МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДИСЦИПЛІН В КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Матеріали
V міжрегіонального
семінару

Київ 2011

УДК 378.14(045)

Методика викладання навчальних дисциплін в контексті підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання: матеріали V міжрегіонального семінару, м. Київ, 23 квітня 2010 р., Національний авіаційний університет / редкол. Н.П. Муранова та ін. – К. : НАУ, 2011. – 184 с.

Збірник містить матеріали доповідей семінару, в яких висвітлено основні проблеми впровадження технологій тестування як основного засобу перевірки знань абітурієнтів та можливі шляхи підвищення якості знань, умінь, навичок. Запропоновано методику використання тестових завдань, впровадження якої в навчальний процес поліпшить його ефективність, якість змісту доуніверситетської підготовки як найважливішої ознаки вступу до вищого навчального закладу. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання навчальних дисциплін.

Для викладачів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів, слухачів підготовчих курсів.

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 4 від 29.04.2010 р.)

УДК 377.5.315:514.113(045)

М.М.Логвин,
Н.П. Муранова

СТЕРЕОМЕТРІЯ. ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ БАГАТОГРАННИКІВ

Державний стандарт базової і повної середньої освіти зазначає, що метою вивчення математики є: опанування учнями системи математичних знань, навичок і вмінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності; формування в учнів уявлень про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні дійсності [1]. Фактично йдеться про прикладну спрямованість шкільного курсу математики.

Проблема реалізації прикладної спрямованості була актуальною завжди. Теоретичне обґрунтування існування проблеми та шляхів її розв'язування проведено в роботах О.Д. Александрова, О.М. Астряба, Г.П. Бевза, З.І. Слєпкань, В.В.Фірсова, В.А. Швеця та інших українських математиків – методистів. У всіх державних нормативних документах, які стосуються проблеми змісту математичної освіти, вимог до математичної освіти, говориться про посилення прикладної спрямованості курсу математики. Стверджувати, що вже багато зроблено у цьому напрямі неможливо з багатьох причин: складності у розв'язуванні даної проблеми, інерційності системи освіти і т. ін.

«Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії – це орієнтація цілей, умінь та навичок, які використовуватимуться учнями у різних сферах життя»[2]. Розв'язування стереометричних задач на побудову сприяє розвитку просторових уявлень і конструктивних навичок учнів, розвиває логічне та абстрактне мислення, що обов'язково буде в нагоді в подальшому навчанні і майбутній професії. Крім того, задачі, в яких треба побудувати перерізи багатогранників займають значне місце в зовнішньому незалежному оцінюванні знань учнів.

Питанням побудови перерізів багатогранників приділяли увагу такі вчені , як

Ж. Адамар, М.Ф. Четверухін, О. Б.Василевський, Г. Прокопенко та інші. Кожен з дослідників розробляв свої методи побудови перерізів багатогранників. Наприклад, О. Б. Василевський визначив такі методи: метод слідів побудови перерізів пірамід і призм; метод розподілу n- кутної піраміди(призми) до трикутної призми (піраміди); метод доповнення n- кутної призми (піраміди) до трикутної призми (піраміди); метод паралельних прямих; метод паралельного перенесення січної площини; метод відокремлювальної площини; метод паралельних проекцій.

Мета статті – описати деякі методи побудови перерізів багатогранників. Розглянемо метод слідів; метод внутрішнього проектування й комбінований метод із використанням методу внутрішнього проектування й методу слідів.

В основу методів розв'язування задач на побудову перерізів покладено:

1) аксіоми стереометрії, які охоплюють аксіоми планіметрії й аксіоми належності, що характеризують властивості прямої і площини в просторі;

2) основні теореми про взаємне розташування прямих і площин .

Розглянемо спочатку побудову простих перерізів багатогранників.

Перерізом багатогранника називається багатокутник, який утворюється при перетині багатогранника площиною. Вершини цього багатокутника є точками перетину січної площини з ребрами багатогранника, а сторони – частинами прямих перетину січної площини з його гранями.

Для побудови простих перерізів необхідно вміти розв'язувати дві опорні задачі:

1) будувати лінію перетину двох площин;
2) будувати точку перетину прямої і площини.

Для побудови лінії перетину двох площин, січної площини і грані багатогранника, знаходять дві точки шуканої прямої і через них проводять пряму.

Розглянемо опорну задачу першого типу.

Задача 1. Побудуйте переріз трикутної піраміди SABC площиною , яка проходить через ребро AS і точку M – середину ребра BC.

Розв'язання. Побудуємо лінії перетину січної площини і граней піраміди.

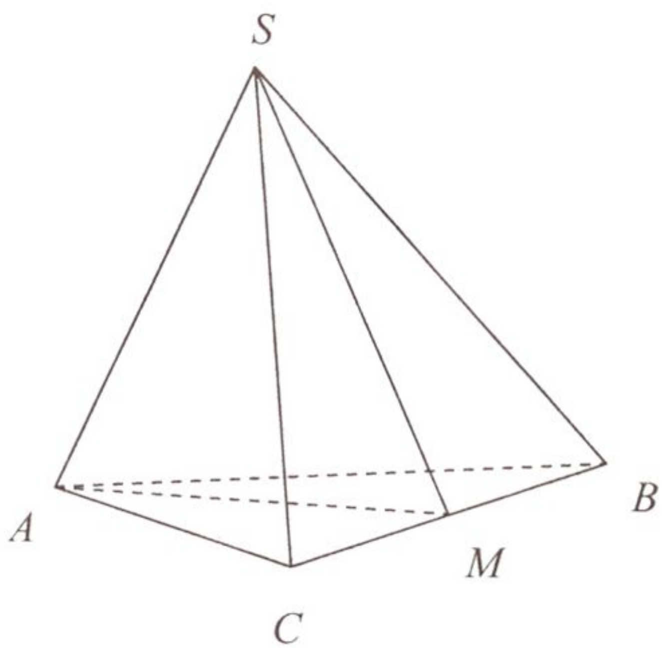


Рис. 1

1) Оскільки за умовою точки М і А належать січній площині і грані АВС, то, за аксіомами стереометрії (теорема про належність прямої площині), пряма МА належить обом площинам, тобто є лінією їх перетину (рис. 1).
2) Оскільки за умовою точки S і М належать січній площині та грані SBC, то, за теоремою про належність прямої площині, пряма SM належить обом площинам, а отже, SM є лінією перетину цих площин.
3) Оскільки за умовою ребро AS спільне для граней SBA, SAC та січної площини, то воно є лінією перетину січної площини зі вказаними гранями. Отже, трикутник ASM – шуканий переріз.

Для розв'язання другої опорної задачі знаходять у площині пряму , яка перетинає дану пряму; шукана точка – точка перетину двох прямих. Для прикладу розглянемо задачу, в якій система запитань дає спосіб її розв'язання.

Задача 2. Точка М - середина ребра AA_1 куба $ADCDA_1B_1C_1D_1$. Побудувати точку перетину прямої D_1M з площиною основи $ABCD$.

Розв'язання (основні етапи):

а) Назвіть площину бічної грані, якій належить пряма D_1M (рис. 2).

б) Назвіть пряму, яка лежить у знайденій бічній грані і площині основи $ABCD$.

в) Побудуйте шукану точку.

Відповідь.

а) грань AA_1D_1D ;

б) пряма AD; в) К - це точка перетину прямих AD та D_1M.

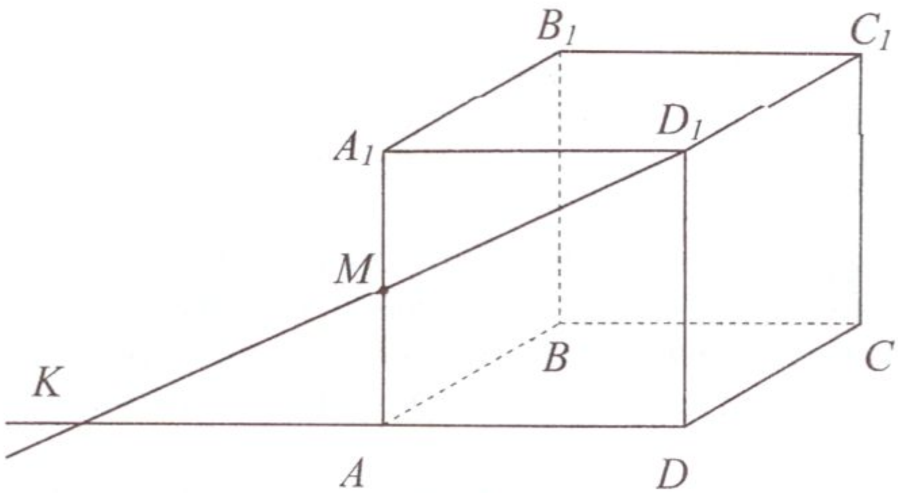


Рис.2

Основні правила побудови перерізів.

1. Якщо дано (або вже побудовані) дві точки площини перерізу на одній грані багатогранника, то слід перерізу в цій площині - пряма, яка проходить через ці точки.

2. Якщо дана (або вже побудована) пряма перетину площини перерізу з основою багатогранника (слід на основі) і є точка, що належить певній бічній грані, то треба визначити точку перетину даного сліду з цією бічною гранню (вона є точкою перетину сліду із спільною прямою основи і даної бічної грані).

3. Точку перетину площини перерізу з основою можна визначити як точку перетину якої-небудь прямої в площині перерізу з її проекцією на площину основи.

Метод слідів

Сутність методу: будується пряма (слід) перетину січної площини з

площиною основи піраміди або призми. Знаходять точки перетину сліду з площинами бічних граней і діагональних перерізів цих багатогранників. Ці точки разом з даними точками січної площини визначають прямі, яким належать сторони (діагоналі) шуканого перетину.

Слідом перерізу на вказаній площині називається пряма перетину цієї площини з площиною перерізу.

Розглянемо такі три кроки.

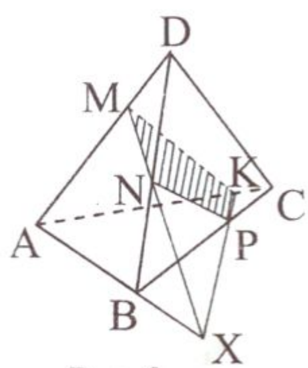


Рис. 3

1.Побудувати пряму (слід) перетину січної площини з площиною основи багатогранника.

2. Знайти точки перетину отриманої прямої (сліду) з площинами бічних граней або діагональних перерізів цих багатогранників.

3. Побудувати шуканий переріз.

***Задача* 3.** Побудувати переріз піраміди $DABC$ площиною, яка проходить через точки M , N , P .

Дана площина перетинає ребро DA в точці M, а ребро DB – в точці N , отже, площину ADB вона перетинає по прямій MN (рис.3). Аналогічно, площину DBC вона перетинає по прямій NP . Однією із точок перетину даної площини і площини нижньої грані є точка P . Оскільки пряма MN належить площині перерізу, то друга шукана точка може бути знайдена як точка перетину прямої MN з площиною ABC . Очевидно, що ця точка X належить перетину прямих MN і AB . Тоді пряма XP - перетин площини перерізу з площиною ABC . Пряму XP називають слідом січної площини на площині ABC . Точка K – перетин прямої XP з ребром AC . Сполучаємо точку K з точкою M , чотирикутник $MNPK$ – шуканий переріз.

Задача4. Побудувати переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, K, N

Вказівка: Побудову виконано на рис.4.

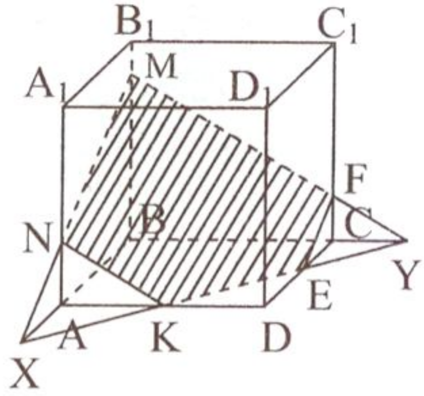


Рис. 4

Задача 5. Побудувати переріз піраміди $EABCD$ площиною, що проходить через точки M, N і K. На рис. 5 виконано побудову шуканого перерізу. Пряма XY – слід перетину січної площини з площиною ABC, пряма MY – слід січної площини на площині AED, пряма MX – слід січної площини на площині ABE, пряма NL – слід січної площини на площині CEB і пряма FK – слід січної площини на площині DEC.

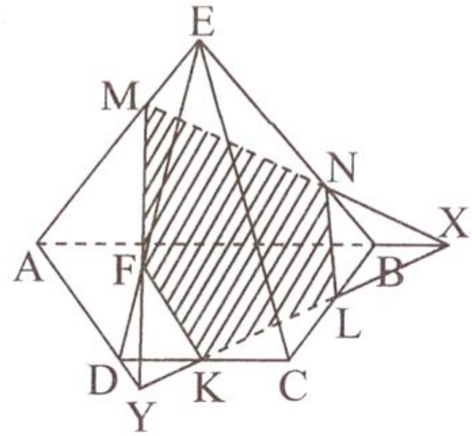


Рис.5

Задача 6. На бічних ребрах AA_1, BB_1, CC_1 чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дано точки K, P, T. Побудувати переріз призми з площиною, яка проходить через дані точки.

Розв'язання. Нехай прямі PK і BA перетинаються у точці M, а прямі PT і BC у точці N (рис.6). Точки M і N належать площині основи призми і січній площині. Пряма MN – лінія перетину цих площин. Якщо вона перетинає сторони основи призми в точках E і F, то п'ятикутник $KPTEF$ – шуканий переріз.

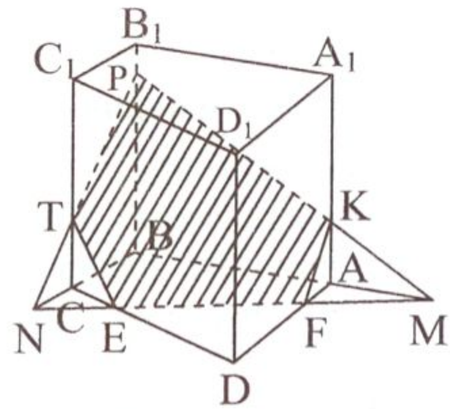


Рис.6

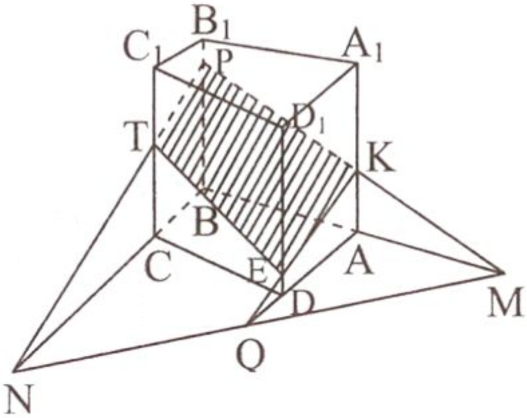


Рис.7

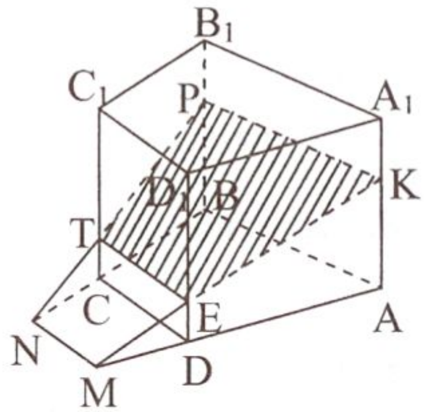


Рис.8

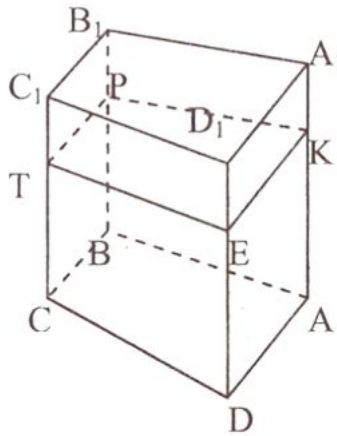


Рис. 9

Якщо ж пряма MN не перетинає основу призми (рис.7), знаходимо точку Q перетину прямих MN і AD. Потім – точку E, в якій пряма KQ перетинає ребро DD_1. Чотирикутник $KPTE$ – шуканий переріз.

Якщо точки K, P, T розміщені так, що $KP \parallel AB$ і точки перетину цих прямих не існує, тоді проводимо $MN \parallel AB$. Закінчуємо побудову, як у попередньому випадку (рис8).

Якщо виявляється, що $KP \parallel AB$ і $PT \parallel BC$, тоді січна площина паралельна площині основи. У цьому випадку на ребрі DD_1 позначаємо точку E таку, що $KE \parallel AD$ (рис.9).

Метод слідів незручний, якщо точка перетину прямої з площиною не попадає на аркуш паперу або побудова займає більшу частину аркуша. В цьому випадку зручніше використовувати метод внутрішнього (паралельного або центрального) проектування.

Метод внутрішнього проектування

Треба пам'ятати, що при центральному проектуванні всі проектуючи промені проходять через одну й ту саму точку – центр проектування. При паралельному проектуванні всі проектуючи промені паралельні деякому певному напряму.

Сутність даного методу полягає у виборі напряму проектування й побудові сліду шуканого перерізу на площину проектування. Побудову можна виконати за шість кроків.

1. Визначити площину і напрям проектування (як площину зручно брати площину основи, за напрямок - ребро багатогранника).
2. Знайти проекції кожної точки шуканого перерізу на площину проектування.
3. Вибрати ребро, на якому будуватимемо точку перерізу багатогранника із січною площиною.
4. Знайти точку перетину січної площини з ребром багатогранника.
5. Побудувати шуканий переріз.

Задача 7. Побудувати переріз призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, K, що належать ребрам DD_1, AA_1 і BB_1.

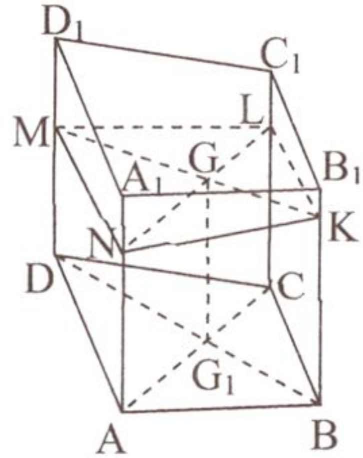


Рис. 10

Розв'язання. Для побудови шуканого перерізу призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, K треба побудувати точку L перетину площини MNK з ребром CC_1. Використаємо метод *паралельного* проектування. Нехай L – шукана точка на ребрі CC_1 (рис.10).

Паралельною проекцією перерізу $MNKL$ на площину нижньої грані буде багатокутник $DABC$ проекцією відрізка MK є відрізок DB, а проекцією відрізка LM – відрізок CD. (Напрям проектування паралельно бічному ребру призми). При вказаному проектуванні точка G перетину відрізків MK і NL перейде в точку G_1 перетину відрізків BD і AC. Звідси випливає наступна побудова: проводимо відрізки BD і AC, позичаємо точку G_1 – точку їх перетину. Проводимо через точку G_1 пряму, паралельну бічному ребру призми, і позичаємо точку G її перетину з відрізком

MK. Точка перетину ребра CC_1 з прямою NG є шуканою точкою L.

Розглянемо задачу на побудову перерізу методом *центрального* проектування.

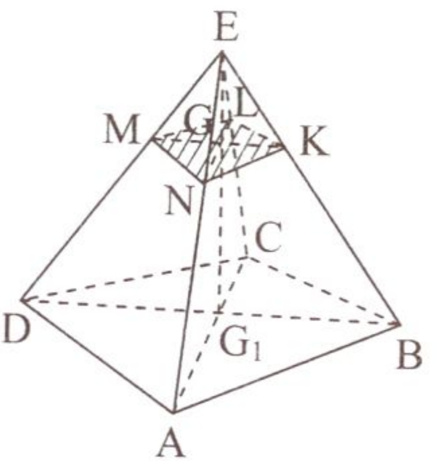


Рис.11

Задача 8. Побудувати переріз піраміди $EABCD$ площиною, що проходить через точки M, N, K (рис.11). Візьмемо за центр проектування точку E. Тоді проекцією відрізка MK на площину основи піраміди є відрізок DB. Нехай точка G_1 – точка перетину відрізків DB і AC. Вона є проекцією точки G ($G = MK \cap EG_1$).

Шукану точку L знаходимо як перетин прямої NG з ребром EC. Шуканий переріз – багатокутник $MNKL$.

Задача 9. Побудувати переріз піраміди $DABC$ (рис.12) площиною, яка проходить через точки M, N, P (M належить грані DAC, N - грані ADB, P – ребру CB).

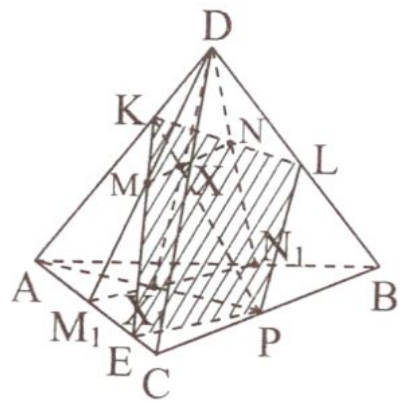


Рис.12

Розглянемо проектування з центром D на площину ABC. Проекцією відрізка MN є відрізок M_1N_1, точка X_1 – проекція точки:

$X\left(X_1 = M_1N_1 \cap AP, X = MN \cap DX_1\right)$.

Вказане проектування переводить пряму PX в пряму PX_1. Точка K перетину прямої PX і ребра AD належить шуканому перерізу.

Чотирикутник $KEPL$ – шуканий переріз.

Комбінований метод побудови перерізів.

При розв'язуванні задач на побудову перерізів багатогранників найбільш простий розв'язок базується на використанні як метода слідів, так і метода внутрішнього проектування.

1. Визначити площину і напрям проектування (як площину зручно брати площину основи, за напрям – ребро багатогранника).
2. Знайти проекції кожної точки шуканого перерізу на площину проектування.
3. Знайти точки перетину прямих, що належать шуканому перерізу, та їх проекцій на площині проектування.
4. Побудувати слід січної площини на площину проектування.
5. Знайти точку перетину отриманої прямої (сліду) з площинами бічних граней або діагональних перерізів цих багатогранників.
6. Побудувати шуканий переріз.

Розглянемо розв'язання цим методом наступної задачі.

Задача 10 . Дано чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На її ребрах AD, CD і B_1C_1 дано відповідно три точки K, L і M. Побудувати переріз призми, що проходить через ці точки.

Розв'язання. Площина нижньої основи перетинається з січною площиною по прямій $MP \| KL$, діагональні площини AA_1C_1C *і* BDD_1B_1 перетинаються по прямій OO_1, а площина перерізу і площина BDD_1B_1 - по прямій EE_1 (рис.13). Точка G перетину прямих EE_1 і OO_1 належить площині перерізу. Знайдемо на діагональній площині ACC_1A_1 ще одну точку, що належить площині перерізу. Для цього продовжимо в площині основи $A_1B_1C_1D_1$ пряму PM до перетину в точці H з прямою A_1C_1 . З'єднавши в площині ACC_1A_1 точки H і G відрізком прямої, отримаємо слід NQ площини перерізу на діагональній площині ACC_1A_1 . Шуканий переріз – шестикутник KLNMPQ.

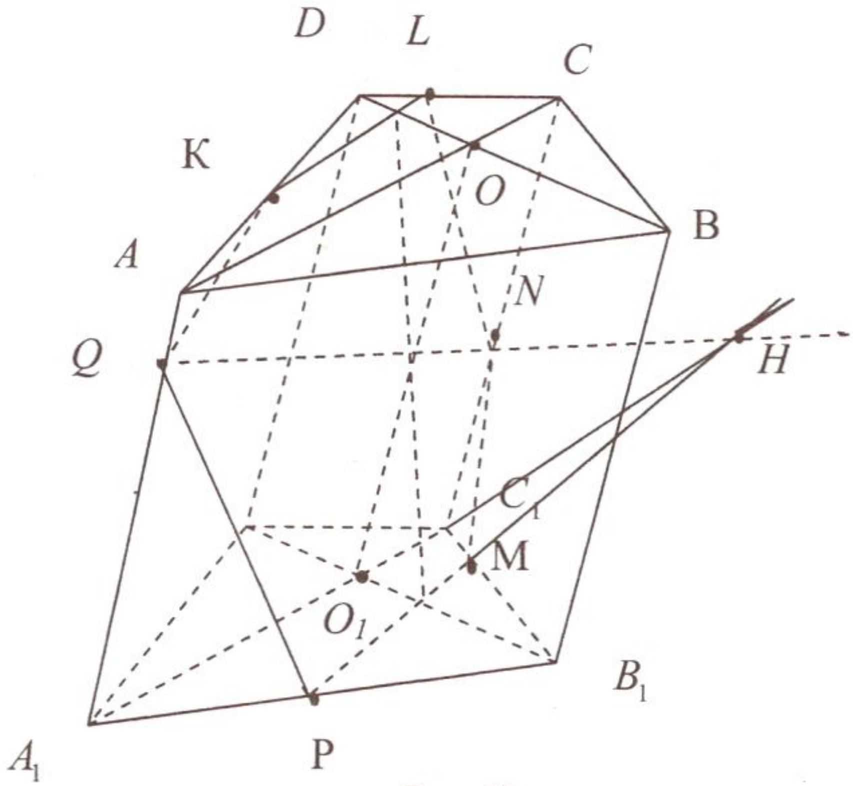


Рис. 13

Задачі для самостійної роботи

1. У трикутній піраміді SABC провести переріз:

а) через середину ребра AC паралельно грані SCB;

б) через середину ребра SC паралельно грані SAB.

2. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, K, P (рис. 14).

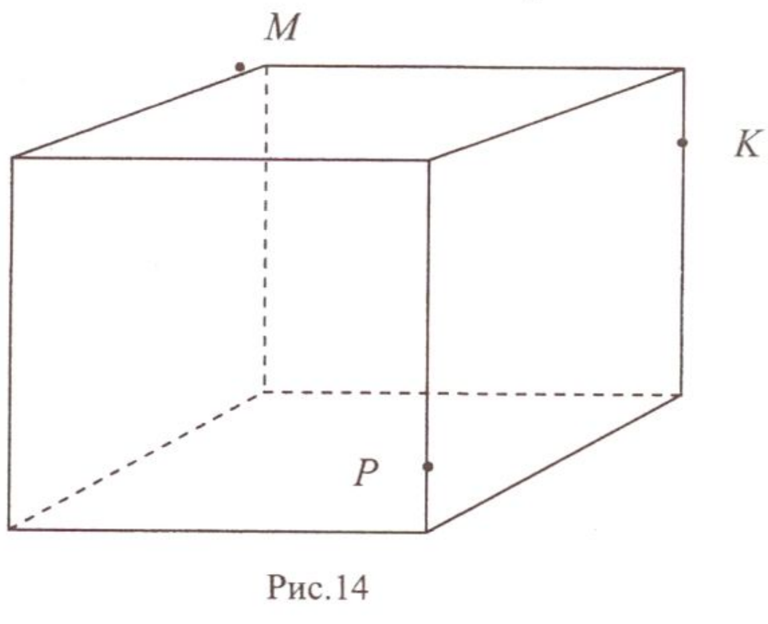


Рис.14

3. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через дані точки: а) C_1, K, D; б) C_1, K, C, де точка K – середина A_1B_1. З'ясуйте, яка фігура утвориться в перерізі. (Відповіді :а) рівнобічна трапеція; б) прямокутник.)

4. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точку E і паралельна площині *MNK* (рис.15).

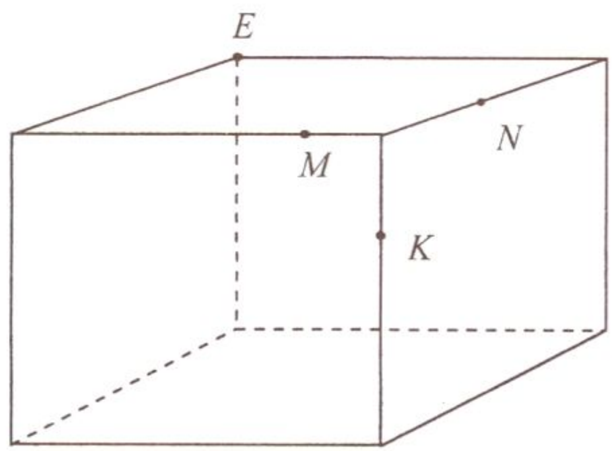


Рис.15

5. Побудувати переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через вершини A ,B і середину ребра A_1C_1.

6.Побудувати переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки $M \in AB, N \in A_1C_1$ і $P \in B_1C_1$, до того ж $NP \parallel A_1B_1$.

7. Дано чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якої ребра AB і DC непаралельні . Побудувати її переріз площиною , яка проходить через ребро AB і точку M , яка належить ребру D_1C_1.

8. Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точки M , P , K (рис. 16).

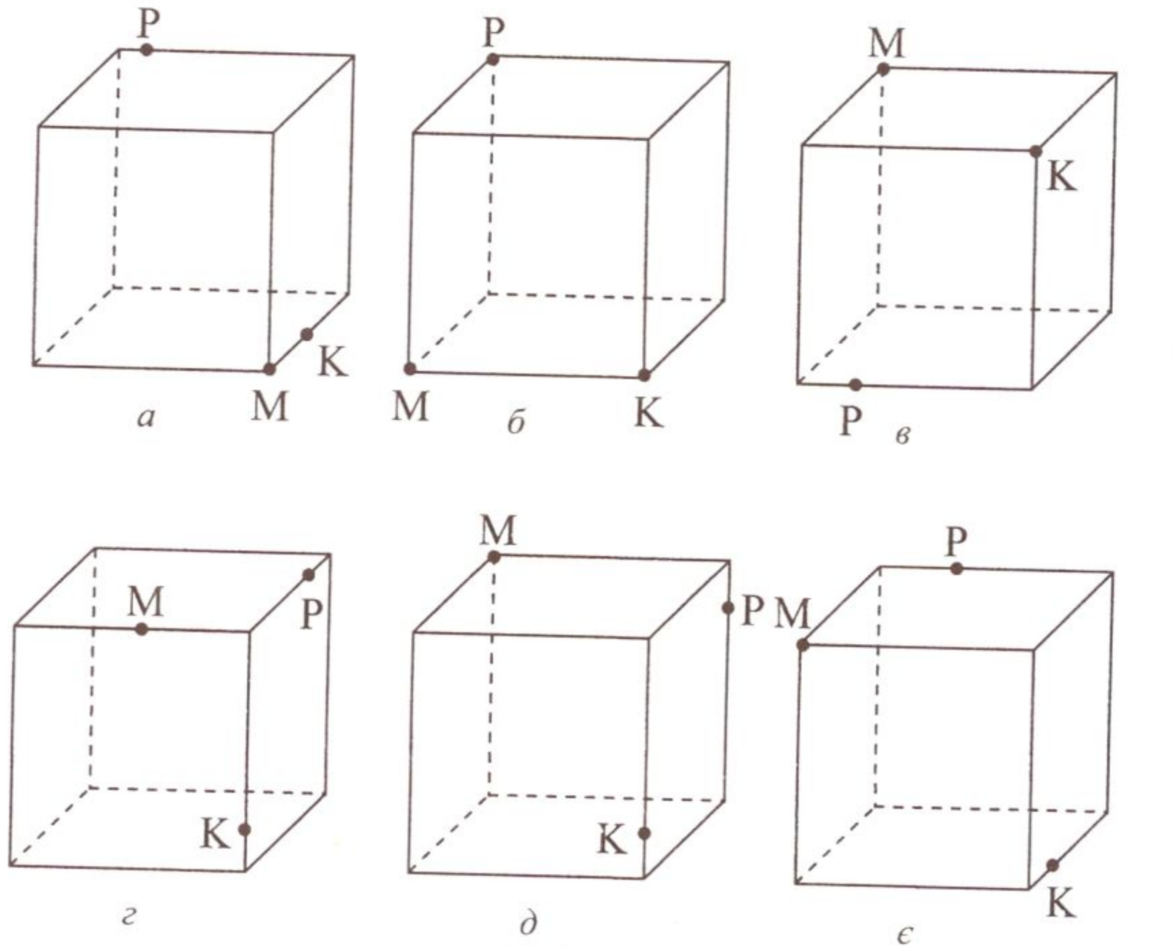


Рис 16

9. Побудувати переріз багатогранника площиною, яка проходить через точки M, P, K (рис.17, 18). Точка K належить площині α.

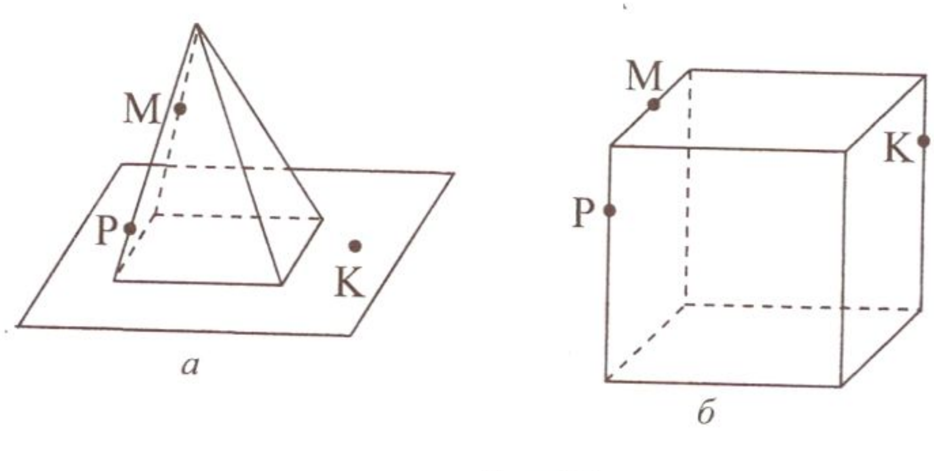


Рис. 17

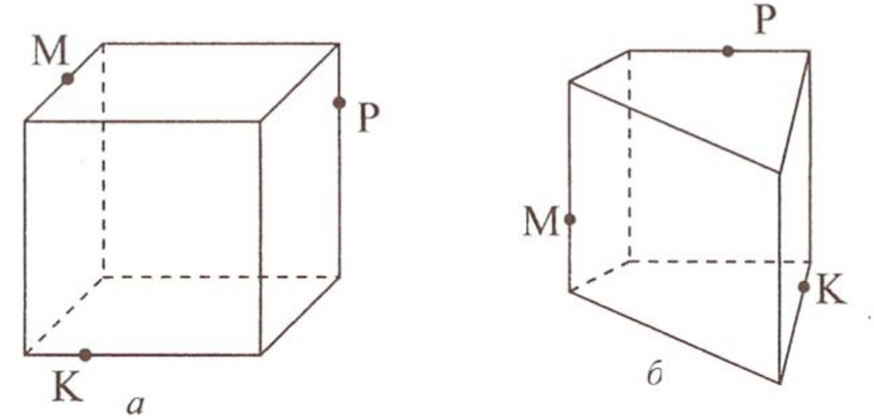
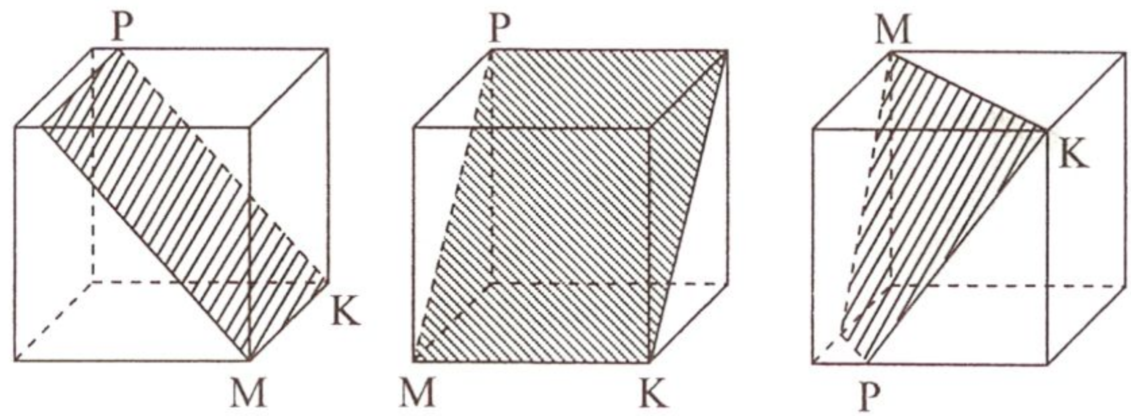


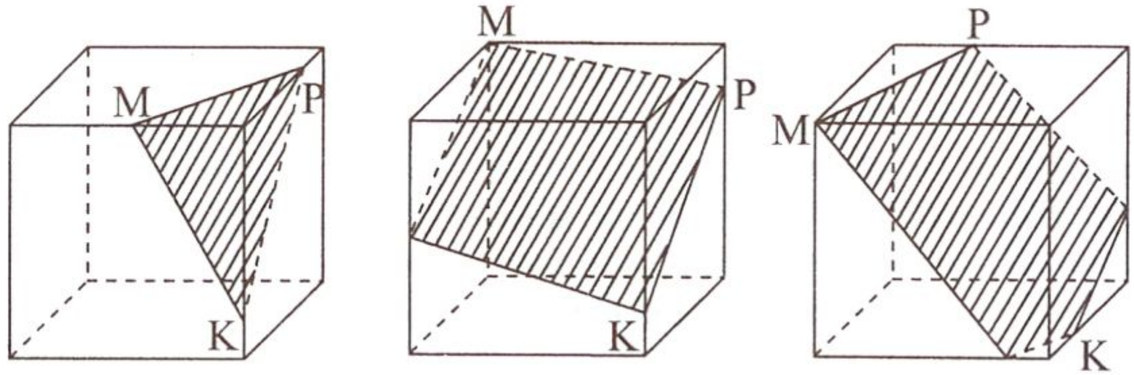
Рис.18

Відповіді:

8.

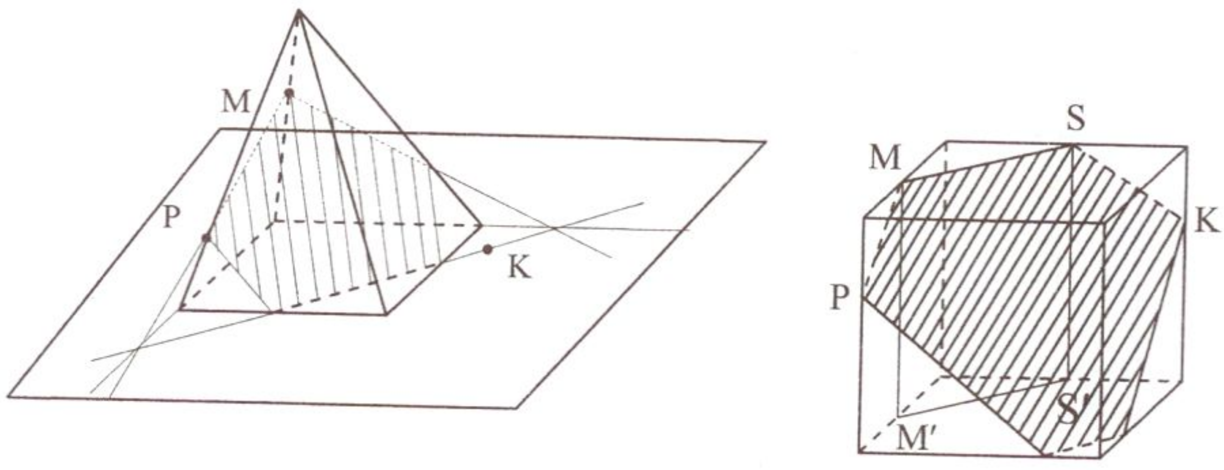


а б в

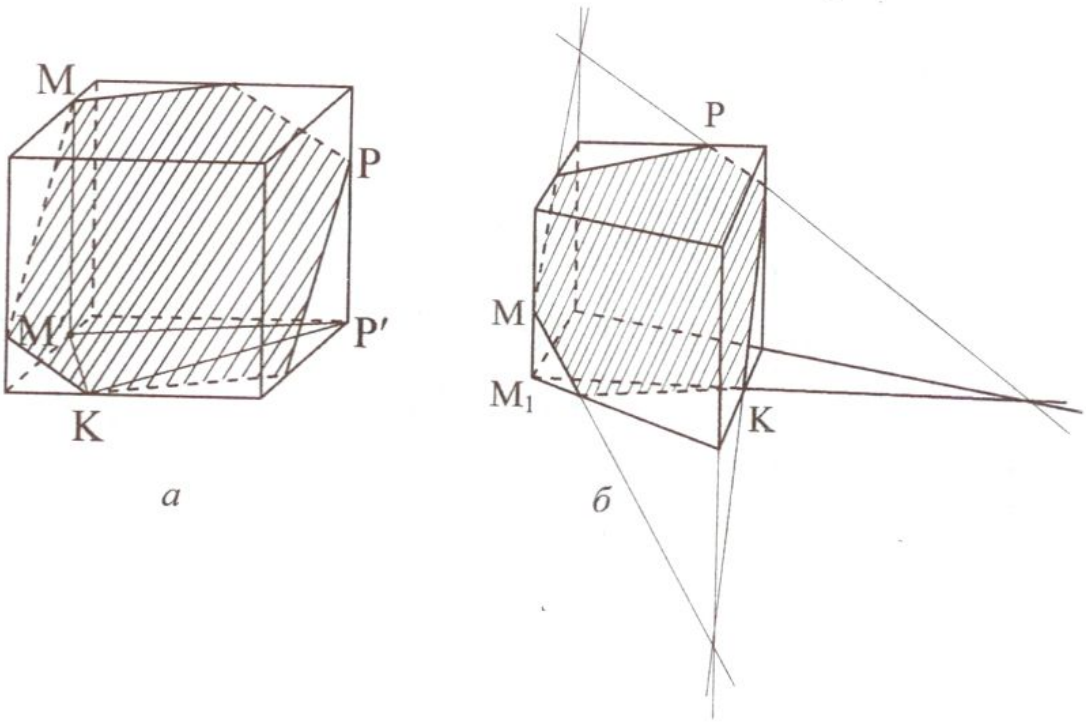


г д є

9.



а *б*



а *б*

Вміння будувати перерізи багатогранників сприяє розвитку просторової уяви учнів, формуванню в них конструктивно – геометричних навичок, здатності моделювати й конструювати ґеометричні об’єкти . Графічні моделі досліджуваних понять допомагають не тільки глибше зрозуміти властивості просторових фігур , а й дають змогу здійснювати й естетичне виховання , унаочнюючи красу геометричних тіл.

Список літератури

1. *Державний* стандарт базової повної середньої освіти. // Матем. в шк. – 2004. – № 2. – С. 2-5.

2. *Швець В.О.* В.Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: навч. посіб. / В.О. Швець, А.В. Прус – Житомир: Видавництво ЖДУ ім. І. Франка, 2007. – 156 с.

3. *Бевз Г.П.* Геометрія : підруч. для 10-11 кл. загальноосвітніх навч. закладів. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Вежа, 2004. – 224 с.

4. *Бевз Г.П.* Методика розв'язування стереометричних задач. / Г.П. Бевз – К. : Радянська школа, 1988. – 190 с.

5. *Бурда М.* Програма для класів з поглибленим вивчення математики. 8 – 11 класи. / М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник, Т. Хмара, М. Ядренко. – К. : Шкільний світ, 2001.

6. *Гальперіна А.Р.* Математика. Типові тестові завдання: Збірник/А.Р. Гальперіна, О.Я. Михеєва. – Х.: Веста, 2009.-128с.

7. *Математика*. Тести. 5-12 класи: посібник. / В.І. Лагно, О.А. Москаленко, В.О. Марченко та ін. – 2-ге вид., стер. – К. : Академ видав, 2009. – 320 с.

8. *Програмові* вимоги зовнішнього незалежного оцінювання з математики. «Освіта України». – № 10 від 6 лютого 2007 р.

9. *Погорєлов О.В.* Геометрія. Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед. шк. - 6-е вид. – К. : Освіта, 2001.- 128с.

10. *Тадеєв В.О.* Геометрія. 10 клас: дворівневий підручник. – Тернопіль : Навчальна книга. – Богдан, 2003.