ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого
засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон
для довідок:
(061) 228-76-28

Факс: (061) 764-45-46

Вісник
Запорізького національного університету

- **Фізико-математичні науки**

№ 2, 2015

Запоріжжя 2015

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2015. – 272 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 8 від «31» березня 2015 р.)

УДК 539.37

ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

[1]Абросов Ю.Ю., аспірант, [2]Максимюк В.А., д.ф.-м.н., [3]Тарасюк В. С., к.ф.-м.н.

[1,2]Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна
[3]Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна

devlpr@bk.ru[1], desc@inmech.kiev.ua[2] , vastar2004@ukr.net[3]

Привернуто увагу до одновимірної класичної задачі теорії оболонок про деформування довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перетину. Коротко описано історію аналітичних розв'язків проблеми. На числовому прикладі показано, що дана інженерна задача може бути тестом для чисельних методів через наявність мембранного замикання. Продемонстровано характер збіжності чисельних розрахунків до аналітичного розв'язку.
Ключові слова: еліптичний циліндр, напружено-деформований стан, мембранне замикання.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДЛИННОЙ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

[1]Абросов Ю.Ю., аспирант, [2]Максимюк В.А., д.ф.-м.н., [3]Тарасюк В. С., к.ф.-м.н.

[1,2]Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина
[3]Национальный авиационный университет,
просп. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина

devlpr@bk.ru[1], desc@inmech.kiev.ua[2] , vastar2004@ukr.net[3]

Привлечено внимание к одномерной классической задаче теории оболочек о деформирования длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Коротко описана история аналитических решений проблемы. На числовом примере показано, что данная инженерная задача может быть тестом для численных методов из-за наличия мембранного запирания. Продемонстрировано характер сходимости численных расчетов к аналитическому решению.
Ключевые слова: эллиптический цилиндр, напряженно-деформированное состояние, мембранное запирание.

DEFORMATION OF A LONG THIN CYLINDRICAL SHELL WITH ELLIPTICAL CROSS-SECTION

[1]Abrosov Yu.Yu., postgraduate, [2] Maksimyuk V.A., D.Sc. in Physics and Maths,
[3]Tarasyuk V. S., Ph.D. in Physics and Maths

[1,2]S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057, Ukraine
[3]National Aviation University,
Cosmonaut Komarov ave. 1, Kyiv, 03058, Ukraine

devlpr@bk.ru[1], desc@inmech.kiev.ua[2] , vastar2004@ukr.net[3]

Attention to the one-dimensional classical problem in the shell theory on a deformation of a long cylindrical shell with elliptical cross-section is attracted. Design of the long cylindrical shells with elliptical cross-section is of importance from an engineering point of view. In addition, there is another aspect of importance. The fact that the analytical solutions are used as tests for numerical methods. They are especially valuable to the problems of mechanics, for which are inherent the so-called locking effects. Just such is the problem of deformation under internal pressure of the long cylindrical shell with the elliptical cross-section, that is due to a dominance of bending comparing with membrane deformation. This problem can complete a collection of so-called pathological tests.

This one-dimensional problem has century and a half. But the first analytical solutions were too simplistic. For example, the Bresse solution (1866) for the shell under internal pressure predicts of a different sign (rightly so), but equal in the absolute value (this is simplified) bending moments and deflections near the major and minor axes. Correct results, it is obvious the first time (1933), were obtained by Timoshenko. He have created a table of some coefficients which enable to calculate bending moments for a number of values of semi-axis ratios. The procedure for obtaining the coefficients was not presented and has remained unknown.

The computing phenomena of the membrane locking is demonstrated in the variational-difference method based on a mixed functional in which the geometric part of Kirchhoff-Love hypotheses implemented with method of Lagrange multipliers. A slowed and however stable convergence for numerical calculations of the stress-strain state to the analytic solution is shown.

To improve the convergence a mixed functional is proposed, in which the membrane deformation varies additionally. From the point of view of the locking phenomenon the two-dimensional deformation of a cylindrical shell with supported ends to be an easier problem by reducing the bends.
Key words: elliptical cylinder, stress-strain state, membrane locking.

ВСТУП

В сучасній інженерній справі широко застосовуються циліндричні оболонки. В авіаційній техніці та в ракетобудуванні елементи конструкцій можуть мати форму оболонок з некруговими поперечними перетинами, що виявляється вигіднішим від оболонок з круговими поперечними перетинами. У ряді випадків вони виявляються міцнішими, стійкішими і легшими [1]. Некругові поперечні перетини таких конструкцій часто бувають еліптичні або овальні різного типу. У коротких оболонок торці певним чином закріпляються, тому напружено-деформований стан (НДС) у них буде двовимірний. У довгих оболонках НДС у будь-якому поперечному перетині можна вважати однаковим, тому теоретична задача статики буде одновимірною. На перший погляд двовимірні задачі мають бути складнішими від одновимірних. Проте це справедливо для аналітичних методів, а для чисельних залежить від особливостей деформування оболонок та від ефективності методів.

Крім того, що розрахунок довгих циліндричних оболонок еліптичного перетину є актуальним з інженерного погляду, існує ще один аспект актуальності. Річ у тім, що аналітичні розв’язки мають цінність як тести для чисельних методів. Особливо цінними вони є для задач механіки, яким притаманні явища замикання [2]. Саме такою є задача про деформування під внутрішнім тиском довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу, що обумовлено великими згинами за малих розтягів. Ця одновимірна задача має півтора столітню історію [3, с. 326–338]. Проте перші аналітичні розв’язки були надто спрощені. Згаданий розв’язок [3] для оболонки під внутрішнім тиском давав різного знаку (це є правильним), але рівні за абсолютною величиною (це є спрощено) моменти й переміщення в двох перетинах площинами симетрії. Подальшу історію розвитку аналітичних та графічних методів можна знайти в праці [4].

Коректні результати, очевидно вперше (1933), були отримані Тимошенком і опубліковані в першому виданні монографії [5]. Моменти обчислювались за допомогою таблиці деяких коефіцієнтів для ряду значень співвідношень півосей еліпса. Процедура отримання коефіцієнтів не наводилась і залишилась невідомою.

Основна увага в даній праці направлена на точність результатів та збіжність чисельного методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай в декартовій системі координат (x, y, z) рівняння серединної поверхні замкнутої довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перетину (рис.1) має вигляд

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

де a і b – півосі еліпса.

Цю поверхню віднесемо до криволінійної системи координат (s, z, γ), в якій координата γ направлена по нормалі до поверхні, а s – довжина дуги еліпса, що відраховується від точки ($x = 0, y = b$) за годинниковою стрілкою (рис.1). Очевидно, що обидва коефіцієнти першої квадратичної форми в цій системі будуть рівними одиниці $A_s = A_z = 1$, а кривина твірної нульова.

За допомогою оригінального алгоритму чисельної дискретизації плоскої кривої [6] рівняння (1) можна подати в параметричному вигляді

$$x = x(s), \quad y = y(s). \tag{2}$$

Причому форма залежностей (2) може бути як табличною, так і алгоритмічною. Тоді кривина еліпса обчислюватиметься за формулою

$$k = x'y'' - x''y'. \tag{3}$$

Символ «штрих» в (3) і в подальшому позначає диференціювання по координаті s.

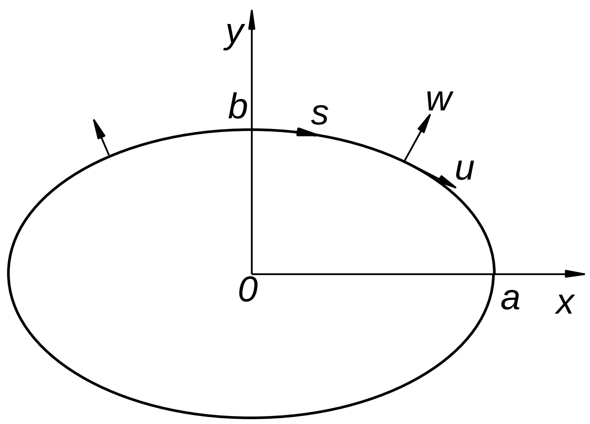

Рис. 1 Поперечний перетин циліндричної оболонки

Нехай під дією сталого і рівномірного внутрішнього тиску p в ізотропній однорідній пружній тонкій оболонці постійної товщини h виникають малі переміщення в поперечному перетині, а вздовж вісі z переміщення відсутнє. Тоді компоненти НДС залежатимуть тільки від координати s. Очевидно, замкнута оболонка намагатиметься набрати близьку до кругової форму, що приведе до великих згинів поблизу точок перетину еліпса площинами симетрії. Для розрахунку НДС за таких умов доцільно скористатися геометрично лінійною теорією тонких оболонок з використанням змішаного функціонала для спрощення реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява [2].

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій серединної поверхні і переміщеннями та кутом повороту визначаються формулами

$$\varepsilon = u' + kw; \; \kappa = \varphi', \tag{4}$$

де u, w – компоненти вектора переміщень вздовж осей (s, γ) відповідно. Для гіпотез Кірхгофа-Лява кут φ в (4) задається [2] за допомогою методу множників Лагранжа з умов рівності нулеві деформації поперечного зсуву

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varphi + w' - ku = 0. \tag{5}$$

Мембранна деформація довільної точки по товщині ($\gamma = \text{const}$) перетину оболонки, коли не враховується зміна метрики по товщині, виражається формулою

$$e = \varepsilon + \gamma\kappa . \tag{6}$$

В довгій оболонці виникають поперечні

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2} e \tag{7}$$

і поздовжні $\sigma_z = \nu\sigma_s$ напруження, де E та ν – модуль пружності та коефіцієнт поперечної деформації ізотропного матеріалу. Напруження (7) замінюються середніми по товщині внутрішніми зусиллям та моментом:

$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2}\varepsilon , \; M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\kappa . \tag{8}$$

Чисельний метод будуватиметься на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала [2]

$$\Pi\left(u, w, \varphi, T_{s\gamma}^{f}\right) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(T\varepsilon + M\kappa - 2pw\right)d\Omega + \iint_{\Omega} T_{s\gamma}^{f}\varepsilon_{s\gamma}d\Omega . \tag{9}$$

Функціонал (9) є сумою енергії деформації оболонки та додаткової умови для реалізації геометричної частини (5) гіпотез Кірхгофа-Лява методом множників ($T_{s\gamma}^{f}$) Лагранжа. Він залежить від чотирьох варійованих функцій: двох переміщень, кута повороту та зусилля $T_{s\gamma}^{f}$, яке має фізичний зміст перерізуючої сили. Переваги такої побудови функціонала викладено в [2].

Слід відмітити використання у (9) позначень верхнім індексом для зусилля, що підкреслює відмінність між зусиллям-формулою й зусиллям-функцією і має певне методологічне значення для запису крайових умов та під час побудови алгоритму.

З умови стаціонарності функціонала $\delta\prod = 0$ випливають природні статичні крайові умови, а головні геометричні умови [2] у випадку симетрії, наприклад, мають вигляд

$$u = 0 , \; \varphi = 0 , \; T_{s\gamma}^{f} = 0 . \tag{10}$$

Для знаходження стаціонарних значень функціонала (9) використовується варіаційно-різницевий метод (ВРМ), який дає систему лінійних алгебраїчних розв'язувальних рівнянь з симетричною матрицею [2].

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

Розраховано НДС оболонки з такими геометричними параметрами: $h = 0{,}01$ м; $a = 1$ м; $b = 0{,}5$ м. Матеріал оболонки – сталь з $E = 210$ Гпа; $\nu = 0{,}3$. Навантаження – $p = 10$ кПа. Внаслідок симетрії задачі (рис. 1) відносно площин $x = 0$ та $y = 0$ розглядалась четвертина області $s \in [0, s_k]$, де s_k =1,211 м – чверть периметра еліпса, який обчислено згаданим алгоритмом [6] чисельної дискретизації кривої (1). Тим же алгоритмом ця дуга еліпса розбивалась на K вузлових точок з рівномірним кроком. Диференціювання в (3) виконувалось чисельно за різницевими формулами.

Практична збіжність результатів розрахунків НДС зі збільшенням кількості вузлів K показана в табл. 1, де наведено безрозмірні угини, напруження на зовнішній (σ^+), серединній (σ^0) і внутрішній (σ^-) поверхні оболонки та моменти в точках $\tilde{s} = s/s_k = 0$ (коротка піввісь) і $\tilde{s} = 1$ (довга піввісь).

В двох останніх рядках табл.. 1 наведено: точні значення напружень $\sigma^0(0) = pb/h$ і $\sigma^0(s_k) = pa/h$; моменти $M(0) = 0{,}629\,pb^2$ і $M(s_k) = -0{,}870\,pb^2$, куди входять табличні числові коефіцієнти з монографії [5] для випадку $b/a = 0{,}5$; обчислені відповідно з (6) і (8) за попередніми величинами (σ^0, M) напруження $\sigma^+ = \sigma^0 + 6M/h^2$ і $\sigma^- = \sigma^0 - 6M/h^2$.

Таблиця 1 – Збіжність результатів розрахунків НДС

K	$\tilde{s}$	w/h	σ^+, МПа	σ^0, МПа	σ^-, МПа	M, Н
641	0	2,20	87,88	0,5794	-86,72	1455
	1	-1,01	-109,4	0,6081	110,6	-1833
1281	0	2,36	93,03	0,5273	-91,97	1541
	1	-1,10	-124,0	0,8922	125,7	-2080
2561	0	2,41	94,47	0,5127	-93,45	1566
	1	-1,12	-128,0	0,9724	130,0	-2150
5121	0	2,42	94,85	0,5088	-93,84	1572
	1	-1,13	-129,1	0,9931	131,1	-2168
10241	0	2,42	94,96	0,5077	-93,94	1574
	1	-1,13	-129,3	0,9981	131,3	-2171
[5]	0	-	94,85	0,5	-93,85	1572,5
	1	-	-129,5	1,0	131,5	-2175

Результати розрахунків в табл. 1 демонструють із згущенням сітки сповільнену, але стійку збіжність розрахованих ВРМ компонент НДС до аналітичного розв’язку [5]. Збіг у двох значущих цифрах максимальних величин угинів, напружень чи моментів досягається вже при K=2561, а збіг мембранних напружень σ^0 в серединній поверхні – дещо пізніше при K=5121. При $K < 321$ настільки проявляється завищена фіктивна жорсткість оболонки, що в обчислених моментах біля більшої півосі міняється знак. Такі негативні обчислювальні ефекти обумовлені великими згинами за малих розтягів і називаються мембраннім замиканням або виродженням [2].

ВИСНОВКИ

Продемонстровано обчислювальне явище мембранного замикання у ВРМ на основі змішаного функціонала, в якому геометрична частина гіпотез Кірхгофа-Лява реалізована методом множників Лагранжа. Показано сповільнену, але стійку збіжність чисельних розрахунків НДС до аналітичного розв’язку. Очевидно, для покращення збіжності доцільно використати змішані функціонали, в яких додатково варіюється мембранна деформація. З погляду явищ замикання двовимірне деформування циліндричної оболонки з закріпленими торцями буде простішою задачею за рахунок зменшення згинів через підкріплюючу дію торців. Дана задача може доповнити колекцію так званих патологічних тестів [7].

ЛІТЕРАТУРА

1. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237–274.

2. Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 6. – P. 613 – 687.

3. Bresse J. A. C. H. Cours de mécanique appliquée. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions. – Deuxième Édition.– Paris: Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.

4. Holland M. Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function // J. Mech. Engng Sci. – 1976. – 18, N 5. – P. 245–253.
5. Timoshenko S. Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems. – 2nd Ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
6. Chernyshenko I.S., Maksimyuk V.A. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials // Int. Appl. Mech.–2000. – 36, N 1 .– P. 90–97.
7. Mallikarjuna Rao K., Shrinivasa U. A set of pathological tests to validate new finite elements // Sadhana.– 2001.– 26.–P. 549 – 590.

REFERENCES

1. Soldatos, K.P. (1999) “Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey”, *Appl. Mech. Rev*. vol. 52, no 8, pp. 237–274.
2. Maximyuk, V.A., Storozhuk, E.A. and Chernyshenko, I.S. (2012) “Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review)”, *Int. Appl. Mech*. Vol. 48, no 6, pp. 613 – 687.
3. Bresse, J.A.C.H. (1866), *Cours de mécanique appliquée.* Première partie. *Résistance des matériaux et stabilité des constructions, Deuxième Édition*, Gauthier-Villars, Paris, France.
4. Holland, M. (1976) “Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function”, *J. Mech. Engng Sci*. vol. 18, no 5, pp. 245–253.
5. Timoshenko, S. (1941) *Strength of materials.* Part II, *Advanced theory and problems*, *2nd Ed*, D. Van Nostrand Company, New York, USA.
6. Chernyshenko, I.S. and Maksimyuk, V.A. (2000) “On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials”, *Int. Appl. Mech*. vol. 36, no 1, pp. 90–97.
7. Mallikarjuna Rao, K., Shrinivasa, U. (2001) “A set of pathological tests to validate new finite elements”, *Sadhana*. vol. 26, pp. 549–590.