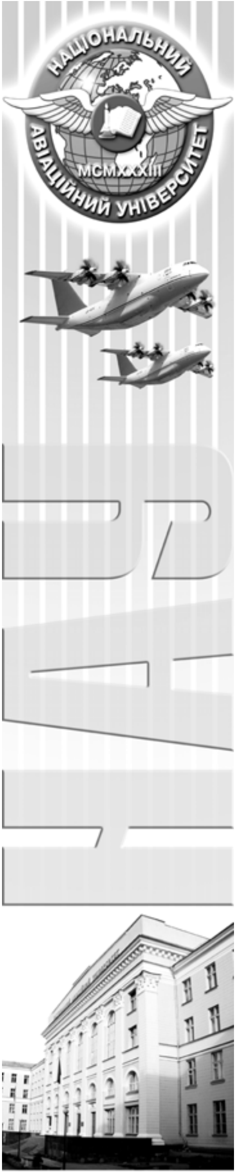


VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л. М. Ломонос, Н. П. Муранова, О. С. Муранов, А. В. Рилов

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів

Навчально-методичний посібник

Київ 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л. М. Ломонос, Н. П. Муранова,
О. С. Муранов, А. В. Рилов

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів

Навчально-методичний посібник

Київ 2011

УДК 512(075.8)
ББК В К) я 7
С 408

Рецензенти: *І. Ю. Каніовська* – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут»);
К. І. Мазур – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний авіаційний університет);
І. М. Ємельянова – учитель вищої категорії, учитель-методист (Авіакосмічний ліцей Національного авіаційного університету)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 6/10 від 14.10.2010 р.).

С 408 **Вибрані питання математики. Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів**: навч.-метод. посіб. / Л. М. Ломонос, Н. П. Муранова, О. С. Муранов, А. В. Рилов. – К.: НАУ, 2011. – 96 с.

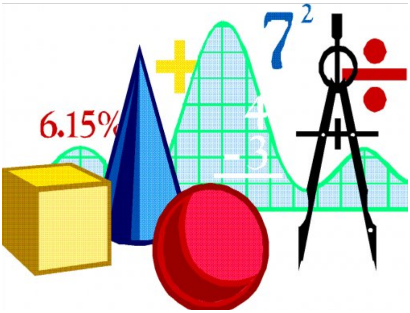
ISBN 978-966-598-701-7

Розглянуто основні методи розв'язування систем алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів. Подано теоретичний матеріал, тести, приклади для практичних занять і самостійного розв'язування, відповіді до них.

Для використання у системі доуніверситетської підготовки, школах, ліцеях та гімназіях, для підготовки випускників до зовнішнього незалежною оцінювання навчальних досягнень і абітурієнтів – до вступу у вищі навчальні заклади, для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів як у навчальному процесі, так і для самостійного опанування.

УДК 512(075.8)
ББК В К) я 7

ISBN 978-966-598-701-7



ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчально-методичний посібник відповідає програмі з математики для слухачів підготовчих курсів у системі доуніверситетської підготовки, для загальноосвітніх навчальних закладів та вимогам державного стандарту.

У посібнику систематизовано методи розв'язування систем алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів. Пропонуються завдання для практичних занять і самостійного розв'язування, які поділяються на три рівня складності. До першого рівня належать закриті тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді, до другого рівня – відкритої форми з короткими відповідями, до третього рівня – відкритої форми з розгорнутими відповідями.

Деякі приклади потребують від слухачів знань та умінь аналізувати теоретичний матеріал та раціонально обирати правильний метод розв'язування, застосування спеціальних алгоритмів та прийомів.

Навчальний посібник містить параграфи: «Загальні відомості», «Системи з одним лінійним рівнянням», «Системи двох рівнянь другого степеня», «Симетричні системи рівнянь», «Системи рівнянь, що містять різницю непарних степенів і суму парних степенів невідомих *x* і *y*», «Однорідні системи рівнянь», «Часткові випадки», «Системи рівнянь з параметрами, з модулями». У кожному параграфі є основні теоретичні відомості, зразки розв'язування задач, тести, задачі для самостійної роботи.

Посібник передбачає рівневу диференціацію навчання, яка реалізується за допомогою системи завдань різних рівнів складності. Особливої уваги заслуговують задачі початкового та середнього рівнів (рівень І та частково рівень ІІ), до яких включено основні типи вправ, а їх кількість дає змогу сформувати обов'язкові вміння і навички. Задачі рівня ІІІ призначені для поглибленого вивчення математики.

Посібник допоможе абітурієнтам систематизувати та поглибити знання з курсу «Алгебра» та підготуватися як до зовнішнього незалежного оцінювання, так і до вступу у ВНЗ.

Рекомендовано для використання як у навчальному процесі, так і для самостійного опанування учням загальноосвітніх навчальних закладів, ліцеїв, гімназій природничо-математичного профілю; для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень випускників; для абітурієнтів під час підготовки до вступу у вищих навчальних закладів в системі доуніверситетської підготовки.

§ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Система рівнянь називається *алгебраїчною*, якщо всі її рівняння алгебраїчні.

Визначення. Розв'язком системи k рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma_k(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

з n невідомими називається сукупність n упорядкованих чисел, яка є розв'язком кожного рівняння системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що вона не має розв'язків.

Система рівнянь, яка має принаймні один розв'язок, називається *сумісною*. Система, множина розв'язків якої порожня, називається *несумісною*. Якщо система рівнянь має скінченне число розв'язків, то вона називається *визначеною*, і *невизначеною*, якщо множина її розв'язків нескінченна.

При розв'язуванні систем доцільно використовувати такі теореми.

Теорема 1. Якщо деяке рівняння системи рівнянь замінити еквівалентним рівнянням, то дістанемо систему рівнянь, еквівалентну даній системі.

Теорема 2. Якщо одне з рівнянь системи еквівалентне сукупності k рівнянь, то система рівнянь еквівалентна сукупності k систем.

Наприклад:

$$\begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y) = f(x,y)\cdot p(x,y), \\ \varphi(x,y) = \psi(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = \psi(x,y), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,y) = p(x,y), \\ \varphi(x,y) = \psi(x,y). \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 3. Якщо одна система рівнянь еквівалентна другій системі, яка, у свою чергу, еквівалентна третій, то перша система рівнянь еквівалентна третій системі (властивість транзитивності).

Теорема 4. Система рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x,y)=\varphi_1(x,y), \\ f_2(x,y)=\varphi_2(x,y) \end{cases}$$

еквівалентна такій системі

$$\begin{cases} f_1(x,y)\pm f_2(x,y)=\varphi_1(x,y)\pm\varphi_2(x,y), \\ f_2(x,y)=\varphi_2(x,y). \end{cases}$$

Дві системи рівнянь з n змінними називаються еквівалентними на деякій числовій множині, якщо множини їх розв'язків на цій множині рівні.

Для розв'язування систем застосовують відомі загальні методи, такі як метод підстановки, метод заміни змінних, метод алгебраїчного додавання. Але коло застосування цих методів суттєво обмежене, тому розглянемо деякі інші спеціальні методи розв'язування систем.

§ 2. СИСТЕМИ З ОДНИМ ЛІНІЙНИМ РІВНЯННЯМ

Якщо в системі одне рівняння є лінійним, а друге – цілим раціональним рівнянням n-го степеня

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ P(x,y)=0, \end{cases}$$

то її можна розв'язати двома способами:

1) використовуємо метод підстановки, а саме: з першого рівняння системи виражаємо одну невідому через іншу й підставляємо в друге рівняння. Дістаємо ціле раціональне рівняння n-го степеня з однією невідомою;

2) якщо можливо, то ліву частину другого рівняння розкладаємо на множники й отримуємо еквівалентну сукупність систем.

Частковий випадок. При розв'язуванні системи $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases}$

складаємо квадратне рівняння, використовуючи обернену теорему Вієта.

Приклад 2.1. (I рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-2y=-7, \\ x^2-xy-y^2=29. \end{cases}$

Розв'язання. Використовуємо метод підстановки. З першого рівняння визначаємо $x=2y-7$ і підставляємо це значення x у друге рівняння системи: $(2y-7)^2-(2y-7)y-y^2=29.$

Після спрощень останнє рівняння набуває вигляду $y^2-21y+20=0.$ Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} x=2y-7, \\ y^2-21y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-7, \\ \left[\begin{array}{l} y_1=1, \\ y_2=20 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-5, \\ y_1=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=33, \\ y_2=20. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(-5;1),(33;20)\}.$

Приклад 2.2. (I рівень). Знайти 125 % від $2x+y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases}$

Розв'язання. Використовуючи обернену теорему Вієта, складаємо квадратне рівняння $t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=3. \end{array}\right.$ Таким чином, дістаємо $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2, \end{cases} \end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l} 2x_1+y_1=7, \\ 2x_2+y_2=8. \end{array}\right.$

Обчислюємо 125 % від правих частин рівнянь отриманої сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{7\cdot 125}{100}=8,75, \\ \dfrac{8\cdot 125}{100}=10. \end{array}\right.$$

Відповідь: 8,75 і 10.

Приклад 2.3. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x^3 + y^3 = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Застосовуємо метод підстановки. З першого рівняння системи дістаємо $y = 2x - 1$ і підставляємо це значення y у друге рівняння системи: $x^3 + (2x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$.

В останньому рівнянні як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Маємо $x_1 = 1$. Використовуємо схему Горнера

	3	–4	2	–1
1	3	–1	1	0

Отже, рівняння $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ можна записати у вигляді $(x-1)(3x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ 3x^2 - x + 1 = 0. \end{array}\right.$

Друге рівняння сукупності має $D < 0$, тобто дійсних коренів не має. Таким чином, $x_1 = 1$ і $y_1 = 2x_1 - 1 = 1$.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(1; 1)\}$.

Приклад 2.4. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ y^4 + y^2(3x - 5) + x(2x - 5) = 0. \end{cases}$

Розв'язання. I спосіб. Використовуємо метод підстановки. Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} x = 1 + y, \\ y^4 + y^2(3 + 3y - 5) + (1 + y)(2 + 2y - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ y^4 + 3y^3 - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ y^3(y + 3) - (y + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ (y + 3)(y^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ (y + 3)(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y_1 = -3, \\ x_1 = 1 - 3 = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 1 + 1 = 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

II спосіб. Розкладемо ліву частину другого рівняння початкової системи на множники. Для цього позначимо $y^2 = t$. Дістаємо $t^2 + t(3x - 5) + x(2x - 5) = 0$. Розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно t.

$$t = \frac{-(3x-5) \pm \sqrt{(3x-5)^2 - 4x(2x-5)}}{2} = \frac{-3x + 5 \pm (x - 5)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -x, \\ t = 5 - 2x. \end{array}\right.$$

Отже, початкова система є еквівалентною сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y^2 = -x, \\ x - y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = 5 - 2x, \\ x - y = 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = y + 1, \\ y^2 = -y - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y + 1, \\ y^2 = 5 - 2y - 2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y_1 = -3, \\ x_1 = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(-2; -3), (2; 1)\}$.

Приклад 2.5. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуємо метод підстановки. Дістаємо

$$\begin{cases} x = 2 - y - z, \\ 4y - 2y^2 - 2yz - z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y - z, \\ (y - 2)^2 + (y + z)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = -2, \\ x = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \{(2; 2; -2)\}$.

§ 3. СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ

Загальний вигляд системи:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + m_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + m_2 = 0. \end{cases}$$

Така система може мати не більше чотирьох розв'язків. Методи розв'язання: 1) розкладання на множники лівої частини одного з рівнянь системи; 2) виключення в одному з рівнянь системи члена, що містить x^2 або y^2.

Частковий випадок. При розв'язуванні системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$ друге рівняння множимо на 2. Отримане нове рівняння додаємо до першого рівняння системи, а потім віднімаємо від першого рівняння.

Приклад 3.1. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = x^2 - y^2, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння даної системи дістаємо $(x+y)(x-y-1)=0$. Таким чином, початкова система буде еквівалентною сукупності двох систем.

Систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases}$ можна розв'язувати і методом підстановки, отримаємо біквадратні рівняння

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 0, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \end{cases} \end{array}\right.$$

для розв'язання яких використовуємо метод підстановки.

Відповідь: $\{(x,y)\} = \{\left(\frac{\sqrt{29}}{4}; -\frac{\sqrt{29}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{29}}{4}; \frac{\sqrt{29}}{4}\right),$

$(-2;-3), (3;2)\}.$

Приклад 3.2. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + 5y - 2 = 0, \\ 2xy + y^2 + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи розв'язуємо як квадратне відносно x:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 8\left(-3y^2 + 5y - 2\right)}}{4} = \frac{y \pm (5y - 4)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 - y, \\ x = \dfrac{3y - 2}{2}. \end{array} \right.$$

Дістаємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 - y, \\ 2xy + y^2 + y - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3y - 2}{2}, \\ 2xy + y^2 + y - 1 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Виконуючи підстановку в першій системі сукупності, дістаємо квадратне рівняння відносно y:

$$y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}, \\ y_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}, \end{array} \right.$$

отже, маємо $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$

Аналогічно розв'язуємо другу систему сукупності. Дістаємо $x_3 = \dfrac{3\sqrt{17} - 13}{16}$, $y_3 = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{8}$, $x_4 = \dfrac{-3\sqrt{17} - 13}{16}$, $y_4 = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{8}$.

$$\textit{Відповідь}:\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{3\sqrt{17}-13}{16};\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right),\left(\frac{-3\sqrt{17}-13}{16};\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)\right\}.$$

Приклад 3.3. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2. \end{cases}$

Розв'язання. Обидві частини другого рівняння системи множимо на 2. Отримане рівняння додаємо до першого рівняння системи, а потім віднімаємо, дістаємо

$$\begin{cases} (x+y)^2=9, \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 3, \\ x-y=\pm 1. \end{cases}$$

Остання система еквівалентна сукупності чотирьох лінійних систем. Алгебраїчним додаванням дістаємо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;1),(1;2),(-2;-1),(-1;-2)\}$.

Приклад 3.4. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5x^2+14y=19, \\ 7y^2+10x=17. \end{cases}$

Розв'язання. Використовуємо метод підстановки. Визначаємо x з другого рівняння системи і підставляємо у перше рівняння. Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} x=\dfrac{17-7y^2}{10}, \\ 5\cdot\left(\dfrac{17-7y^2}{10}\right)^2+14y=19. \end{cases}$$

Друге рівняння системи приводимо до вигляду $7y^4-34y^2+40y-13=0$. Щоб розв'язати останнє рівняння, як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Очевидно $y_1=1$. Застосовуємо схему Горнера:

	7	0	–34	40	–13
1	7	7	–27	13	0
1	7	14	–13	0	

Таким чином, $y_1 = y_2 = 1$. Дістаємо квадратне рівняння відносно y: $7y^2 + 14y - 13 = 0 \Leftrightarrow y_{3,4} = \frac{-7 \pm 2\sqrt{35}}{7}$.

Значення x знаходимо з першого рівняння еквівалентної системи $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{35}}{5}$.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{(1;1), \left(\frac{-5+2\sqrt{35}}{5}; \frac{-7+2\sqrt{35}}{7}\right),\right.$

$\left.\left(\frac{-5-2\sqrt{35}}{5}; \frac{-7-2\sqrt{35}}{7}\right)\right\}.$

Приклад 3.5. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Розв'язання. Подамо задану систему у вигляді $\begin{cases} 6x^2 - 6y^2 = 30, \\ 5xy = 30. \end{cases}$

Віднімаємо від першого рівняння системи друге, дістаємо однорідне рівняння $6x^2 - 5xy - 6y^2 = 0$.

В останньому рівнянні очевидно $y \neq 0$, всі його члени ділимо на y^2:

$$6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) - 6 = 0.$$

Робимо заміну $\frac{x}{y} = t$, тоді маємо квадратне рівняння відносно t

$$6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{3}{2}, \\ t_2 &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Таким чином, дістаємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2},\\ xy=6,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{3},\\ xy=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}y,\\ xy=6,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}y,\\ xy=6.\end{cases}\end{array}\right.$$

З першої системи знаходимо $x_1=3, x_2=-3, y_1=2, y_2=-2.$ Друга системи сукупності дійсних коренів не має.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(3;2),(-3;-2)\}.$

Приклад 3.6. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x^2+y^2+3x+2y=29,\\ 2x^2-y^2+3x-2y=-1.\end{cases}$

Розв'язання. Додамо задані рівняння системи, дістаємо квадратне рівняння відносно x: $2x^2+3x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=-\dfrac{7}{2}.\end{array}\right.$

Виконуємо підстановку знайдених значень x у друге рівняння системи, знаходимо y, тобто

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y^2+2y-15=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{7}{2},\\ y^2+2y-15=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ \left[\begin{array}{l}y_1=3,\\ y_2=-5,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{7}{2},\\ \left[\begin{array}{l}y_3=3,\\ y_4=-5.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(2;3),(2;-5),\left(-\dfrac{7}{2};3\right),\left(-\dfrac{7}{2};-5\right)\right\}.$

Приклад 3.7. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Додаємо задані рівняння системи, дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0, \\ 8x^2 - 3xy + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0, \\ x(8x - 3y + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ 4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 8x - 3y + 4 = 0, \\ 4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{8x + 4}{3}, \\ 4x^2 + 4x + 1 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

У другій системі маємо $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 0$.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{(0; 1), (0; -1), \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)\right\}$.

Приклад 3.8. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо задані рівняння системи, тоді дістаємо $(x + y)^2 + (x + y) = 30$. Робимо заміну $x + y = t$, тоді отримуємо квадратне рівняння відносно t: $t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 5. \end{array}\right.$

Записуємо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -6, \\ x^2 + xy + x = 10, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + xy + x = 10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Використовуючи метод підстановки, знаходимо x і y.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{(-2; -4), \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{10}{3}\right)\right\}$.

§ 4. СИМЕТРИЧНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Визначення 1. Многочлен $P(x, y)$ називається симетричним, якщо він не зміниться, коли змінні x і y поміняти місцями.

Найпростіші симетричні многочлени з двома змінними: $x+y$ і xy. Всі інші виражаються через найпростіші:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy;$$

$$x^3+y^3=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right);$$

$$x^4+y^4=\left((x+y)^2-2xy\right)^2-2x^2y^2.$$

Симетричною системою з двома невідомими називається система вигляду $\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0, \end{cases}$ у якій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – симетричні многочлени.

У симетричних системах з двома невідомими робиться заміна $\begin{cases} x+y=t, \\ xy=v. \end{cases}$

Визначення 2. Многочлен $P(x,y,z)$ називається симетричним, якщо він не зміниться, коли змінні x, y, z поміняти місцями.

Найпростіші симетричні многочлени з трьома змінними: $x+y+z, xy+xz+yz, xyz.$ Всі інші виражаються через найпростіші:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz),$$

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz.$$

Симетричною системою з трьома невідомими називається система вигляду:

$$\begin{cases} P(x,y,z)=0, \\ Q(x,y,z)=0, \\ R(x,y,z)=0, \end{cases}$$

де $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – симетричні многочлени.

У симетричних системах з трьома невідомими робиться заміна
$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ xy+xz+yz=v, \\ xyz=w. \end{cases}$$

Приклад 4.1. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=67, \\ x+y=9. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану систему можна розв'язати методом підстановки, а також як симетричну систему. Виділимо у першому рівнянні системи повний квадрат суми
$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=67, \\ x+y=9. \end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases} x+y=t, \\ xy=v, \end{cases}$ тоді система набуває вигляду
$$\begin{cases} t^2-v=67, \\ t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81-v=67, \\ t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=14, \\ t=9. \end{cases}$$

Отже, $\begin{cases} x+y=9, \\ xy=14. \end{cases}$ Використовуємо обернену теорему Вієта, складаємо квадратне рівняння $z^2-9z+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2, \\ z_2=7. \end{array}\right.$

Таким чином, дістаємо $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=7, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=7, \\ y_2=2. \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;7),(7;2)\}$.

Приклад 4.2. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо симетричну систему. Подаємо вираз x^3+y^3 через найпростіші симетричні многочлени. Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+x^3y^3=17,\\ x+y+xy=5.\end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases}x+y=t,\\ xy=v,\end{cases}$ тоді маємо

$$\begin{cases}t\left(t^2-3v\right)+v^3=17,\\ t+v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=5-t,\\ t^2-5t+6=0.\end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння системи, дістаємо $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t_1=2,\\ v_1=3,\end{cases}\\ \begin{cases}t_2=3,\\ v_2=2.\end{cases}\end{array}\right.$

Отже, повертаючись до змінних x і y, маємо

$$\begin{cases}x+y=2,\\ xy=3,\end{cases} \cup \begin{cases}x+y=3,\\ xy=2.\end{cases}$$

Використовуємо обернену теорему Вієта, маємо сукупність двох квадратних рівнянь $\left[\begin{array}{l}z^2-2z+3=0,\\ z^2-3z+2=0.\end{array}\right.$

Перше рівняння сукупності не має дійсних коренів. З другого рівняння знаходимо $z_1=2$ і $z_2=1$. Отже,

$$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1\end{cases} \cup \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;1),(1;2)\}$.

Приклад 4.3. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x^4+y^4=17(x+y)^2,\\ xy=2(x+y).\end{cases}$

Розв'язання. Маємо симетричну систему з двома невідомими. Робимо заміну $\begin{cases} x+y=t, \\ xy=v. \end{cases}$ Спочатку виражаємо x^4+y^4 через t і v:

$$x^4+y^4=\left((x+y)^2-2xy\right)^2-2x^2y^2=t^4-4t^2v+2v^2.$$

Маємо систему $\begin{cases} t^4-4t^2v+2v^2=17t^2, \\ v=2t. \end{cases}$

Розв'язки останньої отриманої системи:

$\{(t,v)\}=\{(0;0),(9;18),(-1;-2)\}$.

Дістаємо сукупність систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0, \\ xy=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=9, \\ xy=18, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=6, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=6, \\ y_3=3, \end{cases} \end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_4=-2, \\ y_4=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_5=1, \\ y_5=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(0;0),(3;6),(6;3),(-2;1),(1;-2)\}$.

Приклад 4.4. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1, \\ x^4+x^2y^2+y^4=1. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=1, \\ \left((x+y)^2-2xy\right)^2-x^2y^2=1. \end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases} x+y=t, \\ xy=v. \end{cases}$ Тоді дістаємо

$$\begin{cases} t^2-v=1, \\ \left(t^2-2v\right)^2-v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-v=1, \\ t^4-4t^2v+3v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = t^2 - 1, \\ t^4 - 4t^2\left(t^2 - 1\right) + 3\left(t^2 - 1\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 1, \\ v = t^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ v_1 = 0, \end{cases} \cup \begin{cases} t_2 = -1, \\ v_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, маємо два випадки:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 1, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = -1, \end{cases} \cup \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\left\{\left(x, y\right)\right\} = \left\{\left(0; 1\right), \left(1; 0\right), \left(0; -1\right), \left(-1; 0\right)\right\}$.

Приклад 4.5. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy\left(x+1\right)\left(y+1\right) = 72, \\ \left(x-1\right)\left(y-1\right) = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо симетричну систему, перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} xy\left(xy + x + y + 1\right) = 72, \\ xy - \left(x + y\right) = 1. \end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = v. \end{cases}$ Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} v\left(v + t + 1\right) = 72, \\ v - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = v - 1, \\ v\left(v + v - 1 + 1\right) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = v - 1, \\ v^2 = 36, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v_1 = 6, \\ t_1 = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} v_2 = -6, \\ t_2 = -7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, маємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=-7, \\ xy=-6. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(2;3),(3;2),\left(\frac{-7+\sqrt{73}}{2};\frac{-7-\sqrt{73}}{2}\right),\right.$

$\left.\left(\frac{-7-\sqrt{73}}{2};\frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)\right\}.$

Приклад 4.6. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є симетричною. Застосуємо формулу скороченого множення $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ і перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ \left(x^2+y^2\right)^2-3x^2y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 25-3x^2y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^2y^2=4. \end{cases}$$

Використовуємо обернену теорему Вієта, складаємо квадратне рівняння $z^2-5z+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4, \\ z_2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=4, \\ y^2=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=1, \\ y^2=4, \end{cases} \end{array}\right.$

звідки отримаємо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1),$

$(1;2),(1,-2),(-1;2),\ (-1;-2)\}.$

Приклад 4.7. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10\left(x^4+y^4\right)=-17\left(x^3y+xy^3\right), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} 10\left(\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\right)=-17xy\left(x^2+y^2\right), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Використовуючи умову другого рівняння системи, перше рівняння системи перепишемо у вигляді

$$10\left(25-2x^2y^2\right)=-85xy \Leftrightarrow 4x^2y^2-17xy-50=0.$$

Розв'язуємо останнє рівняння як квадратне рівняння відносно xy, дістаємо $\left[\begin{array}{l} xy=\dfrac{25}{4}, \\ xy=-2. \end{array}\right.$ Таким чином, маємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=\dfrac{25}{4}, \\ x^2+y^2=5, \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=\dfrac{25}{4}, \\ (x+y)^2-2xy=5, \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2, \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=\dfrac{25}{4}, \\ x+y=\pm\sqrt{\dfrac{35}{2}}, \end{cases} \\ \begin{cases} xy=-2, \\ x+y=\pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Застосовуючи обернену теорему Вієта, розв'язуємо отримані системи.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;-1),(-1;2),(-2;1),(1;-2)\}$.

Приклад 4.8. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(u^2+v^2\right)(u+v)=15uv, \\ \left(u^4+v^4\right)\left(u^2+v^2\right)=85u^2v^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо очевидний розв'язок $u_1=0, v_1=0.$ Знаходимо інші розв'язки. Друге рівняння системи поділимо на перше, перше рівняння залишаємо в системі без змін, $u+v\neq 0$, дістаємо

$$\begin{cases}\left(u^2+v^2\right)(u+v)=15uv,\\ \dfrac{u^4+v^4}{u+v}=\dfrac{17}{3}uv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u^2+v^2\right)(u+v)=15uv,\\ 3\left(u^4+v^4\right)=17uv(u+v)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left((u+v)^2-2uv\right)(u+v)=15uv,\\ 3\left(\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2\right)=17uv(u+v).\end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases}u+v=t,\\ uv=z,\end{cases}$ дістаємо систему рівнянь відносно t і z:

$$\begin{cases}\left(t^2-2z\right)t=15z,\\ 3\left(\left(t^2-2z\right)^2-2z^2\right)=17tz.\end{cases}$$

Застосовуємо метод підстановки. З першого рівняння системи знаходимо $z=\dfrac{t^3}{2t+15}$ і підставляємо в друге рівняння системи. Після спрощень дістаємо рівняння $t^4\left(3t^2+17t-210\right)=0.$ Оскільки $t\neq 0,$ то $t_1=-\dfrac{35}{3},$ $t_2=6.$ Тоді $z_1=\dfrac{1715}{9},$ $z_2=8.$

Таким чином, маємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases}u+v=-\dfrac{35}{3},\\ uv=\dfrac{1715}{9},\end{cases}\cup\begin{cases}u+v=6,\\ uv=8.\end{cases}$$

Перша система рівнянь дійсних розв’язків не має. Друга система має розв’язки:

$u_2=2, v_2=4, u_3=4, v_3=2.$

Відповідь: $\{(u,v)\}=\{(0;0),(2;4),(4;2)\}.$

Приклад 4.9. (III рівень). Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$$

Розв’язання. Маємо симетричну систему, перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} xy\left(x^2 + x^2y + 2xy + xy^2 + y^2\right) = 30, \\ xy(x+y) + xy + (x+y) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\left((x+y)^2 + xy(x+y)\right) = 30, \\ xy(x+y) + xy + (x+y) = 11. \end{cases}$$

Робимо заміну: $\begin{cases} x + y = t, \\ xy = v, \end{cases}$ тоді дістаємо

$$\begin{cases} v\left(t^2 + tv\right) = 30, \\ tv + v + t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vt(t+v) = 30, \\ vt + (t+v) = 11. \end{cases}$$

Робимо ще раз заміну: $\begin{cases} t + v = u, \\ vt = w, \end{cases}$ тоді остання система набуває вигляду $\begin{cases} wu = 30, \\ w + u = 11. \end{cases}$

Використовуємо обернену теорему Вієта

$$z^2 - 11z + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 5, \\ z_2 = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1 = 5, \\ w_1 = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} u_2 = 6, \\ w_2 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t + v = 5, \\ tv = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} t + v = 6, \\ tv = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Знову використовуємо обернену теорему Вієта і дістаємо $t_1 = 2, v_1 = 3, t_2 = 3, v_2 = 2, t_3 = 5, v_3 = 1, t_4 = 1, v_4 = 5.$

Таким чином, маємо сукупність чотирьох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Використовуючи обернену теорему Вієта, знаходимо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(1;2),(2;1),\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right),\right.$

$\left.\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}.$

Приклад 4.10. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$$

Розв'язання. За оберненою теоремою Вієта для кубічного рівняння невідомі x, y і z є коренями рівняння

$$t^3-6t^2+11t-6=0.$$

Як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Очевидно $t_1=1$.

Використовуємо схему Гронера

	1	–6	11	–6
1	1	–5	6	0

Дістаємо квадратне рівняння $t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_2=2, \\ t_3=3. \end{array}\right.$

Послідовність (1; 2; 3) є розв'язком початкової системи. Оскільки система симетрична, то розв'язками будуть також послідовності, які утворені різноманітними перестановками чисел 1, 2, 3.

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),$

$(3;1;2),(3;2;1)\}.$

Приклад 4.11. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо симетричну систему з трьома невідомими. Робимо заміну

$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ xy+xz+yz=v, \\ xyz=w. \end{cases}$$

Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} t=2, \\ t^2-2v=6, \\ t^3-3tv+3w=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ v=-1, \\ w=-2. \end{cases}$$

Таким чином, одержали систему

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-1, \\ xyz=-2. \end{cases}$$

Аналогічно до розв'язання приклада 4.10 складаємо кубічне рівняння:

$$r^3-2r^2-r+2=0 \Leftrightarrow (r+1)(r-1)(r-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r_1=-1, \\ r_2=1, \\ r_3=2. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(-1;1;2),(-1;2;1),(1;-1;2),(1;2;-1),$

$(2;-1;1),(2;1;-1)\}.$

Приклад 4.12. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ x^2+y^2+z^2=41, \\ x^3+y^3+z^3=189. \end{cases}$$

Розв'язання. Цей приклад можна розв'язати не тільки за допомогою заміни (див. приклад 4.11), але й іншим методом:

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ x^2+y^2+z^2=41, \\ x^3+y^3+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ (x+y)^2-2xy+z^2=41, \\ (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ (9-z)^2-2xy+z^2=41, \\ (9-z)\left((9-z)^2-3xy\right)+z^3=189 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9-z, \\ xy=z^2-9z+20, \\ (9-z)\left((9-z)^2-3\left(z^2-9z+20\right)\right)+z^3=189. \end{cases}$$

Останнє рівняння системи переписуємо у вигляді:

$$z^3-9z^2+20z=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=0, \\ z_2=4, \\ z_3=5. \end{array}\right.$$

Підставляємо знайдені значення z у перше і друге рівняння системи.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=0, \\ x+y=9, \\ xy=20, \end{cases} \\ \begin{cases} z=4, \\ x+y=5, \\ xy=0, \end{cases} \\ \begin{cases} z=5, \\ x+y=4, \\ xy=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_1=0, \\ x_1=5, \\ y_1=4, \end{cases} \\ \begin{cases} z_3=4, \\ x_3=0, \\ y_3=5, \end{cases} \\ \begin{cases} z_5=5, \\ x_5=0, \\ y_5=4, \end{cases} \end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_2=0, \\ x_2=4, \\ y_2=5, \end{cases} \\ \begin{cases} z_4=4, \\ x_4=5, \\ y_4=0, \end{cases} \\ \begin{cases} z_6=5, \\ x_6=4, \\ y_6=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(0;5;4),(0;4;5),(4;5;0),(4;0;5),$
$(5;0;4),(5;4;0)\}.$

§ 5. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ РІЗНИЦЮ НЕПАРНИХ СТЕПЕНІВ І СУМУ ПАРНИХ СТЕПЕНІВ НЕВІДОМИХ *X* І *Y*

Якщо невідомі x і y входять у систему у вигляді комбінацій $x-y, xy, x^2+y^2, x^3-y^3, \dots,$ то робимо заміну

$$\begin{cases} x-y=t, \\ xy=v. \end{cases}$$

Приклад 5.1. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8\left(x^2+xy+y^2\right)=(x-y)^3, \\ 2\left(x^2-xy+y^2\right)=3(x-y). \end{cases}$$

Розв'язання. Робимо заміну $\begin{cases} x-y=t, \\ xy=v. \end{cases}$

Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} 8\left(t^2+3v\right)=t^3, \\ 2\left(t^2+v\right)=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3t-2t^2}{2}, \\ t\left(t^2+16t-36\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1=0, \\ v_1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} t_2=2, \\ v_2=-1, \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} t_3=-18, \\ v_3=-351 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ xy=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=2, \\ xy=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-18, \\ xy=-351 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(0;0),(1;-1)\}$.

Приклад 5.2. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3-y^3=63, \\ xy=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо задану систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=63,\\ xy=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)\left((x-y)^2+3xy\right)=63,\\ xy=4.\end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases}x-y=t,\\ xy=v,\end{cases}$

тоді дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases}t\left(t^2+3v\right)=63,\\ v=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^3+12t-63=0,\\ v=4.\end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи. Як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Отримуємо $t_1=3$.

Використовуємо схему Горнера

	1	0	12	–63
3	1	3	21	0

Дістаємо квадратне рівняння $t^2+3t+21=0$, яке дійсних коренів не має ($D<0$). Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases}x-y=3,\\ xy=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3+y,\\ y(3+y)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3+y,\\ y^2+3y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=4,\\ y_2=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(-1;-4),(4;1`)\}$.

Приклад 5.3. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x^2+y^2=2,5xy,\\ x-y=0,25xy.\end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases}(x-y)^2=0,5xy,\\ x-y=0,25xy.\end{cases}$$

Робимо заміну $\begin{cases}x-y=t,\\ xy=v,\end{cases}$ тоді дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} t^2 = 0,5v, \\ t = 0,25v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4t, \\ t^2 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1 = 0, \\ v_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t_2 = 2, \\ v_2 = 8. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 8 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 4, \\ y_3 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(0;0), (-2;-4), (4;2)\}$.

§ 6. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Однорідні системи мають вигляд:

1) $\begin{cases} A(x, y) = a, \\ B(x, y) = b, \end{cases}$

де a і b – дійсні числа; $A(x, y)$ і $B(x, y)$ – однорідні вирази однакового степеня однорідності;

2) $\begin{cases} A_1(x, y) = A_2(x, y), \\ B_1(x, y) = B_2(x, y), \end{cases}$

де $A_1(x, y)$ і $B_1(x, y)$ – однорідні вирази одного однакового степеня однорідності; $A_2(x, y)$ і $B_2(x, y)$ – однорідні вирази іншого однакового степеня однорідності.

В однорідних системах з двома невідомими робимо заміну $y = tx$, де t – нова змінна, а з трьома невідомими – заміна $y = tx, z = vx$, де t і v – нові змінні.

Приклад 6.1. (ІІ рівень). Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ xy + 4y^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. I спосіб. Ліві частини системи – однорідні вирази другого степеня однорідності відносно x і y. Робимо заміну $y = tx$. Дістаємо систему

$$\begin{cases} y = tx, \\ x^2 + 3tx^2 = 18, \\ tx^2 + 4t^2x^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, \\ x^2(1+3t) = 18, \\ tx^2(1+4t) = 7. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння системи на третє рівняння, тоді маємо

$$\begin{cases} t \ne 0,\, t \ne -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1+3t}{t(1+4t)} = \dfrac{18}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ne 0, \\ t \ne -\dfrac{1}{4}, \\ 72t^2 - 3t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{3}, \\ t_2 = -\dfrac{7}{24}. \end{array} \right.$$

Підставляємо знайдені значення t у друге рівняння системи і знаходимо x: $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 12$.

Тепер з першого рівняння системи знаходимо y:

$y_{1,2} = \pm 1$, $y_{3,4} = \pm 3,5$.

II спосіб. Розв'яжемо цей приклад штучним методом. Додамо два рівняння заданої системи:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 25 \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y = 5, \\ x + 2y = -5. \end{array} \right.$$

Отже, маємо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 - 2y, \\ xy + 4y^2 = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 - 2y, \\ xy + 4y^2 = 7 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 - 2y, \\ 2y^2 + 5y - 7 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 - 2y, \\ 2y^2 - 5y - 7 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 12, \\ y_2 = -3,5, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = -12, \\ y_3 = 3,5, \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(3;1), (-3;-1), (12;-3,5), (-12;3,5)\}$.

Приклад 6.2. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} + xy = 1, \\ \dfrac{y^3}{x} + xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f): \begin{cases} y \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Маємо однорідну систему. Робимо заміну $y = tx.$ Дістаємо систему

$$\begin{cases} y = tx, \\ \dfrac{x^2\left(t^2+1\right)}{t} = 1, \\ x^2 t\left(t^2+1\right) = 4. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння системи на третє, отримаємо $t = \pm 2.$ Далі з довільного рівняння системи дістаємо $x,$ а потім $y.$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{ \left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}; 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \right), \left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}; -2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \right) \right\}.$

Приклад 6.3. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -2, \\ 5x^2 + xy - 13y^2 = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. В даній однорідній системі робимо заміну $y = tx.$ Дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} y = tx, \\ x^2\left(3 - 5t - 4t^2\right) = -2, \\ x^2\left(5 + t - 13t^2\right) = 9. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння системи на третє і знаходимо t:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{2}, \\ t_2 = -\dfrac{37}{31}. \end{array} \right.$$

Підставляємо знайдені значення t у друге рівняння системи і знаходимо x: $x_{1,2} = \pm 2$. Далі з першого рівняння дістаємо y: $y_{1,2} = \pm 1$.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(2;1), (-2;-1)\}$.

Приклад 6.4. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи є однорідним. Очевидно $x \neq 0$. Поділимо всі члени рівняння на x^2 і робимо заміну $\frac{y}{x} = t$.

Дістаємо рівняння

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2}, \\ t_2 = -2. \end{array} \right.$$

Отже, маємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 = 7 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ x_{1,2} = \pm 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{(2;1), (-2;-1), \left(\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{-2\sqrt{21}}{3}\right),\right.$

$\left.\left(-\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{2\sqrt{21}}{3}\right)\right\}$.

Приклад 6.5. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^3 - 6xy^2 + 11x^2y - 6x^3 = 0, \\ xy^2 + 2x^2y - 3x^3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обидва рівняння системи є однорідними, тому вона має принаймні нульовий розв'язок (0; 0). Для знаходження решти розв'язків кожне рівняння системи ділимо на x^3 і робимо заміну $\frac{y}{x}=t.$ Дістаємо

$$\begin{cases} t^3-6t^2+11t-6=0, \\ t^2+2t-3=0. \end{cases}$$

Перше рівняння системи має розв'язки $\{1;2;3\}$, а друге – $\{1;-3\}$. Отже, розв'язком системи є $t=1$. Відповідно до заміни це означає, що система має безліч розв'язків вигляду $y=x$, куди входить і нульовий розв'язок.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(k;k)\}$ де $k\in R.$

Приклад 6.6. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана система є однорідною, але розв'яжемо її не за допомогою заміни, а штучним методом. Додамо й віднімемо рівняння системи:

$$\begin{cases} x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-27, \\ x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=343 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=-27, \\ (x-y)^3=343 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;-5)\}.$

Приклад 6.7. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2-y^2+3y=0, \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3y, \\ x^2+3xy+2y^2=-2x-4y, \end{cases}$$

тоді ліві частини рівнянь системи – однорідні вирази другого степеня однорідності, а праві частини рівнянь – однорідні вирази першого степеня однорідності, тобто маємо однорідну систему. Очевидно $x_1 = 0,\ y_1 = 0.$ Для знаходження інших коренів системи робимо заміну $y = tx.$ Дістаємо

$$\begin{cases} y = tx, \\ x^2\left(1-t^2\right) = -3tx, \\ x^2\left(1+3t+2t^2\right) = -x\left(2+4t\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx, \\ x\left(t-1\right)\left(t+1\right) = 3t, \\ 2x\left(t+1\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = -4\left(t+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t+\dfrac{1}{2} = 0, \\ x\left(t-1\right)\left(t+1\right) = 3t, \\ y = tx, \end{cases} \\ \begin{cases} x\left(t+1\right) = -2, \\ x\left(t+1\right)\left(t-1\right) = 3t, \\ y = tx \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -\dfrac{10}{7}, \\ y_2 = -\dfrac{4}{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{\left(x,y\right)\right\} = \left\{\left(0;0\right),\left(2;-1\right),\left(-\dfrac{10}{7};-\dfrac{4}{7}\right)\right\}.$

Приклад 6.8. (II рівень). Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + x^2y = 10x. \end{cases}$$

Розв’язання. Маємо однорідну систему. Перепишемо її у вигляді:

$$\begin{cases} x\left(x^2+y^2\right) = 40y, \\ y\left(x^2+y^2\right) = 10x. \end{cases}$$

Очевидно, що $x_1 = 0,\ y_1 = 0.$ Для знаходження решти коренів поділимо перше рівняння системи на друге. Дістаємо $\frac{x}{y} = 4\frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y.$ Отже, маємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2y, \\ x\left(x^2 + y^2\right) = 40y, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ x\left(x^2 + y^2\right) = 40y \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = -4 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = -4, \\ y_3 = -2. \end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\} = \{(0;0),(4;2),(-4;-2)\}.$

§7. ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ

Приклад 7.1. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{20}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f): \begin{cases} y \neq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Якщо одне з рівнянь системи містить обернені дроби, то робимо заміну: один із дробів приймаємо за t (t – нова невідома). В даному прикладі заміна $\frac{x}{y} = t,$ тоді перше рівняння системи набуває вигляду

$$t - \frac{1}{t} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow 20t^2 - 9t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{5}{4}, \\ t_2 = -\dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$$

Дістаємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}y,\\ x^2+y^2=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{4}{5}y,\\ x^2+y^2=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{5\sqrt{82}}{41},\\ y_1=\dfrac{4\sqrt{82}}{41},\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-\dfrac{5\sqrt{82}}{41},\\ y_2=-\dfrac{4\sqrt{82}}{41},\end{cases}\end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_3=-\dfrac{4\sqrt{82}}{41},\\ y_3=\dfrac{5\sqrt{82}}{41},\end{cases}\\ \begin{cases}x_4=\dfrac{4\sqrt{82}}{41},\\ y_4=-\dfrac{5\sqrt{82}}{41}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{\left(\dfrac{5\sqrt{82}}{41};\dfrac{4\sqrt{82}}{41}\right),\left(-\dfrac{5\sqrt{82}}{41};-\dfrac{4\sqrt{82}}{41}\right),\right.$

$\left.\left(-\dfrac{4\sqrt{82}}{41};\dfrac{5\sqrt{82}}{41}\right),\left(\dfrac{4\sqrt{82}}{41};-\dfrac{5\sqrt{82}}{41}\right)\right\}.$

Приклад 7.2. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}xy=2,\\ zx=3,\\ yz=6.\end{cases}$$

Розв'язання. Перемножимо всі три рівняння системи $x^2y^2z^2=36 \Leftrightarrow xyz=\pm 6.$ Поділивши останнє рівняння на кожне рівняння системи, знаходимо x, y, z:

$x=\pm 1,\ y=\pm 2,\ z=\pm 3.$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;2;3),(-1;-2;-3)\}.$

Приклад 7.3. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}xy+yz=8,\\ yz+zx=9,\\ zx+xy=5.\end{cases}$$

Розв'язання. Додамо всі рівняння системи й отриману суму поділимо на 2. Дістаємо рівняння $xy+zx+yz=11$.

Віднімаємо від останнього рівняння послідовно кожне рівняння системи. Маємо систему

$$\begin{cases} zx = 3, \\ xy = 2, \\ yz = 6. \end{cases}$$

Ця система збігається з прикладом 7.2.

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \{(1; 2; 3), (-1; -2; -3)\}$.

Приклад 7.4. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2 y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану систему можна розв'язувати як 1) симетричну; 2) однорідну. Але можна застосувати і штучний метод: друге рівняння системи домножимо на 3 і додамо до першого рівняння. Дістаємо систему

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 125, \\ xy(x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(2, 3), (3; 2)\}$.

Приклад 7.5. (III рівень). Вказати, скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{zx}{y} = \dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{xy}{z} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ z \neq 0. \end{cases}$ Перемножимо всі три рівняння системи. Дістаємо $xyz = 30$. Ділимо останнє рівняння на кожне рівняння системи, знаходимо:

$$\begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 2, \\ z = \pm 5. \end{cases}$$

Враховуючи знаки невідомих, отримуємо відповідь: 4 розв'язки.

Відповідь: 4 розв'язки.

Приклад 7.6. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{23}{4}, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

У першому рівнянні системи робимо заміну $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = t$. Обидві частини заміни підносимо до квадрата, знаходимо $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = t^2 + 2.$

Підставляємо в перше рівняння, дістаємо квадратне рівняння відносно t:

$$4t^2 + 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{3}{2}, \\ t_2 &= -\frac{5}{2}. \end{aligned} \right.$$

Отже, маємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1, \end{cases} \cup \begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y}=2, \\ x-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2}, \\ x-y=1, \end{cases} \end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}, \\ x-y=1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{4}, \\ x-y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи останні системи методом підстановки, дістаємо відповідь.

Відповідь $\{(x,y)\}=\left\{(2;1),\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right),\left(\dfrac{\sqrt{41}-5}{\sqrt{41}-9};\dfrac{4}{\sqrt{41}-9}\right),\right.$ $\left.\left(\dfrac{\sqrt{41}+5}{\sqrt{41}+9};\dfrac{4}{-\sqrt{41}-9}\right)\right\}.$

Приклад 7.7. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+xy-xz=2, \\ y^2+xy-yz=3, \\ z^2-xz-yz=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є однорідною, її можна розв'язати за допомогою заміни $y=tx, z=vx,$ але можна й штучним методом. Додамо всі три рівняння системи:

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz=9 \Leftrightarrow (x+y-z)^2=9 \Leftrightarrow x+y-z=\pm 3.$$

Перепишемо початкову систему у вигляді

$$\begin{cases} x(x+y-z)=2, \\ y(x+y-z)=3, \\ z(x+y-z)=-4. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x+y-z=\pm 3,$ дістаємо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x=2,\\3y=3,\\3z=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}-3x=2,\\-3y=3,\\-3z=-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3},\\y_1=1,\\z_1=-\dfrac{4}{3},\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-\dfrac{2}{3},\\y_2=-1,\\z_2=\dfrac{4}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{2}{3};1;-\frac{4}{3}\right),\left(-\frac{2}{3};-1;\frac{4}{3}\right)\right\}.$

Приклад 7.8. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x^3=5x+y,\\y^3=x+5y.\end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є однорідною, але розв'яжемо її штучним методом. Додамо й віднімемо рівняння системи, дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases}x^3+y^3=6(x+y),\\x^3-y^3=4(x-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-6(x+y)=0,\\(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-4(x-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2-6\right)=0,\\(x-y)\left(x^2+xy+y^2-4\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0,\\x-y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=0,\\x^2+xy+y^2-4=0,\end{cases}\end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-xy+y^2-6=0,\\x-y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-xy+y^2-6=0,\\x^2+xy+y^2-4=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

З перших трьох систем сукупності знаходимо $x_1=0,\ y_1=0,$ $x_2=2,\ y_2=-2,\ x_3=-2,\ y_3=2,\ x_4=y_4=\sqrt{6},\ x_5=y_5=-\sqrt{6}.$

Четверту систему сукупності розв'яжемо таким чином: додамо і віднімемо рівняння, дістаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} xy=-1, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ (x+y)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=-1, \\ x+y=\sqrt{3}, \end{cases} \cup \begin{cases} xy=-1, \\ x+y=-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Використовуємо обернену теорему Вієта, для кожної з останніх систем складаємо квадратні рівняння

$$\left[\begin{array}{l} t^2-\sqrt{3}t-1=0, \\ t^2+\sqrt{3}t-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_{1,2}=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}, \\ t_{3,4}=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2}. \end{array}\right.$$

Отже, дістаємо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\Big\{(0;0),(2;-2),(-2;2),\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right),$

$$\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right),\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)\Big\}.$$

Приклад 7.9. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-y)\left(x^2+y^2\right)=5, \\ (x+y)\left(x^2-y^2\right)=9. \end{cases}$$

Розв'язання. I с п о с і б. Маємо однорідну систему, робимо заміну $y=tx$:

$$\begin{cases} y=tx, \\ x^3(1-t)\left(1+t^2\right)=5, \\ x^3(1+t)\left(1-t^2\right)=9. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння системи на третє, очевидно $t \neq \pm 1$. Дістаємо квадратне рівняння відносно t:

$$\frac{1+t^2}{(1+t)^2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t_1 = 2, \\ &t_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Далі з другого рівняння системи знаходимо x:

$$\left[\begin{aligned} &x^3 = -1, \\ &x^3 = 8 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x_1 = -1, \\ &x_2 = 2. \end{aligned}\right.$$

З першого рівняння $y = tx$ знаходимо y:

$$\left[\begin{aligned} &y_1 = -2, \\ &y_2 = 1. \end{aligned}\right.$$

II спосіб. Розв’яжемо початкову систему штучним методом. Перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - x^2 y - y^3 = 5, \\ x^2 - xy^2 + x^2 y - y^3 = 9. \end{cases}$$

Додамо і віднімемо рівняння останньої системи:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ xy(x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 7, \\ xy(x-y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left((x-y)^2 + 3xy\right) = 7, \\ xy(x-y) = 2. \end{cases}$$

Робимо заміну

$$\begin{cases} x - y = t, \\ xy = v, \end{cases}$$

тоді дістаємо систему відносно t і v:

$$\begin{cases} t\left(t^2 + 3v\right) = 7, \\ tv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 3tv = 7, \\ tv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 1, \\ tv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ v = 2. \end{cases}$$

Отже, для знаходження x і y отримуємо систему:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(-1; -2), (2; 1)\}$.

Приклад 7.10. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ (x + y)^2 - \dfrac{y^2}{2} = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо однорідну систему, її можна розв'язати штучним методом. Перепишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ 2x^2 + y^2 + 4xy = 14. \end{cases}$$

Віднімаємо від другого рівняння системи перше, дістаємо $xy = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{y}$. Це значення x підставляємо в перше рівняння системи

$$\frac{8}{y^2} + y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = t, t > 0 \\ \dfrac{8}{t} + t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 6t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \\ t_2 = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \\ y_{3,4} = \pm 2. \end{array} \right.$$

Отже, знаходимо $x: \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \\ x_{3,4} = \pm 1. \end{array} \right.$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \left\{\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right), (1; 2), (-1; -2)\right\}$.

Приклад 7.11. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3xy^2 - x^2 y - 2x^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x\left(3y^2 - xy - 2x^2\right) = 0, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \\ \begin{cases} 3y^2 - xy - 2x^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases} \end{array} \right.$$

Із першої системи сукупності дістаємо

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 2\sqrt{2}, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Перше рівняння в другій системі є однорідним. Очевидно $x \neq 0,$ отже всі доданки цього рівняння ділимо на x^2 :

$$3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 2 = 0.$$

Робимо заміну $\frac{y}{x} = t,$ отже, $3t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\frac{2}{3}. \end{array} \right.$

Дістаємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -2, \end{cases} \end{array} \right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_5 = -6\sqrt{\frac{2}{13}}, \\ y_5 = 4\sqrt{\frac{2}{13}}, \end{cases} \\ \begin{cases} x_6 = 6\sqrt{\frac{2}{13}}, \\ y_6 = -4\sqrt{\frac{2}{13}}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \Big\{\left(0; 2\sqrt{2}\right), \left(0; -2\sqrt{2}\right), (2; 2), (-2; -2),$

$\left(-6\sqrt{\frac{2}{13}}; 4\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(6\sqrt{\frac{2}{13}}; -4\sqrt{\frac{2}{13}}\right)\Big\}.$

Приклад 7.12. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^3 y + xy^3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану систему можна розв'язувати: 1) як однорідну, 2) як симетричну, 3) штучним методом. Розглянемо розв'язання системи штучним методом. Перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = 17, \\ xy\left(x^2 + y^2\right) = 10. \end{cases}$$

Робимо заміну $x^2 + y^2 = t, t > 0, xy = v,$ тоді дістаємо систему

$$\begin{cases} t^2 - 2v^2 = 17, \\ tv = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{10}{t}, \\ t^4 - 17t^2 - 200 = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння останньої системи – біквадратне. Робимо заміну $t^2 = u,\ u > 0,$ тоді це біквадратне рівняння перепишемо у вигляді:

$$u^2 - 17u - 200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 25, \\ u_2 = -8 - \text{сторонній корінь.} \end{array} \right.$$

Оскільки $t > 0,$ то дістаємо $t = 5.$ Отже, маємо систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y\right)^2 = 9, \\ \left(x - y\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pm 3, \\ x - y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2, \end{cases} \end{array} \right. \cup \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(2;1), (1;2), (-1;-2), (-2;-1)\}.$

Приклад 7.13. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19\left(x - y\right), \\ x^3 + y^3 = 7\left(x + y\right). \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи формули скороченого множення, дану систему перепишемо у вигляді

$$\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-19(x-y)=0,\\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-7(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)\left(x^2+xy+y^2-19\right)=0,\\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2-7\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ x+y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=0,\\ x^2-xy+y^2-7=0,\end{cases}\end{array}\right.\cup\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+xy+y^2-19=0,\\ x+y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+xy+y^2-19=0,\\ x^2-xy+y^2-7=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

З перших трьох систем сукупності дістаємо відповіді: $x_1=0$, $y_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{7}$, $y_{2,3}=\pm\sqrt{7}$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{19}$, $y_{4,5}=\mp\sqrt{19}$.

У четвертій системі сукупності від першого рівняння віднімемо друге рівняння: $xy=6$, тоді $x=\dfrac{6}{y}$. Це значення x підставляємо в перше рівняння системи:

$$\frac{36}{y^2}+6+y^2-19=0\Leftrightarrow y^4-13y^2+36=0.$$

Отримали біквадратне рівняння. Робимо заміну $y^2=t,\ t>0$, тоді дістаємо рівняння $t^2-13t+36=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=9,\\ t_2=4.\end{array}\right.$ Отже,

$\left[\begin{array}{l}y^2=9,\\ y^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_{6,7}=\pm3,\\ y_{8,9}=\pm2.\end{array}\right.$ Знаходимо $x: x_{6,7}=\pm2,\ x_{8,9}=\pm3.$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(0,0),\left(\sqrt{7};\sqrt{7}\right),\left(-\sqrt{7};-\sqrt{7}\right),\left(\sqrt{19};-\sqrt{19}\right),\right.$ $\left.\left(-\sqrt{19};\sqrt{19}\right),(2;3),(-2;-3),(3;2),(-3;-2)\right\}.$

Приклад 7.14. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 20, \\ x^4 + y^2 = 20. \end{cases}$$

Розв'язання. Від першого рівняння даної системи віднімемо друге рівняння, дістаємо:

$$x^2 + y^4 - x^4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - y^2\right) - \left(x^4 - y^4\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = y^2, \\ x^2 = 1 - y^2. \end{array}\right.$$

Підставимо в перше рівняння системи $x^2 = y^2$:

$y^4 + y^2 - 20 = 0.$ Робимо заміну $y^2 = t,\ t > 0,$ тоді маємо

$$t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 4, \\ t_2 = -5 \ - \text{сторонній корінь.} \end{array}\right.$$

Отже, $y^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = \pm 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = \pm 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Підставимо в перше рівняння системи $x^2 = 1 - y^2$:

$y^4 - y^2 - 19 = 0.$ Робимо заміну $y^2 = z,\ z > 0,$ тоді маємо

$$z^2 - z - 19 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{77}}{2}, \\ z_2 = \dfrac{1 - \sqrt{77}}{2} - \text{сторонній корінь.} \end{array}\right.$$

Отже, $y^2 = \dfrac{1 + \sqrt{77}}{2},$ тоді $x^2 = 1 - y^2 = 1 - \dfrac{1 + \sqrt{77}}{2} < 0,$ що неможливо.

Відповідь: $\left\{(x, y)\right\} = \left\{(2;2), (2;-2), (-2;2)(-2;-2)\right\}.$

Приклад 7.15. (II рівень). Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x+y)+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ (x+y)\cdot\dfrac{x^2}{y^2}=12. \end{cases}$$

Розв’язання. $D(f): y\neq 0.$ Позначимо $\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=v, \end{cases}$ тоді відносно змінних u і v система набуває вигляду $\begin{cases} u+v=7, \\ u\cdot v=12, \end{cases}$ звідси знаходимо $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1=3, \\ v_1=4, \end{cases} \\ \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=3. \end{cases} \end{array}\right.$

Таким чином, початкова система є еквівалентною сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=4, \end{cases} \cup \begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{x^2}{y^2}=3. \end{cases}$$

Розв’яжемо першу систему:

$$\begin{cases} x^2=4y^2, \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2y, \\ 3y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2y, \\ -y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=6, \\ y_2=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогічно дістаємо

$$\begin{cases} x^2=3y^2, \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y\sqrt{3}, \\ y\left(1+\sqrt{3}\right)=4, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y\sqrt{3}, \\ y\left(1-\sqrt{3}\right)=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=6-2\sqrt{3}, \\ y_3=2\left(\sqrt{3}-1\right), \end{cases} \cup \begin{cases} x_4=6+2\sqrt{3}, \\ y_4=-2\left(\sqrt{3}+1\right). \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;1),(6;-3),(6-2\sqrt{3};2\sqrt{3}-2),$

$(6+2\sqrt{3};-2\sqrt{3}-2)\}.$

Приклад 7.16. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\ \begin{cases} y\neq 0, \\ x\neq 0. \end{cases}$ Віднімаємо від першого рівняння даної системи друге рівняння, дістаємо: $-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}.$ Позначимо $\dfrac{x}{y}=t,$ тоді $6t^2+5t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-\dfrac{3}{2}, \\ t_2=\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Дістаємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{2}, \\ xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \end{cases} \cup \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}, \\ xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y, \\ -\dfrac{3}{2}y^2=\dfrac{23}{6}, \end{cases} \cup \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{2}{3}y^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=-3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\{(2;3),(-2;-3)\}.$

Приклад 7.17. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$ Позначимо $\begin{cases} x^2+y^2=u, \\ 2xy=v, \end{cases}$ тоді дістаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u}+v=\dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{v}+u=\dfrac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5uv=21u-5, \\ 4uv=21v-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20uv=84u-20, \\ 20uv=105v-20. \end{cases}$$

Віднімаємо від першого рівняння останньої системи друге рівняння, маємо

$$84u-105v=0 \Leftrightarrow 4u=5v \Leftrightarrow u=\frac{5}{4}v.$$

Дістаємо систему

$$\begin{cases} u=\dfrac{5}{4}v, \\ 4uv=21v-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{5}{4}v, \\ 5v^2-21v+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v_1=4, \\ u_1=5, \end{cases} \\ \begin{cases} v_2=\dfrac{1}{5}, \\ u_2=\dfrac{1}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, відносно x і y маємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2xy=4, \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{4}, \\ 2xy=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо відповідь.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(2;1),(-2;-1),(1;2),(-1;-2),\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right),\right.$
$\left.\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\right),\left(\dfrac{\sqrt{5}}{10};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{10};-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}.$

Приклад 7.18. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(x+y)(x+2y)(x+3y)=60,\\(y+x)(y+2x)(y+3x)=105.\end{cases}$$

Розв'язання. Поділимо друге рівняння системи на перше, дістаємо

$$\begin{cases}x+y\neq 0,\\ \dfrac{(y+2x)(y+3x)}{(x+2y)(x+3y)}=\dfrac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\neq 0,\\38y^2+15xy-17x^2=0,\\x+2y\neq 0,\\x+3y\neq 0.\end{cases}$$

Рівняння $38y^2+15xy-17x^2=0$ можна розв'язати або як однорідне, поділивши на y^2, або як квадратне відносно y:

$$y=\frac{-15x\pm\sqrt{225x^2+2584x^2}}{76}=\frac{-15x\pm 53x}{76}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{x}{2},\\ y=-\dfrac{17}{19}x.\end{array}\right.$$

Підставляємо ці значення сукупності в перше рівняння початкової системи, знаходимо $x_1=2,\ x_2=\dfrac{19\sqrt[3]{4}}{4}.$ Таким чином, $y_1=1,\ y_2=-\dfrac{17\sqrt[3]{4}}{4}.$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(2;1),\left(\dfrac{19\sqrt[3]{4}}{4};-\dfrac{17\sqrt[3]{4}}{4}\right)\right\}.$

Приклад 7.19. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14,\\x+y=3.\end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\ y\neq 0.$ У першому рівнянні системи позначимо $\dfrac{x}{y}=t.$ Дістаємо рівняння відносно t: $t^3+t^2+t-14=0.$

Як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Очевидно $t_1 = 2.$ Використовуємо схему Горнера

	1	1	1	–14
2	1	3	7	0

Рівняння $t^2 + 3t + 7 = 0$ дійсних коренів не має $\left(D < 0\right)$, отже, дістаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(x, y\right)\right\} = \left\{\left(2;1\right)\right\}.$

Приклад 7.20. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + \dfrac{y}{x} = 2\left(x^2 + y^2\right), \\ xy - \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\ \begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ Віднімаємо від першого рівняння друге, дістаємо $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = x^2 + y^2,$ звідси, враховуючи $D(f)$, знаходимо $y = \dfrac{1}{x}.$ $x^2 + y^2 \neq 0,$ оскільки в протилежному випадку $x = 0$ і $y = 0.$

Підставляємо $y = \dfrac{1}{x}$ у перше рівняння початкової системи:

$$1 + \frac{1}{x^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow 2x^4 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Відповідь: $\left\{\left(x, y\right)\right\} = \varnothing.$

Приклад 7.21. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x+y-2)=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{y}{x}(x+y-1)=9. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$ Позначимо $\begin{cases} x+y-1=u, \\ \dfrac{x}{y}=v, \end{cases}$ тоді відносно u і v дістаємо систему

$$\begin{cases} v(u-1)=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{u}{v}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=9v, \\ v(9v-1)=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=9v, \\ 27v^2-3v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v_1=\dfrac{1}{3}, \\ u_1=3, \end{cases} \\ \begin{cases} v_2=-\dfrac{2}{9}, \\ u_2=-2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відносно x і y дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x+y-1=3, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}, \end{cases} \cup \begin{cases} x+y-1=-2, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x, \\ 4x=4, \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\dfrac{9}{2}x, \\ -\dfrac{7}{2}x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=\dfrac{2}{7}, \\ y_2=-\dfrac{9}{7}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(1;3),\left(\frac{2}{7},-\frac{9}{7}\right)\right\}.$

Приклад 7.22. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=72,\\(x+z)(x+y+z)=96,\\(y+z)(x+y+z)=120.\end{cases}$$

Розв'язання. Додаємо всі три рівняння:

$$(x+y+z)(2x+2y+2z)=288\Leftrightarrow(x+y+z)^2=144\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)=\pm12.$$

Отже, дістаємо сукупність двох систем рівнянь

$$\begin{cases}x+y=6,\\x+z=8,\\y+z=10,\\x+y+z=12,\end{cases}\cup\begin{cases}x+y=-6,\\x+z=-8,\\y+z=-10,\\x+y+z=-12,\end{cases}$$ звідки

$$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=4,\\z_1=6,\end{cases}\cup\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=-4,\\z_2=-6.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(2;4;6),(-2;-4;-6)\}.$

Приклад 7.23. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{3}{4},\\[2mm]\dfrac{xz}{x+y}=\dfrac{5}{6},\\[2mm]\dfrac{yz}{x+y}=\dfrac{15}{8}.\end{cases}$$

Розв'язання. $D(f):\begin{cases}x\neq-y,\\x\neq-z,\\y\neq-z.\end{cases}$ Очевидно $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0,$

перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15}. \end{cases}$$

Додамо всі три рівняння останньої системи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{15}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=\dfrac{23}{15}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{23}{15}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{23}{15}-\dfrac{8}{15}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=3, \\ z_1=5. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;3;5)\}$.

Приклад 7.24. (III рівень). Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ yz+zx+xy=27. \end{cases}$$

Розв’язання. $D(f):\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0, \\ z\neq 0. \end{cases}$ З другого рівняння системи дістаємо $yz+zx+xy=xyz$ і, враховуючи третє рівняння, отримуємо систему, еквівалентну початковій системі

$$\begin{cases} x+y+z=9, \\ yz+zx+xy=27, \\ xyz=27. \end{cases}$$

Останню систему можна розв’язати двома способами.

І спосіб. За оберненою теоремою Вієта для кубічного рівняння невідомі x, y і z є коренями рівняння $t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow (t-3)^3 = 0,$ тобто $x_1 = 3, y_1 = 3, z_1 = 3.$

ІІ спосіб. Помножимо друге рівняння системи на z:

$$\begin{cases} x + y = 9 - z, \\ z^2(x+y) + xyz = 27z, \\ xyz = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 9 - z, \\ z^2(9-z) + 27 - 27z = 0, \\ xyz = 27. \end{cases}$$

Друге рівняння останньої системи має вигляд

$z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 3,$ отже,

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ y_1 = 3. \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \{(3;3;3;)\}.$

Приклад 7.25. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = xyz, \\ y + z = xyz, \\ z + x = xyz. \end{cases}$$

Розв'язання. Очевидно, що $(0; 0; 0)$ є розв'язком системи. Перепишемо перше і третє рівняння у вигляді:

$$\begin{cases} y = x(yz-1), \\ z = x(yz-1), \text{ звідки } \ y = z. \end{cases}$$

Тепер перепишемо перше і друге рівняння початкової системи у вигляді

$$\begin{cases} x = y(xz-1), \\ z = y(xz-1), \text{ звідки } \ x = z. \end{cases}$$

Таким чином, дістаємо $x = y = z.$ Підставимо ці значення в перше рівняння початкової системи: $2x = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}. \end{array} \right.$

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \{(0;0;0), (\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}), (-\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}.$

Приклад 7.26. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ x+y+z=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \text{ якщо } x>0, y>0, z>0. \end{cases}$$

Розв'язання. Додаємо перше і третє рівняння системи, маємо

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+2=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ y=z, \\ z=x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$$

Підставляємо ці значення в друге рівняння початкової системи: $3x=3 \Leftrightarrow x_1=1, y_1=1, z_1=1.$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;1;1)\}.$

Приклад 7.27. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+6y-z^2=-6, \\ y^2+4x+z=-4, \\ 7x-11y+2z(z+1)=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше і друге рівняння системи перепишемо у вигляді:

$$\begin{cases} z^2=x^2+6y+6, \\ z=-4x-y^2-4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення для z^2 і z у третє рівняння системи:

$$7x-11y+2\left(x^2+6y+6\right)+2\left(-4x-y^2-4\right)=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x+y+2x^2-2y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x+2y-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0, \\ 2x+2y-1=0. \end{array}\right.$$

Дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x=y, \\ x^2+6y-z^2=-6, \\ y^2+4x+z=-4, \end{cases} \cup \begin{cases} 2x+2y-1=0, \\ x^2+6y-z^2=-6, \\ y^2+4x+z=-4. \end{cases}$$

Розв’яжемо першу систему останньої сукупності:

$$\begin{cases} x=y, \\ x^2+6x-z^2=-6, \\ x^2+4x+z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ (x+2)^2=-z, \\ x^2+6x+6=z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ (x+2)^2=-z, \\ x^2+6x+6=(x+2)^4. \end{cases}$$

Перепишемо останнє рівняння системи $(x+3)^2-3=(x+2)^4$. Робимо заміну $x+2=t$, тоді $(t+1)^2-3=t^4 \Leftrightarrow t^4-t^2-2t+2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2+2t+2\right)=0 \Leftrightarrow t=1$. Отже $x=t-2$, $x_1=y_1=z_1=1$.

Розв’яжемо другу систему сукупності:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1-2x}{2}, \\ x^2+3-6x-z^2=-6, \\ \left(\dfrac{1-2x}{2}\right)^2+4x+z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1-2x}{2}, \\ (x-3)^2-z^2=0, \\ 4x^2+12x+4z=-17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1-2x}{2}, \\ z=x-3, \\ 4x^2+12x+4(x-3)=-17, \end{cases} \cup \begin{cases} y=\dfrac{1-2x}{2}, \\ z=3-x, \\ 4x^2+12x+4(3-x)=-17. \end{cases}$$

Друга система останньої сукупності дійсних розв’язків не має.

Перша система сукупності має такі розв’язки:

$$\begin{cases} x_2 = -2 + \dfrac{\sqrt{11}}{2}, \\ y_2 = \dfrac{5-\sqrt{11}}{2}, \\ z_2 = -5 + \dfrac{\sqrt{11}}{2}, \end{cases} \cup \begin{cases} x_3 = -2 - \dfrac{\sqrt{11}}{2}, \\ y_3 = \dfrac{5+\sqrt{11}}{2}, \\ z_3 = -5 - \dfrac{\sqrt{11}}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\} = \{(-1;-1;-1),$

$$\left(-2+\frac{\sqrt{11}}{2};\frac{5-\sqrt{11}}{2};-5+\frac{\sqrt{11}}{2}\right), \left(-2-\frac{\sqrt{11}}{2};\frac{5+\sqrt{11}}{2};-5-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)\Bigg\}.$$

Приклад 7.28. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6, \\ 3x + 2y + z = 7, \\ (x-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Від другого рівняння системи віднімаємо перше:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6, \\ x + y = 1, \\ (x-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ 2(1-y) + y + z = 6, \\ (1-y-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ y = z - 4, \\ -(z-4)^3 + (z-2)^3 + (z-3)^3 = 7. \end{cases}$$

Останнє рівняння системи набуває вигляду

$z^3 - 3z^2 - 9z + 22 = 0.$

Як цілі корені перевіряємо дільники вільного члена. Очевидно $z_1 = 2.$ Використовуємо схему Горнера

	1	–3	–9	22
2	1	–1	–11	0

Дістаємо квадратне рівняння

$$z^2 - z - 11 = 0 \Leftrightarrow z_{2,3} = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$

Підставляємо знайдені значення z у систему, знаходимо x і y.

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \left\{(3; -2; 2), \left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{3\sqrt{5}-7}{2}; \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right),\right.$

$\left.\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2}; -\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)\right\}.$

Приклад 7.29. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + x^2 = 1, \\ \dfrac{x^2}{x-y} = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. $D(f): x \neq y$. Зробимо заміну $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = u, \\ x^2 = v, \\ v > 0, \end{cases}$ тоді

відносно u і v дістаємо систему

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u \cdot v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2, \\ u = -1. \end{cases}$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = -1, \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + x, \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}, \\ y_1 = 1 + \sqrt{2}, \end{cases} \\ &\begin{cases} x_2 = -\sqrt{2}, \\ y_2 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{\left(\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)\right\}.$

Приклад 7.30. (ІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи перепишемо у вигляді $y^2-(2x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+1, \\ y=-(2x+1). \end{array}\right.$ Дістаємо сукупність двох систем
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x+1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-(2x+1), \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Виконуючи в системах сукупності відповідні підстановки, знаходимо x і y.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(0;1),(0;-1),\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\right\}.$

Приклад 7.31. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y+z=10+x, \\ yz=10x+1 \end{cases}$ у цілих числах.

Розв'язання. З другого рівняння даної системи визначаємо $y=\dfrac{10x+1}{z}$ і підставляємо це значення в перше рівняння:
$$\frac{10x+1}{z}+z=10+x \Leftrightarrow x=z-\frac{1}{10-z}.$$

Оскільки x, z – цілі числа, то $10-z=\pm 1$, звідки $\left[\begin{array}{l} z_1=9, \\ z_2=11. \end{array}\right.$ Отже, знаходимо x і y:
$$\begin{cases} x_1=8, \\ y_1=9, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2=12, \\ y_2=11. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(8;9;9),(12;11;11)\}.$

Приклад 7.32. (III рівень). Визначити, скільки дійсних розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=z^2+1. \end{cases}$

За оберненою теоремою Вієта x і y є коренями квадратного рівняння $t^2-2t+z^2+1=0 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{-z^2}$. Оскільки x і $y-$дійсні розв'язки, то $z=0$. Отже, $x=y=1$.

Відповідь: один дійсний розв'язок.

Приклад 7.33. (III рівень). Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ x+y+z+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Додаємо перше і друге рівняння даної системи, дістаємо

$$x^2+y^2+x+y+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{2}.$$

Підставляємо знайдені значення x і y у друге рівняння початкової системи, знаходимо $z=\dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}.$

Приклад 7.34. (III рівень). Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2xy-2y-z^2=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуємо метод підстановки:

$$\begin{cases} z = 3 - x - y, \\ 2xy - 2y - (3 - x - y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - x - y, \\ \left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 - x - y, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x, y, z)\} = \{(3; 2; -2)\}$.

Приклад 7.35. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. З третього рівняння системи дістаємо $x^3 + y^3 = 8 + z^3 \Leftrightarrow (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 8 + z^3$. З першого і другого рівнянь початкової системи знаходимо

$$x + y = 2 + z,$$

$$x^2 + y^2 = 6 - z^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 6 - z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{(2+z)^2 - \left(6 - z^2\right)}{2} = z^2 + 2z - 1.$$

Значення $x + y, x^2 + y^2$ і xy підставляємо у третє рівняння системи. Дістаємо

$$(2+z)\left(6 - z^2 - z^2 - 2z + 1\right) = (2+z)\left(4 - 2z + z^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+z)\left(z^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1, \\ z_2 = -1, \\ z_3 = -2. \end{array}\right.$$

Таким чином, маємо сукупність трьох систем рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \\ z = 1, \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2, \\ z = -1, \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = 0, \\ xy = -1, \\ z = -2, \end{cases}$$

звідки знаходимо шість розв'язків даної системи.

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;2;1),(2;1;1),(2;-1;-1),(-1;2;-1),$ $(1;-1;-2),(-1;1;-2)\}.$

Приклад 7.36. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+xy+y=5, \\ y+yz+z=11, \\ z+zx+x=7. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння заданої системи x виражається раціонально через y, а з другого рівняння z виражається раціонально через y.

Маємо $x=\dfrac{5-y}{y+1},\ z=\dfrac{11-y}{y+1}\quad (y\neq -1).$

Підставляємо отримані значення у третє рівняння системи, дістаємо

$$\frac{11-y}{y+1}+\frac{(11-y)(5-y)}{(y+1)^2}+\frac{5-y}{y+1}=7 \Leftrightarrow y^2+2y-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=2, \\ y_2=-4. \end{array}\right.$$

Тепер знаходимо x і z: $\begin{cases} x_1=1, \\ z_1=3, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2=-3, \\ z_2=-5. \end{cases}$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;2;3),(-3;-4;-5)\}.$

Приклад 7.37. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} x+z=13-y, \\ (x+z)^2-2xz+y^2=91, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Підставляємо у друге рівняння системи вирази $x+z$ і xz із першого і третього рівнянь системи. Дістаємо рівняння відносно y

$$(13-y)^2-2y^2+y^2=91 \Leftrightarrow y=3.$$

Тепер із системи $\begin{cases} x+z=10, \\ zx=9 \end{cases}$ знаходимо $\begin{cases} x_1=1, \\ z_1=9, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2=9, \\ z_2=1. \end{cases}$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(1;3;9),(9;3;1)\}$.

Приклад 7.38. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1, \\ y^2-(z-x)^2=4, \\ z^2-(x-y)^2=9. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана система є однорідною. Її можна розв'язати за допомогою заміни $y=tx, z=vx$, де t і v – нові змінні. Але краще розв'язати дану систему штучним методом. Розкладаємо ліві частини рівнянь системи на множники, дістаємо таку систему:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z)=1, \\ (y-z+x)(y+z-x)=4, \\ (z-x+y)(z+x-y)=9. \end{cases}$$

Перемножимо всі три рівняння системи, маємо добуток $(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)=\pm 6.$

Використовуючи рівняння останньої системи, дістаємо сукупність двох лінійних систем

$$\begin{cases} -x+y+z=6, \\ x-y+z=\dfrac{3}{2}, \\ x+y-z=\dfrac{2}{3}, \end{cases} \cup \begin{cases} -x+y+z=-6, \\ x-y+z=-\dfrac{3}{2}, \\ x+y-z=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Розв'язуючи отримані лінійні системи, знаходимо відповідь для заданої системи.

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\dfrac{13}{12};\dfrac{10}{3};\dfrac{15}{4}\right),\left(-\dfrac{13}{12};-\dfrac{10}{3};-\dfrac{15}{4}\right)\right\}.$

§ 8. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ І МОДУЛЯМИ

Приклад 8.1. (II рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - my = 1, \\ x^2 - xy - 2y^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод підстановки

$$\begin{cases} x = my + 1, \\ \left(m^2 - m - 2\right) y^2 + 2\left(m - 2\right) y + 1 = 0. \end{cases}$$

Якщо $m^2 - m - 2 \neq 0,$ тобто $m \neq 2$ і $m \neq -1,$ то з другого рівняння системи дістаємо

$$y_{1,2} = \frac{2 - m \pm \sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2}, \quad \begin{cases} m < 2 \\ m \neq -1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо

$$x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm m\sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2}.$$

Якщо $m = -1,$ то з системи дістаємо $\begin{cases} y = \dfrac{1}{6}, \\ x = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$ Якщо $m = 2,$ то система розв'язків не має.

Відповідь: якщо $m \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(-1; 2\right),$ то

$$\left\{\left(x, y\right)\right\} = \left\{\left(\frac{m - 2 + m\sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2},\ \frac{2 - m + \sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{m - 2 - m\sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2},\ \frac{2 - m - \sqrt{6 - 3m}}{m^2 - m - 2}\right)\right\};$$ якщо $m = 1,$ то

$\left\{\left(x, y\right)\right\} = \left\{\left(\dfrac{5}{6}; \dfrac{1}{6}\right)\right\};$ якщо $m \in \left[2, \infty\right),$ то $\left\{\left(x, y\right)\right\} = \varnothing.$

Приклад 8.2. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9a^3, \\ x^2 y + xy^2 = 6a^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння на 3 і додамо до першого рівняння даної системи, дістаємо $(x+y)^3 = 27a^3 \Leftrightarrow x + y = 3a.$ Друге рівняння початкової системи перепишемо у вигляді $xy(x+y) = 6a^3.$ Якщо $a = 0,$ то $\begin{cases} x_1 = t, \\ y_1 = -t, \end{cases}$ де $t \in R.$ Якщо $a \neq 0,$ то $xy = 2a^2.$ Відносно невідомих x і y дістаємо систему

$$\begin{cases} x + y = 3a, \\ xy = 2a^2. \end{cases}$$

За оберненою теоремою Вієта x і y є коренями квадратного рівняння $t^2 - 3at + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 2a, \\ t_2 = a. \end{array}\right.$ Отже, знаходимо x і y:

$$\begin{cases} x_2 = 2a, \\ y_2 = a, \end{cases} \cup \begin{cases} x_3 = a, \\ y_3 = 2a. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a = 0,$ то $\{(x,y)\} = \{(t,-t)\}$, де $t \in R;$ якщо $a \neq 0,$ то $\{(x,y)\} = \{(2a,a),(a,2a)\}.$

Приклад 8.3. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - ax + ay = 0, \\ xy = a^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Ліву частину першого рівняння розкладаємо на множники $(x-y)(x+y-a) = 0.$

Дістаємо сукупність двох систем

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = a^2, \end{cases} \cup \begin{cases} x + y = a, \\ xy = a^2. \end{cases}$$

Розв'язуємо першу систему:

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = a, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -a, \\ y_2 = -a, \end{cases} \text{де } a \in R.$$

Розв'язуємо другу систему. За оберненою теоремою Вієта x і y є коренями квадратного рівняння

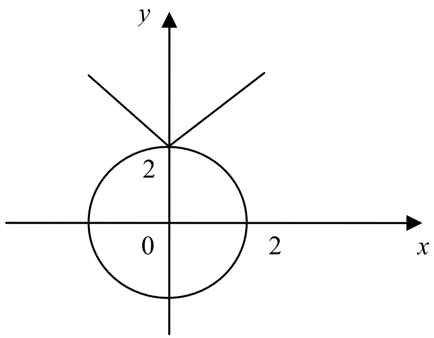
$$t^2 - at + a^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a \pm \sqrt{-3a^2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

отже, при $a = 0$ $x = y = 0$.

Відповідь: $\{(x, y)\} = \{(a; a), (-a; -a)\}$, де $a \in R$.

Приклад 8.4. (III рівень). Знайти найбільше значення параметра a, при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - |x| = a \end{cases}$ має за розв'язок рівно одну пару чисел $(x_0; y_0)$.

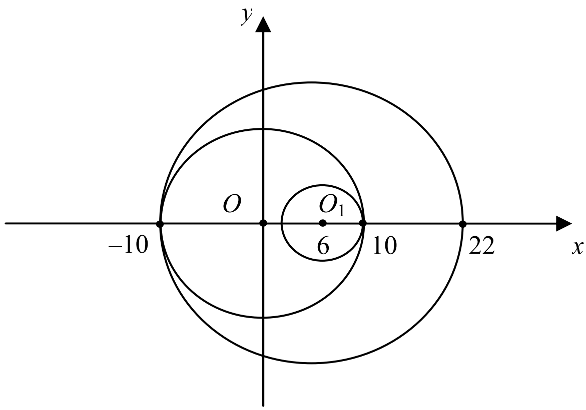
Розв'язання. Дану систему краще розв'язати графічно. Будуємо коло з центром $(0;0)$ і радіусом 2, а також графіки $y = |x| + a$. Очевидно, що $a = 2$ задовольняє умову даної задачі.



Відповідь: $a = 2$.

Приклад 8.5. (II рівень). Знайти найменше значення параметра a, при якому система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ (x - 6)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Маємо два кола: одне з центром $(0;0)$ і радіусом 10, друге з центром $(6;0)$ і радіусом $|a|$.



З рисунка видно, що умова задачі виконується у таких випадках:

1) $|a| = O_1A = 10 - 6 = 4,$ тобто $a = \pm 4;$

2) $|a| = O_1B = 20 - 4 = 16,$ тобто $a = \pm 16.$

Відповідь: $a = -16.$

З першого рівняння системи знаходимо $y = \pm\sqrt{100 - x^2}$. Оскільки система має єдиний розв'язок, то дістаємо систему

$$\begin{cases} y = 0, \\ 100 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = 10, \end{cases} \cup \begin{cases} y_2 = 0, \\ x_2 = -10. \end{cases}$$

Підставляємо знайдені значення $x_{1,2}$ і $y_{1,2}$ у друге рівняння системи

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = 10, \\ 4^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = 10, \\ a = \pm 4. \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 0, \\ x_2 = -10, \\ 16^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 0, \\ x_2 = -10, \\ a = \pm 16. \end{cases}$$

Відповідь: $a = -16.$

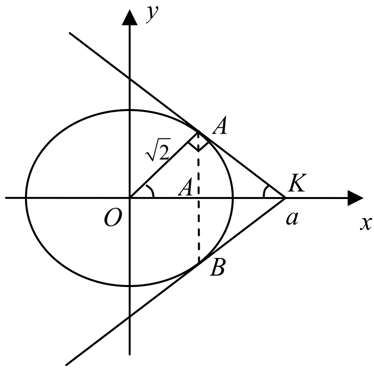
Приклад 8.6. (III рівень). Знайти найбільше значення параметра a, при якому система $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x+|y|=a \end{cases}$ має два розв'язки.

Розв'язання. Побудуємо графіки кожного рівняння системи. Графіком першого рівняння є коло радіуса $r=\sqrt{2}$ з центром у точці $O(0;0)$. Друге рівняння системи перепишемо у вигляді

$$|y|=a-x \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0, \\ y=a-x, \end{cases} \cup \begin{cases} y<0, \\ y=x-a. \end{cases}$$

Графіком першої системи сукупності є промінь $y=a-x$, крайнє положення якого – дотична до кола в точці $A(1;1)$. Графік другої системи симетричний одержаному відносно осі Ox. Із прямокутного трикутника OAK знаходимо $OK=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2.$

Відповідь: $a=2.$



Приклад 8.7. (II рівень). Знайти усі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=4, \\ y=-5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} y=-5, \\ x^2+(5+a)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5, \\ x=\pm\sqrt{4-(5+a)^2}. \end{cases}$$

Оскільки система має один розв'язок, то

$$4-(5+a)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5+a=2, \\ 5+a=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3, \\ a=-7. \end{array}\right.$$

Відповідь: $a=-3$ і $a=-7$.

Приклад 8.8. (II рівень). Знайти найбільше ціле значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} y-x=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ має два розв'язки.

Розв'язання. I спосіб. Використаємо метод підстановки:

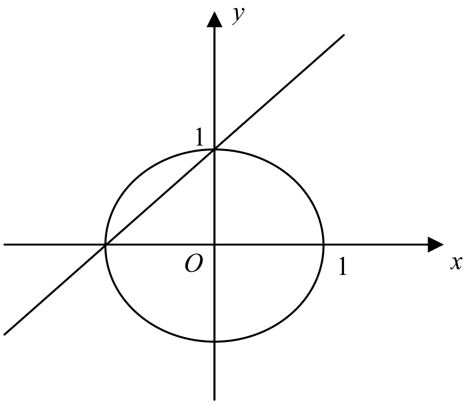
$$\begin{cases} y=x+a, \\ x^2+(x+a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+a, \\ 2x^2+2xa+a^2-1=0. \end{cases}$$

Рівняння останньої системи буде мати два розв'язки, якщо дискримінант більше 0, тобто

$$a^2-2\left(a^2-1\right)>0 \Leftrightarrow a^2-2<0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}.$$

Відповідь: $a=1$.

II спосіб. Розв'яжемо цей приклад графічно. Побудуємо графіки кожного рівняння системи: графіком першого рівняння початкової системи є пряма $y=x+a$, а графіком другого рівняння цієї системи є коло радіуса $r=1$ з центром у точці $O(0;0)$.



Відповідь: $a=1$.

Приклад 8.9. (ІІІ рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є симетричною системою відносно невідомих x, y і z. Робимо заміну

$$\begin{cases} x+y+z=t, \\ xy+xz+yz=v, \\ xyz=w. \end{cases}$$

Оскільки $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+xz+yz)$,

$(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz,$ то для знаходження t, v, w дістаємо систему

$$\begin{cases} t=a, \\ t^2-2v=a^2, \\ t^3-3tv+3w=a^3, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} t=a, \\ v=0, \\ w=0. \end{cases}$$

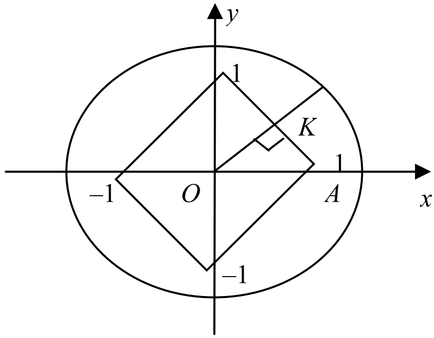
Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+xz+yz=0, \\ xyz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \\ z_1=a, \end{cases} \cup \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=a, \\ z_2=0, \end{cases} \cup \begin{cases} x_3=a, \\ y_3=0, \\ z_3=0, \end{cases} \text{ де } a\in R.$$

Відповідь: $\{(x,y,z)\}=\{(0;0;a),(0;a;0),(a;0;0)\}$, де $a\in R$.

Приклад 8.10. (ІІІ рівень). Знайти кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \ (a>0), \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо приклад графічно. Графіком першого рівняння є коло радіуса $r=a$ з центром у точці $O(0;0)$. Графіком другого рівняння є квадрат. Якщо $a>1$, система розв'язків не має; якщо $a=1$, система має 4 розв'язки.



Із ΔOKA знаходимо $OK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Якщо $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, система має 8 розв'язків;

якщо $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, система має 4 розв'язки;

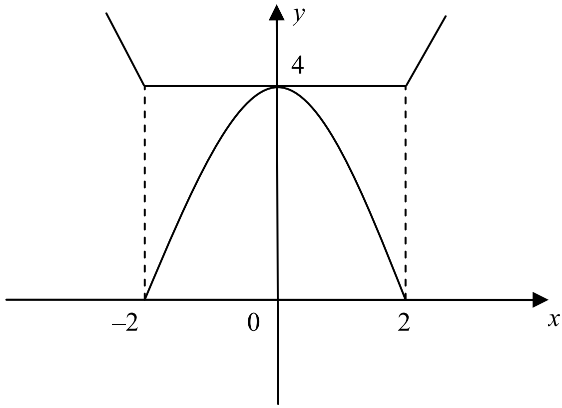
якщо $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, система розв'язків не має.

Відповідь: якщо $a \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; \infty)$, система розв'язків не має; якщо $a \in \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}$, система має 4 розв'язки; якщо $a \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, система має 8 розв'язків.

Приклад 8.11. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y = |x-2| + |x+2|, \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо приклад графічно.



У першому рівнянні маємо парну функцію, тому будуємо графік для $x \ge 0$, а потім цей графік симетрично відображаємо відносно осі OY. Дістаємо систему:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y = |x-2| + x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ y = 2x. \end{cases} \end{array} \right.$$

Графіком другого рівняння є парабола. З рисунка видно, що розв'язком системи є точка $(0;4)$.

Відповідь: $\{(x,y)\} = \{(0;4)\}$.

Приклад 8.12. (III рівень). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1, \\ x^2 + |y| = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи означення модуля, записуємо сукупність чотирьох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ x^2-2x+y=1,\\ x^2+y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x<0,\\ y\ge 0,\\ -x^2+2x+y=1,\\ x^2+y=1,\end{cases}\end{array}\right. \cup \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x\ge 0,\\ y<0,\\ x^2-2x+y=1,\\ x^2-y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x<0,\\ y<0,\\ -x^2+2x+y=1,\\ x^2-y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язком першої системи є $\{(0;1)\}$, розв'язком другої – $\{(1;0)\}$, третьої – $\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$, четверта система розв'язків не має.

Відповідь: $\{(x,y)\}=\left\{(0;1),(1;0),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Приклад 8.13. (III рівень). Нехай x і y задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y=a,\\ x^3+y^3=a^3+6a^2+12a.\end{cases}$$

При якому ненульовому значенні параметра a вираз x^2+y^2 буде найменшим?

Розв'язання. Використовуючи формулу скороченого множення $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$, перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases}x+y=a,\\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a^3+6a^2+12a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=a,\\ x^2-xy+y^2=a^2+6a+12.\end{cases}$$

Обидві частини першого рівняння системи підносимо до квадрата, дістаємо

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=a^2, \\ x^2-xy+y^2=a^2+6a+12. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо

$$x^2+y^2=a^2+4a+8=(a+2)^2+4.$$

Отже, вираз x^2+y^2 набув найменшого значення при $a=-2$.

Відповідь: $a=-2$.

Приклад 8.14. (III рівень). При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$ має лише один розв'язок? Знайти його.

Розв'язання. I спосіб. Перепишемо задану систему в такому вигляді

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=z, \\ x+y=a-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{(a-z)^2-z}{2}, \\ x+y=a-z. \end{cases}$$

Використовуючи обернену теорему Вієта, складаємо квадратне рівняння $t^2-(a-z)t+\dfrac{(a-z)^2-z}{2}=0$. Оскільки має бути лише один розв'язок, то $D=0$, тобто $z^2-2z(a+1)+a^2=0$ і $z=a+1$. Знову бачимо, що дискримінант повинен дорівнювати нулю, тобто $(a+1)^2-a^2=0 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$. Знаходимо $z=\dfrac{1}{2}$. Для знаходження x і y маємо систему рівнянь $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{4}, \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Відповідь: при $a=-\dfrac{1}{2}$ $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

II спосіб. Ліві частини рівнянь системи симетричні відносно x і y. Якщо (x_0,y_0,z_0) – розв'язок даної системи рівнянь, то і

(y_0, x_0, z_0) також розв'язок цієї системи. Щоб система мала лише один розв'язок, необхідно, щоб $x_0 = y_0$, отже, $\begin{cases} 2x^2 = z, \\ 2x + z = a, \end{cases}$ звідси $2x^2 + 2x - a = 0.$ Це рівняння також повинно мати один розв'язок, а це буде, коли $D = 0$, тобто $1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$ При такому значенні a $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}.$

Відповідь: при $a = -\frac{1}{2}$ $\{(x, y, z)\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$

Приклад 8.15. (III рівень). При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$ має лише один розв'язок?

Розв'язання. Перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} y \neq -1, \\ x = -\dfrac{2 + y}{1 + y}, \\ -\dfrac{2 + y}{1 + y} - y = a\left(1 - \dfrac{y(2 + y)}{1 + y}\right). \end{cases}$$

Спрощуємо останнє рівняння системи, дістаємо
$(1 - a)y^2 + (2 - a)y + 2 + a = 0.$

Початкова система має лише один розв'язок, якщо отримане квадратне рівняння має один розв'язок або коли воно має два розв'язки і один з них дорівнює –1. Квадратне рівняння має один розв'язок, коли $a = 1$ або коли $D = 0$, тобто

$$(2 - a)^2 - 4(a - 1)(2 + a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Підставляємо $y = -1$ у квадратне рівняння відносно y, дістаємо, що це число є одним з коренів рівняння при $a = -1$.

Відповідь: $a \in \left\{\pm 1, \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}.$

Приклади для практичних занять і самостійного розв’язування

І рівень

1. Знайти $x+y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь:

1.1. $\begin{cases} x-y=7, \\ \left(x^2-y^2\right)\left(x-y\right)=175. \end{cases}$

А 25. **Б** 10. **В** $\frac{25}{7}$. **Г** інша відповідь.

1.2. $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-xy+y^2=39. \end{cases}$

А 11; 1. **Б** –3; 3. **В** –5; –3. **Г** інша відповідь.

1.3. $\begin{cases} x^2\left(x+y\right)=80, \\ x^2\left(2x-3y\right)=80. \end{cases}$

А 4. **Б** 3. **В** 5. **Г** інша відповідь.

1.4. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

А 3; 4. **Б** 3; –3. **В** 2; 5. **Г** інша відповідь.

2. Знайти $x\cdot y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь:

2.1. $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13. \end{cases}$

А 20. **Б** 15. **В** 10. **Г** інша відповідь.

2.2. $\begin{cases} x^2-y=1, \\ x-y=-5. \end{cases}$

А 5; 10. **Б** –6; 24. **В** 3; –7. **Г** інша відповідь.

2.3. $\begin{cases} \left(2x+3y\right)\left(x+5\right)=6, \\ \left(2x+3y\right)\left(3-y\right)=2. \end{cases}$

А $4;\frac{77}{3}$. **Б** $6;33$. **В** $-4;-\frac{77}{3}$. **Г** інша відповідь.

2.4. $\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x^2-y^2=-6. \end{cases}$

А $3;-\frac{1275}{121}$. **Б** $-3;\frac{1275}{121}$. **В** $5;\frac{12}{11}$. **Г** інша відповідь.

Відповіді

1.1. В
1.2. Б
1.3. В
1.4. Б
2.1. В
2.2. Б
2.3. В
2.4. А

ІІ рівень

1. Розв'язати системи рівнянь:

1.1. $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2,5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x+xy+y=7. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} xy+x-y=3, \\ x^2y-xy^2=2. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} (x-y)^2-(x-y)=6, \\ 2(x^2+y^2)=5xy. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=3. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=3, \\ 3x^2-xy+y^2=3. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} xy=12, \\ xz=15, \\ yz=20. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3-y}=2. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x+y=2a, \\ x^2-2a^2+y^2=2. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x+y=\dfrac{31}{11}a, \\ xy=-\dfrac{52}{11}a^2. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x^2+y^2=15{,}25a^2, \\ xy=-7{,}5a^2. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y=5, \\ (x-2)(y-1)=0. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} |xy-4|=8-x^2, \\ xy=2+y^2. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x-|y+1|=1, \\ x^2+y=10. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x^2+y+1=0, \\ x+y^2+1=0. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=14, \\ x^2+xy-y^2=5. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 2x^2+x-3=(x-1)(y+5), \\ 2x^2-xy-3y=7. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 3x^2+xy+3y^2=34a^2, \\ 3x^2-xy+3y^2=26a^2. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x^2+y^2-4x-3y+5=0, \\ 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x^2+3y-xy=9. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} y-x^2=1, \\ y^2-y-x^4=4. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{2x}+\dfrac{2x}{3x-2y}=2, \\ x^2-8=2x(2y-3). \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x+z=13, \\ x^2-y^2+z^2=8. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} x^3-y^3=169(x-y)^3, \\ xy=56. \end{cases}$

2. Знайти $x-y$, якщо x і y задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$$

3. Розв'язати в цілих числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y+z-x=3. \end{cases}$$

4. Знайти найбільше значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=81, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

5. Знайти значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

6. При яких значеннях параметра m система рівнянь

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy), \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

має дійсні розв'язки?

7. При яких значеннях параметра m система рівнянь

$$\begin{cases} x^2-y^2=m, \\ x+2y=1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

Відповіді

1.1. $\{(x,y)\}=\{(2;1),(-2,-1)\}$.

1.2. $\{(x,y)\}=\{(4;2),(-4;-2),(-4;2),(4;-2)\}$.

1.3. $\{(x,y)\}=\{(1;3),(3;1)\}$.

1.4. $\{(x,y)\}=\{(6;9),(9;6)\}$.

1.5. $\{(x,y)\}=\{(-1;-2),(2;1),(1+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}),$
$(1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2})\}$.

1.6. $\{(x,y)\}=\{(6;3),(-3;-6),(2;4),(-4;-2)\}$.

1.7. $\{(x,y)\}=\left\{\left(\frac{15}{\sqrt{21}};\frac{3}{\sqrt{21}}\right),\left(-\frac{15}{\sqrt{21}};-\frac{3}{\sqrt{21}}\right)\right\}$.

1.8. $\{(x,y)\}=\{(1;1),(-1;-1)\}$.

1.9. $\{(x,y,z)\}=\{(3;4;5),(-3;-4;-5)\}$.

1.10. $\{(x,y)\}=\{(2;2)\}$.

1.11. $\{(x,y)\}=\{(2;1),(-2;-1),(1;2),(-1;-2),(-2;1),(1;-2),$
$(-1;2)\}$.

1.12. $\{(x,y)\}=\{(2;1),(-2;-1)\}$.

1.13. $\{(x,y)\}=\{(a+1;a-1),(a-1,a+1)\}$, де $a\in R$.

1.14. $\{(x,y)\}=\left\{\left(4a;-\frac{13}{11}a\right),\left(-\frac{13}{11}a;4a\right)\right\}$, де $a\in R$.

1.15. $\{(x,y)\}=\{(3a;-2,5a),(-2,5a;3a),(-3a;2,5a),$
$(2,5a;-3a)\}$, де $a\in R$.

1.16. $\{(x,y)\}=\{(2;3),(0;1),(1,5;1)\}$.

1.17. $\{(x,y)\}=\{(2\sqrt{2};\sqrt{2}),(-2\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$.

1.18. $\{(x,y)\}=\left\{(3;1),\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2};-\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right)\right\}$.

1.19. $\{(x,y)\}=\varnothing$.

1.20. $\{(x,y)\}\left\{(3;4),(-3;-4),\left(\frac{8}{\sqrt{11}};-\frac{1}{\sqrt{11}}\right),\left(-\frac{8}{\sqrt{11}};\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right\}.$

1.21. $\{(x,y)\}=\{(1;-1,25),(-0,25;-2,5)\}.$

1.22. $\{(x,y)\}=\Big\{\left(2a\sqrt{2};a\sqrt{2}\right),\left(-2a\sqrt{2};-a\sqrt{2}\right),\left(a\sqrt{2};2a\sqrt{2}\right),$
$\left(-a\sqrt{2};-2a\sqrt{2}\right)\Big\},\ a\in R.$

1.23. $\{(x,y)\}=\{(3;1),(1;2)\}.$

1.24. $\{(x,y)\}=\left\{(3;1),\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2};\frac{3-\sqrt{41}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{41}-3}{2};\frac{\sqrt{41}+3}{2}\right)\right\}.$

1.25. $\{(x,y)\}=\{(2;5),(-2;5)\}.$

1.26. $\{(x,y)\}=\{(4;2),(2;1)\}.$

1.27. $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(1\frac{2}{3};7\frac{2}{3};8\right),(4;3;1)\right\}.$

1.28. $\{(x,y)\}=\Big\{\left(2\sqrt{14};2\sqrt{14}\right),\left(-2\sqrt{14};-2\sqrt{14}\right),(7;8),(8;7),$
$(-7;-8),(-8;-7)\Big\}.$

2. 0; –4.

3. $\{(x,y,z)\}=\{(9;8;4),(-3;2;-2),(9;4;8),(-3;-2;2)\}.$

4. $a=11.$

5. $a=2.$

6. $|m|\geq\frac{2}{\sqrt{5}}.$

7. $m=-\frac{1}{3}.$

III рівень

1. Розв’язати системи рівнянь:

1.1. $\begin{cases}2x^2+4y^2-15xy-12x+45y=24,\\ x^2-2y^2+xy-3x+3y=0.\end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x^2-3y=23, \\ 3y^2-8x=59. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} xy+xz+yz=11, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6, \\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x^2+y^2+2xy=11, \\ x^2+3y^2+2xy=17. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x^2-5xy-3y^2=0, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)xy=78, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} (x+y)\left(x^2-y^2\right)=16, \\ (x-y)\left(x^2+y^2\right)=40. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ 2(x+y)^2-y^2=14. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x+y=3xy, \\ y+z=4yz, \\ z+x=5xz. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}, \\ xyz=8. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x^2-xy+ay=0, \\ y^2-xy-4ax=0. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=-(x-y)^2, \\ 2x^2+3xy+2y^2=\dfrac{4}{3}(y-x). \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=12, \\ x+xy+y=0. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{36}, \\ xy^2-x^2y=324. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 612, \\ x^2 + xy + y^2 = 39. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x + y = 3z, \\ x^2 + y^2 = 5z, \\ x^3 + y^3 = 9z. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = a^4. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} \left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right) = 10, \\ \left(x + y\right)\left(xy - 1\right) = 3. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} \left|xy - 4\right| = 8 - x^2, \\ xy = 2 + y^2. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ xy + yz + zx = 47, \\ \left(z - x\right)\left(z - y\right) = 2. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x^2 + 4xy + 6y^2 = 11, \\ x^2 + 4xz + 12z^2 = 9, \\ y^2 + 3yz + 2z^2 = 0. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x^2 = \left(x - a\right)y, \\ y^2 - xy = 9ax. \end{cases}$

2. Знайти найменше значення параметра a, при якому система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \left(x - 7\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв’язок.

3. Дано систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 3a - 2, \\ x^2 + y^2 = 3a^2 + 4a + 12. \end{cases}$ При яких значеннях параметра a вираз $x^3 + y^3$ буде мінімальним?

4. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} y - ax^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має три розв’язки?

5. Знайти всі додатні значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} \left(x - 3\right)^2 + \left(y - 4\right)^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв’язок.

6. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2-(3a-1)x+2a^2-a=0, \\ (x-a)\left(x^2-(3a+1)x+2a^2+a\right)=0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

7. При яких додатних значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2+(y-a)^2=\dfrac{a^2}{4}, \\ (|x|-5)^2+y^2=49 \end{cases}$ має більше двох розв'язків?

8. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ залежно від параметра a?

9. Знайти всі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^3-ay^3=\dfrac{1}{2}(a+1)^2, \\ x^3+ax^2y+xy^2=1 \end{cases}$ має хоча б один розв'язок і будь-який її розв'язок задовольняє рівняння $x+y=0$.

10. При яких значеннях параметра a розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x-y=a, \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ задовольняють умови $x\ge 1,\ y\ge 0$?

11. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ має два розв'язки.

Відповіді

1.1. $\{(x,y)\}=\left\{(1;1),(5;-1),\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)\right\}.$

1.2. $\{(x,y)\}=\left\{(2;-5),(-4;3),\left(1+2\sqrt{3};\dfrac{3+8\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(1-2\sqrt{3};\dfrac{3-8\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$

1.3. $\{(x,y)\}=\{(1;3),(-1;-3),(3;1),(-3;-1)\}.$

1.4. $\{(x,y,z)\}=\{(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),\ (3;1;2),\ (3;2;1)\}.$

1.5. $\{(x,y)\}=\left\{(1;2),(-1;-2),\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$

1.6. $\{(x,y)\}=\left\{(3;1),(-3;-1),\left(\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\right\}.$

1.7. $\{(x,y)\}=\{(4;2),(-4;-2)\}.$

1.8. $\{(x,y)\}=\{(2;3),(-2;-3),(3;2),(-3;-2)\}.$

1.9. $\{(x,y)\}=\{(3;1),(1;3),(-1;-3),(-3;-1)\}.$

1.10. $\{(x,y)\}=\{(3;-1),(1;-3)\}.$

1.11. $\{(x,y)\}=\left\{(1;2),(-1;-2),\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}.$

1.12. $\{(x,y,z)\}=\left\{(0;0;0),\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{3}\right)\right\}.$

1.13. $\{(x,y,z)\}=\{(2;2;2)\}.$

1.14. Якщо $a=0$, то $\{(x,y)\}=\{(t;t)\}$, де $t\in R$; якщо $a\neq 0$, то $\{(x,y)\}=\left\{(2a;4a),\left(\frac{2a}{3};-\frac{4a}{3}\right)\right\}.$

1.15. $\{(x,y)\}=\{(0;0),(-1;2)\}.$

1.16. $\{(x,y)\}=\left\{\left(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right),\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)\right\}.$

1.17. $\{(x,y)\}=\{(9;12),(-12;-9)\}.$

1.18. $\{(x,y)\}=\{(5;2),(-5;-2),(2;5),(-2;-5)\}.$

1.19. $\{(x,y,z)\}=\left\{(0;0;0),(1;2;1),(2;1;1),\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}};1-\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{2}{3}\right),\right.$ $\left.\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}};1+\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{2}{3}\right)\right\}.$

1.20. $\{(x,y)\}=\{(a;0),(0;a)\},\ a\in R.$

1.21. $\{(x,y,z)\}=\{(4;4;-4)\}$.

1.22. $\{(x,y,z)\}=\{(1;1;1)\}$.

1.23. $\{(x,y)\}=\{(2;1),(1;2),(0;-3),(-3;0),(-2;1),(1;-2)\}$.

1.24. $\{(x,y)\}=\left\{\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-2\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

1.25. $\{(x,y,z)\}=\{(4;3;5),(3;4;5),(-4;-3;-5),(-3;-4;-5),$

$\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2};\frac{7+\sqrt{113}}{2};9\right),\left(\frac{7+\sqrt{113}}{2};\frac{7-\sqrt{113}}{2};9\right),$

$\left.\left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2};\frac{-7+\sqrt{113}}{2};-9\right),\left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2};\frac{-7-\sqrt{113}}{2};-9\right)\right\}.$

1.26. $\{(x,y,z)\}=\left\{\left(\frac{-39}{\sqrt{153}};\frac{-1}{\sqrt{153}};\frac{1}{\sqrt{153}}\right),\left(\frac{39}{\sqrt{153}};\frac{1}{\sqrt{153}};\frac{-1}{\sqrt{153}}\right),\right.$

$\left.(1;1;-1),(-1;-1;1)\right\}.$

1.27. Якщо $a=0$, то $\{(x,y)\}=\{t,t\}$, де $t\in R$; якщо $a\neq 0$, то $\{x,y\}=\left\{\left(\frac{3a}{2};\frac{9a}{2}\right),\left(\frac{3a}{4};-\frac{9a}{4}\right)\right\}$.

2. $a=-8$.

3. $a=-\frac{1}{3}$.

4. $a=-1$.

5. $a=4;\ a=6$.

6. $a=\pm 1$.

7. $a\in\left[4\sqrt{6};12\right)$.

8. Якщо $a\in(-\infty;1)\cup\left(\sqrt{2},\infty\right)$, то система розв’язків не має; якщо $a\in\left\{1;\sqrt{2}\right\}$, то система має 4 розв’язки; якщо $a\in\left(1;\sqrt{2}\right)$, то система має 8 розв’язків.

9. $a=\pm 1$.

10. Якщо $a=0,$ то система розв'язків не має, якщо $a\neq 0,$ то $\{(x,y)\}=\left\{\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right);\frac{1}{2}\left(-a+\frac{1}{a}\right)\right\}.$ Розв'язок задовольняє умову задачі, якщо $a\in(0;1]$.

11. $a=\frac{5}{2}.$

ДОДАТКИ

1. Формули скороченого множення

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),$

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right),$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

$(a+b+c+...+p+d)^2=a^2+b^2+c^2+...+p^2+d^2+$
$+2ab+2ac+...+2pd,$

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n-$ формула бінома Ньютона.

Властивості біноміальних коефіцієнтів C_n^k :

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0\leq k\leq n), n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n, 0!=1$ (за означенням),

$C_n^k=C_n^{n-k},$ $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},$

$C_n^0+C_n^1+...+C_n^k+...+C_n^n=2^n.$

$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),$

$$a^n - b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right),$$ якщо n – парне число.

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$ якщо n – непарне число.

2. Степені та корені

$a^k \cdot a^n = a^{k+n}$, $\qquad a^k : a^n = a^{k-n}$,

$a^0 = 1, a \neq 0$, $\qquad \left(a^k\right)^n = a^{k \cdot n}$,

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$, $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0$,

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n, \ a \neq 0, \ b \neq 0$, $\qquad \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}, \ a > 0$,

$\sqrt{x^2} = |x|$, $\qquad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \ x \geq 0$.

3. Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

4. Лінійні рівняння $ax = b$:

якщо $a \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{a}$;

якщо $a = b = 0$, то $x \in R$,

якщо $a = 0, b \neq 0$, то $x \in \varnothing$.

5. Квадратні рівняння $ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$ – дискримінант. Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні дійсні корені. Якщо $D = 0$, то обидва корені однакові: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Якщо $D < 0$, то $x \in \varnothing$, тобто рівняння не має дійсних коренів. Якщо b – парне число, тобто

$b = 2k,$ то маємо рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0,\ a \neq 0,$ $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$

6. Теорема Вієта (залежність між коефіцієнтами і коренями алгебраїчного раціонального рівняння).

Якщо $x_1, x_2, ..., x_n$ – корені рівняння, то

$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0,$ то

$x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_1,$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n = a_2,$

$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_3,$

....

$x_1 x_2 ... x_n = (-1)^n a_n.$

Останні залежності відомі під назвою формул Вієта. Зокрема, якщо маємо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c + 0,\ a \neq 0$, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$ Справедливою є й обернена теорема. Якщо сума двох чисел x_1 і x_2 дорівнює $-p,$ а добуток дорівнює $q,$ то ці числа є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0.$ Аналогічно обернена теорема справедлива і для рівняння n-го степеня.

7. Схема Горнера

Схема Горнера дає можливість, не виконуючи ділення «кутом», знайти коефіцієнти частки $Q(x)$ і остачу R при діленні многочлена $P(x)$ на двочлен $x - c.$

$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R,$

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = (x - c)\left(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + ... + b_{n-1}\right) + R$

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = cb_0 + a_1$	$b_2 = cb_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1}$	$R = cb_{n-1} + a_n$

8. Однорідні функції

Однорідні функції декількох змінних – функції $f\left(x, y, z, ..., t\right)$, які задовольняють умову

$f\left(\lambda x, \lambda y, \lambda z, ..., \lambda t\right) = \lambda^{n} f\left(x, y, z, ..., t\right)$, де λ – довільне число. Число n називається показником однорідності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вишенський В. А.* Конкурсні задачі з математики / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А.М. Самойленко. – К. : Вища шк., 2001.

2. *Гальперіна А. Р.* Математика. Типові тестові завдання: зб. / А. Р. Гальперіна, О.Я. Михеєва. – Х. : Веста, 2010.

3. *Горнштейн П. И.* Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : «Евроиндекс», 1995.

4. *Захарійченко Ю. О.* Математика: зб. тест. завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний. – К. : «Генеза», 2008.

5. *Збірник* задач з математики для вступників до ВТУЗІВ / [ред. М. І. Сканаві]. – К : Вища шк., 1996.

6. *Каплан Я. Л.* Математика: [посіб. для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів] / Я. Л. Каплан. – К. : Вища шк., 1971.

7. *Практикум* по решению задач по математике / [В. И. Михайловский, В. Е. Тарасюк, Е. А. Ченакал и др.]. – К. : Вища шк., 1975.

8. *Нестеренко Ю. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. – М. : Наука, 1986.

9. *Самойленко А. М.* Збірник задач з математики / А. М. Самойленко, В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, – К. : Вища шк., 1982.

10. *Сивашский И. Х.* Задачи по математике для внеклассных занятий / И. Х. Сивашский. – М. : Просвещение, 1968.

11. *Ушаков Р. П.* Повторювальний курс математики: посіб. для учнів серед. закладів освіти / Р. П. Ушаков. – К. : Техніка, 1999.

12. *Шмаков І. П.* Математика. Раціональні функції: навч.-метод. посіб. / І. П. Шмаков, Л. В. Андрощук. – К. : НАУ, 2008.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна,
МУРАНОВА Наталія Петрівна,
МУРАНОВ Олександр Сергійович,
РИЛОВ Альберт Васильович

ВИБРАНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИКИ

Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів

Навчально-методичний посібник

Редактор *С. В. Войтенко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *І. М. Вихованець*
Комп'ютерна верстка *Н. С. Ахроменко*

Підп. до друку 27.04.11. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 5,58. Обл.-вид. арк. 6,0.
Тираж 1000 пр. Замовлення № 92-1.

Видавець і виготовлювач
Національний авіаційний університет
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002

ІНСТИТУТ ДОУНІВЕРСИТЕТСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ
НАЦІОНАЛЬНОГО АВІАЦІЙНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Інститут доуніверситетської підготовки (ІДП) проводить освітню діяльність, пов'язану з підготовкою до вступу у ВНЗ та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) для учнів 9 – 11 класів на підготовчих курсах *з навчальних дисциплін:* **українська мова та література, математика, історія України, англійська мова, географія, фізика, хімія, біологія, основи журналістики, рисунок та композиція.**

Для учнів 9 класу проводиться підготовка до вступу у навчальні заклади ІІ рівня акредитації (коледжі, технікуми, ліцеї).

До послуг учнів 9 - 11 класів існують різноманітні **форми навчання:** *вечірні, щосуботи та заочні підготовчі курси*, а також організовано роботу підготовчих курсів в регіонах України.

Термін навчання: 8-ми місячні підготовчі курси (з 01.10. по 16.05.), 4-х місячні (з 17.01. по 23.05.)

Напрями підготовки фахівцв:

авіа- і ракетобудування; авіоніка*; автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*; аеронавігація*, обслуговування повітряних суден*; біотехнологія*; хімічна технологія*; будівництво*; метрологія та інформаційно-вимірювальні технології; видавничо-поліграфічна справа; геодезія, картографія та землеустрій; екологія,охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування*; радіотехніка*;електоротехніка та електротехнології; енергомашинобудування*; електронні пристрої та системи*; мікро- та наноелектроніка*; безпека інформаційних і комунікаційних систем; системи технічного захисту інформації; управління інформаційною безпекою; комп'ютерна інженерія*; комп'ютерні науки; систнмна інженерія*; програмна інженерія*; телекомунікації; прикладна математика; прикладна фізика; філологія; соціологія; соціальна робота; психологія; архітектура; дизайн; документознавство та інформаційна діяльність; менеджмент; маркетинг; міжнародна економіка; економіка підприємства; облік і аудит; транспортні технології* (за видами транспорту); економічна кібернетика; фінанси і кредит; міжнародний бізнес; міжнародні економічні відносини; міжнародне право;журналістика;міжнародна інформація; туризм; правознавство.*

За напрямами, що позначені (*), підготовка проводиться українською та англійською мовами.

Заняття проводяться відповідно до чинних нормативних документів, робочих навчальних програм, адаптованих відповідно до вимог Державного стандарту базової і повної середньої освіти, Українського центру оцінювання якості освіти та затверджених кафедрою базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ.

Навчальний процес на підготовчих курсах забезпечується педагогічними та науково-педагогічними працівниками кафедри базових і спеціальних дисциплін, а також висококваліфікованими фахівцями провідних кафедр Університету.

Протягом навчального року пропонуються: екскурсії до Державного музею авіації, навчального ангару, музею Університету, кафедр та лабораторій НАУ, участь у міжнародній конференції студентів та молодих учених «Політ» та презентації Університету на базі ЗНЗ.

Якщо є бажання отримати якісну підготовку до зовнішнього незалежного оцінювання і підготуватися до вступу в обраний вищий навчальний заклад, звертайтеся за адресою:

03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1, корпус 8, кім. 610.

Тел.: (044) 406-74-04, 406-72-09, 406-73-11, 406-74-15, тел./факс: (044) 497-52-84

E-mail: **idp@nau.edu.ua** Web-сторінка: **www.nau.edu.ua**

Навчання платне.

Ліцензія МОН України серія АВ № 529290 від 27.07.2010р.