МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

УДОСКОНАЛЕННЯ МЕХАНІЗМУ ПІДГОТОВКИ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ В СИСТЕМІ ОЦІНКИ ЯКОСТІ ОСВІТИ

Матеріали
IV міжрегіонального
семінару

3 квітня 2009 року

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 512.644(045)

Н.П. Муранова,
К.І. Мазур,
О.К. Мазур,
О.К. Сич

ДЕЯКІ ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

У статті розглянуто типи рівнянь вищих степенів, а також методи їх розв'язання.

Алгебраїчним рівнянням вищого степеня називається рівняння виду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1),$$

де $a_0 \neq 0$, x – невідоме, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні числа, $n > 2$ – натуральне число. Якщо $a_0 = 1$, то рівняння називається зведеним.

Коренем рівняння називається таке значення x, при якому рівняння перетворюється у тотожність (вірну рівність). Ліва частина рівняння (1) – це многочлен n-го степеня відносно x.

Методи розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих степенів базуються в основному на двох принципах:

1) розкладанні лівої частини рівняння, права частина якого дорівнює нулю, на множники з наступною заміною початкового рівняння еквівалентним йому об'єднанням рівнянь меншого степеня;

2) послідовним зниженням степеня початкового рівняння або зведенням його до квадратного рівняння за допомогою вдало підібраної заміни змінних.

При $n=3$ та $n=4$ існують формули для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь третього та четвертого степенів, проте в силу їх громіздкості вони застосовуються рідко.

У загальному випадку не існує формул для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь більш високих степенів, ніж чотири. Тим не менше достатньо часто приходиться розв'язувати алгебраїчні рівняння степеня більшого ніж два.

Розглянемо розкладання лівої частини рівняння на множники методом винесення спільного множника за дужки. Будемо вважати, що ліва частина рівняння – це многочлен n-го степеня відносно невідомої, а права частина дорівнює нулю.

1. Розкладання лівої частини рівняння, як квадратного тричлена, на множники

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\left((x+2)(x+4)\right)^2-5(x+2)(x+4)+6=0.$$

Розв'язання. Покладаючи $(x+2)(x+4)=t$, запишемо початкове рівняння у вигляді $t^2-5t+6=0$, звідки знаходимо $t=2$ або $t=3$.

Повертаючись до x, дістанемо $\left((x+2)(x+4)-2\right)\times$ $\times\left((x+2)(x+4)-3\right)=0$. Запишемо $(x+2)(x+4)$ у вигляді $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8=(x+3)^2-1$; тоді $\left((x+3)^2-3\right)\times$

$\times\left(\left(x+3\right)^2-4\right)=0,$ або $\left(x+3-\sqrt{3}\right)\left(x+3+\sqrt{3}\right)\left(x+1\right)\left(x+5\right)=0;$ звідки $x_1=\sqrt{3}-3,\ x_2=-\sqrt{3}-3,\ x_3=-1,\ x_4=-5.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)-6=0.$$

Розв'язання. Записавши рівняння у вигляді $\left(x^2+3x+1\right)\times$ $\times\left(\left(x^2+3x+1\right)+1\right)-6=0,$ або $\left(x^2+3x+1\right)^2+\left(x^2+3x+1\right)-6=0,$ покладемо $x^2+3x+1=t.$ Будемо мати $t^2+t-6=0,$ або $\left(t+3\right)\left(t-2\right)=0.$

Повернувшись від t до x, дістаємо $\left(x^2+3x+4\right)\times$ $\times\left(x^2+3x-1\right)=0$. Оскільки $x^2+3x+4\neq 0$ $\left(D=-7<0\right)$, то $x^2+3x-1=0,$ звідки $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15=0.$$

Розв'язання. Оскільки $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)=$ $=\left(\left(x+1\right)\left(x+7\right)\right)\left(\left(x+3\right)\left(x+5\right)\right)=\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right),$ то покладаючи $x^2+8x+7=t,$ рівняння можна записати у вигляді $t\left(t+8\right)+15=0,$ або $t^2+8t+15=0$. Корені цього рівняння є $t=-5$ або $t=-3$. Тому $\left(t+3\right)\left(t+5\right)=0$. Повертаючись від t до x, маємо $\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)=0,$ звідки або $x^2+8x+10=0,$ або $x^2+8x+12=0,$ тобто $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{6},\ x_3=-2,\ x_4=-6.$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$4\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)-3x^2=0.$$

Розв'язання. Оскільки $\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)=$ $=\left(\left(x+5\right)\left(x+12\right)\right)\left(\left(x+6\right)\left(x+10\right)\right)=\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right),$ то початкове рівняння, поклавши $x^2+16x+60=t,$ можна записати у вигляді $4(t+x)t-3x^2=0$. Зауважимо, що

$4(t+x)t-3x^2=4t^2+4xt-3x^2=4t^2+4tx+x^2-4x^2=(2t+x)^2-$

$-(2x)^2=(2t-x)(2t+x)$. Повертаючись від t до x, отримаємо

рівняння $\left(2\left(x^2+16x+60\right)-x\right)\left(2\left(x^2+16x+60\right)+3x\right)=0$ або

$\left(2x^2+31x+120\right)\left(2x^2+35x+120\right)=0$, що еквівалентне сукупності

$2x^2+31x+120=0$ або $2x^2+35x+120=0$, звідки знайдемо

$x_1=-8,\ x_2=-\dfrac{15}{2},\ x_{3,4}=\dfrac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$3x^6-4x^5+2x^4-8x^3+2x^2-4x+3=0.$$

Розв'язання. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то перетворимо його ліву частину таким чином:

$3x^6-4x^5+2x^4-8x^3+2x^2-4x+3=x^3\left(3x^3-4x^2+2x-8+\dfrac{2}{x}-\right.$

$\left.-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)=x^3\left(3\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)-4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)$. Зауважимо,

що $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$. Узявши

$x+\dfrac{1}{x}=t$, рівняння можна представити у

вигляді $x^3\left(3\left(t^3-3t\right)-4\left(t^2-2\right)+2t-8\right)=0$,

$x^3\left(3t^3-9t-4t^2+8+2t-8\right)=0$, $x^3\left(3t^3-9t-4t^2+8+2t-8\right)=0$,

$x^3\cdot t\left(3t^2-4t-7\right)=0$, або $3x^2t(t+1)\left(t-\dfrac{7}{3}\right)=0$. Повертаючись від t

до x, дістанемо $3x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{3}\right)=0$ або

$\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(3x^2-7x+1\right)=0$. Тут $x^2+1\neq 0$ і $x^2+x+1\neq 0$; отже, $3x^2-7x+1=0$, звідки знаходимо $x_1=\frac{7+\sqrt{37}}{6}$, $x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{6}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2+x+4\right)^2+8x\left(x^2+x+4\right)+15x^2=0.$$

Розв'язання. Покладемо $y=x^2+x+4$. Тоді задане рівняння набере вигляду $y^2+8xy+15x^2=0$.

Розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно y:
$y_{1,2}=-4x\pm\sqrt{16x^2-15x^2}$. Отже, $y_1=-3x$, $y_2=-5x$. Таким чином, задача зводиться до розв'язування такої сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+4=-3x, \\ x^2+x+4=-5x \end{array}\right. \text{ або } \left[\begin{array}{l} x^2+4x+4=0, \\ x^2+6x+4=0. \end{array}\right.$$

З цієї сукупності знаходимо: $x_{1,2}=-2$, $x_{3,4}-3\pm\sqrt{5}$.

2. Розкладання лівої частини рівняння на множники методом винесення спільного множника за дужки та способом групування

Якщо всі члени лівої частини рівняння мають спільний множник, то її можна розкласти на множники, виносячи спільний множник за дужки і одержуючи після цього еквівалентну сукупність рівнянь.

У багатьох випадках доцільно замінити деякі члени на суму (різницю) подібних доданків або ввести взаємно знищувані члени.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^2-x^3+4-4x=0$.

Розв'язання. Згрупуємо попарно перші й останні два члени і з кожної пари винесемо за дужки спільний множник. Дістанемо $x^2\left(1-x\right)+4\left(1-x\right)=0$.

Далі спільний множник $1-x$ винесемо за дужки. Одержимо рівняння $\left(1-x\right)\left(x^2+4\right)=0$. Воно еквівалентне об'єднанню двох рівнянь: $1-x=0$ і $x^2+4=0$. З першого рівняння знаходимо $x=1$. Друге рівняння розв'язків не має.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $x^5+5x^3-6x^2=0$.

Розв'язання. Спочатку винесемо спільний множник x^2 за дужки: $x^2\left(x^3+5x-6\right)=0$. Далі запишемо це рівняння у вигляді

$x^2\left(x^3-x^2+x^2-x+6x-6\right)=0$, або

$x^2\left(x^2(x-1)+x(x-1)+6(x-1)\right)=0$, $x^2(x-1)\left(x^2+x+6\right)=0$.

Останнє рівняння еквівалентне сукупності рівнянь $x^2=0$, $x-1=0$ і $x^2+x+6=0$. З першого рівняння знаходимо $x_1=x_2=0$, з другого – $x=1$, а третє рівняння розв'язків не має $(D<0)$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $3x^6+12x^4-96x^2=0$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок перетворень лівої частини заданого рівняння:

$$3x^6+12x^4-96x^2=3x^2\left(x^4+4x^2-32\right)=3x^2\left(x^4-4x^2+8x^2-32\right)=$$
$$=3x^2\left(x^2\left(x^2-4\right)+8\left(x^2-4\right)\right)=3x^2\left(x^2-4\right)\left(x^2+8\right)=$$
$$=3x^2(x-2)(x+2)\left(x^2+8\right).$$

Таким чином, дістанемо рівняння $3x^2(x-2)(x+2)\times\left(x^2+8\right)=0$, еквівалентне вихідному. Звідси маємо або $x^2=0$, або $x-2=0$, або $x+2=0$, або x^2+8,

звідки

$x_1=x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=-2$, $x^2\neq-8$.

3. Використання формул скороченого множення

Інколи доводиться виносити множники за дужки, групувати члени, виділяти повний квадрат і тільки після цього суму кубів, різницю квадратів або різницю кубів представляти у вигляді добутку.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x^3-3x^2-3x+1=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\left(x^3+1\right)-\left(3x^2+3x\right)=0$. Далі вираз у першій дужці розкладемо як

суму кубів, а з другої дужки винесемо спільний множник $3x$.
Будемо мати $(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$,

або $(x+1)(x^2-4x+1)=0$,

$(x+1)(x^2-4x+4-3)=0$, $(x+1)\left((x-2)^2-(\sqrt{3})^2\right)=0$. Насамкінець, використовуючи формулу різниці квадратів, дістанемо
$(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$, звідки
$x_1=-1$, $x_2=2+\sqrt{3}$, $x_3=2-\sqrt{3}$.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8.$$

Розв'язання. Розкладемо ліву і праву частини рівняння на множники за формулою суми кубів, далі перенесемо праву частину в ліву і винесемо спільний множник за дужки: $(x-1+2x+3)\left((x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2\right)=(3x+2)\times$
$\times(9x^2-6x+4)$, $(3x+2)(3x^2+9x+13)-(3x+2)(9x^2-6x+4)=0$,
$(3x+2)(3x^2+9x+13-9x^2+6x-4)=0$, $(3x+2)(-6x^2+15x+9)=0$,
$(3x+2)(2x^2-5x-3)=0$.

Останнє рівняння еквівалентне об'єднанню двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}3x+2=0,\\2x^2-5x-3=0.\end{array}\right.$$

З першого рівняння знаходимо $x_1=-\frac{2}{3}$, а з другого – $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=3$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $x^4-2x^3+2x-1=0$.

Розв'язання. Представимо задане рівняння у вигляді $x^4-2x^2\cdot x+x^2-x^2+2x-1=0$ або $(x^2-x)^2-(x^2-2x+1)=0$, $x^2(x-1)^2-(x-1)^2=0$. Далі винесемо спільний множник $(x-1)^2$ за дужки: $(x-1)^2(x^2-1)=0$. Остаточно маємо $(x-1)^3(x+1)=0$, звідки $x_1=x_2=x_3=1$, $x_4=-1$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$x^4+2x^3+15x^2+14x+24=0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$x^4+2x^2\cdot x+x^2+14x^2+14x+24=0$, $(x^2+x)^2+14(x^2+x)+24=0$,

$(x^2+x)^2+2(x^2+x)\cdot 7+\ 49-49+24=0$, $(x^2+x+7)^2-5^2=0$,

$(x^2+x+12)(x^2+x+2)=0.$

Отримане рівняння еквівалентне об'єднанню двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}(x+1)^2=0,\\ (x^2+4)^2=0.\end{array}\right.$$

Звідси дістанемо $x+1=0$, $x=-1$; $x^2+4\neq 0$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Розв'язання. Запишемо наше рівняння у вигляді

$$(x^7+x^6)+(x^5+x^4)+(x^3+x^2)+(x+1)=0$$

і винесемо спільні множники за дужки:

$x^6(x+1)+x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)=0$, $(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)=0$.

Аналогічно

$(x+1)\left(x^4(x^2+1)+(x^2+1)\right)=0$, $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$.

Звідси, оскільки $x^2+1\neq 0$ і $x^2+1\neq 0$, маємо $x+1=0$, звідки $x=-1$.

Зауважимо, що ліву частину заданого рівняння можна розкласти на множники й іншим способом. Оскільки $x=1$ не є коренем початкового рівняння, то його можна поділити і помножити на $x-1$; будемо мати

$$\frac{(x-1)(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=0,\ \frac{x^8-1}{x-1}=0,$$

$$\frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x-1}=0,$$

$$\frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x-1}=0,\ \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{x-1}=0.$$

$(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$, звідки $x=-1$ $(x^2+1\neq 0,\ x^4+1\neq 0)$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $1-x^{12}=0$.

Розв'язання. Розкладемо $1-x^{12}$ на множники як різницю квадратів: $(1-x^6)(1+x^6)=0$.

Аналогічно $(1-x^3)(1+x^3)(1+x^2)(1-x^2+x^4)=0$. Звідси маємо або $1-x^3=0$, або $1+x^3=0$, звідки $x=1$, або $x=-1$ $(1+x^2\neq 0, 1-x^2+x^4\neq 0)$.

4. Виділення повного квадрата або куба двочлена

Іноді ліву частину рівняння можна розкласти на множники, попередньо виділивши квадрат або куб двочлена з подальшим застосуванням відповідних формул скороченого множення.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $x^4+16x-12=0$.

Розв'язання. Виділимо в лівій частині заданого рівняння повні квадрати. Для цього додамо і віднімемо в лівій частині рівняння вираз $4x^2+4$:

$$(x^4+4x+4)-4x^2+16x-16=0,\quad (x^2+2)^2-(4x^2-16x+16)=0,$$

$(x^2+2)^2-(2x-4)^2=0$. Далі розкладемо ліву частину отриманого рівняння як різницю квадратів на множники:

$$(x^2+2-2x+4)(x^2+2+2x-4=0),\quad (x^2-2x+6)(x^2+2x-2)=0.$$

Звідси маємо або $x^2-2x+6=0$, або $x^2+2x-4=0$. Перше рівняння розв'язку не має $(D<0)$, а з другого знаходимо $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$.

Приклад 17. Розв'язати рівняння $2x^4+4x+1=0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $x^4+2x+\frac{1}{2}=0$ і виділимо у ньому повні квадрати, додавши і віднявши вираз $2x^2+1$. Будемо мати $x^4+2x^2+1-2x^2-1+$ $+2x+\frac{1}{2}=0$, $\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=0$, $\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2=0$. Далі розкладемо ліву частину рівняння на множники як різницю квадратів. Отримаємо $\left(x^2+1-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\times\left(x^2+1+\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$, $\left(x^2-\sqrt{2}x+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=0$, звідки або

$$x^2-\sqrt{2}x+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=0, \tag{1}$$

або

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0. \tag{2}$$

Рівняння (1) розв'язків не має $(D<0)$; з (2) знаходимо $x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$.

Приклад 18. Розв'язати рівняння

$$x^3-6x^2+12x-10=0.$$

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $\left(x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3\right)-2=0$ або $(x-2)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=0$ і розкладемо ліву його частину на множники як різницю кубів. Будемо мати $\left(x-2-\sqrt[3]{2}\right)\left((x-2)^2+\sqrt[3]{2}(x-2)+\sqrt[3]{4}\right)=0$,

$\left(x-2-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2-\left(4+\sqrt[3]{2}\right)x+4-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)=0$, звідки $x=2+\sqrt[3]{2}$, $x^2-\left(4+\sqrt[3]{2}\right)x+4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\neq 0$ $(D<0)$.

Зауваження. Іноді для того, щоб виділити куб двочлена, доводиться вводити одну або навіть послідовно і дві заміни змінних із додатковими тотожними перетвореннями коефіцієнтів рівняння.

Приклад 19. Розв'язати рівняння $x^3 - x^2 - 3x - 3 = 0$.

Розв'язання. Покладемо $x = \frac{1}{z}$ (1), $z \neq 0$. Будемо мати

$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} - 3 = 0$, $\frac{1 - z - 3z^2 - 3z^3}{z} = 0$, $-3z^3 - 3z^2 - z + 1 = 0 \ (z \neq 0)$,

$3z^3 + 3z^2 + z - 1 = 0 \ (2)$. Помноживши ліву і праву частини (2) на 9, дістанемо $27z^3 + 27z^2 + 9z - 9 = 0 \ (3)$. Нехай $3z = t$, звідки $z = \frac{t}{3} \ (4)$. Підставивши це значення z в (3), отримаємо

$27\frac{t^3}{27} + 27\frac{t^2}{9} + 9\frac{t}{3} - 9 = 0$, $t^3 + 3t^2 + 3t - 9 = 0$, $t^3 + 3t^2 + 3t + {}$ ${} + 1 - 10 = 0$, $(t+1)^3 = 10$, $t + 1 = \sqrt[3]{10}$, звідки $t = \sqrt[3]{10} - 1$.

Повернувшись від t до z в (4), отримаємо $z = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{3}$.

Насамкінець, підставивши знайдене значення z в (1), остаточно знайдемо $x = \frac{3}{\sqrt[3]{10} - 1}$.

5. Розв'язання алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами

При розв'язанні алгебраїчних рівнянь із цілими коефіцієнтами використовується

Теорема 1. *Для того, щоб нескоротний дріб* $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ *був коренем рівняння*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0, \ a_n \neq 0 \qquad (1)$$

з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб число p *було дільником вільного члена* a_0, *а число* q *– дільником старшого коефіцієнта* a_n.

Наслідок. Якщо рівняння (1) має цілі коефіцієнти, а старший коефіцієнт дорівнює одиниці (тобто $a_n = 1$), то раціональними коренями цього рівняння можуть бути тільки цілі числа, які є дільниками вільного члена a_0.

Розглянемо рівняння $2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$. Вільний член цього рівняння має дільники $\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21$. Старший коефіцієнт рівняння має дільники $\pm 1; \pm 2$. Складемо всі можливі дроби $\frac{p}{q}$; дістанемо такі числа:

$$1; 3; 7; 21; -1; -3; -7; -21; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{7}{2}; \frac{21}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{21}{2}.$$

Усі раціональні корені початкового рівняння належать цій множині чисел.

Для знаходження раціональних коренів алгебраїчного рівняння (точніше для організації більш економного перебору) з цілими коефіцієнтами використовується

Теорема 2. *Якщо нескоротний дріб* $\frac{p}{q}\,(q \neq 0)$ *є коренем рівняння* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ *з цілими коефіцієнтами, то для будь-якого цілого числа* m *число* $P(m)$ *ділиться на число* $p - mq$.

Приклад 20. Знайти всі раціональні корені рівняння $P(x) = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$.

Розв'язання. Як показано вище, раціональними коренями даного рівняння можуть бути тільки числа

$$\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{7}{2}; \pm\frac{21}{2}.$$

Підставивши в ліву частину рівняння $x = 1$, дістанемо $P(1) = -20$. Отже, $x = 1$ не є коренем рівняння. За теоремою 2, якщо $\frac{p}{q}$ – корінь рівняння $P(x) = 0$, то число $P(1)$ ділиться на $p - q$. Число (-20) ділиться на $3 - 1 = 2$, і тому число 3 залишається для подальшої перевірки, але число (-20) не ділиться на $7-1=6$, тому число 7 не може бути коренем рівняння. Аналогічно одержуємо, що числа $-21; -\frac{21}{2}; -7; -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{21}{2}$ не є коренями рівняння.

Для перевірки залишаються тільки числа $3; 21; -1; -3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}$. Число $x=3$ не є коренем рівняння, оскільки $P(3)=150 \neq 0$.

Скористаємося знову теоремою 2. Якщо $\frac{p}{q}$ – корінь рівняння, то $P(3)$ повинне ділитися на $p-3q$. Число 150 не ділиться на $21-3=18$; тому $x=21$ не є коренем. Оскільки число 150 не ділиться на 4 і на 9, то числа $-1; -\frac{3}{2}$ також не можуть бути коренями.

Таким чином, для перевірки залишились числа $-3; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2}$.

Знаходимо $P(-3)=0,\ P\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ P\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0,\ P\left(\frac{7}{2}\right) \neq 0.$

Отже, раціональними коренями вихідного рівняння є числа (-3) і $\frac{1}{2}$.

6. Розкладання лівої частини рівняння на множники за допомогою теореми Безу і діленням «у стовпчик»

При розв'язуванні алгебраїчних рівнянь

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0,\ a_n \neq 0$$

можна використовувати *метод зниження степеня* рівняння, який базується на теоремі Безу і ділення многочлена $P(x)$ на одночлен $x-a$, де a – корінь рівняння $P(x)=0$.

Теорема Безу дозволяє сформулювати практичне правило розкладання на множники лівої частини рівняння з цілими коефіцієнтами:

1) якщо зведене рівняння $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=0$ з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони містяться серед дільників вільного члена, тому виписуємо дільники вільного члена a_0;

2) перевіряємо, чи не перетворює якийсь дільник a ліву частину рівняння в нуль; якщо ліва частина дорівнює нулю, то цей дільник є коренем, тобто многочлен $P(x)$ ділиться на двочлен $x-a$;

3) ділимо многочлен $P(x)$ на $x-a$ і подаємо його у вигляді $P(x)=(x-a)Q(x)$, де $Q(x)$ – многочлен, степінь якого дорівнює $n-1$;

4) аналогічно діємо з многочленом $Q(x)$.

Приклад 21. Розв'язати рівняння

$$P_3(x)=x^3-4x^2+x+6=0.$$

Розв'язання. 1) виписуємо дільник вільного члена 6: $\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6;$

2) оскільки $P_3(-1)=(-1)^3-4(-1)^2-1+6=-1-4-1+6=0$, то $x=-1$ – корінь рівняння;

3) ділимо ліву частину рівняння на $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+x+6 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3+x^2} & x^2-5x+6 \\ -5x^2+x & \\ -\underline{-5x^2-5x} & \\ 6x+6 & \\ -\underline{6x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже, $x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)=0$, звідки $x+1=0$, або $x^2-5x+6=0$, тобто $x_1=-1$, або $x_2=2,\ x_3=3$.

Приклад 22. Розв'язати рівняння

$$P_4(x)=5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=0.$$

Розв'язання. Оскільки $P_4(1)=5+9-2-4-8=0$, то $P_4(x)$ ділиться на $x-1$. Діленням «у стовпчик» знайдемо частку.

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{l}5x^4+9x^3-2x^2-4x-8\\ 5x^4-5x^3\end{array}} & \dfrac{x-1}{5x^3+14x^2+12x+8} \\
\quad \underline{-\begin{array}{l}14x^3-2x^2\\ 14x^3-14x^2\end{array}} & \\
\qquad \underline{-\begin{array}{l}12x^2-4x\\ 12x^2-12x\end{array}} & \\
\qquad\quad \underline{-\begin{array}{l}8x-8\\ 8x-8\end{array}} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отже, $P_4(x)=(x-1)\left(5x^3+14x^2+12x+8\right)=(x-1)P_3(x)$.

Оскільки $P_3(-2)=-40+56-24+8=0$, то многочлен $P_3(x)=5x^3+14x^2+12x+8$ ділиться на $x+2$. Знайдемо частку діленням «у стовпчик»:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{l}5x^3+14x^2+12x+8\\ 5x^3+10x^2\end{array}} & \dfrac{x+2}{5x^2+4x+4} \\
\quad \underline{-\begin{array}{l}4x^2+12x\\ 4x^2+8x\end{array}} & \\
\qquad \underline{-\begin{array}{l}4x+8\\ 4x+8\end{array}} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Отже, $P_3(x)=(x+2)\left(5x^2+4x+4\right)$.

Таким чином, вихідне рівняння можна записати у вигляді

$$(x-1)(x+2)\left(5x^2+4x+4\right)=0,$$

яке еквівалентне об'єднанню трьох рівнянь: $x-1=0$, звідки $x_1=1$, $x+2=0$, звідки $x_2=-2$, і $5x^2+4x+4=0$, звідки $x_{3,4} \in \varnothing \ (D<0)$.

Приклад 23. Розв'язати рівняння

$$P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 24 = 0.$$

Розв'язання. Випишемо дільники вільного члена: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$.

Оскільки $P_3(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 24 = 0$, то $P_3(x)$ ділиться на $x-2$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + 4x^2 + 0 \cdot x - 24 & x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & \overline{x^2 + 6x + 12} \\ -\,6x^2 + 0 \cdot x \qquad & \\ \underline{6x^2 - 12x \qquad} & \\ -\,12x - 24 & \\ \underline{12x - 24} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким чином, $x^3 + 4x^2 - 24 = (x-2)\left(x^2 + 6x + 12\right)$, а отже, вихідне рівняння набирає вигляду:

$$(x-2)\left(x^2 + 6x + 12\right) = 0.$$

Це рівняння рівносильне сукупності рівнянь $x - 2 = 0$ і $x^2 + 6x + 12 = 0$. З першого рівняння знаходимо $x = 2$. Друге рівняння розв'язків не має $(D<0)$.

Зауваження. Покажемо схематично інший спосіб розкладання многочлена на множники з урахуванням знайденого цілого кореня без ділення «у стовпчик»:

$$\begin{array}{c} -\,P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 24 \\ \underline{\;\;P_3(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 24\;\;} \\ P_3(x) - P_3(2) = \left(x^3 - 2^3\right) + 4\left(x^2 - 2^2\right) \end{array}$$

$$P_3(x) - P_3(x) = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right) + 4(x-2) = (x-2) \times$$
$$\times \left(x^2 + 2x + 4 + 4x + 8\right) = (x-2)\left(x^2 + 6x + 12\right).$$

Але $P_3(2)=0$, виходить, $P_3(x)=(x-2)(x^2+6x+12)$.

Зауважимо також, що якщо незведені рівняння, ліва частина яких являє собою многочлен з цілими коефіцієнтами і вільним членом, що дорівнює 1 або –1, легко перетворюються у зведені рівняння за допомогою почленного ділення на x у старшому степені (неважко побачити, що таке ділення не приводить до втрати коренів, оскільки $x=0$ не є коренем рівняння, вільний член якого відмінний від нуля) і подальшою заміною $\frac{1}{x}$ на нову змінну, наприклад, y.

Приклад 24. Розв'язати рівняння $21x^3+x^2-5x-1=0$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на $x^3 \neq 0$, дістанемо $21+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0$. Поклавши $\frac{1}{x}=y$, приходимо до рівняння $21+y-5y^2-y^3=0$, або $y^3+5y^2-y-21=0$.

Методом проб знайдемо цілий корінь рівняння $y_1=-3$ і поділимо многочлен y^3+5y^2-y-21 на $y+3$. Дістанемо квадратний тричлен y^2+2y-7 із коренями $y_{2,3}=-1\pm 2\sqrt{2}$.

Оскільки $x=\frac{1}{y}$, то $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_{2,3}=\frac{1\pm 2\sqrt{2}}{7}$.

Приклад 25. Розв'язати рівняння

$$4x^3-10x^2+14x-5=0.$$

Розв'язання. Тут ми застосуємо ще один спосіб перетворення незведеного рівняння у зведене (мета такого перетворення зрозуміла: зведене рівняння має своїми раціональними коренями тільки цілі числа, а спосіб відшукання цілочисельних коренів у нас є). Помножимо обидві частини заданого рівняння на таке число, щоб коефіцієнт при x^3 став кубом деякого цілого числа. У нашому випадку таким множником може слугувати число 2. Помножимо обидві частини рівняння на 2. Дістанемо:

$$8x^3-20x^2+28x-10=0.$$

Покладемо тепер $2x=y$; тоді рівняння набере вигляду:

$$y^3-5y^2+14y-10=0.$$

Як і в попередніх прикладах, знаходимо корені зведеного рівняння. Тут тільки один корінь $y_1 = 1$ (перевірте!). Оскільки $x = \frac{y}{2}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$ – єдиний корінь заданого рівняння.

7. Розкладання лівої частини рівняння на множники за допомогою методу невизначених коефіцієнтів

Якщо ліву частину розкласти на множники, то розв'язання рівняння зводиться до розв'язання сукупності алгебраїчних рівнянь нижчого степеня. Для розкладання лівої частини рівняння на множники інколи використовується метод *невизначених коефіцієнтів*.

Суть цього методу полягає в тому, що вигляд множників многочленів, на які розкладається ліва частина рівняння, заздалегідь відомий.

Цей метод спирається на такі твердження:

1) два многочлени, представлені в канонічному виді, тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх степені і рівні коефіцієнти при однакових степенях невідомого x;

2) будь-який многочлен третього степеня $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ розкладається на добуток двочлена і квадратного тричлена: $P_3(x) = a(x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma)$;

3) будь-який многочлен четвертого степеня $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$ розкладається на добуток двох квадратних тричленів: $P_4(x) = a(x^3 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta)$, де одночасно можливі рівності $\alpha = \gamma$ та $\beta = \delta$.

Приклад 26. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати многочлени $x - \alpha$ і $x^2 + \beta x + \gamma$ такі, щоб виконувалась тотожність

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma) \tag{1}$$

Розкривши дужки в правій частині тотожності (1) та звівши подібні члени, одержимо:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = x^3 + (\beta - \alpha)x^2 + (\gamma - \alpha\beta)x - \alpha\gamma \tag{2}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності (2), одержуємо систему рівнянь для знаходження $\alpha, \beta, \gamma,$ тобто введених невизначених коефіцієнтів, які вважаються цілими числами:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = -3, \\ \gamma - \alpha\beta = 4, \\ \alpha\gamma = 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему в цілих числах, одержимо:

$$\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 2.$$

Представивши ці значення α, β і γ в (1), дістанемо рівняння

$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0,$

звідки знаходимо розв'язок $x = 1$.

Приклад 27. Розв'язати рівняння $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді добутку двох квадратних тричленів із цілими коефіцієнтами:

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Перемноживши тричлени правої частини та звівши подібні члени, дістанемо:

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = x^4 + (a+c)x^3 - (ac + b + d)x^2 +$$
$$+(ad + bc)x + bd \qquad (1).$$

Ліва частина (1) тотожно дорівнює правій, якщо коефіцієнти при однакових степенях x рівні. Одержуємо систему:

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ ac + b + d = -1, \\ ad + bc = 2, \\ bd = -1. \end{cases} \qquad (2)$$

З останнього рівняння системи виходить, що для b (як і для d) можливі тільки цілі значення ± 1.

Нехай $b = 1$, тоді $d = -1$. У цьому випадку друге і третє рівняння в (2) дають систему $\begin{cases} ac = -3, \\ -a + c = 2, \end{cases}$ звідки для a одержуємо рівняння $a^2 + 2a + 3 = 0$, яке не має цілих коренів. Тому цілочи-сельних розв'язків при $b = 1$ система не має.

Нехай $b=-1$, тоді $d=1$. У цьому випадку друге і третє рівняння в (2) дають систему $\begin{cases} ac=-1, \\ a-c=2. \end{cases}$ Виключаючи c, дістанемо для a рівняння $a^2-2a+1=0$, яке має корінь $a=1$; тоді $c=-1$. Перше рівняння системи (2) також задовольняється при $a=1$ та $c=-1$.

Отже, маємо $x^4-x^2+2x-1=\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)$ і вихідне рівняння набере вигляду $\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$. Оскільки $x^2-x+1\neq 0$ $\left(D<0\right)$, то залишається $x^2+x-1=0$, звідки знаходимо $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 28. Розв'язати рівняння

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0.$$

Розв'язання. Ліва частина рівняння є многочленом четвертого степеня. Цей многочлен розкладається у добуток двох квадратних тричленів: x^2+px+q та x^2+bx+c. Задача полягає у відшуканні коефіцієнтів p, q, b і c.

Маємо $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+bx+c\right)$.

Многочлени, що стоять в лівій і правій частинах цієї рівності, тотожно рівні. Прирівнюючи їх коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} p+b=-4, \\ c+q+pb=-10, \\ pc+qb=37, \\ qc=-14. \end{cases} \qquad (1)$$

Попробуємо знайти деякий цілочисельний розв'язок цієї системи. З останнього рівняння системи виходить, що для q (як і для c) можливі такі цілі значення: ±1; ±2; ±7; ±14.

Нехай $q=1$, тоді $c=-14$. У цьому випадку друге і третє рівняння в (1) дають систему $\begin{cases} pb=3, \\ -14p+b=37, \end{cases}$ звідки для b

одержуємо рівняння $b^2 - 37b - 42 = 0$, яке не має цілих коренів. Тому цілочисельних розв'язків при $q = 1$ система (1) не має.

Нехай $q = 2$, тоді $c = -7$. У цьому випадку друге і третє рівняння в (1) дають систему $\begin{cases} pb = -5, \\ -7p + 2b = 37. \end{cases}$ Виключаючи p, дістанемо для b рівняння $2b^2 - 37b + 35 = 0$, яке має корінь $b = 1$, тоді $p = -5$. Перше рівняння системи (1) також задовольняється при $b = 1$ та $p = -5$.

Отже, маємо

$$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = \left(x^2 - 5x + 2\right)\left(x^2 + x - 7\right) = 0.$$

Виходить, дане рівняння еквівалентне сукупності квадратних рівнянь $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x^2 + x - 7 = 0, \end{array}\right.$ розв'язуючи яку знаходимо $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

8. Використання теореми Безу та методу невизначених коефіцієнтів

Приклад 29. Розв'язати рівняння

$$P_3\left(x\right) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Розв'язання. Оскільки $P_3\left(-1\right) = 0$, то многочлен $P_3\left(x\right)$ ділиться на $x + 1$. Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо частку від ділення многочлена $P_3\left(x\right) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ на двочлен $x + 1$.

Нехай частка є многочлен $x^2 + \alpha x + \beta$. Оскільки

$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = \left(x + 1\right)\left(x^2 + \alpha x + \beta\right) = x^3 + \left(\alpha + 1\right)x^2 +$

$+\left(\alpha + \beta\right)x + \beta$, то зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях

x, дістанемо систему $\begin{cases} \alpha + 1 = 4, \\ \alpha + \beta = 5, \\ \beta = 2, \end{cases}$ звідки $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Отже,

$P_3(x)=(x+1)(x^2+3x+2)$ і вихідне рівняння запишеться у вигляді $(x+1)(x^2+3x+2)=0$. Звідси маємо $x_1=x_2=-1,\ x_3=-2$.

Приклад 30. Розв'язати рівняння

$$P_4(x)=2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=0.$$

Розв'язання. Оскільки $P_4(2)=32-24-28+12+8=0$, то многочлен $P_4(x)$ ділиться на $x-2$. Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо частку у вигляді $2x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

З огляду на те, що

$$2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=(x-2)(2x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)=$$
$$=2x^4+(\alpha-4)x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\gamma-2\beta)x-2\gamma,$$

дістанемо систему $\begin{cases}\alpha-4=-3,\\ \beta-2\alpha=-7,\\ \gamma-2\beta=6,\\ -2\gamma=8,\end{cases}$ звідки $\alpha=1,\ \beta=-5,\ \gamma=-4.$

Отже, $P_4(x)=(x-2)(2x^3+x^2-5x-4)$. Розкладемо на множники многочлен правої частини:

$$2x^3+x^2-5x-4=2x^3+2x^2-x^2-x-4x-4=2x^2(x+1)-$$
$$-x(x+1)-4(x+1)=(x+1)(2x^2-x-4).$$

Таким чином, вихідне рівняння набуде вигляду $(x-2)(x+1)(2x^2-x-4)=0$. Воно еквівалентне об'єднанню трьох рівнянь $x-2=0,\ x+1=0$ і $2x^2-x-4=0$,

звідки $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$.

9. Розкладання лівої частини рівняння на множники з використанням теореми Безу і схеми Горнера

У ряді випадків для зниження степеня рівняння і для розкладання його лівої частини на множники доцільно спочатку застосувати теорему Безу, а далі скористатися схемою Горнера.

Продемонструємо це на прикладах.

Приклад 31. Розв'язати рівняння

$$P_3(x) = x^3 - x^2 - 32x + 60 = 0.$$

Розв'язання. Коренями цього рівняння можуть бути дільники вільного члена – числа 60. Виписуємо ці числа: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 12; \pm 15; \pm 20; \pm 30; \pm 60.$

Безпосередньою підстановкою знаходимо $P_3(2) = 0.$

Оскільки $P_3(2) = 0$, то $x = 2$ є коренем вихідного рівняння. Далі знайдемо за схемою Горнера коефіцієнти частки від ділення $P_3(x)$ на $x - 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -32 & 60 \\ & & +2 & +2 & +-60 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -30 & 0 \end{array}$$

Таким чином, $P_3(x) = (x-2)(x^2 + x - 30) = 0$ і вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь $x - 2 = 0$ або $x^2 + x - 30 = 0$, звідки знаходимо $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 6.$

Приклад 32. Розв'язати рівняння

$$P_3(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Розв'язання. Коефіцієнт при старшому степеневі дорівнює 1; тому цілі числа, які можуть бути коренями многочлена $P_3(x)$, є дільниками вільного члена – числа 12. Випишемо ці числа: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12.$ Безпосередньою підстановкою знаходимо $P_3(1) = 4, P_3(-1) = 18, P_3(2) = 0.$

Оскільки $P_3(2) = 0$, то $x = 2$ є коренем многочлена $P_3(x)$, тому многочлен $P_3(x)$ ділиться на $x - 2$. Знайдемо за схемою Горнера коефіцієнти частки від ділення $P_3(x)$ на $x - 2$. (Тут таблиця зі схеми Горнена наводиться зі скороченням):

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Таким чином, маємо $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x^2 + x - 6) = 0$ і вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь

$x-2=0$ і $x^2+x-6=0$, розв'язавши які, знаходимо $x_1=x_2=2,\ x_3=3$.

Приклад 33. Розв'язати рівняння

$$P_3\left(x\right)=2x^3-5x^2-x+1=0.$$

Розв'язання. Якщо многочлен $P_3\left(x\right)$ має раціональний корінь $\frac{p}{q}$, то p є дільником вільного члена $\left(+1\right)$, q є дільником коефіцієнта 2, тому серед усіх раціональних чисел коренями можуть бути тільки числа $\pm1;\ \pm\frac{1}{2}$. Безпосередньою підстановкою знаходимо $P_3\left(1\right)=-3,\ P_3\left(-1\right)=-5,\ P_3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},\ P_3\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Оскільки $P_3\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, то $x=-\frac{1}{2}$ є коренем многочлена $P_3\left(x\right)$ і многочлен $P_3\left(x\right)$ ділиться на $x+\frac{1}{2}$. За схемою Горнера знайдемо коефіцієнти частки від ділення многочлена $P_3\left(x\right)$ на $x+\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & -1 & 1 \\ & & +\,-1 & +\,3 & +\,-1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}$$

Таким чином, вихідне рівняння набере вигляду $2x^3-5x^2-x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-6x+2\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-3x+1\right)=0$, звідки знаходимо $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 34. Розв'язати рівняння

$$P_3(x) = 2x^3 - 5x^2 - 196x + 99 = 0.$$

Розв'язання. Якщо дане рівняння має раціональні корені, то вони можуть бути тільки серед чисел

$$\pm\frac{1}{2};\ \pm 1;\ \pm\frac{3}{2};\ \pm 3;\ \pm\frac{9}{2};\ \pm\frac{11}{2};\ \pm 9;\ \pm\frac{33}{2};\ \pm 33;\ \pm\frac{99}{2};\ \pm 99;\ \pm 11.$$

Для знаходження кореня цього рівняння скористаємось таким твердженням:

Якщо на кінцях деякого відрізка $[a; b]$ значення многочлена мають різні знаки, то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б один корінь цього многочлена.

Для заданого рівняння $P_3(0) = 99,\ P_3(1) = -100$. Отже, на інтервалі $(0; 1)$ є принаймні один корінь даного рівняння. Тому серед виписаних вище 24 чисел доцільно спочатку перевірити ті числа, які належать інтервалу $(0; 1)$. Із цих чисел тільки число $\frac{1}{2}$ належить цьому інтервалу.

Значення $P_3(x)$ при $x = \frac{1}{2}$ можна знаходити не тільки безпосередньою підстановкою, але й іншими способами, наприклад за схемою Горнера, оскільки $P(a)$ дорівнює залишку від ділення многочлена $P(x)$ на $x - a$. Більше того, у багатьох прикладах цьому способу віддається перевага, оскільки одночасно знаходяться і коефіцієнти частки.

За схемою Горнера у нашому випадку дістанемо

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & -196 & 99 \\
 & & {}^{+}\,1 & {}^{+}-2 & {}^{+}-99 \\
\hline
\frac{1}{2} & 2 & -4 & 198 & 0
\end{array}$$

Оскільки $P_3\left(\frac{1}{2}\right)=0$, то $x=\frac{1}{2}$ є коренем многочлена $P_3(x)$, і многочлен $P_3(x)$ ділиться на $x-\frac{1}{2}$, тобто $2x^3-5x^2-196x+99=$ $=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x-198\right)$, і наше вихідне рівняння набере вигляду $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^3-4x-198\right)=0$. Воно еквівалентне сукупності двох рівнянь $\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=0, \\ 2x^2-4x-198=0. \end{array}\right.$ З першого рівняння знаходимо $x_1=\frac{1}{2}$, з другого – $x_2=-9$, $x_3=11$.

Приклад 35. Розв'язати рівняння

$$P_4(x)=x^4+4x^3-2x^2-4x+1=0.$$

Розв'язання. Якщо серед коренів даного рівняння є цілі числа, то це числа 1 або –1. Знайдемо $P_4(1)$: $P_4(1)=1+$ $+4-2-4+1=0$. Оскільки $P_4(1)=0$, то $x=1$ є корінь многочлена $P_4(x)$, і многочлен $P_4(x)$ ділиться на $x-1$. За схемою Горнера знайдемо коефіцієнти частки від ділення многочлена $P_4(x)$ на $x-1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -2 & -4 & 1 \\ & & {}^{+}1 & {}^{+}5 & {}^{+}3 & {}^{+}-1 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

Таким чином, $x^4-4x^3-2x^2-4x+1=(x-1)\left(x^3+5x^2+3x-1\right)=0$.

Многочлен $P_3(x)=x^3+5x^2+3x-1$ при $x=-1$ перетворюється в нуль; тому він ділиться на $x+1$.

Знову за схемою Горнера знайдемо коефіцієнти частки від ділення многочлена $P_3(x)$ на $x+1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 3 & -1 \\ & & +\,-1 & +\,-4 & +\,1 \\ \hline -1 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

Звідси дістанемо $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 1 = (x+1)(x^2 + 4x - 1)$ і після цього вихідне рівняння можна записати у вигляді $(x-1)(x+1)(x^2+4x-1) = 0$.

Прирівнявши по черзі кожен співмножник до нуля, матимемо $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{5}.$

Приклад 36. Розв'язати рівняння

$$P_6(x) = x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 9x^3 + x^2 - 3x - 18 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $P_6(1) = 0$, то згідно схемі Горнера отримуємо

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 3 & 7 & 9 & 1 & -3 & -18 \\ & & +\,1 & +\,4 & +\,11 & +\,20 & +\,21 & +\,18 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 11 & 20 & 21 & 18 & 0 \end{array}$$

Звідси $P_6(x) = (x-1)(x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 21x + 18) = 0.$

Застосовуючи ще раз схему Горнера, переконуємося, що многочлен $P_5(x) = x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 21x + 18$ ділиться на $x+2$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 4 & 11 & 20 & 21 & 18 \\ & & +\,-2 & +\,-4 & +\,-14 & +\,-12 & +\,-18 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

Звідси $P_5(x) = (x+2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9).$

Групуючи і виділяючи повний квадрат, маємо $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9 = x^4 + 2x^2 \cdot x + x^2 + 6x^2 + 6x + 9 = (x^2 + x)^2 +$
$+6(x^2 + x) + 9 = (x^2 + x + 3)^2.$

Після цього вихідне рівняння можна записати у вигляді $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)^2=0$, звідки або $x-1=0$ або $x+2=0$, тобто $x_1=1$, $x_2=-2$; $x^2+x+3\neq 0$ $(D<0)$.

Приклад 37. Розв'язати рівняння

$$P_4(x)=x^4+2x^3-2x^2-6x+5=0.$$

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти даного рівняння – цілі числа, то попробуємо знайти хоча б один цілий корінь.

Дільниками вільного члена є числа 1; –1; 5; –5. Знайдемо значення многочлена $P_4(x)$ у цих точках:

$$P_4(1)=1+2-2-6+5=0;\ P_4(-1)=1-2-2+6+5=8\neq 0;$$

$$P_4(5)=625+250-50-30+5=800\neq 0;$$

$$P(-5)=625-250-50+30+5=360\neq 0.$$

Многочлен $P_4(x)$ має цілий корінь $x_1=1$, а числа 5; –5; –1 не є його коренями.

Згідно теоремі Безу можна стверджувати, що знайдеться многочлен $P_3(x)$ такий, що $P_4(x)=(x-1)P_3(x)$, де $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ – деякий многочлен третього степеня. Коефіцієнти a_3, a_2, a_1, a_0 цього многочлена можна знайти, використовуючи, наприклад, схему Горнера.

Одержимо $x^4+2x^3-2x^2-6x+5=(x-1)(x^3+3x^2+x-5)$.

Знайдемо корені рівняння $P_3(x)=x^3+3x^2+x-5=0$. Дільники його вільного члена є числа 1; –1; 5; –5. Немає необхідності шукати значення многочлена в точках –1; 5; –5, оскільки ці числа не є коренями рівняння $P_4(x)=0$, а отже, і рівняння $P_3(x)=0$. Тому перевіримо лише число 1. Маємо $P_3(1)=1+3+1-5=0$; застосовуючи схему Горнера, дістанемо

$$P_3(x)=(x-1)(x^2+4x+5).$$

Таким чином, вихідне рівняння можна записати у вигляді $(x-1)^2(x^2+4x+5)=0$.

Оскільки дискримінант квадратного тричлена x^2+4x+5 дорівнює $-4<0$, то квадратне рівняння $x^2+4x+5=0$ коренів не має.

Отже, вихідне рівняння має два співпадаючих корені $x_1=x_2=1$, або іншими словами, корінь $x=1$ кратності два.

Висновок. Таким чином, у статті розглянуто алгебраїчні рівняння вищих степенів та методи їх розв'язання, а саме:

1. Розкладання лівої частини рівняння, як квадратного тричлена, на множники.
2. Розкладання лівої частини рівняння на множники методом винесення спільного множника за дужки та способом групування.
3. Використання формул скороченого множення.
4. Виділення повного квадрата або куба двочлена.
5. Розв'язання алгебраїчних рівнянь із цілими коефіцієнтами.
6. Розкладання лівої частини рівняння на множники за допомогою теореми Безу і діленням «у стовпчик».
7. Розкладання лівої частини рівняння на множники за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.
8. Використання теореми Безу та методу невизначених коефіцієнтів.
9. Розкладання лівої частини рівняння на множники з використанням теореми Безу і схеми Горнера.

Список літератури

1. *Саушкін О.Ф.* Рівняння вищих степенів, методи їх розв'язання та контрольні індивідуальні завдання: навч. посіб. / О.Ф. Саушкін. – К. : КНЕУ, 1999. – 100 с.

2. *Олехник С.Н.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: справочник / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко – М. : Изд-во МГУ, 1991. – 144 с.

3. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.

4. *Шарыгин И.Ф.* Решение задач: учеб. пособие для 10 кл. общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. – М. : Просвещение, 1994. – 252 с.