УДК 681.5

В.К. Антонов, канд. техн. наук
О.М. Глазок

МЕТОД СИНТЕЗУ НЕЛІНІЙНИХ ЯКІСНИХ РЕГУЛЯТОРІВ

Національний авіаційний університет, compconsys@nau.edu.ua

Запропоновано новий метод синтезу регуляторів для нелінійних динамічних об'єктів. Розв'язано задачу синтезу модифікованим методом аналітичного конструювання на основі квадратичного функціонала якості та послідовного врахування нелінійних членів у моделі об'єкта і відповідного розширення функції Беллмана. Для її додаткових членів уведено показники затухання, що визначають швидкодію.

Вступ

Побудова сучасних динамічних керованих об'єктів поєднує етапи безпосереднього проектування об'єкта і системи керування. Керування має вичерпати всі ресурси об'єкта і забезпечити максимально можливу якість його функціонування, а також при цьому надати проектувальнику можливість перенесення з об'єкта на систему керування максимальної кількості функцій. При цьому поряд з вимогою стійкості під час проектування систем керування необхідно враховувати і вимоги до якості [1].

Для широкого класу динамічних систем характерною ознакою є їх функціонування у великому експлуатаційному діапазоні вихідних координат, де не виконуються умови можливості лінеаризації. Такі режими руху, як правило, не є режимами стабілізації у звичайному розумінні, і звести задачу обчислення траєкторії до задач стабілізації неможливо. Але і задачі стабілізації на цих траєкторіях мають ураховувати великі відхилення керувань і вихідних координат від програмних значень, що відбувається за умови дії великих збурень. У багатьох випадках спроби побудувати нелінійні регулятори не продемонстрували значних переваг перед лінійними. Тому актуальною є розробка методів синтезу регуляторів для нелінійних об'єктів, зокрема з поліноміальними правими частинами, які забезпечують задану якість перехідних процесів. Ряд підходів до розв'язання цієї задачі було запропоновано в роботах [1; 2].

Постановка задачі

Розглянемо синтез регулятора для динамічної системи, що описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} + \mathbf{F}(\mathbf{X}), \tag{1}$$

в якій останній доданок відображає нелінійності об'єкта. Нелінійну частину $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ системи (1) можна зобразити у вигляді ступеневого ряду:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(2)} + \mathbf{F}_{(3)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}_i(\mathbf{X}) \tag{2}$$

по відповідним ступеням компонентів вектора стану $\mathbf{X}$. Необхідно обрати таке керування $\mathbf{U}$, щоб досягти мінімуму функціонала якості:

$$I = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{w}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))dt. \tag{3}$$

Функціонал якості (3) задамо як

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{w}(\mathbf{X}, \mathbf{U})dt =$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} (\mathrm{w}_1(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) + \mathrm{w}_2(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)))dt =$$

$$= \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{PX} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{RU} + c_0\mathrm{V}_0 + c_1\mathrm{V}_1 + \ldots + c_k\mathrm{V}_k)dt, \tag{4}$$

де c_0, c_1, c_k – деякі коефіцієнти; $\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_k$ – компоненти розкладу функції Ляпунова $\mathrm{V}(\mathbf{X})$ у ступеневий ряд по компонентах p-вимірного вектора $\mathbf{X}$:

$$\mathrm{V}(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{V}_i(\mathbf{X}); \tag{5}$$

$$\mathrm{V}_m = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p} a_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_p^{\nu_p}; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \nu_i = m + 2.$$

Зокрема, при $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = 0$ маємо

$$\mathrm{w}_2(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = c_0\mathrm{V}_0 + c_1\mathrm{V}_1 + \ldots + c_k\mathrm{V}_k = 0.$$

З формули (4) отримаємо звичайно вживаний квадратичний функціонал якості з підінтегральним виразом

$$\mathrm{w}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \mathrm{w}_1(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{PX} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{RU}. \tag{7}$$

Спосіб розв'язання задачі

Для розв'язання конкретної задачі щодо керування об'єктом, описаним системою (1), коефіцієнти якої відомі, будемо знаходити заздалегідь невідому функцію Ляпунова. Для цього необхідно визначити коефіцієнти $a_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p}$ її розкладу в ступеневий ряд (5), (6).

Синтез лінійної частини

Спочатку розглянемо лінеаризовану систему (1) і проведемо для неї синтез лінійного регулятора. Для лінеаризованої системи

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \qquad (8)$$

функціонал якості (4) матиме вигляд

$$I = \int_0^\infty (\mathbf{X}^T\mathbf{PX} + \mathbf{U}^T\mathbf{RU} + c_0\mathrm{V}_0)dt\,. \qquad (9)$$

Записавши для системи рівняння Беллмана

$$\min_{u\in\Omega(u)} \{\mathbf{X}^T\mathbf{PX} + \mathbf{U}^T\mathbf{RU} + c_0\mathrm{V}_0 + \dot{\mathrm{V}}_0\} = 0\,,$$

і враховуючи, що, оскільки функція Ляпунова є функцією лише **X**, для системи (8) правдиве співвідношення

$$\dot{\mathrm{V}}_0 = \frac{\partial \mathrm{V}_0(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{AX} + \mathbf{BU})\,,$$

можна знайти оптимальне керування для лінеаризованої системи:

$$\mathbf{U}_{opt.lin} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\delta}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathbf{X}}\right).$$

Функцію V_0 знайдемо як

$$\mathrm{V}_0 = \mathbf{X}^T\mathbf{Q}_0\mathbf{X}\,,$$

де $\mathbf{Q}_0$ – симетрична, позитивно визначена матриця, що є коренем матричного рівняння Ріккаті

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^{\delta}\mathbf{Q}_0 - \frac{1}{2}(c_0\mathbf{E} + 2\mathbf{A})^T\mathbf{Q}_0 -$$
$$-\frac{1}{2}\mathbf{Q}_0(c_0\mathbf{E} + 2\mathbf{A}) - \mathbf{P} = 0\,. \qquad (10)$$

Декілька методів числового розв'язання породжених даною задачею матричних рівнянь (10) було запропоновано в роботах [2; 3]. Як правило, такі методи базуються на процедурах виділення власних векторів або проекторів блочної матриці, складеної з матричних коефіцієнтів рівняння, що розв'язується [2; 3; 4]. Знайшовши $\mathbf{Q}_0$, зможемо визначити $\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathbf{X}}$, після чого отримаємо закон оптимального керування для лінеаризованої системи:

$$\mathbf{U}_{opt.lin}(\mathbf{X}) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\delta}\mathbf{Q}_0\mathbf{X}\,.$$

На цьому перший крок синтезу закінчено.

Синтез нелінійної частини

Тепер перейдемо до синтезу нелінійної частини регулятора. Для цього використаємо метод зворушень. Почнемо послідовно вводити до системи рівнянь (1), (8), що описують об'єкт керування, нелінійні члени з ряду (2).

На другому кроці візьмемо

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{(2)}(\mathbf{X})\,,$$

на третьому кроці синтезу:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{(2)}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{(3)}(\mathbf{X})$$

і т. д. На m-му кроці будемо шукати функцію Ляпунова у вигляді:

$$\mathrm{V}(\mathbf{X}) = \mathrm{V}_0(\mathbf{X}) + \dots + \mathrm{V}_{m-2}(\mathbf{X}) + \mathrm{V}_{m-1}(\mathbf{X})$$

у припущенні, що "попередні" частини розкладу функції Ляпунова $\mathrm{V}_0, \dots, \mathrm{V}_{m-2}$ уже було знайдено раніше в явному вигляді.

Записавши рівняння Беллмана для кроків $1 \dots m$, $m \geq 2$, для m-го кроку отримаємо таке співвідношення :

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial \mathbf{X}} -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \mathbf{B}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathbf{X}} + c_{m-1}\mathrm{V}_{m-1} + \qquad (11)$$
$$+\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \mathbf{AX} + \left(\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \mathbf{F}_{(m)} = 0\,.$$

Маючи набір таких співвідношень для m=2, 3, знаходимо з них $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ відповідно.

Кожен із доданків (11) є скалярним багаточленом ступеня m+1 за компонентами вектора стану **X**.

Для того, щоб зі співвідношення (11), отриманого при деякому m, знайти функцію $\mathrm{V}_{m-1}(\mathbf{X})$, необхідно записати ці багаточлени в явному вигляді. Оскільки функція $\mathrm{V}_{m-1}(\mathbf{X})$ поки що невідома, запишемо її у вигляді форми (m+1)-го ступеня за компонентами вектора **X**, тобто як суму всіх можливих одночленів (m+1)-го ступеня з невідомими коефіцієнтами. Отримавши таким способом вираз для $\mathrm{V}_{m-1}(\mathbf{X})$ у вигляді багаточлена, можемо знайти вирази для частинних похідних $\frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial x_n}$, що є компонентами вектора $\frac{\partial \mathrm{V}_{m-1}}{\partial \mathbf{X}}$, у вигляді багаточленів, які містять введені невідомі коефіцієнти.

Підставляючи знайдені вирази до співвідношення (11), отримаємо скалярне рівняння, ліва частина якого містить суму одночленів із невідомими коефіцієнтами та різними комбінаціями ступенів, в яких змінні стану системи входять до складу цих доданків.

Зі співвідношення (11) необхідно отримати систему лінійних алгебричних рівнянь щодо введених на даному кроці синтезу невідомих коефіцієнтів і, розв'язавши її, знайти ці коефіцієнти і функцію $\mathrm{V}_{m-1}(\mathbf{X})$.

Далі, записавши згідно з рівнянням (5), вираз для

$$\mathrm{V}(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{V}_i(\mathbf{X})$$

в явному вигляді, отримаємо формулу оптимального керування:

$$\mathbf{U}_{\text{opt}} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathbf{X}}\right).$$

Кількість коефіцієнтів, які потрібно знаходити при реалізації такого методу обчислень, суттєво залежить від порядку системи "об'єкт – регулятор" та порядку нелінійності, що розглядається.

Загальну кількість невідомих коефіцієнтів можна визначити з розгляду m-го доданку розкладу в ряд за компонентами вектора $\mathbf{X}$ функції Ляпунова (5) у виразі (6), який запишемо у такому вигляді:

$$\mathrm{V}_m = \sum_{i_1=0}^{m+2} \sum_{i_2=0}^{m+2-i_1} \ldots \sum_{i_1=0}^{m+2-i_1-\ldots-i_{p-1}} z_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}; \qquad (12)$$

$$z_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}}\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{p-1}^{i_{p-1}} x_p^{m+2-i_1-\ldots-i_{p-1}};$$

$$m = 0 \ldots k.$$

Формула (12) є одним із кількох можливих шляхів комбінаторної репрезентації структури доданку V_m (6).

Проте за алгоритмом побудови наведений у виразі (12) запис відображає найбільш практично зручний з усіх, що були випробувані, підхід до організації достатньо складних за своєю структурою обчислень невідомих коефіцієнтів функції Ляпунова.

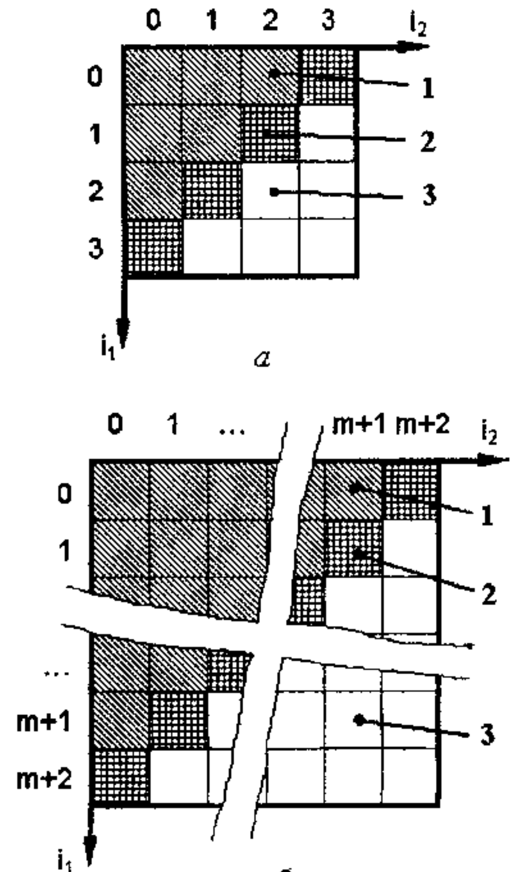
Згідно з принципом поділу функції Ляпунова на доданки розкладу (5), (6) сума ступенів, до яких віднесено компоненти вектора $\mathbf{X}$, для всіх компонентів, що увійшли до доданку (6), V_m дорівнює точно m+2.

Послідовно визначаючи у формулі (12) ступені компонентів вектора $\mathbf{X}$, починаючи з першого, дедалі більше обмежуємо свободу подальшого вибору ступенів компонентів x_i, що залишилися. Після того, як буде визначено ступені компонентів $x_1 \ldots x_{p-1}$ (усіх компонентів вектора $\mathbf{X}$, крім останнього), повністю вичерпаємо надану свободу вибору, що й відображає показник ступеня змінної x_p у формулі (12). Записавши таким способом один з унікальних доданків (12), маємо пов'язаний із ним невідомий множник, що є однією з величин, які необхідно знайти для визначення m-го доданку функції Ляпунова.

На рисунку подано приклади структури множини невідомих коефіцієнтів у випадку тривимірного вектора при $p = 3$:

$$\mathbf{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^{\mathrm{T}}.$$

Загальна кількість можливих доданків, що містять ступені змінних x_1 та x_2 від 0 до m+2, дорівнює $(m+3)^2$. Але до виразу V_m, сумарний ступінь кожного з доданків якого дорівнює (за визначенням) m+2, увійде лише частина з них. Клітини, що відповідають цим доданкам, показано на рисунку штриховкою. Серед доданків, що увійдуть до V_m, будуть такі, для яких $i_1 + i_2 = m + 2$ (відповідні клітини позначено на рисунку цифрами 2) і такі, для яких $i_1 + i_2 < m + 2$ (ці клітини позначено на рисунку цифрами 1).



Структура множини невідомих коефіцієнтів у виразі (12) для задачі синтезу регулятора при p=3:

а – для V_1; *б* – для V_m при довільному m;
1 – комбінації ступенів змінних в доданках суми V_m, що містять змінну x_3; *2* – комбінації ступенів змінних в доданках суми, які не містять x_3; *3* – комбінації ступенів, що не входять до суми при даному m

Оскільки сумарний ступінь цих доданків також дорівнює m+2, в їхньому складі присутній множник x_3 у ступені $(m+2)-(i_1+i_2)$. Як видно з рисунку, кількість компонентів з $i_1+i_2=m+2$ дорівнює N_1=m+3, а кількість компонентів з $i_1+i_2<m+2$ –

$$N_2=\frac{(m+3)^2-(m+3)}{2}=\frac{(m+3)((m+3)-1)}{2}=$$
$$=\frac{(m+3)(m+2)}{2}.$$

Загальна ж кількість доданків у виразі (6) складе

$$N_1+N_2=\frac{(m+3)(m+4)}{2}.$$

Такою ж буде і кількість невідомих коефіцієнтів, які необхідно буде знайти на m-му кроці синтезу.

Наприклад, для синтезу частини регулятора другого порядку необхідно при знаходженні V_1 обчислити 10 коефіцієнтів a_{i_1,i_2}, для синтезу частини регулятора третього порядку – 15 коефіцієнтів і т. д.

Висновки

1. При підвищенні порядку закону керування, для якого синтезується регулятор, значно зростає обсяг обчислень для знаходження коефіцієнтів регулятора, а також дещо зростає і складність реалізації такого регулятора. Проте його реалізація може значно поліпшити використання діапазону можливостей органів керування об'єктом.

2. Зважаючи на те, що на оптимальній траєкторії для функції Ляпунова можемо записати

$$\mathrm{V}(\mathbf{X})=\int_0^\infty(\mathbf{X}^\mathrm{T}\mathbf{PX}+\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{PU}+c_0\mathrm{V}_0+\ldots+c_k\mathrm{V}_k)dt,$$

або в диференціальній формі:

$$\dot{\mathrm{V}}=\mathrm{w}_1(\mathbf{X},\mathbf{U})+c_0\mathrm{V}_0+\ldots+c_k\mathrm{V}_k=$$
$$=\mathbf{X}^\mathrm{T}\mathbf{PX}+\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{RU}+c_0\mathrm{V}_0+\ldots+c_k\mathrm{V}_k, \quad (13)$$

наведене визначення функціоналу призведе до того, що під час руху об'єкта, описаного системою (1), поведінка $\mathrm{V}(\mathbf{X})$ як функції, що задовольняє диференціальному рівнянню (13), матиме складену природу, а саме: $\mathrm{V}(\mathbf{X})$ матиме, по-перше, власне "затухання", швидкість якого визначається коефіцієнтами $c_0...c_k$ для кожної моди окремо, і, по-друге, "вимушений рух" під впливом $\mathrm{w}_1(\mathbf{X},\mathbf{U})$ (7), яке щодо $\mathrm{V}(\mathbf{X})$ буде виконувати роль керування. Отже, вибором коефіцієнтів $c_0...c_k$ можемо впливати на параметри руху.

3. Характер цього впливу потребує дослідження шляхом числового моделювання рухів системи. Під час синтезування було зроблено ряд припущень, вплив яких неможливо врахувати аналітично. Особливо необхідно провести дослідження перехідних процесів, при яких об'єкт має такі початкові відхилення від точки рівноваги, які не можна вважати малими.

Список літератури

1. *Антонов В.К.* Аналитическое конструирование качественных регуляторов //Проблемы информатизации и управления. – К.: КМУГА, 1997. – С. 77–80.

2. *Антонов В.К.* Методы синтеза регуляторов с заданным качеством переходных процессов. – К.: КМУГА, 1995. – 120 с.

3. *Валеев К.Г., Финин Г.С.* Построение функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1981. – 412 с.

4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Стаття надійшла до редакції 01.04.03.

В.К. Антонов, А.М. Глазок

Метод синтеза нелинейных качественных регуляторов

Предложен новый метод синтеза регуляторов для нелинейных динамических объектов. Задача синтеза решена модифицированным методом аналитического конструирования на основе квадратичного функционала качества, а также последовательного учета нелинейных членов в модели объекта и соответствующего расширения функции Беллмана. Для ее дополнительных членов введены показатели затухания, которые определяют быстродействие.

V.K. Antonov, O.M. Glazok

Method of synthesis of nonlinear qualitative regulators

The new method of synthesis of regulators for nonlinear dynamic objects is offered. The task of synthesis is solved by the modified method of analytical constructing on the basis of a square-law functional of quality. The method is constructed on the basis of the sequential taking into account nonlinear terms in the object model and appropriate extension of the Bellman function. For its additional terms the damping factors are entered which determine operation speed.