Лекція 13: Математичні моделі великих систем. Моделювання дискретних марковських процесів

1. Математичні моделі великих систем.
2. Марковський випадковий процес.
3. Моделювання випадкових процесів.

1. Математичні моделі великих систем

Існує чимало математичних методів дослідження великих систем. Проте великі системи мають ряд особливостей, які ускладнюють або навіть роблять неможливими застосування існуючих методів дослідження.

Перша особливість - велика розмірність досліджуваних систем. Кожна з цих систем і вся сукупність проблем в цілому описується великим числом різних показників, що дозволяє говорити про них як про великі системи.

Другою особливістю досліджуваних систем є те, що системи не допускають значного зменшення числа показників без втрати якісної визначеності системи.

Одне із завдань дослідження великих систем полягає в побудові наближених залежностей між різними показниками, що описують конкретну систему, в цілях прогнозування їх стану, імітації різних варіантів розвитку системи, підтримки ухвалення управлінських рішень і так далі.

Часто існує функціональний зв'язок, занадто складний для розуміння або опису в простих термінах. У такому разі ми можемо прагнути підібрати апроксимацію цього функціонального зв'язку за допомогою якої-небудь простої математичної функції (скажімо, полінома), яка включає відповідні змінні, і може згладжувати або апроксимувати "істинну" функцію в певній обмеженій області зміни цих змінних.

2. Марковський випадковий процес

Нехай є деяка фізична система *S*, стан якої змінюється з плином часу (під системою *S* може розумітися що завгодно: технічний пристрій, ремонтна майстерня, обчислювальна машина, залізничний вузол і т. д.) Якщо стан системи *S* змінюється в часі випадковим, заздалегідь непередбаченим чином, ми говоримо, що в системі *S* протікає випадковий процес.

Випадковий процес, що протікає в системі S, називається марковським процесом (чи процесом без післядії), якщо він має наступну властивість: для кожного моменту часу t_0 ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить від її стану в теперішньому (при $t > t_0$) і не залежить від того, коли і яким чином система перейшла у цей стан (тобто як розвивався процес у минулому).

Випадковий процес називається процесом з *дискретними станами*, якщо можливі стани системи $S_1, S_2, S_3...$ можна перерахувати (перенумеровані) одне за одним, а сам процес полягає у тому, що час від часу система *S* стрибком (миттєво) перескакує з одного стану в інший.

При розгляді марковських ланцюгів часто буває зручно користуватись графом станів, на якому у стрілок проставлені відповідні перехідні ймовірності.

На практиці значно частіше зустрічаються ситуації, коли переходи системи зі стану в стан відбуваються не у фіксовані, а у випадкові моменти часу, які заздалегідь вказати неможливо - перехід може здійснитися, взагалі в будь-який момент. Наприклад, вихід з ладу (відмова) будь-якого елемента апаратури може відбутися в будь-який момент часу; закінчення ремонту (відновлення) цього елемента також може статися у заздалегідь не зафіксований момент і т.д.

Для опису таких процесів у ряді випадків може бути з успіхом застосована схема марковського випадкового процесу з дискретними станами і неперервним часом, який будемо називати *неперервним ланцюгом Маркова*.

Якщо всі щільності ймовірностей переходу λ_{ij} не залежать від t (тобто від того, якої миті починається елементарна ділянка Δt), марковський процес називається *однорідним*, якщо ці щільності представляють собою якісь функції часу $\lambda_{ij}(t)$, процес називається *неоднорідним*.

Знаючи розмічений граф станів, можна визначити ймовірності станів: $p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)$ як функції часу. А саме, ці ймовірності задовольняють певного виду диференціальні рівняння, так звані рівняння Колмогорова.

3. Моделювання випадкових процесів

Дискретний ланцюг Маркова з дискретним часом. Є система, яка може знаходитися в декількох станах № 1, 2, ..., *n*. В деякі дискретні моменти часу $t_1, t_2, \ldots$ ця система може змінювати свій стан.

Основна якість ланцюга Маркова: стан, у якому система опиниться в наступний момент часу залежить тільки від її поточного стану і не залежить від усіх попередніх.

Перехід з стану в стан визначається матрицею (ймовірностей) переходу $P = \left| p_{ij} \right\|$ (де $p_{ij} = p\left\{ i \to j \right\}$), яка вважається відомою.

Для досить довго функціонуючої системи визначається фінальна ймовірність $\pi_i = p\left\{ i \right\}$ - імовірність того, що в поточний момент часу система перебуває в стані *i*. Фінальні імовірності задовольняють умовам

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i p_{ij} = \pi_{j,} \qquad j = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$

π_i можна знайти як рішення цієї системи рівнянь.

Дискретний ланцюг Маркова з неперервним часом. Переходи з одного стану в інший здійснюється в довільні моменти неперервного часу.

Такий ланцюг характеризується величинами q_{ij}, які називаються інтенсивностями переходу.

Розглянемо два моменти часу t і $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} p\left\{ i \to j \middle| \Delta t \right\} &= q_{ij} \cdot \Delta t + o\left(\Delta t \right) \text{ для } j \neq i \\ p\left\{ i \to j \middle| \Delta t \right\} &= 1 + q_{ij} \cdot \Delta t + o\left(\Delta t \right) \end{aligned}.$$

Тут $q_{ij} \geq 0$ для $j \neq i$ и $q_{ij} = \sum\limits_{j \neq i} q_{ij}$.

Фінальні імовірності визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i p_{ij} = 0, \qquad j = \overline{1,n-1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$