

## ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМИ ЯКІСНИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

*На прикладі синтезу керування для заданого динамічного об'єкта досліджуються нелінійні якісні регулятори. В фазовому просторі розглядаються множини початкових точок руху, утворені шляхом оцінки відповідних перехідних процесів при різних наборах значень показників затухання регулятора за допомогою інтегральних критеріїв якості.*

Задачі керування сучасними нелінійними динамічними об'єктами пред'являють вимоги найбільш повного використання технічних можливостей керованої системи. З цією метою було запропоновано ряд методів синтезу якісних регуляторів [1],[2], які дозволяють значно покращити якість керування в таких системах порівняно з класичними методами. Після вивчення об'єкта керування та аналітичного синтезу регулятора наступним важливим етапом розв'язанні інженерної задачі – побудови керування для технічної системи – є чисельне моделювання з метою дослідження властивостей отриманої керованої системи та їх корекції. Зокрема, необхідно дослідити поведінку керованої системи в різних ситуаціях в залежності від вибору параметрів регулятора. В даній статті розглянуто результати такого дослідження для конкретного технічного об'єкта.

Розглянемо об'єкт керування у вигляді динамічної системи, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (1)$$

де доданок  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  відображає нелінійності об'єкта і може бути представлений у вигляді ряду по степеням змінних, що є компонентами вектора стану  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(2)} + \mathbf{F}_{(3)} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}_i(\mathbf{X}). \quad (2)$$

Керування оберемо таким чином, щоб досягти мінімуму функціонала якості

$$I = \int_{t=0}^{\infty} (w_1(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) + w_2(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))) dt = \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U} + c_0 V_0 + c_1 V_1 + \dots + c_k V_k) dt,$$

де  $V_0, V_1, \dots, V_k$  – компоненти розкладу функції Ляпунова  $V(\mathbf{X})$  в ступеневий ряд по компонентах вектора  $\mathbf{X}$ :

$$V(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^k V_i(\mathbf{X}), \quad V_m = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_p} a_{v_1, v_2, \dots, v_p} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_p^{v_p}, \quad \sum_{i=1}^p v_i = m + 2. \quad (3)$$

Нехай об'єкт керування має наступні параметри :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.877 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4.208 & 0 & -0.396 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.215 \\ 0 \\ -20.967 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0.47x_1^2 - 0.088x_1x_3 - 0.019x_2^2 \\ 0 \\ -0.47x_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{(3)} = \begin{bmatrix} 3.846x_1^3 - x_1^2x_3 \\ 0 \\ -3.564x_1^3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Частини (3) функції Ляпунова та оптимальне керування відповідного ступеня нелінійності знайдемо за методикою [2].

Під час руху об'єкта, описаного системою (1), з отриманим регулятором, частини розкладу функції  $V(\mathbf{X})$  в ряд (3) матимуть затухання, яке для кожної моди  $V_i$  визначатиметься коефіцієнтом  $c_i$ . Необхідно дослідити, як залежить поведінка системи від значень коефіцієнтів  $c_i$  ( $i = 0,1,2$ ). Дослідження залежності поведінки системи від значень коефіцієнтів затухання можна проводити двома шляхами: або вивчати при різних значеннях коефіцієнтів затухання параметри перехідного процесу, що починається з деякої точки фазового простору, або ж при обраних значеннях коефіцієнтів затухання вивчати множини таких точок фазового простору, для яких перехідні процеси, що починаються з цих точок, задовольняють певним умовам. При чисельному моделюванні, що має на меті знаходження таких множин, обрану (як правило, прямокутну) область дослідження розбиваємо на прямокутники певних розмірів, і, скануючи по рядках точки утвореної сітки, обчислюємо значення цільової функції чи функціонала. При цьому необхідно врахувати обмеження на величину управління, які вносяться конструкцією об'єкта та системи керування.

Інформацію, отриману в результаті розрахунків, виявилось зручним представляти у вигляді псевдографічних зображень. Отримані псевдографічні картини дозволяють не лише зробити висновки про властивості досліджуваного об'єкта, але і обрати області для подальшого, більш детального дослідження. Така методика давно застосовується при чисельному моделюванні. Наприклад, в роботі [3] автори пропонують, досліджуючи функцію двох аргументів, позначати парні рівні її значень в точках координатної площини різними символами - цифрами від 0 до 9, розділяючи їх пробілами на непарних рівнях.

Розглянемо спершу перерізи множин точок, які задовольняють умові:

$$\Omega_Q(s) = P(s) \cap Q = \left\{ (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \mid \max_{i=1..3, t \in [0, T]} x_i(t) \leq s \right\} \cap \{x_k = d\}. \quad (6)$$

Побудуємо множини  $\Omega_Q(s)$  в координатах  $(x_1, x_2)$ , при цьому координата  $x_3$  є параметром (в формулі (6)  $k=3$ ). На рис.1 представлено множини  $\Omega_Q(s)$  для  $c_0=c_1=c_2=0$ ,  $x_3=0$ , які було отримано за критерієм (6) наступним чином. Було обрано ряд значень параметра  $s$ , і для кожного з цих значень (починаючи з найменшого) було побудовано відповідну множину точок. Оскільки кожна з отриманих множин є підмножиною наступної, їх всі можна представити на одному графіку. Таким чином, скажімо, умові (6) при  $s = 0.25$  задовольняють точки, що належать до області, позначеної на рис.1,а цифрою 1; при  $s = 0.5$  – точки, що належать до областей 1 та 2, і так далі.

Систему координат, в якій представляється інформація, обираємо відповідно до конкретної задачі дослідження. При дослідженні об'єкта (1),(2),(4),(5) нами було використано:

1. Перерізи множин  $P(s)$  в координатах  $(x_1, x_2)$ , при цьому параметрами множини були величини коефіцієнтів затухання  $c_0, c_1, c_2$  та значення координати  $x_3$ ;
2. Перерізи множин  $P(s)$  в координатах  $(x_2, x_3)$  з параметрами графіка  $c_0, c_1, c_2$  та  $x_1$ ;
3. При дослідженні стійкості системи в процесі одного з характерних для неї рухів було використано перерізи множин  $P(s)$  в координатах  $(x_2, x_3)$  при  $x_1 = x_2 + d$  з параметрами графіка  $c_0, c_1, c_2$ .

Умови (6) лише деяким чином обмежують ступінь нестійкості системи, але не є необхідними умовами стійкості. Щоб пересвідчитись в цьому, досить розглянути ряд перехідних процесів, що починаються в точках, які належать до отриманих множин. Серед знайдених точок є як точки, з яких керована система впевнено повертається до стану рівноваги, так і такі точки, де поведінка системи нестійке. Проте множини стійкості

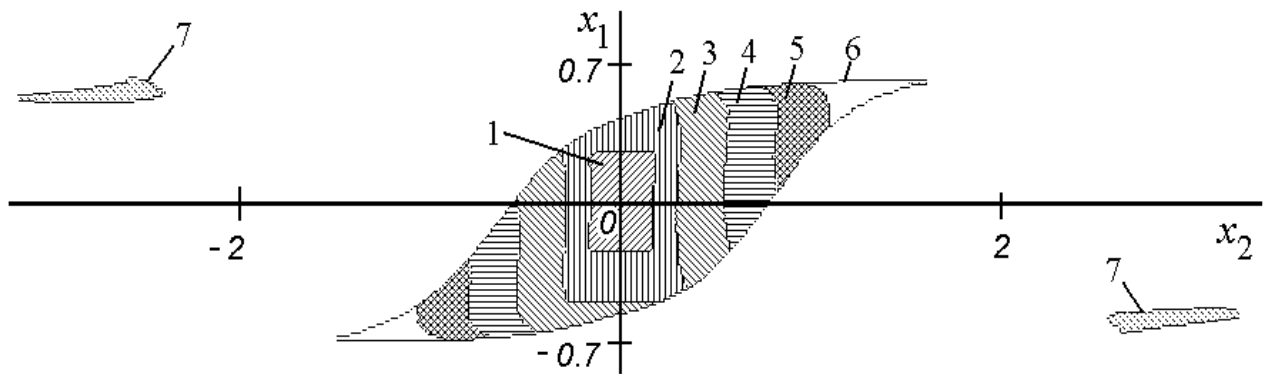


Рис. 1. Приклад застосування критерію (6) при  $c_0=1$ ,  $c_1=c_2=0$ ,  $x_3=0$ , Цифрами позначено множини точок, отримані при наступних значеннях параметра  $s$ : 1 –  $s = 0.25$ ; 2 –  $s = 0.5$ ; 3 –  $s = 1$ ; 4 –  $s = 1.5$ ; 5 –  $s = 2$ ; 6 – границя основної множини при  $s = 7$ ; 7 – відокремлені області,  $s = 7$ .

керуваної системи є підмножинами отриманих множин, отже, отримана інформація дозволяє визначити області фазового простору, в яких необхідно проводити подальші дослідження. Розгляд перехідних процесів допомагає також пояснити походження відокремлених областей, що були виявлені при деяких наборах параметрів регулятора. Характерний приклад таких областей бачимо на рис.1. В точках таких областей поведінка системи або близьке до нейтрального, або ж система досить повільно віддаляється від точки рівноваги.

Для того, щоб встановити умови, які б дозволяли дослідити стійкість системи, необхідно перш за все вивчити загальний характер поведінки системи. Розглядаючи перехідні процеси, бачимо, що, оцінюючи рух системи за допомогою інтегрального критерію

виду  $I_{t_0}(t) = \int_t^{t+t_0} F(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau$ , можемо обрати  $t_0 = 2$  с, при цьому отримані інтеграли будуть

досить повно характеризувати рух системи як у випадку аперіодичного, так і коливального поведінки.

Велике значення має також вибір відрізків часу, за якими проводиться оцінка руху. Розглянемо, наприклад, поділ фазового простору на множини за наступним критерієм:

$$P(s) = \left\{ s \int_1^3 x_1^2 dt > \int_4^6 x_1^2 dt \right\} \cap \left\{ s \int_1^3 x_2^2 dt > \int_4^6 x_2^2 dt \right\} \cap \left\{ s \int_1^3 x_3^2 dt > \int_4^6 x_3^2 dt \right\}.$$

Фактично цей критерій характеризує кожную точку фазового простору  $\mathbf{X}(0)$  величиною

$$s^0 = s^0(\mathbf{X}(0)) = \max_{i=1,2,3} (s_i^0(\mathbf{X}(0))) = \max_{i=1,2,3} \left\{ \frac{\int_4^6 x_i^2(t) dt}{\int_1^3 x_i^2(t) dt} \right\}, \quad (7)$$

що визначена для всіх  $\mathbf{X}(0) \neq 0$ . Розглянемо поведінку об'єкта (1),(2),(4),(5) з регулятором з  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  в точках:

$$x_1(0) = -0.445, \quad -0.555 < x_2(0) < -0.3, \quad x_3(0) = 0. \quad (8)$$

На графіку рис. 2 представлено функціональну залежність величини  $s^0$  від  $x_2(0)$  для точок відрізка (8). Як бачимо, на відрізку, що розглядається, значення величини  $s^0$  змінюється більше ніж на порядок. Проте ця зміна визначається не лише різницею між перехідними процесами, а й "побічним фактором" – під час руху системи значення координати  $x_1$  якраз на відрізку  $t \in [1,3]$  переходить через 0 (рис. 3), внаслідок цього інтеграл  $\int_1^3 x_1^2 dt$  отримує порівняно мале значення, що і призводить до збільшення величини  $s^0$ .

З метою уникнення подібних ефектів доцільно застосовувати критерії, що містять інтегральну оцінку руху системи за кількома фазовими координатами водночас. Крім того,

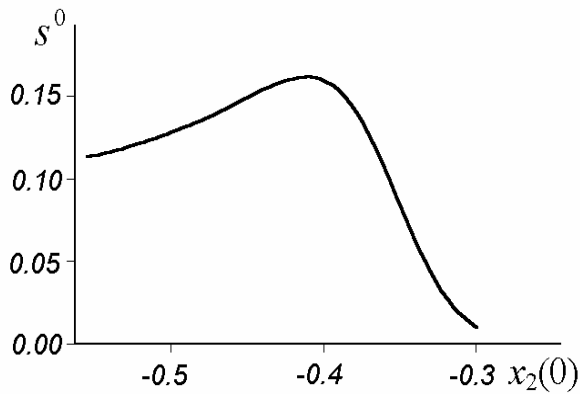


Рис. 2. Значення функції  $s^0(x_2)$  (7) на відрізку (8)

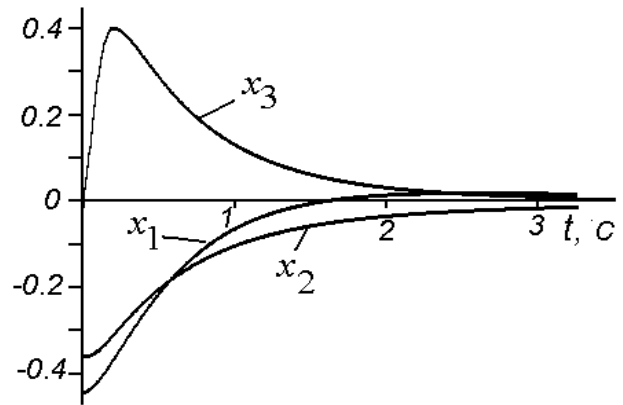


Рис. 3. Перехідний процес з початком в точці  $x_1(0) = -0.445$ ,  $x_2(0) = -0.36$ ,  $x_3(0) = 0$

гарні результати дає використання в знаменнику виразів, які оцінюють початкове відхилення системи від точки рівноваги. Так, було використано множини  $\Omega_Q(s)$ , отримані за критерієм

$$\Omega_Q(s) = P(s) \cap Q(s), P(s) = \left\{ s \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dt > \int_2^6 (x_1^2 + x_2^2) dt \right\}, Q(s) = \{x_3 = 0\}. \quad (9)$$

Відзначимо кілька закономірностей, які видно з отриманих результатів:

1. При збільшенні показників затухання множина точок, з яких регулятор може повернути об'єкт до стану рівноваги, зменшується.
2. В той же час якість регулювання всередині цієї множини збільшується. Поступово збільшуючи показники затухання, можна спостерігати, як області більш якісного регулювання розширюються і "витісняють" області, де регулювання менш якісне.
3. В тому випадку, якщо показники затухання, що відповідають більш високим ступеням фазових змінних, збільшуються швидше, ніж ті, що відповідають лінійним членам, область стійкості суттєво зменшується.
4. У регуляторів, синтезованих за методикою, що розглядається, якість регулювання значно краща, ніж у стандартних.

При дослідженні стійкості системи розглядався також критерій, який відображає технічну задачу – якнайшвидше зменшити відхилення фазових координат від точки рівноваги до певних допустимих значень. Поділ координатної площини на множини було проведено за часом, за який фазова траєкторія системи входить в коридор з заданими параметрами по кожній з фазових координат. Цікаво, що отримані множини точок виявились досить подібними до множин, знайдених за критерієм (9). Дослідження перехідних процесів з використанням таких критеріїв має велике практичне значення, тому методика таких досліджень потребує подальшої розробки. Інтерес представляє також класифікація точок фазового простору за поведінкою управляючої величини під час відповідних перехідних процесів, а також за властивостями функцій, що є частинами розкладу (3) функції Ляпунова.

### Список літератури

1. Антонов В.К. Методы синтеза регуляторов с заданным качеством переходных процессов. – К., КМУГА, 1995. – 120 с.
2. Антонов В.К., Глазок О.М. Метод синтеза нелинейных качественных регуляторов. //Информационно-диагностические системы. Материалы IV международной научно-практической конференции "АВИА-2002". Т.1. К., НАУ, 2002.-С.14-105–14-106.
3. Белова Д.А., Кузин Р.Е. Применение ЭВМ для анализа и синтеза автоматических систем управления. – М., Энергия, 1979. – 264 с.