УДК 681.513

Д.П. Кучеров

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ И АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Введение. При решении задач анализа и синтеза систем управления возникает необходимость применения тех или иных численных методов и соответствующих им алгоритмов [1]. В последнее время широкое распространение в теории управления получил метод пространства состояний [2, 3], восходящий к основополагающей монографии [4]. В соответствии с этим методом динамическая система описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$dx(t)/dt = Ax(t), \tag{1}$$

где A — некоторая матрица $n \times n$, а $x(t)$ — n-мерный вектор состояния в момент t. Согласно [4] решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)x(0), \tag{2}$$

где

$$\Phi(t) = e^{At}. \tag{3}$$

В теории управления выражение (3) обычно называют матричным экспоненциалом. Величина $\Phi(t)$ представляет собой ни что иное как некоторую функцию от матрицы At [5, гл.5, п. 4] и является тоже матрицей. Из (2) следует, что если At задана как числовая матрица, то для расчета динамики системы (1) возникает необходимость вычисления матричного экспоненциала $\Phi(t)$.

Проблема вычисления матричного экспоненциала в течение последних четырех десятилетий привлекает пристальное внимание исследователей систем управления [6-11]. Первые существенные результаты в этом направлении исследований принадлежат Л. Заде и Ч. Дезоеру [4, разд. 5, п.3]. Судя по имеющейся информации, последняя публикация [10] в данном направлении, появившаяся в одном из ведущих зарубежных периодических изданий, датирована серединой 90-х годов.

Известны различные точные и приближенные методы получения $\Phi(t)$ в замкнутой (конечной) форме. К сожалению, точные аналитические выражения для $\Phi(t)$ удается найти, как оказалось, только, если $n \le 4$, а также при произвольном n для специального типа матриц $M = At$. В остальных случаях приходится довольствоваться приближенными методами их расчета.

В данной статье приводится сравнительная оценка различным методам вычисления матричного экспоненциала, дано выражение e^M в замкнутой форме для некоторого специального вида матрицы, а также предложен эффективный алгоритм и метод вычисления e^M с любой наперед заданной точностью.

Точные методы. Один из способов аналитического вычисления $\Phi(t)$ основан на теореме разложения Сильвестра [12, п. 13.4-7] (см. также [8, с. 114; 9, п. 1.5.3]). Согласно [12, формула 13.4-9] в случае, когда все собственные значения λ_i некоторой матрицы M различны, величина e^M вычисляется следующим образом:

$$e^M = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} [M - \lambda_j I]}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}. \tag{4}$$

Здесь I обозначает единичную матрицу того же размера, что и матрица M.

Иной метод точного вычисления e^M предполагает использование классического преобразования Лапласа для уравнения (1) [9, п. 1.5.2]. В соответствии с этим методом матричный экспоненциал (3) находится по формуле

$$e^{At} = L^{-1}\left\{[pI - A]^{-1}\right\}, \tag{5}$$

где L^{-1} - оператор обратного преобразования Лапласа (см. также [2, п.5.12; 3, формула 3.2-3; 4]).

Трудности, возникающие при реализации упомянутых первых двух методов вычисления матричного экспоненциала, связаны с необходимостью отыскания собственных значений матрицы M [9, п. 1.5.5]. Действительно, в случае $n > 4$ аналитическое определение чисел λ_i $(i = 1,...,n)$ не представляется возможным. К тому же второй метод требует еще и нахождение обратного преобразования Лапласа от некоторых других функций, что само по себе является довольно-таки трудоемким делом. Можно понять, что при $n > 4$ в принципе всегда существует возможность вычисления матричного экспоненциала по формулам (4) или (5); для этого достаточно найти тем или иным численным способом n собственных значений матрицы $M = At$. (Именно такой метод и соответствующая программа вычисления матричного экспоненциала предложены в [11, разд. А.20.3 – А.20.5].) Однако для реализации такого метода требуется вначале оценить, с какой точностью нужно находить собственные значения матрицы $M = At$ с тем, чтобы гарантировать вычисление матричного экспоненциала с заданной точностью.

Сравнительно недавно в [10] получены аналитические выражения для вычисления $\Phi(t)$ в случае, когда M - произвольная матрица размера 2×2, а также при произвольном n для некоторых матриц M, удовлетворяющих определенным матричным уравнениям. Любопытно, что, применяя формулу (5) при $n = 2$, можно получить те же самые аналитические выражения для e^M, которые приведены в [10, лемма 2.1] без доказательства. Для этого достаточно принять в (5) $M = At$, а затем положить $t = 1$.

Оказывается, что для некоторых специальных типов матриц M при произвольных n все же существует возможность получения точного аналитического выражения для матричного экспоненциала e^M. Покажем это.

Пусть M представляет собой идемпотентную матрицу [5, с. 208]. По определению

$$M^2 = M . \tag{6}$$

При выполнении (6) имеем

$$M^k = M \tag{7}$$

для любого $k \geq 2$.

Известно (см. [5, с.118, сноска [1]]), что для произвольной матрицы M справедливо разложение e^M в следующий бесконечный ряд:

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} . \tag{8}$$

В случае идемпотентной матрицы на основании соотношения (7) в силу (8) можно записать

$$e^M = I + M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} . \tag{9}$$

Принимая во внимание тот известный факт, что

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e ,$$

(см. [12, табл. 4.8-1]), из (9) окончательно получим

$$e^{M} = I + (e-1)M\ . \tag{10}$$

Примечательно, что выражение (10) полностью совпадает с выражением, которое можно получить, используя прямо один результат, содержащийся в [10, теорема 3.3].

Предположим теперь, что M - так называемая нильпотентная матрица [5, с. 208] (см. также [13, с.16], [14, п. 8.54]), т.е. существует целое положительное $p \geq 2$ такое, что

$$M^{k} = 0 \text{ для всех } k \geq p\,. \tag{11}$$

В силу свойства (11) по формуле (8) получаем следующее выражение для матричного экспоненциала в случае нильпотентной матрицы M:

$$e^{M} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{M^{k}}{k!}\ . \tag{12}$$

Формулой (12) можно пользоваться в частности, когда M представляет собой ненулевую треугольную матрицу с нулевыми диагональными элементами, т.е. когда

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & \vdots & m_{1n} \\ 0 & 0 & m_{23} & \vdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & m_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Действительно, матрица вида (13) является нильпотентной (см. [14, п. 8.57]).

Интересно, что нильпотентной оказывается матрица, фигурирующая в уравнении состояния замкнутой дискретной системы управления, которое получено в [15, с.1147] при решении задачи синтеза так называемого модального регулятора [8, 16 п. 8.9.1] для случая, когда все полюсы передаточной функции этой системы выбираются равными нулю.

Приближенные методы. Известные приближенные методы вычисления e^{M} основаны на аппроксимации разложения (8) матричным полиномом $F(M)$ вида

$$e^{M} \approx F(M) = \sum_{k=0}^{N} \frac{M^{k}}{k!}\,, \tag{14}$$

содержащим $N+1$ слагаемых. При этом естественным образом возникает проблема определения числа N, при котором достигается заданная точность вычисления матричного экспоненциала по формуле (14). В конечном счете эта проблема сводится к оценке нормы остатка R точного разложения

$$e^{M} = \sum_{k=0}^{N} \frac{M^{k}}{k!} + R . \tag{15}$$

Можно предложить два подхода к определению числа N в зависимости от требуемой точности вычисления e^{M}. В соответствии с предложенным в [8, п. 1.6.1] подходом осуществляется последовательное увеличение числа N в сумме (14) до тех пор, пока не будет выполнено соотношение

$$\|R\| \le \frac{\left\|M^{N+1}\right\|}{(N+1)!}\frac{1}{1-q} \le \varepsilon . \tag{16}$$

В этом соотношении $\|\bullet\|$ обозначает норму $\|\bullet\|_1$ в соответствии с [14, п.14.48], ε - заданная точность вычисления матричного экспоненциала, а N - достаточно большое число такое, что величина

$$q = \frac{\|M\|}{N+2} \ge 0 \tag{17}$$

удовлетворяет требованию

$$q < 1 . \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении (18) всегда существует такое натуральное N, начиная с которого соотношение (16) будет удовлетворяться, поскольку $\left\|M^{N+1}\right\| \big/ (N+1)! \to 0$ при $N \to \infty$ (см. [8, с. 51]).

Недостатком подхода, основанного на использовании оценки сверху нормы $\|R\|$ в форме (16), является то, что при каждом очередном увеличении числа N требуется выполнение операций нахождения $(N+1)$-ой степени матрицы M и вычисления нормы $\left\|M^{N+1}\right\|$. А это само по себе представляется довольно трудоемким.

Свободным от упомянутого недостатка является другой подход, существенно использующий иную оценку $\|R\|$, которая была предложена в [9, п.

6.9]. Этот подход предусматривает последовательное увеличение числа N до тех пор, пока не будут выполнены неравенства

$$N \geq \|M\| + 2 \tag{19}$$

и

$$\|R\| \leq \frac{\|M\|^{N+1}}{(N+1)!} \frac{1}{1-q} \leq \varepsilon . \tag{20}$$

(Неравенство (19) следует из требования (18) с учетом (17); при выводе неравенства (20) используется известное соотношение

$$\left\|M^k\right\| \leq \|M\|^k , \tag{21}$$

которое можно найти, например, в [17, п. 7].) Разумеется, оценка (20) представляется существенно более простой в вычислительном плане, поскольку она не требует выполнения таких “неудобных” операций, как возведение в $(N+1)$-ю степень матрицы M в случае, когда число N оказывается достаточно большим. Однако, использование оценки (20) может потребовать включения в сумму (14) большего числа членов для достижения заданной точности ε, чем оценка (16) (этот факт следует прямо из неравенства (21)).

Оказывается, что после того как необходимое число N так или иначе будет определено, нет прямой необходимости в вычислении всех N степеней матрицы M; достаточно найти всего лишь $n-1$ степеней M [6, 7]. Основанием для этого служит замечательное соотношение

$$F(M) = Q(M)P(M) + R^+(M) = R^+(M) , \tag{22}$$

приведенное, в частности, в [5, с.92]. В этом соотношении

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$$

- характеристический полином матрицы M, а $R^+(M)$ имеет смысл своеобразного остаточного полинома степени $n-1$, коэффициенты которого образуются делением $F(\lambda)$ на $P(\lambda)$ по формуле

$$\frac{F(\lambda)}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R^+(\lambda)}{P(\lambda)} . \tag{23}$$

(При выводе соотношения (22) существенно используется известная теорема Кэли-Гамильтона [5, гл. IV, п.3].) Поскольку $\deg F(M) = N$ (см. выражение для $F(M)$ в (14)), то замена в (14) матричного полинома $F(M)$ на $R^{+}(M)$ (согласно (22)) дает явное преимущество в вычислительном отношении, когда $N >> n$.

Приведенный выше анализ показывает, что в общем случае для приближенного вычисления e^{M} по формуле (14) с любой заданной точностью ε уместно объединить результаты, содержащиеся в [9, с. 115] и [7]. На рис. 1 изображена схема алгоритма, реализующая подобную идею. Этот алгоритм предусматривает процедуру вычисления коэффициентов остаточного полинома $R^{+}(M)$ методом последовательного деления согласно (23). Схема указанной алгоритмической процедуры представлена на рис. 2.

Не лишен любопытства тот замечательный факт, что в качестве грубой оценки точности расчета e^{M} может выступать абсолютная величина разности

$$\varepsilon_1 = \left|\det F(M) - \exp(\mathrm{tr} M)\right|, \tag{24}$$

где $\det F(M)$ обозначает определитель матрицы $F(M)$, а $\mathrm{tr}M$ - ее след. Основанием для этого служит формула

$$\det(\exp M) = \exp(\mathrm{tr} M), \tag{25}$$

приведенная в [13, п.4.16] без доказательства*).

Пример. Для демонстрации возможностей предложенного алгоритма приближенного вычисления матричного экспоненциала приведем результаты расчета e^{M} для следующей числовой матрицы M:

$$M = \begin{pmatrix} 1.0 & 24.0 \\ 1.0 & -28.0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Вычислялись точное и приближенное значения матрицы e^{M}. По формуле (4) было найдено точное значение e^{M}:

$$e^{M} = \begin{pmatrix} 5.92138 & 4.76806 \\ 0.19866 & 0.15997 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

*) В справедливости формулы (25) можно убедиться, по крайней мере в случае, когда *n=2* (см. Приложение). Напомним, что именно для этого случая в [10] получены точные аналитические выражения для exp(*M*).

На основании алгоритма рис.1 (блок 2) установлено, что для определения e^{M} с точностью $\varepsilon = 0.1$ число N в сумме (14) должно составлять $N = 78$. (В отличие от алгоритма работы [8], который дает N= 77, здесь для нахождения требуемого числа N не понадобилось вычисления элементов промежуточных матриц $M^2,...,M^{N+1}$.) В соответствии с алгоритмом рис.1 (блок 3) определен характеристический полином:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 27.0\lambda - 52.0 .$$

Путем использования алгоритмической процедуры последовательного деления полинома $F(\lambda)$ на $P(\lambda)$ (см. рис.2), найден остаточный матричный полином

$$R^+(M) = 0.198131\, M + 5.723678\, I . \tag{28}$$

Подстановка (26) в (28) согласно (14) с учетом соотношения (22) дает

$$e^M \approx F(M) = \begin{pmatrix} 5.92181 & 4.75524 \\ 0.19813 & 0.17589 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Как видно, в рассматриваемом примере для приближенного вычисления e^M вовсе нет никакой необходимости вычисления матриц M^i для всех $i: 2 \le i \le 77$. Сравнение (27) и (29) дает основание записать

$$R = \begin{pmatrix} -0.00043 & 0.01282 \\ 0.00053 & -0.01592 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\|R\| = 0.016$. Таким образом, $\|R\| \le \varepsilon = 0.1$, т.е. требование по точности выполняется.

Приведем грубую оценку ε_1 точности полученного приближенного результата, используя формулу (24). Из (29) имеем

$$\det F(M) = 0.0994 .$$

С другой стороны, след матрицы (26) равен

$$\mathrm{tr} M = -27.0 ,$$

откуда $\exp(\mathrm{tr} M) = 1.88 \cdot 10^{-12}$. Итак, $\varepsilon_1 \approx 0.0994$, т.е. в данном случае величина ε_1 оказалась того же порядка, что и ε.

Выводы. Предложенный в статье алгоритм вычисления матричного экспоненциала представляется более эффективным по сравнению с другими известными алгоритмами подобного сорта. Реализация этого алгоритма требует выполнения значительно меньшего числа вычислительных операций.

Приложение

Покажем справедливость соотношения (25) для случая, когда

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{П1}$$

В этом случае $\mathrm{tr}A = a + d$, следовательно,

$$\exp(\mathrm{tr}A) = e^{a+d}. \tag{П2}$$

Согласно [10, следствие 23] в случае, когда A имеет вид (П1), матричный экспоненциал определяется так:

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \dfrac{a-d}{2} \end{pmatrix}, \tag{П3}$$

если

$$(a-d)^2 + 4bc = 0; \tag{П4}$$

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\Delta) + \dfrac{a-d}{2}\dfrac{\mathrm{sh}(\Delta)}{\Delta} & b\dfrac{\mathrm{sh}(\Delta)}{\Delta} \\ c\dfrac{\mathrm{sh}(\Delta)}{\Delta} & \mathrm{ch}(\Delta) - \dfrac{a-d}{2}\dfrac{\mathrm{sh}(\Delta)}{\Delta} \end{pmatrix}, \tag{П5}$$

если

$$(a-d)^2 + 4bc \neq 0, \tag{П6}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$

Пусть выполнено условие (П4). Тогда в силу (П3) с учетом (П4) находим

$$\det(\exp A) = e^{a+d}. \tag{П7}$$

(Здесь использовалось известное из [13, п.2.4.1] свойство определителей.)

Сравнение (П2) и (П7) показывает, что при выполнении (П4) соотношение (25) справедливо.

Предположим теперь, что выполнено (П6). В этом случае согласно (П5) с учетом (П6) и тождества $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, имеем

$$\det(\exp A) = e^{a+d} .$$

Таким образом, и в более общем случае (П6) соотношение (25) также верно.

1. Задирака В.К. Некоторые приложения теории аппроксимации к решению задач автоматического управления. – Киев:1970. – 84 с.

2. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. — М.: Мир, 1974. — 464 с.

3. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Мир, 1975. – 424 с.

4. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (Метод пространства состояния). - М.: Наука, 1970. - 774 с./ Русс. пер. Zadeh L.A., Desoer C.A. Linear System Theory: The State Space Approach, - N.Y.: McGraw-Hill, - 1963.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967.—576 с.

6. Ganapathy S., Subba Rao A. transient response evaluation from the state transition matrix // IEEE Proceedings. - Vol. 57. - N 3. - 1969. – P. 347 - 349.

7. Mastacusa E.J. A Method for calculating based on the Cayley-Hamilton Theorem // IEEE Proceedings.- Vol. 57. – N 7.- 1969. – P. 1328 - 1329.

8. Козырев В. Д. Применение цифровых ЭВМ при исследовании автоматических систем РЭС. - Киев: КВИРТУ, — 1976.— 182 с.

9. Автоматизированное проектирование систем автоматического управления / Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1990. - 332 с.

10. Bernstein D., So W. Some explicit formulas for the matrix exponential //IEEE Trans. on Automatic Contr. - Vol.38. - N 8. - 1993. - P. 1228 - 1231.

11. Мелса Дж.Л., Джонс Ст.Е. Программы в помощь изучающим теорию линейных систем управления. - М.: Машиностроение, 1981. — 146 с.

12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

13. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. – 232 с.

14. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. - М.: Наука, 1984. – 320 с.

15. Wen C., Hill D.J. Global boundedness of discrete-time adaptive control just using estimator projection // Automatica. - Vol. 28. - N 6. - 1992. - P. 1143-1157.

16. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

17. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

АННОТАЦИЯ

Д.П. Кучеров

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ И АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Приводится сравнительный анализ точных и приближенных методов вычисления матричного экспоненциала, используемого в задачах анализа динамики систем управления. Получены точные формулы его вычисления для матриц специального вида. Предложен эффективный алгоритм, позволяющий вычислять произвольный матричный экспоненциал с любой наперед заданной точностью.

Д.П. Кучеров

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЧНОГО ЕКСПОНЕНЦІАЛУ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Наводиться порівнювальний аналіз методів і алгоритмів обчислення матричного експоненціалу, який використовується у задачах аналізу динаміки систем управління. Одержано точні формули його обчислення для матриць спеціального виду. Запропоновано ефективний алгоритм, який дозволяє обчислювати матричний експоненціал з любою наперед заданою точністю.

D.P. Kucherov

ON SOME METHODS AND ALGORITHMS FOR CALCULATING MATRIX EXPONENTIAL IN THE PROBLEMS OF CONTROL SYSTEMS DYNAMICS ANALYSIS

The comparative analysis of some methods and algorithms for computing matrix exponential used in the dynamics analysis problems of control systems is given. The explicit formulas for special matrix form are obtained. An effective algorithm allowing to calculate the arbitrary matrix exponential with any accuracy is proposed.