

## ДИСКРЕТИЗОВАНИЙ ОПИС ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ НА ВИКРИВЛЕНІЙ РОЗРАХУНКОВІЙ СІТЦІ

Національний авіаційний університет

[fksnau@meta.ua](mailto:fksnau@meta.ua)

*Запропоновано дискретизований опис гідродинамічної задачі обтікання тіла на основі просторової розрахункової сітки, регулярної у напрямку руху потоку і викривленої за поперечними координатами сітки. Розглянуто алгоритм побудови такої сітки. Розглянуто необхідні умови визначеності системи алгебраїчних рівнянь, породженої різницевою схемою при описі гідродинамічної задачі*

**Ключові слова:** розрахункова сітка, викривлення, різницева схема, система рівнянь

### **Вступ**

В практиці проектних організацій широко використовуються пакети прикладних програм, що виконують гідродинамічний розрахунок тих або інших інженерних систем. Програмне забезпечення цього класу нині активно розвивається. У сучасних програмних пакетах професійного рівня, призначених для математичного моделювання ламінарних і турбулентних течій, реалізовані математичні методи, що базуються на припущенні про прийнятність рівнянь Нав'є-Стокса для інтерпретації течій і прогнозу їх миттєвих характеристик. Розв'язання гідродинамічних задач зводиться при цьому до чисельного розв'язання відповідних систем диференціальних рівнянь. Для цього неперервні диференціальні рівняння дискретизують на введеній у досліджуваній області розрахунковій сітці.

### **Постановка проблеми**

Рівняння Нав'є-Стокса мають вигляд систем диференціальних рівнянь другого порядку, що містять кілька невідомих функцій. У відповідності з їх фізичним змістом, вони формулюються у декартових координатах. Дискретизація з метою подальшого застосування одного з чисельних методів розв'язання також виконується у термінах декартових координат [1]. Результатом є подання задачі у дискретизованій формі різницевої рівнянь на вузлах регулярної обчислювальної сітки з прямокутними елементами.

Однак потреби предметної області, до задач якої застосовують методи обчислювальної динаміки рідин та газів, включають розв'язання задач для площинних та просторових областей складних геометричних форм. Постає проблема узгодження обчислювальної сітки з складною геометрією тіл задач.

### **Аналіз досліджень і публікацій**

Протягом останніх років у ряді прикладних дисциплін була розроблена велика кількість алгоритмів побудови сіток різного призначення. Однак більшість з цих алгоритмів не придатна для застосування при розв'язанні гідродинамічних задач, оскільки предметна область, на яку вони орієнтовані, не потребує узгодження сітки з течією середовища.

З метою розв'язання вказаної проблеми було запропоновано ряд алгоритмів та математичних методів, які можна поділити на групи:

1) Побудова сіток, регулярних за структурою зв'язків, але викривлених у просторовому аспекті, тобто сіток, ізоморфних регулярній сітці з прямокутними елементами. Найчастіше ця задача розв'язується шляхом викривлення початкової регулярної сітки, побудованої у ортогональному базисі. При цьому застосовуються алгебраїчні функції розтягнення, конформні відображення, інтерполяція [1, 2], методи перетворення, засновані на розв'язанні допоміжних диференціальних рівнянь [3], математичні побудови на

основі кривих Безье [4] або інших функцій.

2) Побудова сіток з порушенням регулярності структури з погляду розмірів або форм виділених сіткою скінченних елементів [5, 6]. Для побудови використовуються різноманітні алгоритми, що реалізують триангуляцію Делоне [6, 7].

3) Як окремий, третій шлях, можна також вказати зменшення кроку регулярної сітки без будь-яких змін її геометрії.

Спільною проблемою усіх трьох названих шляхів є помітне зниження обчислювальної ефективності. Для третього підходу (зменшення кроку регулярної сітки без змін її геометрії) це зниження пов'язане з великою надмірністю обчислень у просторових областях, які такого зменшення не потребують. Перший і другий підходи вимагають значних обсягів обчислень для переходу у записі різницевої схем від ортогональної до не ортогональної структури сітки. При цьому також можуть виникати втрати точності. Так, наприклад, у методі переходу, запропонованому у статті [8], на кожному кроці обчислення необхідно виконувати інтерполяцію, коефіцієнти якої можуть бути отримані в результаті розв'язання систем лінійних рівнянь, порядок яких залежить від алгоритму вибору сусідніх точок. Як результат невдалого вибору або розташування точок, існує можливість, що цей етап розрахунку може приводити до внесення похибки у результат.

### Ціль

Ціль статті полягає у тому, щоб запропонувати алгоритм дискретизації опису гідродинамічної задачі, що включає алгоритм побудови викривленої розрахункової сітки для розв'язання задачі гідродинаміки, узгодженої з формою тіла, обтікання якого вивчається, та розрахункову схему на ній. Запропонований алгоритм повинен бути порівняно простим, що надало б йому перевагу перед існуючими з погляду обчислювальних витрат при підготовці опису та розв'язанні задачі.

### Основна частина

Запропонований алгоритм побудови двовимірної викривленої сітки складається з наступних кроків:

1. Обираємо декартову систему координат. Вісь  $Ox$  цієї системи координат спрямовуємо у напрямку руху рідини. Вісь  $Oy$  спрямовуємо перпендикулярно до осі  $Ox$ . (Рис. 1а.)

2. Будуємо прямокутник, сторони якого розташовані паралельно до осей обраної системи координат, і який охоплює досліджуване тверде тіло. (Прямокутник  $ABHG$  на рис. 1, а.)

3. Обираємо постійний крок сітки у напрямку осі  $Ox$ . (Рис. 1б.) Вибір кроку виконується з урахуванням точності отриманого розв'язку, яка пов'язана з параметрами сітки. Ділимо відрізок  $AB$  на таку кількість рівних частин, щоб кожна з них мала довжину не більшу заданої.

4. Обираємо величину максимального кроку сітки у напрямку осі  $Oy$  (на основі тих же вимог щодо точності, що і в п.3). Фактичний крок сітки у напрямку осі  $Oy$  змінний і адаптований до конфігурації поверхні.

5. З двох відрізків  $AC$  і  $BF$  визначаємо більший. (На рис. 1а-в, більшим є відрізок  $BF$ .) Цей відрізок поділяється на таку кількість рівних частин, щоб довжина кожної частини була не більша за крок, обраний в п. 4. Решту вертикальних відрізків сітки, охоплених криволінійним контуром  $ABFDG$  (рис. 1б), поділяємо на таку ж кількість частин. В точках поділу встановлюємо вузли сітки.

6. Аналогічно до п. 5 виконуємо поділ вертикальних відрізків сітки, що охоплені контуром  $CEFHG$ . (Результат зображено на рис. 1в.)

7. Продовжуємо сітку за межі прямокутника  $ABHG$ : вліво, повторюючи розбиття відрізка  $ACG$  через обраний фіксований крок по осі  $Ox$ .

8. Продовжуємо сітку за межі прямокутника вправо, повторюючи розбиття відрізка  $BFH$  через обраний фіксований крок по осі  $Ox$ .

9. У разі необхідності продовжуємо сітку вгору від прямої  $AB$  (повторюючи

розбиття, утворене на прямій  $AB$ ) та вниз від прямої  $GH$  (повторюючи розбиття, утворене на прямій  $GH$ ).

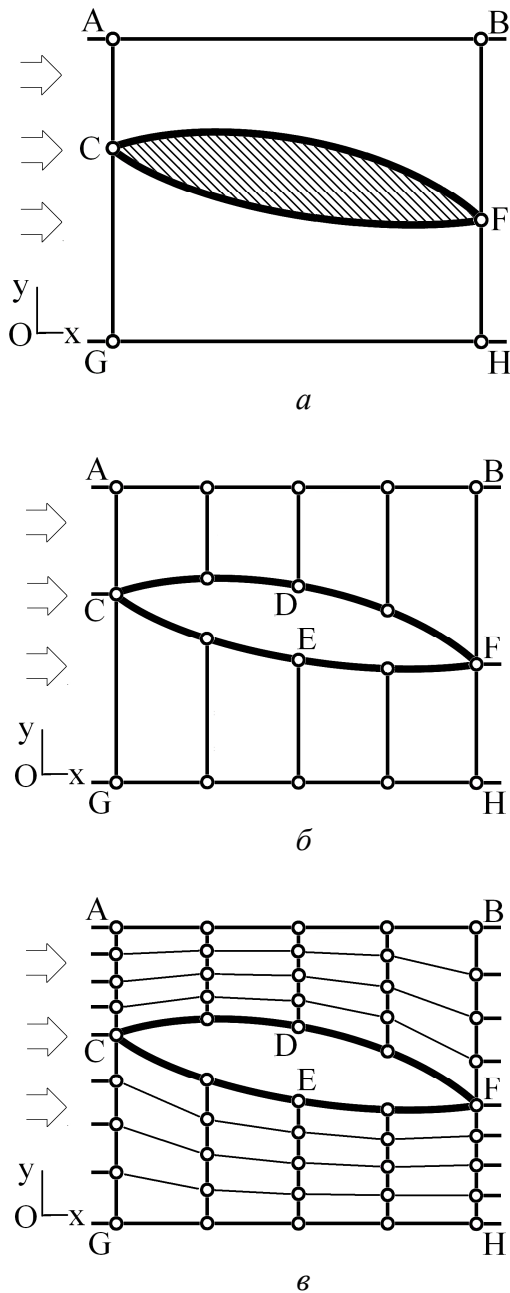


Рис. 1. Проміжні результати виконання алгоритму побудови викривленої розрахункової сітки для чисельного розв'язання гідродинамічної задачі.  $a$  – кроки 1-2;  $b$  – крок 4;  $c$  – крок 6.

Крок по осі  $Oy$  при цьому може бути обраний будь-яким, з урахуванням згаданих вище вимог щодо точності отриманого розв'язку.

Розглянемо побудову різницевої схеми для рівнянь Нав'є-Стокса на викривленій розрахунковій сітці. Для прикладу розглянемо двовимірну стаціонарну гідродинамічну задачу, описану рівняннями Нав'є-Стокса наступної форми:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(U_x U_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U_x U_y) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(U_x U_y) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y U_y) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

де  $U_x = U_x(x, y)$  та  $U_y = U_y(x, y)$  – компоненти вектора швидкості за координатами  $x$  та  $y$  відповідно;  $P = P(x, y)$  – тиск;  $\nu$  – в'язкість (густина) рідини;  $\rho$  – щільність рідини.

Для компактності запису введемо позначення

$$U_x(x, y) = f(x, y); \quad U_y(x, y) = g(x, y). \quad (4)$$

З урахуванням позначень (4) запишемо різницеву схему для системи (1)–(3) для внутрішнього фрагменту викривленої розрахункової сітки (рис. 2):

$$\begin{aligned} & 2f_{i,j} \frac{f_r - f_{i,j}}{\Delta_x} + g_{i,j} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta_y[j]} + \\ & + f_{i,j} \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{\Delta_y[j]} + \frac{1}{\rho} \frac{P_r - P_{i,j}}{\Delta_x} - \\ & - \nu \frac{f_r - 2f_{i,j} + f_l}{\Delta_x^2} - \nu \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta_y[j])^2} = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$g_{i,j} \frac{f_r - f_{i,j}}{\Delta_x} + f_{i,j} \frac{g_r - g_{i,j}}{\Delta_x} + 2g_{i,j} \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{\Delta_y[j]} + \frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta_y[j]} - v \frac{g_r - 2g_{i,j} + g_l}{\Delta_x^2} - v \frac{g_{i+1,j} - 2g_{i,j} + g_{i-1,j}}{(\Delta_y[j])^2} = 0 ; \quad (6)$$

$$\frac{f_r - f_{i,j}}{\Delta_x} + \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{\Delta_y[j]} = 0 , \quad (7)$$

де  $f_{i,j}, g_{i,j}, P_{i,j}$  – значення функцій  $f(x, y), g(x, y), P(x, y)$  в точці розрахункової сітки з індексами  $[i, j]$ ;  $f_r, f_l, g_r, g_l, P_r$  – значення функцій  $f(x, y), g(x, y), P(x, y)$  в точках, позначених індексами  $[r], [l]$  на рис. 2;  $\Delta_x$  – постійний крок розрахункової сітки за координатою  $x$ ;  $\Delta_y[j]$  – крок розрахункової сітки за координатою  $y$  на відрізьку, що містить точки з індексами  $[*, j]$ , зокрема точку з індексами  $[i, j]$ .

Співвідношення (5-7) необхідно доповнити співвідношеннями інтерполяції значень функцій для точок, позначених індексами  $[r], [l]$  на рис. 2:

$$S_0^{(l)} = 3; S_0^{(r)} = 3; S_1^{(l)} = 0; S_1^{(r)} = 0; S_2^{(l)} = 2(\Delta_y[j-1])^2; S_2^{(r)} = 2(\Delta_y[j+1])^2;$$

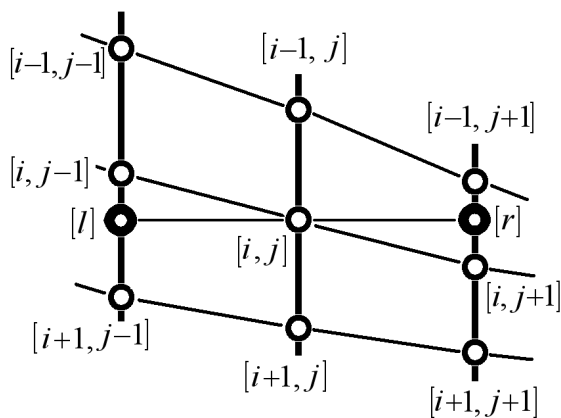


Рис. 2. Побудова різницевої схеми на внутрішньому фрагменті викривленої сітки.

$$S_3^{(l)} = 0; S_3^{(r)} = 0; S_4^{(l)} = 2(\Delta_y[j-1])^4; S_4^{(r)} = 2(\Delta_y[j+1])^4; F_0^{(l)} = F[i-1, j-1] + F[i, j-1] + F[i+1, j-1]; F_0^{(r)} = F[i-1, j+1] + F[i, j+1] + F[i+1, j+1]; F_1^{(l)} = -F[i-1, j-1] \cdot \Delta_y[j-1] + F[i+1, j-1] \cdot \Delta_y[j-1]; F_1^{(r)} = -F[i-1, j+1] \cdot \Delta_y[j+1] + F[i+1, j+1] \cdot \Delta_y[j+1]; F_2^{(l)} = F[i-1, j-1] \cdot (\Delta_y[j-1])^2 + F[i+1, j-1] \cdot (\Delta_y[j-1])^2; F_2^{(r)} = -F[i-1, j+1] \cdot (\Delta_y[j+1])^2 + F[i+1, j+1] \cdot (\Delta_y[j+1])^2;$$

$$\Delta^{(l)} = \begin{vmatrix} S_4^{(l)} & S_3^{(l)} & S_2^{(l)} \\ S_3^{(l)} & S_2^{(l)} & S_1^{(l)} \\ S_2^{(l)} & S_1^{(l)} & S_0^{(l)} \end{vmatrix} ; \quad (6)$$

$$\Delta_a^{(l)} = \begin{vmatrix} F_2^{(l)} & S_3^{(l)} & S_2^{(l)} \\ F_1^{(l)} & S_2^{(l)} & S_1^{(l)} \\ F_0^{(l)} & S_1^{(l)} & S_0^{(l)} \end{vmatrix} ; \quad (7)$$

$$\Delta_b^{(l)} = \begin{vmatrix} S_4^{(l)} & F_2^{(l)} & S_2^{(l)} \\ S_3^{(l)} & F_1^{(l)} & S_1^{(l)} \\ S_2^{(l)} & F_0^{(l)} & S_0^{(l)} \end{vmatrix} ; \quad (8)$$

$$\Delta_c^{(l)} = \begin{vmatrix} S_4^{(l)} & S_3^{(l)} & F_2^{(l)} \\ S_3^{(l)} & S_2^{(l)} & F_1^{(l)} \\ S_2^{(l)} & S_1^{(l)} & F_0^{(l)} \end{vmatrix} ; \quad (9)$$

$$F[l] = \frac{1}{\Delta^{(l)}} (\Delta_a^{(l)} (y[l] - y[i, j-1])^2 + \Delta_b^{(l)} (y[l] - y[i, j-1]) + \Delta_c^{(l)}) ; F[r] = \frac{1}{\Delta^{(r)}} (\Delta_a^{(r)} (y[r] - y[i, j+1])^2 + \Delta_b^{(r)} (y[r] - y[i, j+1]) + \Delta_c^{(r)}) , \quad (10)$$

де  $F$  – узагальнене позначення однієї з функцій ( $f, g, P$ );  $F[l]$  та  $F[r]$  – значення функції  $F$  у точках, позначених відповідно індексами  $[l]$  та  $[r]$  на рис 2;  $F[i, j]$  – значення функції  $F$  у точці, позначений

відповідною парою індексів  $[i, j]$ ;  $\Delta_y[j-1]$  і  $\Delta_y[j+1]$  – кроки розрахункової сітки за координатою  $y$  на відрізках, що містять точки з індексами  $[*, j-1]$  і  $[*, j-1]$ , відповідно; коефіцієнти  $\Delta^{(r)}, \Delta_a^{(r)}, \Delta_b^{(r)}, \Delta_c^{(r)}$  у (10) отримуються за виразами, аналогічними до виразів (6)–(9), із заміною верхнього індексу ( $l$ ) на верхній індекс ( $r$ ) в усіх компонентах виразів.

Граничні умови на границі твердого тіла, що обтікається, запишемо у наближенні першого порядку, на підставі розгляду значень швидкостей у заданій точці з індексами  $[i, j]$  і двох сусідніх до неї (рис. 3):

$$(f_{i,j}, g_{i,j}) \parallel ((x[i, j+1] - x[i, j-1]), (y[i, j+1] - y[i, j-1])),$$

де величини  $x[\bullet, \bullet]$  і  $y[\bullet, \bullet]$  позначають значення  $x$ - та  $y$ - координат точок з відповідними індексами;

$$g_{i,j} \cdot (x[i, j+1] - x[i, j-1]) = f_{i,j} \cdot (y[i, j+1] - y[i, j-1]).$$

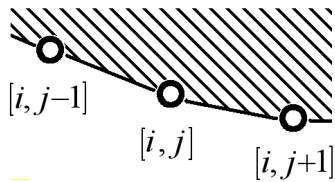


Рис. 3. Точки, що розглядаються при записі граничних умов на границі твердого тіла, що обтікається.

Визначимо умови, за яких система рівнянь, отримана в результаті застосування розрахункової схеми на такій решітці, виявиться достатньо визначеною для розв'язання. Оцінимо визначеність задачі для найпростішого випадку, вважаючи, що тіло обтікання відсутнє. Нехай  $N_x$  та  $N_y$  – кількості кроків сітки за координатами  $x$  та  $y$ , відповідно. Рівняння (1), (2), (3) породжують різницеві співвідношення у наступних кількостях:

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 &= (N_y - 2)(N_x - 2) = \\ &= N_x N_y - 2N_x - 2N_y + 4; \\ M_3 &= (N_y - 1)(N_x - 1) = \\ &= N_x N_y - 1N_x - 1N_y + 1; \end{aligned}$$

Граничні умови для входу в канал та для виходу з нього, дають:

$$M_4 = N_y \cdot 3; \quad M_5 = N_y \cdot 3.$$

Граничні умови для верхньої та нижньої бокових стінок каналу, дають:

$$M_6 = N_x; \quad M_7 = N_x.$$

Сумарно отримуємо:

$$\sum_{s=1}^7 M_s = 3N_x N_y - 3N_x + 1N_y + 9.$$

Кількість невідомих змінних задачі дорівнює  $3N_x N_y$ . Отримуємо умову визначеності:

$$\begin{aligned} 3N_x N_y &\leq 3N_x N_y - 3N_x + N_y + 9; \\ -3N_x + N_y + 9 &\geq 0; \\ N_y &\geq 3N_x - 9. \end{aligned} \quad (11)$$

За наявності тіла обтікання загальна кількість різницевих рівнянь зменшиться, а кількість невідомих величин не зміниться, тому для задачі з тілом обтікання (11) є необхідною, але не достатньою умовою.

Повторимо оцінку для випадку тривимірної задачі, різницеве подання якої містить  $4N_x N_y N_z$  невідомих ( $N_x, N_y$  та  $N_z$  – кількості кроків сітки за координатами  $x, y, z$  відповідно). Побудова викривленої сітки для тривимірної задачі аналогічна описаній вище. Рівняння Нав'є-Стокса для тривимірної задачі аналогічні рівнянням (1–3). Тривимірні рівняння, аналогічні до (1–2), дають

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = M_3 &= \\ &= (N_y - 2)(N_x - 2)(N_z - 2) = \\ &= N_x N_y N_z - 2N_x N_z - 2N_y N_z - 2N_x N_y + \\ &\quad + 4N_x + 4N_y + 4N_z - 8 \end{aligned}$$

різницевих співвідношень.

Тривимірне рівняння нерозривності, аналогічне до (3), дає

$$\begin{aligned} M_4 &= (N_y - 1)(N_x - 1)(N_z - 1) = \\ &= N_x N_y N_z - N_x N_z - N_y N_z - N_x N_y + \\ &\quad + N_x + N_y + N_z - 1 \end{aligned}$$

різницевих співвідношень.

Граничні умови для входу в канал та для виходу з нього дають:

$$M_5 = 4N_y N_z; \quad M_6 = 4N_y N_z.$$

Граничні умови для чотирьох бокових стінок каналу дають:

$$M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} = 2N_X N_Y + 2N_X N_Z .$$

Сумарно отримуємо:

$$\sum_{s=1}^{10} M_s = 4N_X N_Y N_Z - 5N_X N_Z - 5N_X N_Y +$$

$$+ 1N_Y N_Z + 13(N_X + N_Y + N_Z) - 25 .$$

Умова достатньої визначеності:

$$4N_X N_Y N_Z - 5N_X N_Z - 5N_X N_Y + 1N_Y N_Z +$$

$$+ 13(N_X + N_Y + N_Z) - 25 \geq 4N_X N_Y N_Z ;$$

$$- 5N_X N_Z - 5N_X N_Y + 1N_Y N_Z +$$

$$+ 13(N_X + N_Y + N_Z) - 25 \geq 0 .$$

### Висновки

В статті запропоновано дискретизований опис гідродинамічної задачі обтікання тіла на основі просторової розрахункової сітки, регулярної у напрямку руху потоку і викривленої за поперечними координатами. Розглянуто алгоритм побудови такої сітки. Отримано необхідні умови визначеності системи алгебраїчних рівнянь, породженої різницевою схемою при описі гідродинамічної задачі. Цими умовами показано, що визначеність отриманих систем рівнянь залежить від початкових параметрів, використаних для побудови сітки.

Можливим напрямком подальших досліджень є дослідження доцільності адаптації структури розрахункової сітки до структури течії рідини чи газу. У випадку достатньо точної адаптації буде отримано дві переваги – зменшення кількості значущих доданків у різницевих рівняннях (що тягне за собою зменшення обсягу обчислень з розв'язання системи різницевих співвідношень) та можливість підвищення точності отриманого результату.

### Список літератури

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей, в 2 тт. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.1: 504 с. Т. 2: 552 с.

2. Приходько В.И. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене /В.И. Приходько. – К.: Наук. Думка, 2003. – 379 с.

3. Тюнин А.В. Некоторые вопросы конструирования расчетных сеток /А.В. Тюнин //Математическое образование в регионах России: м-лы всеросс. науч.-мет. конф. – Барнаул: БГПУ, 2008. – С. 89-92.

4. Яцук Ю.В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье» /Ю.В. Яцук. // Вестник Астраханского ГТУ. Серия «Морская техника и технология». – 2009. – №1. – С.116-120.

5. Вабищевич П.Н. Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики / П.Н.Вабищевич. //Журнал выч. математики и матем. физики. 1989. – Т.29. – №6. – С.902-914.

6. Клячин В.А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей /В.А. Клячин, А.А.Широкий // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2010. – № 4 (78). – С. 51-55.

7. Галанин М.П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы. (Препринт; 06-01-00421.) /М.П. Галанин, И.А. Щеглов. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – 32 с.

8. Глазок О.М. Модифікований метод розв'язання систем лінійних рівнянь для синтезу закону керування літаком з використанням непрямокутних та нерегулярних сіток /О.М.Глазок. //Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2011. – Вип. 1 (33). – С. 53-56.

Статтю подано до редакції 4.09.2014