

2А77ДЕП. Об устойчивости движения маятниковых двузвенных систем с качением / Хребет В. Г. // Тр. 16 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР. Киев, 21–24 мая 1991. Ч. 2. / Ин-т мех. АН УССР. – Киев. 1991. – С. с. 378–382 : ил. – Библиогр.: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 12.11.91. № 4260–В91

М92

ВИНИТИ

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ АН УССР

 Труды XVI научной конференции молодых учёных

№ 4260 - В91

УДК 531.36:629.114

В.Г. Хребет

(Институт механики АН УССР, Киев)

 ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКОВЫХ
 ДВУЗВЕННЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

В работе рассматриваются маятниковые системы с качением, которые возникают, например, при моделировании относительно-го движения ведомых звеньев шарнирно сочлененных колесных машин. Исследуются вращательные движения ведомых звеньев в предположении отсутствия обратной связи, т.е. что ведущее звено не чувствительно к возмущениям, передаваемым ведомыми звеньями. Изучен случай, когда точка сцепки ведущего и первого ведомого звеньев (а следовательно, и само ведущее звено) движутся прямолинейно. Общая постановка задачи о движении $n+1$ - звенной системы с качением дана в [2], соответствующие дифференциальные уравнения движения воспроизведены в [6].

Как показано в [5], потеря устойчивости прямолинейного движения двухзвенного автопоезда может быть обусловлена либо ведущим звеном (экспоненциальная неустойчивость), либо ведомыми звеньями (колебательная неустойчивость). Подсистема, соответствующая изолированному ведущему звену, исследована в настоящее время достаточно подробно [6]. Механическая систе-

ма. рассматриваемая ниже, получена в результате расщепления трёхзвенной системы [3] на ведущее звено и двухзвенную маятниковую систему. Необходимость в выделении маятниковой подсистемы из многомерной системы с качением вызвана тем, что при $n > 1$ не удаётся получить аналитическое описание условий возникновения колебательной неустойчивости движения (в отличие от экспоненциальной неустойчивости [4]). Вместе с тем очевидно, что колебательная неустойчивость многозвенной системы с качением порождена в первую очередь свойствами её "маятниковой" подсистемы.

Так как (рис. I)

$$\vec{v}_{C_1} = \vec{i}_1 v_1 + \vec{j}_1 u_1, \vec{v}_{C_2} = \vec{i}_2 v_2 + \vec{j}_2 u_2, v_1 = v \cos \varphi_1, u_1 = -v \sin \varphi_1 - d_1 \dot{\varphi}_1,$$

$$v_2 = v \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2, u_2 = -v \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (l_1 \cos \varphi_2 + d_2) \dot{\varphi}_1 - d_2 \dot{\varphi}_2,$$

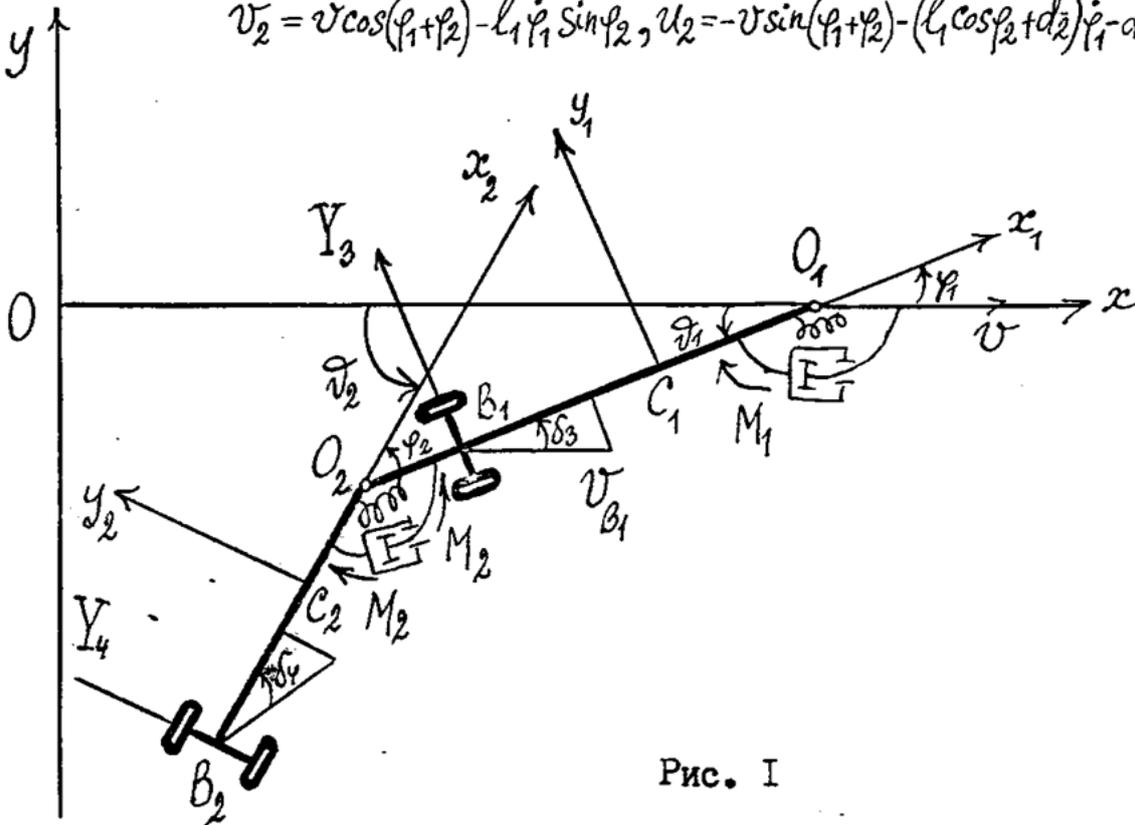


Рис. I

то кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \left\{ (m_1 + m_2) v^2 + [I_1 + I_2 + m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2 d_2 l_1 \cos \varphi_2)] \dot{\varphi}_1^2 + (I_2 + m_2 d_2^2) \dot{\varphi}_2^2 + 2 [I_2 + m_2 d_2 (l_1 \cos \varphi_2 + d_2)] \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 m_2 d_2 v \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + 2 v \dot{\varphi}_1 [(m_1 d_1 + m_2 l_1) \sin \varphi_1 + m_2 d_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \right\}. \quad (1)$$

Боковые реакции Y_3, Y_4 опорной плоскости являются функциями

соответствующих углов увода [3]

$$\delta_3 = \operatorname{arctg} \frac{-u_1 + b_1 \dot{\varphi}_1}{v_1}, \quad \delta_4 = \operatorname{arctg} \frac{-u_2 + b_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{v_2}.$$

Курсовые углы $\vartheta_1 = \varphi_1$, $\vartheta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$ звеньев удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнений Лагранжа второго рода ($M_1 = M_2 = 0$):

$$\begin{cases} (J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + a \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1), \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 + a \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_2 Y_4 - a \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $J_1 = I_1 + m_1 d_1^2$, $J_2 = I_2 + m_2 d_2^2$, $a = m_2 d_2 l_1$. Функции $Y_3(\delta_3)$, $Y_4(\delta_4)$ аппроксимируем [6] выражениями

$$Y_3(\delta_3) = k_3 \delta_3 - k'_3 \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4(\delta_4) = k_4 \delta_4 - k'_4 \delta_4^3 + \dots$$

Характеристическое уравнение для системы линейного приближения имеет вид

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0, \quad (3)$$

где $A_0 = J_1 J_2 + m_2 l_1^2 I_2$, $A_1 = \frac{\alpha_1}{v}$, $\alpha_1 = k_3 J_2 L_1^2 + k_4 (J_1 L_2^2 + J_0 l_1^2)$,
 $J_0 = I_2 + m_2 b_2^2$, $A_2 = c + \frac{d}{v^2}$, $c = k_3 J_2 L_1 + k_4 (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2)$,
 $d = k_3 k_4 L_1^2 L_2^2$, $A_3 = \frac{b}{v}$, $b = k_3 k_4 L_1 L_2 (L_1 + L_2)$, $A_4 = k_3 k_4 L_1 L_2$.

Существенными параметрами системы, определяющими топологическую структуру её фазового пространства, являются l_1 и v . Остальные параметры системы будем считать фиксированными. На плоскости переменных l_1 и v граница области устойчивости имеет уравнение $v_0 = v_0(l_1)$. При $v < v_0$ действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны (т.е. имеем область $D(4,0)$), при $v > v_0$ два корня имеют отрицательную действительную часть, два других — положительную, что соответствует области $D(2,2)$.

Как показано в [1], некоторую информацию о фазовых траекториях системы в областях $D(4,0)$ и $D(2,2)$ можно получить, исследовав систему на границе области устойчивости. Поскольку при $v = v_0$ два корня уравнения (3) чисто мнимые, то согласно [7] для решения задачи устойчивости необходимо привлечь нелинейные члены в уравнениях возмущённого движения. Ограничив-

соответствующих углов увода [3]

$$\delta_3 = \operatorname{arctg} \frac{-u_1 + b_1 \dot{\varphi}_1}{v_1}, \quad \delta_4 = \operatorname{arctg} \frac{-u_2 + b_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{v_2}.$$

Курсовые углы $\vartheta_1 = \varphi_1$, $\vartheta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$ звеньев удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнений Лагранжа второго рода ($M_1 = M_2 = 0$):

$$\begin{cases} (J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + a \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1), \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 + a \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_2 Y_4 - a \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $J_1 = I_1 + m_1 d_1^2$, $J_2 = I_2 + m_2 d_2^2$, $a = m_2 d_2 l_1$. Функции $Y_3(\delta_3)$, $Y_4(\delta_4)$ аппроксимируем [6] выражениями

$$Y_3(\delta_3) = k_3 \delta_3 - k'_3 \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4(\delta_4) = k_4 \delta_4 - k'_4 \delta_4^3 + \dots$$

Характеристическое уравнение для системы линейного приближения имеет вид

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_0 &= J_1 J_2 + m_2 l_1^2 I_2, \quad A_1 = \frac{a_1}{v}, \quad a_1 = k_3 J_2 L_1^2 + k_4 (J_1 L_2^2 + J_0 l_1^2), \\ J_0 &= I_2 + m_2 b_2^2, \quad A_2 = c + \frac{d}{v^2}, \quad c = k_3 J_2 L_1 + k_4 (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2), \\ d &= k_3 k_4 L_1^2 L_2^2, \quad A_3 = \frac{b}{v}, \quad b = k_3 k_4 L_1 L_2 (L_1 + L_2), \quad A_4 = k_3 k_4 L_1 L_2. \end{aligned}$$

Существенными параметрами системы, определяющими топологическую структуру её фазового пространства, являются l_1 и v . Остальные параметры системы будем считать фиксированными. На плоскости переменных l_1 и v граница области устойчивости имеет уравнение $v_0 = v_0(l_1)$. При $v < v_0$ действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны (т.е. имеем область $D(4,0)$), при $v > v_0$ два корня имеют отрицательную действительную часть, два других — положительную, что соответствует области $D(2,2)$.

Как показано в [1], некоторую информацию о фазовых траекториях системы в областях $D(4,0)$ и $D(2,2)$ можно получить, исследовав систему на границе области устойчивости. Поскольку при $v = v_0$ два корня уравнения (3) чисто мнимые, то согласно [7] для решения задачи устойчивости необходимо привлечь нелинейные члены в уравнениях возмущённого движения. Ограничив-

соответствующих углов увода [3]

$$\delta_3 = \operatorname{arctg} \frac{-u_1 + b_1 \dot{\varphi}_1}{v_1}, \quad \delta_4 = \operatorname{arctg} \frac{-u_2 + b_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{v_2}.$$

Курсовые углы $\vartheta_1 = \varphi_1$, $\vartheta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$ звеньев удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений, вытекающих из уравнений Лагранжа второго рода ($M_1 = M_2 = 0$):

$$\begin{cases} (J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{\vartheta}_1 + a \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) + a \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1), \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2 + a \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -L_2 Y_4 - a \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $J_1 = I_1 + m_1 d_1^2$, $J_2 = I_2 + m_2 d_2^2$, $a = m_2 d_2 l_1$. Функции $Y_3(\delta_3)$, $Y_4(\delta_4)$ аппроксимируем [6] выражениями

$$Y_3(\delta_3) = k_3 \delta_3 - k'_3 \delta_3^3 + \dots, \quad Y_4(\delta_4) = k_4 \delta_4 - k'_4 \delta_4^3 + \dots$$

Характеристическое уравнение для системы линейного приближения имеет вид

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0, \quad (3)$$

где $A_0 = J_1 J_2 + m_2 l_1^2 I_2$, $A_1 = \frac{a_1}{v}$, $a_1 = k_3 J_2 L_1^2 + k_4 (J_1 L_2^2 + J_0 l_1^2)$,

$$J_0 = I_2 + m_2 b_2^2, \quad A_2 = c + \frac{d}{v^2}, \quad c = k_3 J_2 L_1 + k_4 (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2),$$

$$d = k_3 k_4 L_1^2 L_2^2, \quad A_3 = \frac{b}{v}, \quad b = k_3 k_4 L_1 L_2 (L_1 + L_2), \quad A_4 = k_3 k_4 L_1 L_2.$$

Существенными параметрами системы, определяющими топологическую структуру её фазового пространства, являются l_1 и v . Остальные параметры системы будем считать фиксированными. На плоскости переменных l_1 и v граница области устойчивости имеет уравнение $v_0 = v_0(l_1)$. При $v < v_0$ действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны (т.е. имеем область $D(4,0)$), при $v > v_0$ два корня имеют отрицательную действительную часть, два других — положительную, что соответствует области $D(2,2)$.

Как показано в [1], некоторую информацию о фазовых траекториях системы в областях $D(4,0)$ и $D(2,2)$ можно получить, исследовав систему на границе области устойчивости. Поскольку при $v = v_0$ два корня уравнения (3) чисто мнимые, то согласно [7] для решения задачи устойчивости необходимо привлечь нелинейные члены в уравнениях возмущённого движения. Ограничив-

шись в них главными частями, получим

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^4 a_{js} x_s + \sum_{m=1}^4 \sum_{\ell=1}^4 \sum_{n=1}^4 a_{m\ell n}^{(j)} x_m x_\ell x_n + \dots \quad (j=1, \dots, 4). \quad (4)$$

Заменой $x = \alpha \xi$, $x \in \mathbb{R}^4$, $\xi \in \mathbb{R}^4$ [I], приведём (4) к виду

$$\dot{\xi} = G\xi + Q(\xi),$$

где

$$G = \begin{vmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q^{(1)} \\ \vdots \\ Q^{(4)} \end{pmatrix}, \quad Q^{(j)} = \sum_{m=1}^4 \sum_{\ell=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{m\ell n}^{(j)} \xi_m \xi_\ell \xi_n + \dots$$

Согласно [I] участок кривой $\nu = \nu_0(l_1)$ устойчив, если $\alpha_3 < 0$ и неустойчив при $\alpha_3 > 0$. Здесь $\alpha_3 = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\omega} (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})$.

Кривая $\nu = \nu_0(l_1)$ может принадлежать классу "параболических" (рис. 2) или "гиперболических" (рис. 3) кривых. Рассмотрим

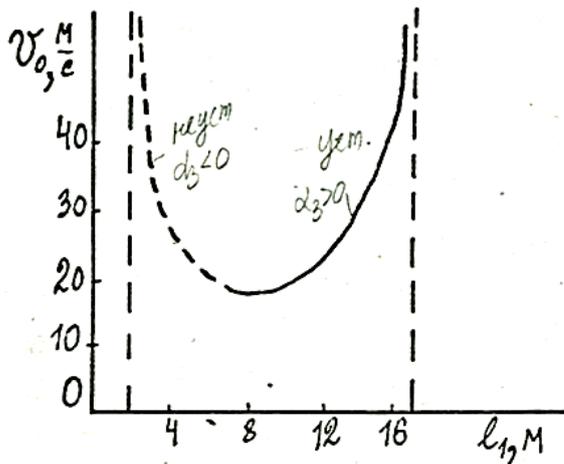


Рис. 2

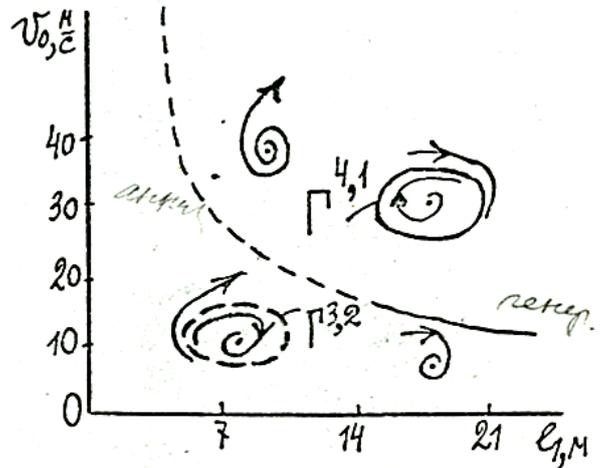


Рис. 3

некоторые из них. Кривая на рис. 2 построена для $m_1 = 4905$ кг, $m_2 = 9074$ кг, $I_1 = 47579$ кг·м², $I_2 = 14715$ кг·м², $b_1 = b_2 = 3$ м, $d_1 = d_2 = 1,5$ м, $k_3 = k_4 = 254079$ н/рад, а на рис. 3 — для $m_1 = 14715$ кг, $m_2 = 9810$ кг, $I_1 = 47579$ кг·м², $I_2 = 49050$ кг·м², $b_1 = b_2 = 0,5$ м, $d_1 = d_2 = 4$ м, $k_3 = k_4 = 254079$ н/рад.

Штрихованные участки кривых обозначают неустойчивую границу, сплошная линия соответствует устойчивой границе, причём устойчивость слабая, неэкспоненциальная. С ростом скорости движения возможны как жёсткая, так и мягкая бифуркации Андронова-Хопфа. Если значение l_1 отвечает штрихованному участку

кривой $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0(l_1)$, то при переходе её снизу вверх, т.е. от значений $\mathcal{V} < \mathcal{V}_0$ к значениям $\mathcal{V} > \mathcal{V}_0$, неустойчивый предельный цикл $\Gamma^{3,2}$, существующий в области $\mathcal{D}(4,0)$ асимптотической устойчивости, уменьшается в размерах и стягивается к началу координат (область притяжения которого уменьшается и при $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ "садится" на него, так что при $\mathcal{V} > \mathcal{V}_0$ начало координат $(0,0,0,0)$ фазового пространства становится неустойчивой особой точкой. Динамическая ситуация в этом случае развивается по сценарию:

$$O^{4,0} + \Gamma^{3,2} \rightarrow O^{2,2}$$

Если $\mathcal{V} > \mathcal{V}_0$, то точка фазового пространства случайным толчком может быть сорвана с начала координат, являющегося особой точкой векторного поля фазовых скоростей и отброшена от него на достаточно далёкое расстояние. При прохождении снизу вверх сплошного участка кривой $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, изображённого на рис. 3, происходит мягкая бифуркация Андронова-Хопфа с появлением в области $\mathcal{D}(2,2)$ устойчивого предельного цикла $\Gamma^{4,1}$ с радиусом, пропорциональным $\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{1,2}}$. Схематически это можно изобразить в виде: $O^{4,0} \rightarrow O^{2,2} + \Gamma^{4,1}$.

1. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. - М: Наука, 1984. - 176 с.
2. Лобас Л.Г. Математическая модель связанных систем с качением // Прикл. механика. - 1984. - 20, № 6. - С. 80-87.
3. Лобас Л.Г. К теории кругового качения трёхзвенных упругодеформируемых систем // Там же. - 1985. - 21, № II - С. 104-110.
4. Лобас Л.Г. К теории качения связки произвольного числа упругодеформируемых тел, моделирующих многозвенный автопоезд // Там же. - 1987. - 23, № 3. - С. 101-105.
5. Лобас Л.Г. Курсовая устойчивость двухзвенных колёсных машин // Там же. - 1989. - 25, № 4. - С. 104-111.
6. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колёсных машин. - Киев: Наук. думка. - 1990. - 232 с.
7. Ляпунов А.М. Собр. соч.: В 3 т. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. - Т. 2. - 473 с.