пластины  $x_i(x, y)$  в момент времени  $n$  накапливаются усталостные повреждения, выраженные скалярной функцией поврежденности  $\omega(x, y, n)$ . Полагаем, что трещина растет скачкообразно [14] на длину циклической пластической зоны в полупериодах нагружения, когда величина поврежденности по длине этой зоны  $\omega = 1$ .

Для определения эквивалентного напряженного состояния пластины в произвольный момент времени  $n$  используем соотношения теории упругости с учетом изменения поврежденности  $\omega(x, y, n)$ .

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx,eqv}(x, y, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,eqv}(x, y, \omega)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy,eqv}(x, y, \omega)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy,eqv}(x, y, \omega)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения совместности

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx,eqv}(x, y, \omega) + \sigma_{yy,eqv}(x, y, \omega)) = 0. \quad (1.4)$$

Граничные условия для рассматриваемой пластины имеют вид

$$\sigma_{xx}(x, y) \cdot \cos(v, x) = 0, \quad x = \pm\infty \quad y = \pm\infty, \quad (1.5)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) \cdot \cos(v, y) = \tilde{\sigma}, \quad x = \pm\infty; \quad y = \pm\infty, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{yy}(x, n) \cdot \cos(v, x) = 0, \quad y = 0, \quad \begin{cases} -\ell_0 \leq x \leq \ell_0 & 0 \leq n \leq n_* \\ -\ell(n) \leq x \leq \ell(n) & n > n_* \end{cases}, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{V}$  – нормаль к боковой поверхности;  $n_*$  – длительность инкубационного периода.

Эволюционное уравнение накопления усталостных повреждений, описывающее процесс распространения усталостной трещины используем в виде

$$\frac{\partial \omega(x, y, n)}{\partial n} = D \left[ \frac{\sigma_{eq}(x, y, n)}{1 - \omega(x, y, n)} \right]^q \quad (1.8)$$

с начальными условиями

$$\omega(x, y, n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = n_R \end{cases}, \quad (1.9)$$

где  $\omega(x, y, n)$  – скалярная функция поврежденности, определяющая уровень повреждений в произвольной точке  $x_i(x, y)$  в момент времени  $n$ ;  $n_R$  – момент разрушения;  $D$  и  $Q$  – коэффициенты, определяющие сопротивление материала усталостному разрушению;  $\sigma_{eq}(x, y, n)$  – эквивалентное напряжение в каждой точке пластины, которое сводит плоское напряженное состояние к одноосному

Для перехода от плоского напряженного состояния к эквивалентному одноосному используется смешанный критерий усталостного разрушения, учитывающий знаки главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Структура критерия была предложена в [9] и для сложного напряженного состояния при циклическом нагружении используется в виде

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} \alpha \sigma_{a, \max} + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^\chi s_{a, i}; & \sigma_1 > \sigma_2 > 0; \quad \sigma_3 = 0 \\ 2\beta \tau_{a, \max} + (1 - \beta) \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^\chi \tau_{a, oct}; & \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

При совпадающих знаках главных напряжений критерий связывает амплитудные значения максимального нормального напряжения  $\sigma_{a, \max}$  и интенсивность касательных напряжений  $s_{a, i}$ . При несовпадающих знаках главных напряжений критерий связывает амплитудные значения удвоенного максимального касательного напряжения  $\tau_{a, \max}$  и октаэдрического касательного напряжения  $\tau_{a, oct}$ . Материальные константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются с использованием экспериментальных данных по усталостному разрушению гладких цилиндрических образцов и данных единичного эксперимента при плоском напряженном состоянии. Экспериментально установлено, что значения  $\alpha$  и  $\beta$  изменяются в пределах 0,28 до 1, зависят от материала и вида напряженного состояния

Параметр Надаи-Лоде  $\chi$  определяется из выражения

$$\chi = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \quad (1.11)$$

Методика использования смешанного критерия усталостного разрушения и определения материальных констант  $\alpha$  и  $\beta$  изложена в [10-12].

Критерий эквивалентных напряжений при асимметричном цикле нагружения [7,8] используется в виде, дающем наиболее точный переход от асимметричного цикла нагружения к эквивалентному по времени разрушения симметричному нагружению

$$\sigma_{a, eqv} = \sigma_a \left[ \cos \left( \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right) \right]^{-\eta} \approx \sigma_a \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right)^4 \right]^{-\eta}, \quad (1.12)$$

где  $\sigma_{a, eqv}$  – амплитудное напряжение эквивалентного симметричного цикла;  $\sigma_B$  – предел прочности материала;  $\eta$  – коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла.

Задача заключается в определении функциональной зависимости между переменными, характеризующими кинетику роста трещины, компонентами тензора напряжений, набором коэффициентов и констант материала  $C_i$  ( $i = 1, k$ ) в виде

$$\frac{d\ell}{dn} = F_1(\sigma_1, \sigma_2, \ell, H, W, C_i). \quad (1.13)$$

## 2. Модель роста усталостной трещины

Решение задачи состоит в совместном рассмотрении краевой задачи теории упругости с подвижной границей при плоском напряженном состоянии и эволюционного уравнения накопления усталостных повреждений.

Напряженное состояние вдоль фронта движения трещины по оси  $x$  для каждого момента времени  $n$  из решения системы (1.3)-(1.7), согласно [15], запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0, n) &= \frac{\sigma_{a, eqv} \sqrt{\ell(n)}}{\sqrt{2(x - \ell(n))}} = \sigma_1 \\ \sigma_{xx}(x, 0, n) &= \frac{\sigma_{a, eqv} \sqrt{\ell(n)}}{\sqrt{2(x - \ell(n))}} - \sigma_{a, eqv} = \sigma_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поскольку знаки главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  совпадают, используем первое уравнение смешанного критерия усталостного разрушения (1.10).

Учитывая, что

$$\sigma_{a,\max} = \sigma_1, s_{a,i} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1)^2 - \sigma_1 \sigma_2 + (\sigma_2)^2}, \quad (2.2)$$

и рассматривая, для упрощения, только сингулярные члены в (2.1), выражение для эквивалентного одноосного напряжения получаем в виде

$$\sigma_{eq} = \frac{(1+2\alpha)}{3} \frac{\sigma_{a,eqv} \sqrt{\ell(n)}}{\sqrt{2(x(n) - \ell(n))}} \quad (2.3)$$

Интегрируя (1.8) с начальными условиями (1.9) и учитывая две стадии усталостного разрушения, получим интегральное уравнение движения фронта разрушения

$$\int_0^1 [1 - \omega(x, n)]^q d\omega = D \left[ \int_0^{n_*} \sigma_{eq}^q(x, n) dn + \int_{n_*}^n \sigma_{eq}^q(x, n) dn \right], \quad (2.4)$$

где  $n_*$  – длительность инкубационного периода,  $x(n)$  – координата точки на фронте разрушения в момент времени  $n$

$$x(n) = \begin{cases} \ell_0 + \lambda(\ell_0) & 0 \leq n \leq n_* \\ \ell(n) + \lambda(\ell(n)) & n > n_* \end{cases} \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) с учетом (2.3) и (2.5) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 - (1+q)D \left( \frac{(1+2\alpha)\sigma_{a,eqv}}{3\sqrt{2}} \right)^q \int_0^{n_*} \left[ \frac{\ell_0}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell_0} \right]^{\frac{q}{2}} d\tilde{n} = \\ = (1+q)D \left( \frac{(1+2\alpha)\sigma_{a,eqv}}{3\sqrt{2}} \right)^q \int_{n_*}^n \left[ \frac{\ell(\tilde{n})}{\ell(n) + \lambda(\ell(n)) - \ell(\tilde{n})} \right]^{\frac{q}{2}} d\tilde{n}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно представленной модели усталостная трещина растет скачкообразно на длину циклической пластической зоны  $\lambda(\ell)$  в момент времени, когда поврежденность вдоль пластической зоны равна 1.

Из приближенного аналитического решения нелинейного интегрального уравнения движения фронта разрушения (2.6) получим

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q}\right) D \frac{1}{[2\lambda(\ell)]^{\frac{q}{2}-1}} \left( \frac{(1+2\alpha)}{3\sqrt{2}} \sigma_{a,eqv} \right)^q \ell^{\frac{q}{2}} & (n > n_*) \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D \left[ \frac{(1+2\alpha)}{3\sqrt{2}} \sigma_{a,eqv} \right]^q \left[ \frac{\ell_0}{\lambda(\ell_0)} \right]^{\frac{q}{2}}}, \end{cases} \quad (2.7)$$

где первое уравнение определяет стадию роста усталостной трещины, а второе – длительность инкубационной стадии.

Длину циклической пластической зоны определяем на основе модифицированной модели Дагдейла [13] с учетом критериев (1.11) и (1.13) из выражения

$$\lambda(\ell(n)) = \frac{1}{8} \left( \frac{(1+2\alpha)}{3} \frac{\pi \sigma_{a,eqv}}{2\sigma_Y} \right)^2 \ell(n), \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7) получаем разрешающие уравнения двухстадийной модели роста усталостной трещины при асимметричном циклическом нагружении с учетом плоского напряженного состояния у вершины трещины

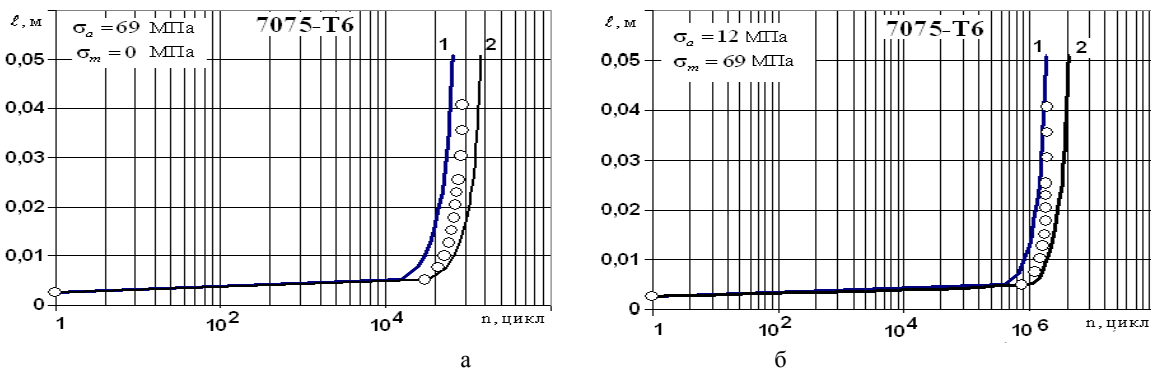
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dl}{dn} &= \left(1 + \frac{1}{q}\right) D \left(\frac{4\sigma_Y}{\pi}\right)^{q-2} \left( \frac{(1+2\alpha)}{3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2 \right]^{-\eta} \sigma_a \right)^2 \ell \quad (n > n_*) \\ n_* &= \frac{1}{(1+q)D} \left(\frac{\pi}{4\sigma_Y}\right)^q. \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

### 3. Апробация модели

Рассмотрим тонкую бесконечную пластинку из алюминиевого сплава с центральной трещиной начальной полудлины  $\ell_0 = 0,0025$  м. На бесконечности, в направлении перпендикулярном трещине, приложено одноосное асимметричное многоцикловое растяжение-сжатие. Учитывая постоянные материала 7075-T6 ( $\sigma_Y = 523$  МПа,  $\sigma_B = 571$  МПа,  $q = 9,23$ ,  $D = 3,33 \cdot 10^{-29}$ ,  $\eta = 3,57$ ), определим скорость распространения усталостной трещины.

На рис.1 показаны результаты расчета по соотношениям (2.9). Зависимости длины усталостной трещины от числа циклов нагружения при симметричном ( $\sigma_a = 69$  МПа,  $\sigma_m = 0$ ) и асимметричном ( $\sigma_a = 12$  МПа,  $\sigma_m = 69$  МПа) циклах нагружения показаны на рис.1а и рис.1б соответственно. Для качественной оценки влияния учета двухосности напряжений у вершины усталостной трещины на ее скорость проведены расчеты при различных значениях коэффициентов  $\alpha$ . Кривая 1 соответствует расчету относительно одного

Г



**Рис. 1. Зависимость длины усталостной трещины от числа циклов нагружения для алюминиевого сплава 7075-T6 (а) – при симметричном (б) – при асимметричном циклах нагружения ( $\alpha = 1$  – (кривая 1) – с учетом одного напряжения;  $\alpha = 0,5$  – (кривая 2) – для двухосного напряженного состояния у вершины трещины;  $\circ$  – экспериментальные данные)**

главного напряжения ( $\alpha = 1$ ), кривая 2 – построена с учетом двухосности напряжений в окрестности вершины трещины ( $\alpha = 0,5$ ). Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными ( $\circ$ ).

Учет второго напряжения по смешанному критерию усталостного разрушения приводит к снижению расчетных значений скорости усталостной трещины относительно расчетов по критерию максимальных напряжений. С уменьшением значения  $\alpha$  длительность инкубационного периода увеличивается, а скорость распространения трещины уменьшается.

**Заключение.** В работе построена модель роста усталостной трещин в бесконечной пластине при асимметричном нагружении с учетом двухосности напряженного состояния у вершины трещины. Процесс накопления поврежденности рассматривается в качестве движущей силы трещины. При помощи критериев эквивалентности асимметричное циклическое нагружение сведено к эквивалентному по числу циклов разрушения симметричному циклу, а плоское напряженное состояние у вершины трещины – к одноосному. Учет второго напряжения приводит к снижению расчетных значений скорости роста усталостной трещины и увеличению длительности инкубационного периода.

**Анотація.** Розглянуто теоретичний підхід до моделювання процесу розповсюдження тріщин втомі при плоскому напруженому стані. Модель побудована на основі концепцій механіки руйнування і механіки неперервного пошкодження, що дозволяє розглядати інкубаційний період і стадію зростання тріщини з єдиних позицій. Плоский напружений стан в околі вершини тріщини зводиться до еквівалентного лінійного за допомогою змішаного критерію руйнування від втомі. Асиметричне циклічне навантаження зводиться до еквівалентного за числом циклів до руйнування симетричного циклічного навантаження на основі використання критерію еквівалентності напружень для асиметричного циклічного

навантаження. Досліджено вплив врахування двовісності напруженого стану при розрахунку кінетики втомної тріщини в тонкій нескінченній пластині при одновісному асиметричному розтягу-стиску.

**Ключові слова:** тріщина втоми; тонка пластина; двовісний напружений стан; асиметричне циклічне навантаження; еквівалентне напруження; пошкодженість.

**Abstract.** The paper presents the theoretical approach to modeling of the fatigue fracture processes in view of two stages of fracture including crack initiation and crack propagation stage as well as plane state of stress at the crack tip. The approach is based on the joint consideration of boundary-value problem of fracture mechanics and damage accumulation kinetics problem of the continuum damage theory. The plane stress state in the vicinity of the crack tip is reduced to the equivalent linear stress state by the mixed fracture criterion combining the maximum principal stress and the intensity of shear stresses. Using the equivalent stresses criterion allows to reduce asymmetrical loading cycle to the equivalent symmetrical cyclic loading on rupture time. The calculation results for different stress ratio of asymmetrical cyclic loading agree well with experimental data. The effect of the allowance for biaxial stresses distribution at the crack tip at calculating of the kinetics of fatigue crack in thin infinite plate under uniaxial asymmetrical tension-compression is analyzed.

**Key words:** fatigue crack; thin plate; biaxial stress state; asymmetrical cyclic loading; equivalent stress; damage.

### Список литературы:

1. Голуб В.П. Модель усталостного разрушения тонких изотропных пластин с трещинами при осевом нагружении / В.П.Голуб, А.В.Плащинская // Прикл. механика.- 1994.- Том 30, №7.- С. 520-529.
2. Golub V.P. The theory of long-term fatigue fracture providing for crack initiation and propagation // In: Advances in Fracture Research (ICF9).- 1997.- Vol. 3.- P. 1361-1370.
3. Голуб В.П., Феноменологическая модель роста усталостной трещины в идеально-пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении./ Голуб В.П., Плащинская А.В. // Прикл. механика.- 2005.- Том 41 (51), №12.- С. 116-127.
4. Голуб В.П. Докритический рост усталостных трещин в тонких пластинах с концентраторами напряжений / В.П.Голуб, А.В.Плащинская // Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций.- Киев, Изд-во НАНУ, 2000.- С. 93-99.
5. Плащинская А.В. Кинетика роста усталостных трещин в тонких пластинах конечных размеров при асимметричном нагружении // Вісник НТУУ КПІ Машинобудування, Київ, 2010.- Вип. 58.- С. 189-194.
6. Плащинская А.В. Усталостное разрушение тонких пластин с концентраторами напряжений при одноосном асимметричном нагружении // Вісник НТУУ КПІ Машинобудування, Київ, 2013.-№2, Вип. 68.- С.76-83.
7. Голуб В.П. Усталостное разрушение тонких алюминиевых пластин с трещинами при одноосном асимметричном нагружении / В.П.Голуб, А.В.Плащинская, Е.С.Кочеткова // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений», 2008.- Вып.31.- С. 73-81.
8. Голуб В.П. Усталостная прочность металлических и композитных материалов при асимметричном растяжении-сжатии / В.П.Голуб, В.И.Крижановский, А.Д.Погребняк, Е.С.Кочеткова // Прикл. механика.- 2006.- Том 42 (52), №1.- С. 48-58.
9. Неклассические проблемы механики разрушения; В 4-х т./ Под общ. Ред. Гузя А.Н. Т.4.; кн.1. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами/ Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. – К.:Наук.думка, 1992, 456с.
1. Голуб В.П. Смешанный критерий длительного разрушения в условиях ползучести при плоском напряженном состоянии / В.П.Голуб, В.И.Крижановский, А.А.Русинов // Прикладная механика. – 2003.- Том 39, №5. – С.64-75.
10. Golub V.P. Derivation of creep long-term fracture criteria under plane state of stress // Intern. Journal of Mechanical Sciences 2005; 47:1807.
11. Регульский М.Н. Критерий сопротивления усталости в условиях плоского напряженного состояния при кручении с растяжением / М.Н.Регульский, Г.М.Борозенец, А.В.Голубничий, В.В.Касперская // Проблемы тертя та зношування.- НАУ, Киев, 2008, Вып.49, Том 2.- С. 148-158.
12. Newman J.C., Jr. FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program.- NASA-TM-104159, 1992.- P.103.
13. Williams M.I., on the stress distribution at the base of a stationary crack// ASME.J.Appl. Mech.-1957. – 24.- P.111-114.
15. Bashta O. Micro crack propagation behavior in aluminium alloy D-16AT // Авіація у ХХІ столітті. Безпека в авіації та космічні технології: VI Всесвітній конгрес, 25-27 вересня 2012 р. – К., 2012. – С. 1.4.13–1.4.16.

### References

1. Golub V.P. Model' ustalostnogo razrusheniya tonkih izotropnyh plastin s treshhinami pri osevom nagruzhenii / V.P.Golub, A.V.Plashhinskaja // Prikl. mehanika.- 1994.- Tom 30, №7.- S. 520-529.
2. Golub V.P. The theory of long-term fatigue fracture providing for crack initiation and propagation // In: Advances in Fracture Research (ICF9).- 1997.- Vol. 3.- R. 1361-1370.
3. Golub V.P. Fenomenologicheskaya model' rosta ustalostnoj treshchiny v ideal'no-plasticheskikh beskonechnykh plastinkah pri odnoosnom simmetrichnom znakovperemennom nagruzhenii./ Golub V.P., Plashchinskaya A.V. // Prikl. mekhanika.- 2005.- Tom 41 (51), №12.- S. 116-127.
4. Golub V.P. Dokriticheskij rost ustalostnyh treshhin v tonkih plastinah s koncentratorami naprjazhenij / V.P.Golub, A.V.Plashhinskaja // Ocenka i obosnovanie prodlenie resursa jelementov konstrukcij.- Kiev, Izd-vo NANU, 2000.- S. 93-99.
5. Plashhinskaja A.V. Kinetika rosta ustalostnyh treshhin v tonkih plastinah konechnykh razmerov pri asimmetrichnom nagruzhenii // Visnik NTUU KPI Mashinobuduvannja, Київ, 2010.- Vip. 58.- S. 189-194.

6. *Plashhinskaja A.V.* Ustalostnoe razrushenie tonkih plastin s koncentratorami naprjazhenij pri odnoosnom asimmetrichnom nagruzenii // *Visnik NTUU KPI Mashinobuduvannja, Kiiv, 2013.-№2, Vip. 68.- S.76-83.*
7. *Golub V.P.* Ustalostnoe razrushenie tonkih aljuminievych plastin s treshhinami pri odnoosnom asimmetrichnom nagruzenii / *V.P.Golub, A.V.Plashhinskaja, E.S.Kochetkova // Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij sbornik «Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzhenij», 2008.- Vyp.31.- S. 73-81.*
8. *Golub V.P.* Ustalostnaja prochnost' metallicheskih i kompozitnyh materialov pri asimmetrichnom rastjazhenii-szhatii / *V.P.Golub, V.I.Krizhanovskij, A.D.Pogrebnyak, E.S.Kochetkova // Prikl. mehanika.- 2006.- Tom 42 (52), №1.- S. 48-58.*
9. *Neklassicheskie problemy mekhaniki razrusheniya; V 4-h t./ Pod obshch. Red. Guzya A.N. T.4.; kn.1. Razrushenie i ustojchivost' materialov s treshchinami/ Guz' A.N., Dyshel' M.SH., Nazarenko V.M. – K.:Nauk.dumka, 1992, 456s.*
10. *Golub V.P.* Smeshannyj kriterij dlitel'nogo razrusheniya v uslovijah polzuchesti pri ploskom naprjazhenom sostojanii / *V.P.Golub, V.I.Krizhanovskij, A.A.Rusinov // Prikladnaja mehanika. – 2003.- Tom 39, №5. – S.64-75.*
11. *Golub V.P.* Derivation of creep long-term fracture criteria under plane state of stress // *Intern. Journal of Mechanical Sciences 2005; 47:1807.*
12. *Regul'skij M.N.* Kriterij soprotivlenija ustalosti v uslovijah ploskogo naprjazhenogo sostojanija pri kruchenii s rastjazheniem / *M.N.Regul'skij, G.M.Borozenec, A.V.Golubnichij, V.V.Kasperskaja // Problemi tertja ta znoshuvannja.- NAU, Kiev, 2008, Vyp.49, Tom 2.- S. 148-158.*
13. *Newman J.C., Jr.* FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program.- NASA-TM-104159, 1992.- P.103..
14. *Williams M.I.*, on the stress distribution at the base of a stationary crack// *ASME.J.Appl. Mech.-1957. – 24.- P.111-114.*
15. *Bashta O.* Micro crack propagation behavior in aluminium alloy D-16AT // *Aviaciya u XXI stolitti. Bezpeka v aviacii ta kosmichni tekhnologii: VI Vsesvitnij kongres, 25-27 veresnya 2012 r. – K., 2012. – S. 1.4.13–1.4.16.*