МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л. З. ТАРАСОВА, Н. П. МУРАНОВА

ПЛАНІМЕТРІЯ

ЗАДАЧІ НА ДОВЕДЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ 2007

УДК 514.112(076.5)
ББК В 151.О я 7
Т 191

Рецензенти: канд. фіз-мат. наук *О.В.Нікулін,*
канд. фіз-мат. наук *О.Л.Лещинський*

Затверджено на засіданні науково-методично-редакційної ради Інституту довузівської підготовки НАУ 24 квітня 2004 року.

Тарасова Л. З., Муранова Н. П.

Т191 Планіметрія. Задачі на доведення: Навчально-методичний посібник. – К.: НАУ, 2007. – 48 с.

Методичний посібник містить доведення 33 задач поглибленого рівня з різних розділів планіметрії, а також 20 задач для самостійної роботи (з вказівками). Для доведення задач використані методи паралельного перенесення, повороту, симетрії відносно точки і відносно прямої, гомотетії, координатний метод, метод площ.

Посібник рекомендований вчителям і учням класів з поглибленим вивченням математики, ліцеїв і гімназій, для підготовки до олімпіад, а також буде корисним для слухачів підготовчих відділень і підготовчих курсів для вступу у вищі навчальні заклади.

УДК 14.112(076.5)
ББК В 151.О я 7

Вступ

Збільшення кількості ліцеїв і гімназій фізико-математичного профілю, класів з поглибленим вивченням математики викликає необхідність видання методичного матеріалу з розв'язанням задач поглибленого та підвищеного рівня. Особливо це стосується геометрії. В шкільних підручниках з геометрії задач на доведення дуже мало, особливо з тем: "Переміщення площини", "Гомотетія і подібність".

В посібнику доведено 33 задачі підвищеного і поглибленого рівнів з різних розділів планіметрії. Доведення записані сучасною символікою, тому вони компактні і красиві. Учень має можливість порівняти ланцюжок логічних міркувань з "літературними" записами, які є традиційними в шкільній геометрії.

Посібник дає можливість самостійно працювати учню як в аудиторії так і в домашніх умовах. В кінці посібника пропонується 20 задач для самостійної роботи із вказівками.

Бажаємо читачам успіхів і насолоди, яку нам приносить геометрія.

ЗАДАЧІ

Задача 1. У двох опуклих чотирикутників співпадають середини сторін. Доведіть, що площі цих чотирикутників рівні.

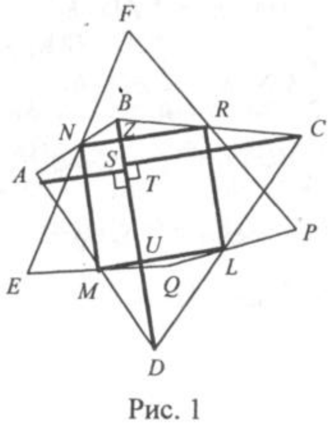

Рис. 1

Розв'язання.

Дано: $ABCD$ і $EFPQ$ – опуклі чотирикутники.
M, N, R, L – середини їх сторін

Довести: $S_{ABCD} = S_{EFPQ}$.

Доведення:

1) $AT \perp BD, AT = h_1$.

2) $CS \perp BD, CS = h_2$.

3) $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} BD \cdot h_1 + \frac{1}{2} BD \cdot h_2 =$
$= \frac{1}{2} BD\,(h_1 + h_2)$.

4) ΔABD: MN – середня лінія $\Rightarrow \begin{cases} BD = 2MN, \\ BD \parallel MN \end{cases}$.

5) ΔCBD: RL – середня лінія $\Rightarrow \begin{cases} BD = 2RL, \\ BD \parallel RL \end{cases}$,
$MN \parallel RL, MN = RL \Rightarrow MNRL$ – паралелограм.

6) $S_{MNZU} = \frac{1}{2} MN \cdot h_1 = \frac{1}{4} BD \cdot h_1$.

7) $S_{ZULR} = \frac{1}{2} MN \cdot h_2 = \frac{1}{4} BD \cdot h_2$.

8) $S_{MNRL} = \frac{1}{4} BD\,(h_1 + h_2) \Rightarrow S_{MNRL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (1)

9) Аналогічно: $S_{MNRL} = \frac{1}{2} S_{EFPQ}$. (2)

10) (1), (2) $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{EFPQ}$.

Задача 2. Навколо трапеції описане коло. Довести, що це можливо тоді і тільки тоді, коли ця трапеція рівнобічна.

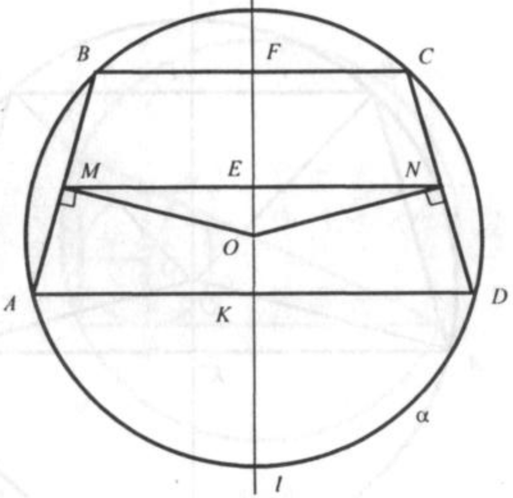

Рис. 2

Доведення:

Достатність:

Дано: $ABCD$ – трапеція: $BC \parallel AD$, $AB = CD$.

Довести: Існує $\alpha\ (O, R)$: $A, B, C, D \in \alpha$.

Доведення:

1) Нехай l – вісь симетрії трапеції:

$$\left.\begin{matrix} S_l(A) = D \\ S_l(B) = C \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_l(AB) = DC.$$

M – середина AB, N – середина CD:

$S_l(M) = N \Rightarrow ME = EN,\ E \in l,\ MN \perp l.$

2) $\Delta OME = \Delta ONE$ (за двома катетами) $\Rightarrow OM = ON$, таким чином серединні перпендикуляри OM і ON перетнулися в точці $O \in l$.

Точка O – центр описаного кола радіуса OA.
Існує $\alpha\ (O,\ OA)$.

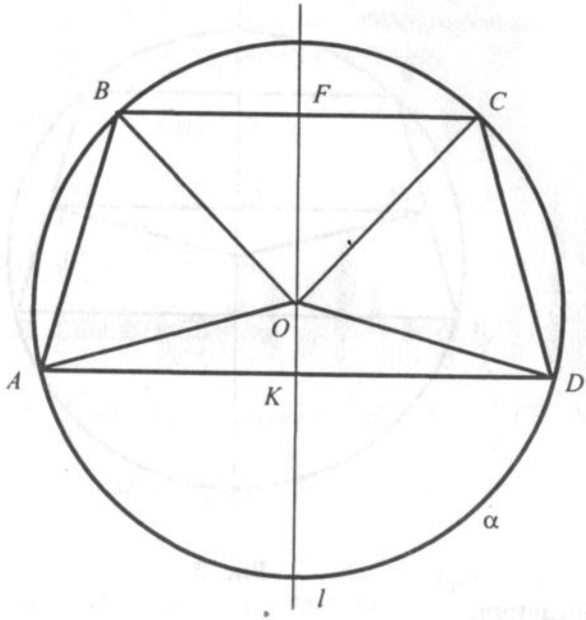

Рис. 3

Необхідність:

Дано: $\alpha\ (O,\ OA)$ – коло, описане навколо трапеції $ABCD$. $AD \parallel BC$.

Довести: $AB = CD$.

Доведення:

1) $B \in \alpha,\ C \in \alpha,\ OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ – рівнобедрений.
2) $A \in \alpha,\ D \in \alpha,\ OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ – рівнобедрений.

Розглянемо пряму l – вісь симетрії кола і трапеції:
$BF = FC,\ AK = KD$.

$$\left.\begin{array}{l} S_l(A) = D \\ S_l(B) = C \end{array}\right\} \Rightarrow S_l(AB) = DC.$$

3) Симетрія відносно вісі l – рух, тому $AB = DC$.

Задача 3. Довести, що в прямокутному трикутнику сума довжин катетів дорівнює сумі діаметрів вписаного і описаного кола.

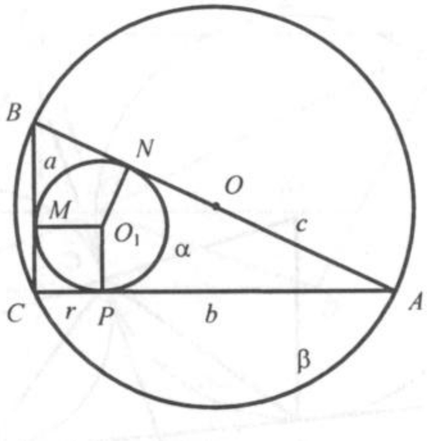

Рис. 4

Дано: ΔABC – прямокутний трикутник: $\angle C = 90°$;
$\alpha\ (O_1, r)$ – вписане коло в ΔABC;
$\beta\ (O, R)$ – описане навколо ΔABC коло.

Довести: $2\,(R + r) = a + b$.

Доведення:

1) $\alpha \quad BC = M, \alpha \quad AC = P, CM = CP = r$
($MCPO_1$ – квадрат, доведіть це).

2) $BM = BN$ (як відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола α). $\Rightarrow BN = a - r$.

3) $AN = AP$ (аналогічно). $\Rightarrow AN = b - r$.

4) $AB = AN + NB$, $c = a - r + b - r = a + b - 2r$.

5) Коло $\beta\ (O, R)$ – описане навколо прямокутного трикутника:

$c = 2R \Rightarrow a + b - 2r = 2R \Rightarrow a + b = 2\,(R + r)$.

Задача 4. Два кола зовні дотикаються одне одного в точці C. До них проведена спільна дотична (AB), де A і B – точки дотику. Доведіть, що $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$.

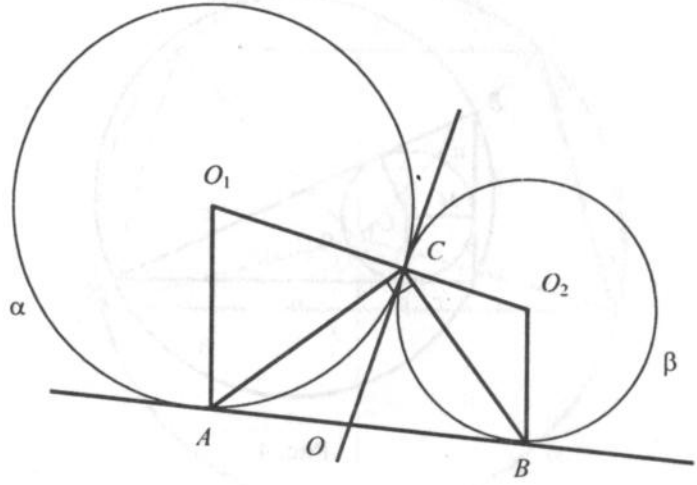

Рис. 5

Дано: $\alpha\,(O_1, R), \beta\,(O_2, r), \alpha \quad \beta = C$,
A, B – точки дотику прямої AB: $AB \quad \alpha = A$,
$AB \quad \beta = B$.

Довести: $\angle ACB = 90°$.

Доведення:

1) $O \in AB$, OC – дотична до кола α і до кола β, проведена в точці дотику $C = \alpha \quad \beta$;

2) $OA = OC$, як дотичні до кола α;
$OB = OC$, як дотичні до кола β.
$OA = OC = OB$, тобто точки A, B, C рівновіддалені від точки O: O є центр кола, описаного навколо ΔABC.

3) точки A, O, B – колінеарні: AB – діаметр описаного кола: $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 5. Всередині пералелограма $ABCD$ взята точка O. Довести, що сума площ ΔOAB і ΔOCD стала при будь-якому виборі точки O.

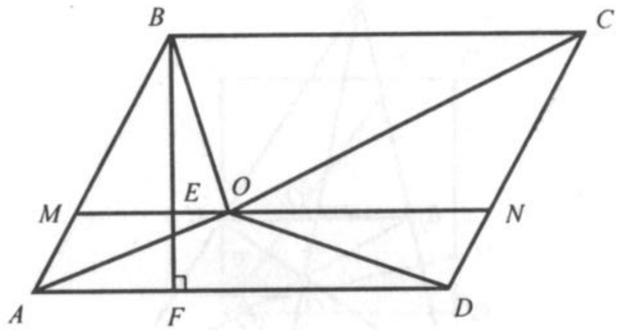

Рис. 6

Дано: $ABCD$ – паралелограм.
O – всередині паралелограма.

Довести: $S_{\Delta AOB} + S_{\Delta OCD} = \text{const}$.

Доведення:

1) $MN \parallel AD \Rightarrow AMND$ – паралелограм. $MN = AD$; $O \in MN$.

2) $BF=h$, $BF \perp AD$. $BE \perp OM$, $BE = h_1$; $EF \perp AD$, $EF=h_2$.

3) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta AMO} + S_{\Delta MBO} = \frac{1}{2} OM \cdot h_1 + \frac{1}{2} OM \cdot h_2 = \frac{1}{2} OM\left(h_1 + h_2\right) =$
$= \frac{1}{2} OM \cdot h.$

4) $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} ON \cdot h$ (аналогічно).

5) $S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} OM \cdot h + \frac{1}{2} ON \cdot h = \frac{1}{2}(OM + ON) \cdot h = \frac{1}{2} MN \cdot h =$
$= \frac{1}{2} AD \cdot h.$

6) $S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} S = \text{const}.$

Задача 6. Довести, що пряма, яка з'єднує середини основ трапеції і продовження бічних сторін трапеції, перетинаються в одній точці.

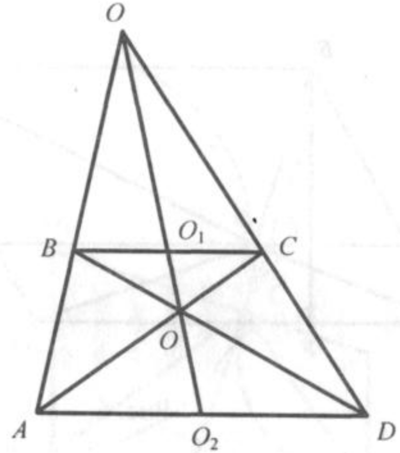

Рис. 7

Дано: $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $AO_2 = O_2D$,
$BO_1 = O_1C$; $AB \quad CD = O$.

Довести: $O \in O_1O_2$.

Доведення:

1) $\begin{cases} H_o^k(B) = A \\ H_o^k(C) = D \end{cases} \Rightarrow H_0^k(BC) = AD, |k| = \dfrac{AD}{BC}$.

2) При гомотетії середина відрізка відображається на середину відповідного відрізка:

$H_0^k(O_1) = O_2$.

3) Точки O_1 і O_2 відповідні в гомотетії, тому точки O, O_1 і O_2 – колінеарні.

Задача 7. *ABCD* – квадрат. На стороні *CD* взята точка *M*. *K* – точка перетину сторони *BC* із бісектрисою кута $\angle BAM$. Доведіть, що $MA = BK + DM$.

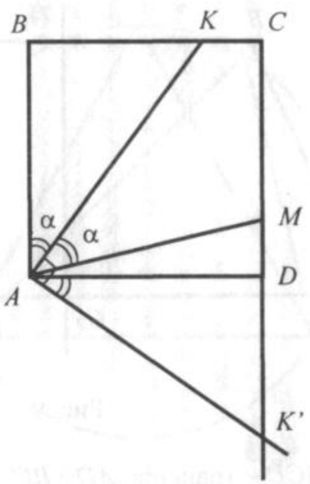

Рис. 8

Дано: *ABCD* – квадрат. $M \in CD$, *AK* – бісектриса $\angle BAM$, $K \in BC$.

Довести: $MA = BK + DM$.

Доведення:

1) $\left.\begin{array}{l} R_A^{-90^\circ}(B) = D \\ R_A^{-90^\circ}(K) = K' \end{array}\right\} \Rightarrow R_A^{-90^\circ}(BK) = DK'$,

2) $BK = DK'$,

$R_A^{-90^\circ}(\Delta ABK) = \Delta ADK'$.

3) $\Delta AMK'$ – рівнобедрений:

$(\angle MAK' = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha,\ \angle AK'M = \angle AKB = 90^\circ - \alpha)$;

$AM = MK' = MD + DK' = MD + BK$.

$AM = MD + BK$.

Задача 8. Доведіть, що якщо пряма, яка з'єднує середини основ трапеції, перпендикулярна основам, то трапеція рівнобічна.

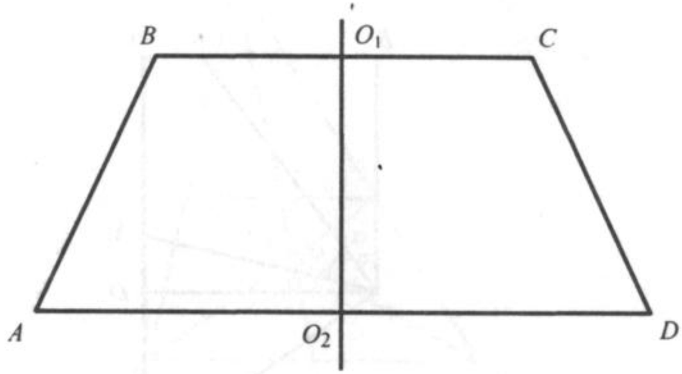

Рис. 9

Дано: $ABCD$ – трапеція: $AD \parallel BC$.
$BO_1 = O_1C, AO_2 = O_2D, O_1O_2 \perp AD$.

Довести: $AB = DC$.

Доведення:

1) $\left.\begin{matrix} BO_1 = O_1C \\ O_1O_2 \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{O_1O_2}(B) = C$ (1)

2) $\left.\begin{matrix} AO_2 = O_2D \\ O_1O_2 \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{O_1O_2}(A) = D$ (2)

3) (1), (2) $\Rightarrow S_{O_1O_2}(AB) = DC \Rightarrow AB = DC$.

Задача 9. Доведіть, що відстань від будь-якої точки кола, описаного навколо правильного трикутника до однієї з його вершин, дорівнює сумі відстаней від цієї точки до двох інших вершин.

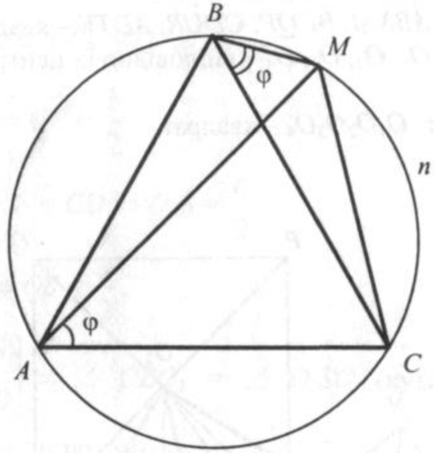

Рис. 10

Дано: $\alpha\,(O, R)$, ΔABC: $AB = AC = BC$. $M \in \alpha$.
Довести: $AM = BM + MC$.
Доведення:
1) Нехай $\angle MAC = \varphi$.
За теоремою синусів: $MC = 2R\sin\varphi$, $BM = 2R\sin(60° - \varphi)$;
2) $\angle MBC = \frac{1}{2} \cup MnC = \varphi$;
$AM = 2R\sin(60° + \varphi)$;
$AM > BM$, $AM > MC$.
3) $BM + MC = 2R\sin(60° - \varphi) + 2R\sin\varphi =$
$= 2R(\sin(60° - \varphi) + \sin\varphi) = 4R\sin 30°\cos(30° - \varphi) =$
$= 2R\cos(30° - \varphi) = 2R\sin(60° + \varphi)$.
$AM = 2R\sin(60° + \varphi) = BM + MC$; $AM = BM + MC$.

Задача 10. Доведіть, що прямі, які з'єднують послідовно центри квадратів, побудованих на сторонах паралелограма зовні його, утворюють квадрат.

Дано: $ABCD$ – паралелограм.
$ABNM$, $BCQP$, $CDUR$, $ADTV$ – квадрати;
O_1, O_2, O_3, O_4 – відповідно їх центри.

Довести: $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат.

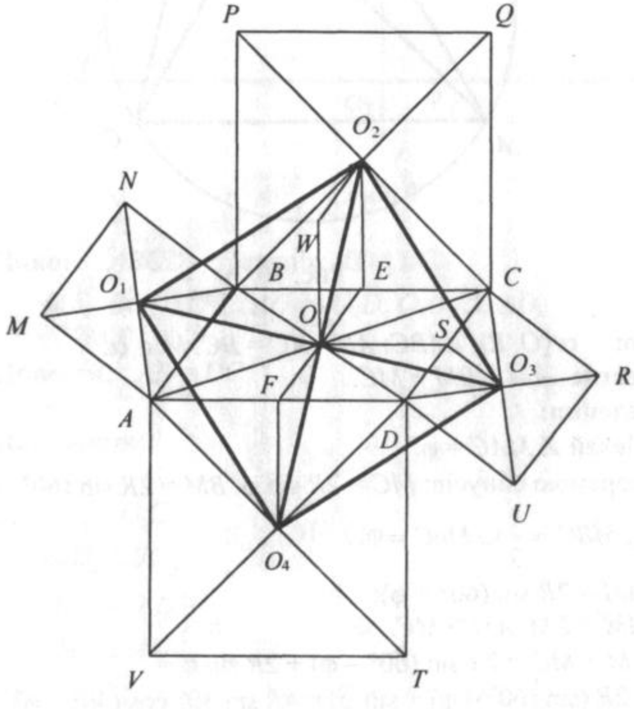

Рис. 11

Доведення:

1) Нехай $BC = a$, $CD = b$, $O = AC \cap BD$.

2) $O_2E \perp BC, E \in BC \Rightarrow O_2E = \dfrac{a}{2}$.

3) $OE \parallel CD \Rightarrow OE = \dfrac{b}{2}$.

4) $O_3S \perp CD, S \in CD \Rightarrow O_3S = \dfrac{b}{2}$.

5) $OS \parallel BC \Rightarrow OS = \dfrac{a}{2}$.

6) $\left.\begin{matrix} OE \perp O_3S \\ EO_2 \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle\ OEO_2 = \angle\ O_3SO$ (кути із взаємно-перпендикулярними сторонами).

7) $\Delta OEO_2 = \Delta O_3SO$ ($OE = O_3S$, $EO_2 = SO$, $\angle\ OEO_2 = \angle\ O_3SO$) $\Rightarrow OO_2 = O_3O$.

8) $OW \parallel O_2E$, $OW = \dfrac{a}{2} \Rightarrow OWO_2E$ – паралелограм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta O_2WO = \Delta O_3SO$.

9) $OW \perp OS$, $O_2W \perp O_3S$.

10) $R_0^{+90^0}(\Delta O_2WO) = \Delta O_3SO$.

11) $\left.\begin{matrix} S_0(O_1) = O_3 \\ S_0(O_2) = O_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_0(O_1O_2) = O_3O_4$ тобто

$O_1O_2O_3O_4$ – ромб, діагоналі якого рівні.

Таким чином, $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат.

Задача 11. Точка M належить основі BC рівнобедреного трикутника ABC. Точки D і F – основи перпендикулярів, опущених із M на сторони AB і AC. Довести, що $DM + MF = h_b$.

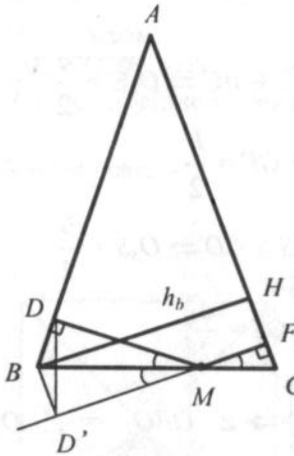

Рис. 12

Дано: ΔABC: $AB = AC$, $BH \perp AC$, $BH = h_b$;
$M \in BC$, $MD \perp AB$, $MF \perp AC$.

Довести: $DM + MF = h_b$.

Доведення:

1) $S_{BC}(D) = D' \Rightarrow \begin{cases} BD = BD' \\ \angle DBC = \angle D'BC \\ \angle DMB = \angle D'MB \end{cases}$;

2) $\angle D'BC = \angle ACB \Rightarrow BD' \parallel CA$;

3) $BH \parallel MF$; Точки D', M, F – колінеарні $\Rightarrow$ $BHFD'$ прямокутник $\Rightarrow FD' = HB = h_b$.

4) $FD' = FM + MD' = FM + MD$;

5) $h_b = FM + MD$.

Задача 12. На відрізках AB і BC ($AB + BC = AC$) в одній півплощині відносно прямої AB побудовані правильні трикутники ABE і BCF. Точки M і N – середини відрізків AF і CE. Довести, що ΔBMN – правильний.

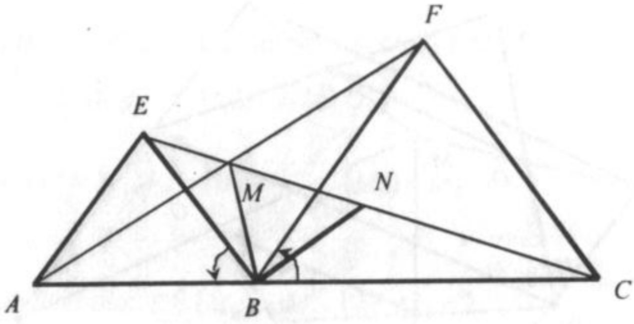

Рис. 13

Дано: $AC = AB + BC$;
ΔABE: $AB = BE = EA$;
ΔBFC: $BF = FC = BC$.
$AM = MF$, $EN = NC$.

Довести: ΔMNB – правильний.

Доведення:

1) $\left.\begin{array}{l} R_B^{60^\circ}(E) = A \\ R_B^{60^\circ}(C) = F \end{array}\right\} \Rightarrow R_B^{60^\circ}(EC) = AF$.

2) При повороті зберігається відношення точок: середина відрізка EC перейде в середину відрізка AF:

$R_B^{60^\circ}(N) = M \Rightarrow BN = BM,\ \angle NBM = 60^\circ \Rightarrow \Delta BNM$ – правильний.

Задача 13. Доведіть, що точки, симетричні з точкою M відносно середин сторін чотирикутника $ABCD$, є вершинами паралелограма.

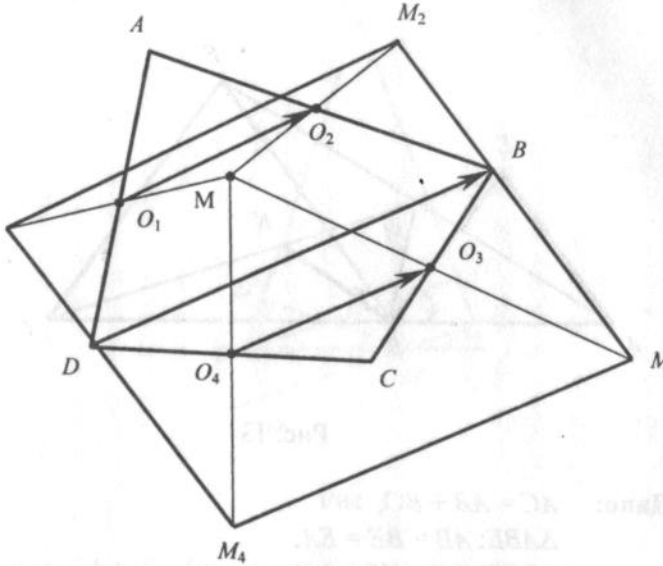

Рис. 14

Дано: $ABCD$ – чотирикутник;

O_1, O_2, O_3, O_4 – середини сторін AD, AB, BC, CD.

$S_{O_1}(M)=M_1$; $S_{O_2}(M)=M_2$;

$S_{O_3}(M)=M_3$; $S_{O_4}(M)=M_4$.

Довести: $M_1M_2M_3M_4$ – паралелограм.

Доведення:

1) ΔABD: O_1O_2 – середня лінія $\Rightarrow O_1O_2 \parallel DB$,

$O_1O_2 = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

2) ΔMM_1M_2: O_1O_2 – середня лінія: $O_1O_2 \parallel M_1M_2$,

$O_1O_2 = \frac{1}{2}M_1M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

3) 1), 2) $\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow T_{\overrightarrow{DB}}(M_1) = M_2$.

4) Аналогічно: $T_{\overrightarrow{DB}}(M_4) = M_3 \cdot \left(\overrightarrow{M_4M_3} = 2\overrightarrow{O_4O_3}\right)$.

5) $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3} \Rightarrow M_1M_2M_3M_4$ – паралелограм.

Вказівка: другий спосіб – гомотетія.

Задача 14. Через точку A перетину двох кіл проведені діаметри AC і AD. Довести, що пряма CD проходить через другу точку B перетину кіл.

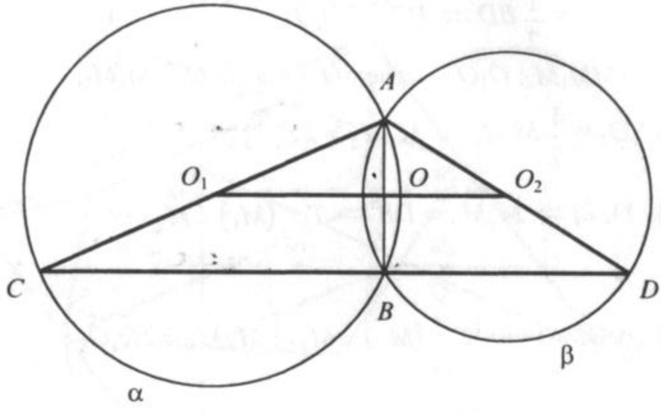

Рис. 15

Дано: $\alpha(O_1, R_1)$, $\beta(O_2, R_2)$, $\alpha \cap \beta = \{A, B\}$.
AC – діаметр α, AD – діаметр β.

Довести: $B \in CD$.

Доведення:

1) ΔADC: O_1O_2 – середня лінія: $CD \parallel O_1O_2$; $CD = 2O_1O_2$.

2) $$\left.\begin{matrix} H_A^2(O_1) = C \\ H_A^2(O_2) = D \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_A^2(O_1O_2) = CD.$$

3) $O \in AB, O \in O_1O_2,\ H_A^2(O) = B \Rightarrow B \in CD.$

Задача 15. В трапеції $ABCD$ з основами AD і BC діагоналі перетинаються в точці O. Довести, що кола, описані навколо трикутників AOD і BOC, дотикаються.

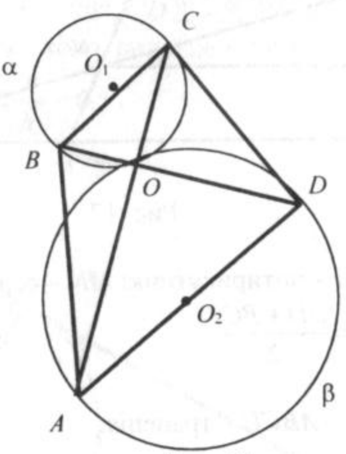

Рис. 16

Дано: $ABCD$ – трапеція. $AD \parallel BC$. $AC \cap BD = 0$
$\alpha\ (O_1, R_1)$ – коло, описане навколо ΔBOC;
$\beta\ (O_2, R_2)$ – коло, описане навколо ΔAOD.

Довести: $\alpha \cap \beta = \{0\}$.

Доведення:

1) $$\left.\begin{aligned} H_O^k(O) &= O \\ H_O^k(B) &= D \\ H_O^k(C) &= A \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_O^k(\Delta OBC) = \Delta ODA,\ |k| = \frac{AD}{BC}.$$

2) $O, B, C \in \alpha \Rightarrow H_O^k(\alpha) = \beta; \Rightarrow H_O^k(O_1) = O_2, \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \cap \beta = O.$

Задача 16. Довести, що якщо відрізок, який з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших сторін, то цей чотирикутник – трапеція.

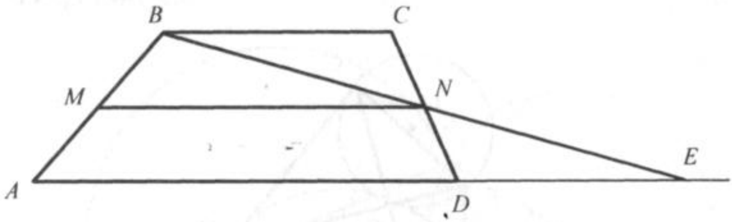

Рис. 17

Дано: $ABCD$ – чотирикутник: MN – середня лінія.

$$MN = \frac{AD + BC}{2}.$$

Довести: $ABCD$ – трапеція.

Доведення:

1) Продовжимо AD.
2) $NE = BN$ (точки B, N, E – колінеарні).
$\Delta BCN = \Delta EDN$ ($BN = EN$, $CN = DN$,
$\angle BNC = \angle END$, як вертикальні) $\Rightarrow BC = ED$;
$\angle BCN = \angle EDN$.

3) ΔABE: MN – середня лінія: $MN = \frac{1}{2}AE$, $MN \parallel AE$

$$MN = \frac{AD + DE}{2} \Rightarrow AD + DE = AE$$

(точки A, D, E – колінеарні).
4) $AE \parallel BC$ ($\angle BCN = \angle EDN$).

Задача 17. Довести, що в прямокутному трикутнику $0,4 < \frac{r}{h_c} < 0,5$, де h_c – висота трикутника, r – радіус вписаного кола.

Дано: ΔABC: $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, $CD = h_c$,
$\alpha\ (O, r)$ – коло, вписане в ΔABC.

Довести: $0,4 < \frac{r}{h_c} < 0,5$.

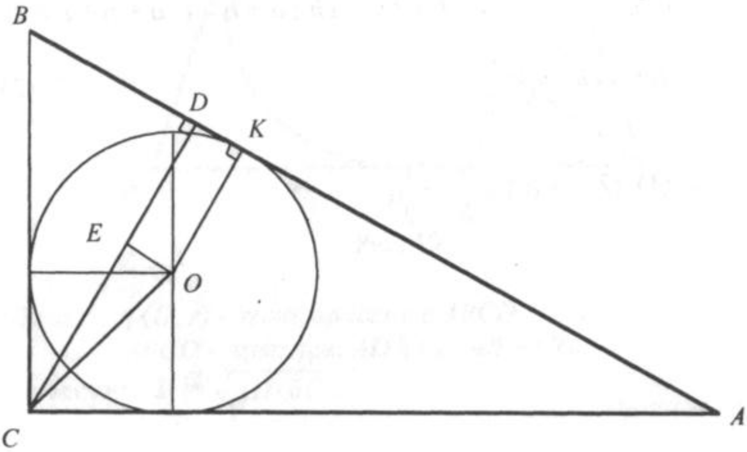

Рис. 18

Доведення:

1) $OE \perp CD$, $OK = ED = r$. ΔCOE: $CO > CE$,
$CO + OK > CE + ED = h_c$;

$CO = r\sqrt{2}$; $ED = r$;

$r\sqrt{2} + r > h_c \Rightarrow r(\sqrt{2}+1) > h_c \Rightarrow$

$$\Rightarrow r > \frac{h_c}{\sqrt{2}+1} = \left(\sqrt{2}-1\right)h_c > 0{,}4h_c;\ r > 0{,}4h_c \qquad (1)$$

2) $S_{\Delta ABC} = p\,r = \dfrac{a+b+c}{2}\cdot r$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{ch_c}{2}$; $(a+b+c)r = ch_c$; $a+b > c$, $a+b+c > 2c$;

$$2cr < ch_c;\ r < \frac{h_c}{2} \qquad (2)$$

3) (1), (2) $\Rightarrow 0{,}4 < \dfrac{r}{h_c} < \dfrac{1}{2}$.

Задача 18. Доведіть, що в описаній рівнобедреній трапеції діаметр кола є середнє пропорційне між її основами.

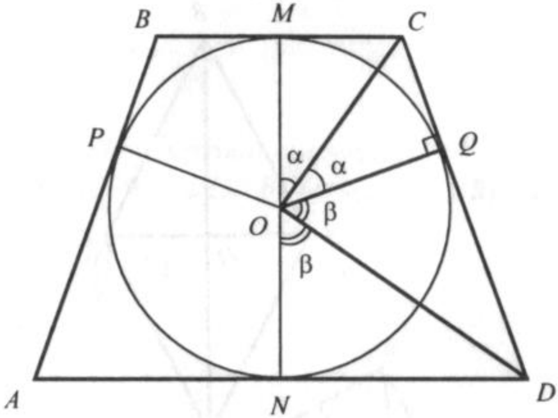

Рис. 19

Дано: $\gamma\ (O, r)$ – коло, вписане в $ABCD$.
$ABCD$ – трапеція: $AD \parallel BC$, $AB = CD$.
Довести: $2r = \sqrt{AD \cdot BC}$.

Доведення:
1) $MN \perp AD$, $O \in MN$, $M = BC \cap \gamma$, $N = AD \cap \gamma$.
2) $\Delta OMC = \Delta OQC$ ($MC = QC$, $OM = OQ$, $\angle OMC = \angle OQC = 90°$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle MOC = \angle QOC = \alpha$; $\angle MOQ = 2\alpha$;
3) $\Delta OND = \Delta OQD$ (аналогічно). $\angle NOD = \beta$, $\angle NOQ = 2\beta$.
4) $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle COD = 90°$.
5) $OQ = \sqrt{CQ \cdot QD} = \sqrt{MC \cdot ND} = \sqrt{\dfrac{BC}{2} \cdot \dfrac{AD}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{BC \cdot AD}$;
6) $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{BC \cdot AD} \Rightarrow 2r = \sqrt{BC \cdot AD}$.

Задача 19. Доведіть, що якщо кут ромба дорівнює 30°, то його сторона є середня пропорційна між діагоналями.

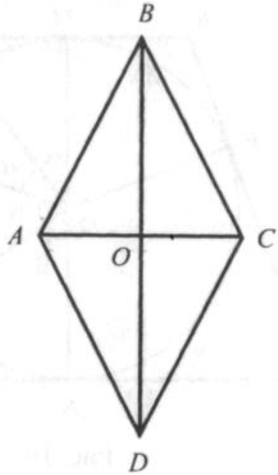

Рис. 20

Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle ABC = 30°$.

Довести: $AB = \sqrt{AC \cdot BD}$.

Доведення:

1) $S_{\Delta ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin 30° = \dfrac{AB^2}{2}$.

2) $S_{\Delta ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$.

3) $\dfrac{1}{2} AB^2 = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow AB = \sqrt{AC \cdot BD}$.

Задача 20. Точка M лежить всередині трикутника. Відстань цієї точки до сторін трикутника дорівнює d_1, d_2, d_3, а відповідні висоти h_1, h_2, h_3.

Довести, що $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1$.

Дано: ΔABC: M – всередині трикутника.
$\rho(M, AC) = d_1$, $\rho(M, BC) = d_2$, $\rho(M, AB) = d_3$.

Довести: $\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1$.

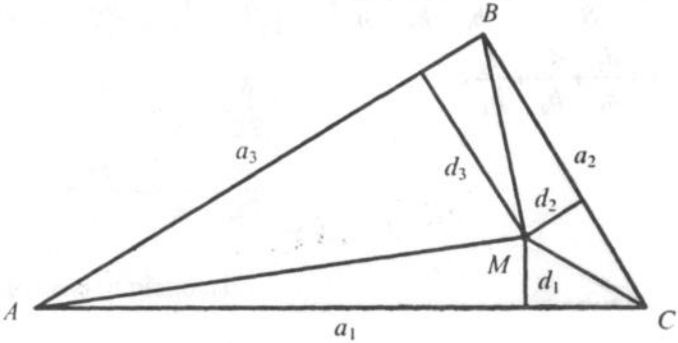

Рис. 21

Доведення:

1) $S_1 = S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}a_1 d_1$;

$S_2 = \frac{1}{2}a_2 d_2$;

$S_3 = \frac{1}{2}a_3 d_3$,

2) $S = \frac{a_1 h_1}{2}$;

$S = \frac{a_2 h_2}{2}$;

$S = \frac{a_3 h_3}{2}$

3) $$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S} = \dfrac{d_1}{h_1} \\ \dfrac{S_2}{S} = \dfrac{d_2}{h_2} \\ \dfrac{S_3}{S} = \dfrac{d_3}{h_3} \end{cases}.$$

Додамо ці рівності:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3};$$

$$1 = \frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3}.$$

Задача 21. Довести, що сума обернених величин довжин висот трикутника дорівнює оберненій величині радіуса вписаного кола, тобто

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

Доведення:

1) $S=\dfrac{ah_a}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{h_a}=\dfrac{a}{2S}$;

$S=\dfrac{bh_b}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{h_b}=\dfrac{b}{2S}$;

$S=\dfrac{ch_c}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{h_c}=\dfrac{c}{2S}$.

Додамо ці рівності:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}.$$

2) $S=rp$, $\rho=\dfrac{a+b+c}{2}$; $S=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot r \Rightarrow \dfrac{1}{r}=\dfrac{a+b+c}{2S}$.

3) 1), 2) $\Rightarrow \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

Задача 22. В трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$. Довести, що довжини сторін трикутника задовольняють умову:

$$a = \frac{c^2 - b^2}{b}.$$

Дано: ΔABC: $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$.

Довести: $a = \dfrac{c^2 - b^2}{b}$.

Доведення:

1) $\angle C = 100°$, CM – бісектриса: $\angle BCM = 50°$, $\angle AMC = 100°$.

2) $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BC}{AC}$; $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{at}{bt}$; $at + bt = c$; $t = \dfrac{c}{a+b}$;

$BM = at$, $MA = bt \Rightarrow BM = \dfrac{ac}{a+b}$; $MA = \dfrac{bc}{a+b}$;

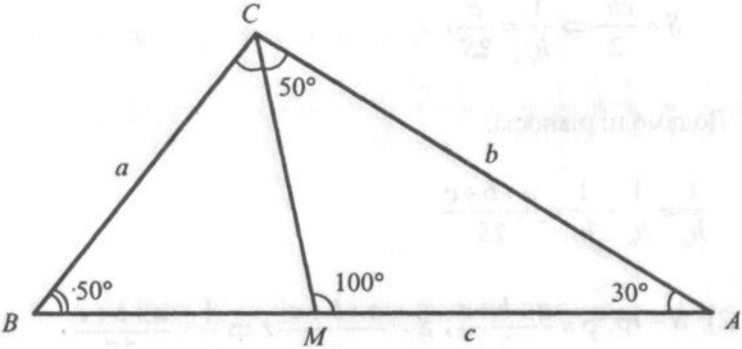

Рис. 22

3) $\Delta AMC \sim \Delta ACB$: (за двома кутами)

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{bc}{(a+b)b} = \frac{b}{c} \Rightarrow c^2 = (a+b)b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = ab + b^2 \Rightarrow a = \frac{c^2 - b^2}{b}.$$

Задача 23. Точка дотику вписаного кола розділяє гіпотенузу прямокутного трикутника на два відрізки, довжини яких m і n. Довести, що площа трикутника дорівнює mn.

Дано: ΔABC: $\angle C = 90°$. $\alpha\,(O, r)$ – вписане в ΔABC.
$\alpha \cap AB = \{K\}$.
$AK = m$, $KB = n$.

Довести: $S_{\Delta ABC} = mn$.

Доведення:

1) $$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2}(m+r)(n+r) = \frac{mn + (m+n)r + r^2}{2} \quad (1)$$

2) ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow (m+n)^2 =$
$= (m+r)^2 + (n+r)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + 2mn + n^2 = m^2 + 2mr + r^2 + n^2 + 2nr + r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow mn = (m+n)\,r + r^2 \quad (2)$

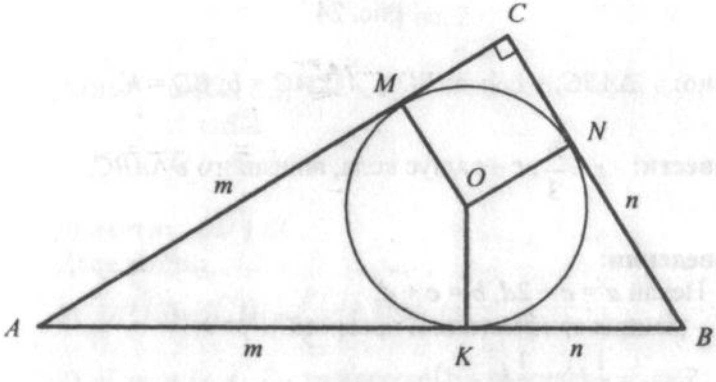

Рис. 23

3) (1), (2) $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = mn$.

Задача 24. Довжини сторін трикутника складають арифметичну прогресію. Висота, проведена до середньої за величиною сторони, дорівнює *h*. Довести, що радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює $\frac{h}{3}$.

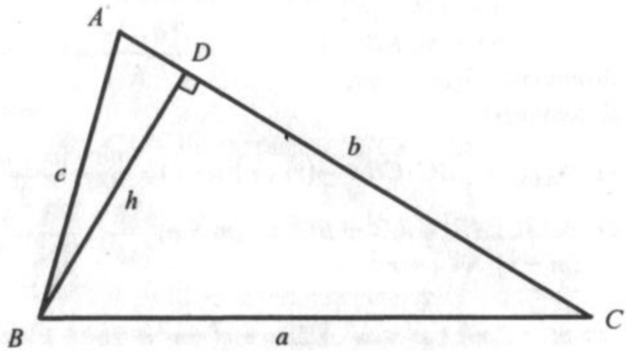

Рис. 24

Дано: ΔABC; $\div$ c, b, a; $BD \perp AC$; $AC = b$; $BD = h$.

Довести: $r = \frac{h}{3}$, r – радіус кола, вписаного в ΔABC.

Доведення:

1) Нехай $a = c + 2d$, $b = c + d$,
d – різниця арифметичної прогресії.

2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(c+d)h$.

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\rho r = \frac{c+(c+d)+(c+2d)}{2} = \frac{3(c+d)}{2}\cdot r$.

4) $\frac{1}{2}(c+d)h = \frac{3}{2}(c+d)r \Rightarrow r = \frac{h}{3}$.

Задача 25. Довести, що якщо через точку дотику двох кіл провести прямі, які перетинають обидва кола, а точки перетину прямих з колами з'єднати хордами, то ці хорди паралельні.

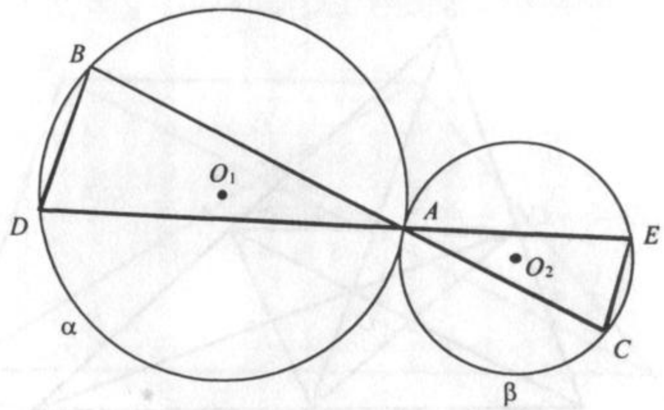

Рис. 25

Дано: $\alpha\,(O_1, R_1)$, $\beta\,(O_2, R_2)$; $A \in BC$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$,
$A \in ED$,
$D \in \alpha$, $E \in \beta$.

Довести: $BD \parallel EC$.

Доведення:

1) $H_A^k(\alpha) = \beta$, $|k| = \dfrac{R_1}{R_2}$; $k < 0$.

2) Точки D, A, E – колінеарні (за умовою)

Аналогічно:

$$\left.\begin{aligned} H_A^k(D) = E \\ H_A^k(B) = C \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_A^k(DB) = EC \Rightarrow DB \parallel EC \cdot$$

Задача 26. Три середні лінії трикутника розбивають його та чотири частини. Площа однієї з них дорівнює S. Доведіть, що площа даного трикутника дорівнює $4S$.

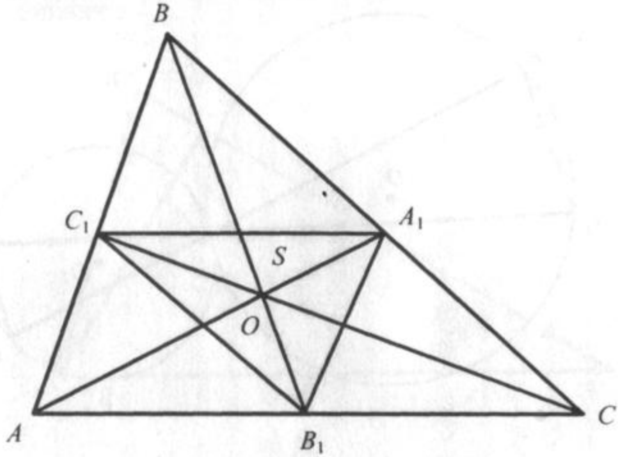

Рис. 26

Дано: ΔABC: C_1, A_1, B_1 – середина сторін AB, BC, AC.
$S_{\Delta A_1B_1C_1} = S$.

Довести: $S_{\Delta ABC} = 4S$.

Доведення:

1) $$\left.\begin{aligned} H_0^{-\frac{1}{2}}(A) &= A_1 \\ H_0^{-\frac{1}{2}}(B) &= B_1 \\ H_0^{-\frac{1}{2}}(C) &= C_1 \end{aligned}\right\} H_0^{-\frac{1}{2}}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1 .$$

2) $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \frac{1}{k^2} = 4 .$$

Задача 27. Діагоналі трапеції розбивають її на чотири трикутника. Доведіть, що якщо площі двох з них, які прилягають до основи трапеції, дорівнюють p^2 і q^2, то площа трапеції дорівнює $(p+q)^2$.

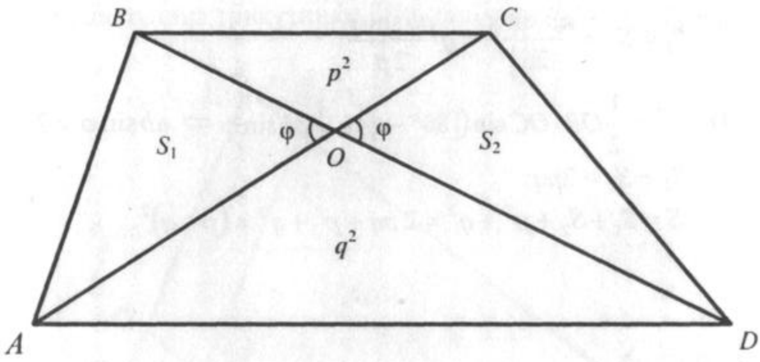

Рис. 27

Дано: $ABCD$ – трапеція: $AD \parallel BC$. $S_{\Delta BOC}=p^2$, $S_{\Delta AOD}=q^2$.

Довести: $S_{ABCD}=(p+q)^2$.

Доведення:

1) $S_1 = S_{\Delta AOB}$, $S_2 = S_{\Delta COD}$. Нехай $OB = a$, $OC = b$.

2) $H_0^k(A)=C;\quad |k|=\dfrac{OC}{AO} \Rightarrow AO=\dfrac{OC}{|k|}=\dfrac{b}{|k|},\;\; k^2=\dfrac{p^2}{q^2}\;;$

$H_0^k(D)=B;\quad |k|=\dfrac{OB}{OD} \Rightarrow OD=\dfrac{OB}{|k|}=\dfrac{a}{|k|}.$

3) $S_1=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\varphi=\frac{ab\sin\varphi}{2|k|};$

$S_2=\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\varphi=\frac{ba\sin\varphi}{2|k|};$

$S_1=S_2=\frac{ab\sin\varphi}{2|k|}=q\frac{ab\sin\varphi}{2p}.$

4) $p^2=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin(180°-\varphi)=\frac{1}{2}ab\sin\varphi\Rightarrow ab\sin\varphi=2p^2$

$S_1+S_2=2pq.$

$S=S_1+S_2+p^2+q^2=2pq+p^2+q^2=(p+q)^2.$

Задача 28. Всередині трикутника взята довільна точка O і через неї проведені три прямі, паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник ABC на 6 частин, із яких три є трикутниками. Площі цих трикутників дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Довести, що площа трикутника ABC дорівнює $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

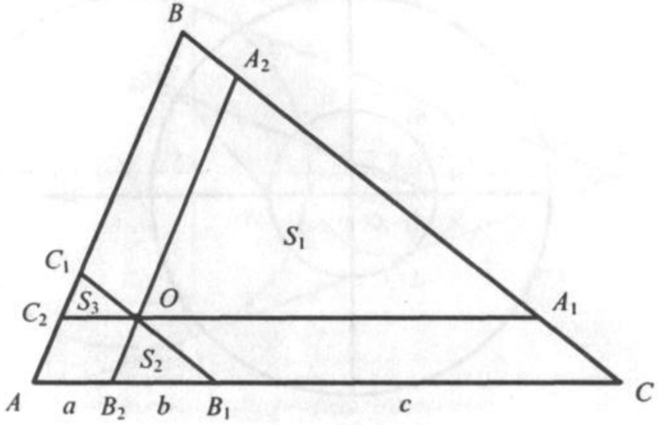

Рис. 28

Дано: ΔABC: $A_2B_2 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_2 \parallel AC$.

$S_{\Delta OA_1A_2} = S_1$, $S_{\Delta OB_1B_2} = S_2$, $S_{\Delta OC_1C_2} = S_3$.

Довести: $S_{\Delta ABC} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Доведення:

1) Нехай $AB_2 = a$, $B_2B_1 = b$, $B_1C = c$, $S_{\Delta ABC} = S$.

$\Delta OA_1A_2 \sim \Delta ACB$. $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{c^2}{(a+b+c)^2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{S_1}{S}} = \dfrac{c}{a+b+c}$;

Аналогічно $\sqrt{\dfrac{S_2}{S}} = \dfrac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\dfrac{S_3}{S}} = \dfrac{a}{a+b+c}$;

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1 \Rightarrow S = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$$

Задача 29. Дані два концентричних кола. Довести, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра другого кола не залежить ані від вибору точки, ані від обраного діаметра.

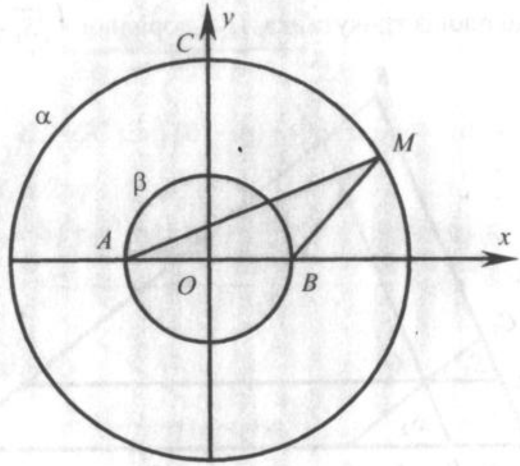

Рис. 29

Дано: $\alpha\,(O, R)$, $\beta\,(O, r)$; $M \in \alpha$, AB – діаметр кола β.

Довести: $AM^2 + MB^2 = \text{const}$.

Доведення:

1) Введемо прямокутну систему координат $OB = Ox$, $OC = Oy$ $(OC \perp OB)$. $M\,(x, y)$, $A\,(-r, 0)$, $B\,(r, 0)$.

2) $MA^2 = (x + r)^2 + y^2$; $MB^2 = (x - r)^2 + y^2$;
$MA^2 + MB^2 = (x + r)^2 + y^2 + (x - r)^2 + y^2 = 2\,(x^2 + y^2) =$
$= 2R^2$.

Задача 30. Два кола дотикаються зовнішнім способом. Чотири точки дотику їх зовнішніх дотичних A, B, C, D послідовно з'єднані. Довести, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло і знайти його радіус, якщо радіуси даних кіл дорівнюють R і r.

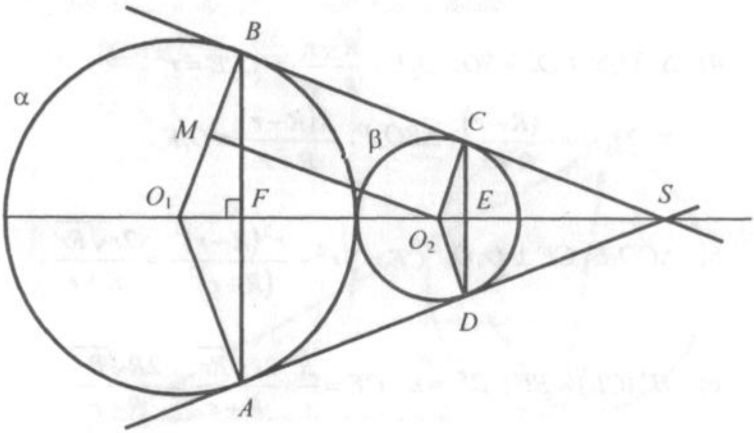

Рис. 30

Дано: α (O_1, R), β (O_2, r); AD, BC – спільні дотичні.

Довести: $AB + CD = AD + BC$. Знайти ρ – радіус кола, вписаного в $ABCD$.

Доведення:

1) $MO_2 \parallel BC \Rightarrow MO_2CB$ – прямокутник $(\angle B = \angle C = 90°) \Rightarrow MO_2 = BC$.
2) ΔO_1MO_2: $O_1O_2 = R + r$, $O_1M = R - r$;
$O_2M = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1M^2} =$
$= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \Rightarrow BC = 2\sqrt{Rr}$.

3) $AD \cap BC = S$. $H_S^k(\beta) = \alpha$, $k = \dfrac{R}{r}$; $H_S^k(O_2) = O_1$;

$$\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{SO_2}{SO_2 + R + r} = \frac{r}{R} \Rightarrow SO_2 = \frac{R+r}{R-r} \cdot r.$$

4) ΔCO_2S: $CO_2^2 = SO_2 \cdot O_2E$; $\dfrac{R+r}{R-r} \cdot r \cdot O_2E = r^2$; $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O_2E = \frac{r(R-r)}{R+r}; \Delta BO_1F: \frac{R(R-r)}{R+r} = O_1F.$$

5) ΔCO_2E: $CE \perp O_1O_2$. $CE = \sqrt{r^2 - \dfrac{r^2(R-r)^2}{(R+r)^2}} = \dfrac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}$.

6) $H_S^k(CE) = BF$; $BF = k \cdot CE = \dfrac{R}{r} \cdot \dfrac{2r\sqrt{Rr}}{R+r} = \dfrac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}$.

7) $AB + CD = 2\,(CE + BF) = \dfrac{4\sqrt{Rr}(R+r)}{R+r} = 4\sqrt{Rr}$.

8) $AD + BC = 2BC = 4\sqrt{Rr}$.

9) $AD + BC = AB + CD$. Таким чином, в чотирикутник ABCD можна вписати коло.

Обчислення:

10) Нехай γ (O, ρ) – коло, вписане в чотирикутник $ABCD$. $FE = 2\rho$.

$$FE = (R - O_1F) + (r + O_2E) = R + r + \frac{r(R-r)}{R+r} - \frac{R(R-r)}{R+r} =$$

$$= R + r + \frac{(R-r)(r-R)}{R+r} = \frac{(R+r)^2 - (R-r)^2}{R+r} = \frac{4Rr}{R+r}.$$

11) $\rho = \dfrac{FE}{2} = \dfrac{2Rr}{R+r}$.

Задача 31. Через точку A, яка лежить поза колом, проведені дві прямі, одна з яких дотикається кола в точці B, а друга перетинає це коло в точках C і D, причому точка C лежить між точками A і D. Доведіть, що $AD \cdot AC = AB^2$.

Доведення:

Проведемо аналіз того, що треба довести:

$$AD \cdot AC = AB^2 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}. \qquad (1)$$

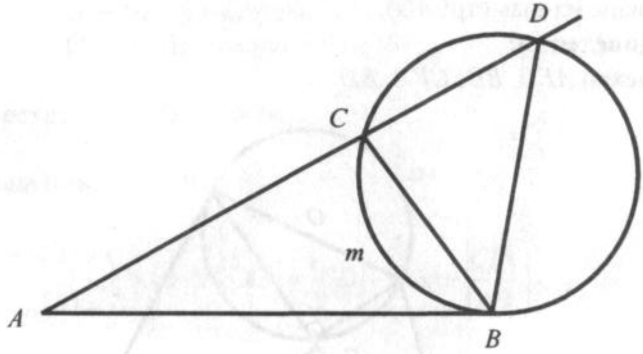

Рис. 31

Із запису (1) видно, що потрібно розглянути ΔABC і ΔADB. Із запису (1) також видно, що в трикутниках ABC і ADB є спільний кут A. Треба довести подібність цих трикутників. Кут ABC, утворений дотичною AB і січною BC вимірюється половиною дуги BmC:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Кут ADB також вимірюється половиною дуги BmC: $\angle ABC = \angle CDB = \frac{1}{2} \cup BmC$, тому що кут CDB – вписаний. Таким чином $\Delta ABC \sim \Delta ADB \Rightarrow$ (1), що і т. д.

Задача 32. Довести, що будь-яка точка опуклого чотирикутника належить принаймні одному з кіл, діаметром яких є сторони чотирикутника.

Дано: $ABCD$ – опуклий чотирикутник. α (O, R) – коло, AB – діаметр. M – точка опуклого чотирикутника.

Довести: $M \in \alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \varepsilon$ (β – коло, побудоване на діаметрі BC, γ – коло, побудоване на діаметрі CD, ε – коло, побудоване на діаметрі AD).

Доведення:

Нехай $AE \perp BD$, $CF \perp BD$.

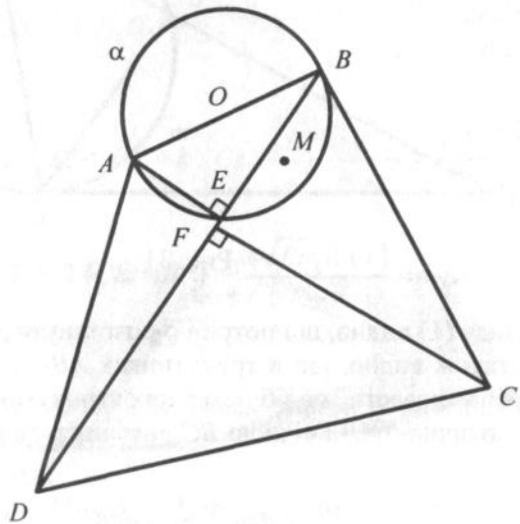

Рис. 32

Розглянемо ΔABE. Оскільки трикутник $ABCD$ опуклий, він знаходиться по одну сторону від кожної із своїх сторін. Тому всі точки прямокутного трикутника ΔABE належать колу α. Чотирикутник $ABCD$ розбитий на 4 прямокутних трикутника ΔABE, ΔBFC, ΔAED і ΔDFC. Тому будь-яка точка чотирикутника $ABCD$ буде належати принаймні одному з кіл α, β, γ, або ε .

Задача 33. На основах AB і CD трапеції $ABCD$ побудовані квадрати (поза трапецією). Довести, що пряма, яка проходить через центри квадратів, проходить і через точку перетину діагоналей трапеції.

Дано: $ABCD$ – трапеція, $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = O$.
$ABMN$ – квадрат, побудований на AB,
$CDQP$ – квадрат, побудований на CD.
O_1 – центр квадрата $ABMN$,
O_2 – центр квадрата $CDQP$.

Довести: $O \in (O_1O_2)$.

Доведення:

1) $$\left.\begin{matrix} H_O^k(A) = C \\ H_O^k(B) = D \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_O^k[AB] = [CD], \left(k = -\frac{|CD|}{|AB|}\right).$$

2) $$\left.\begin{matrix} BM \perp AB, |BM| = |AB| \\ DQ \perp CD, |DQ| = |CD| \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_O^k[BM] = [DQ].$$

Таким чином: $$\left.\begin{matrix} H_O^k(M) = Q \\ H_O^k(A) = C \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_O^k[MA] = [QC].$$

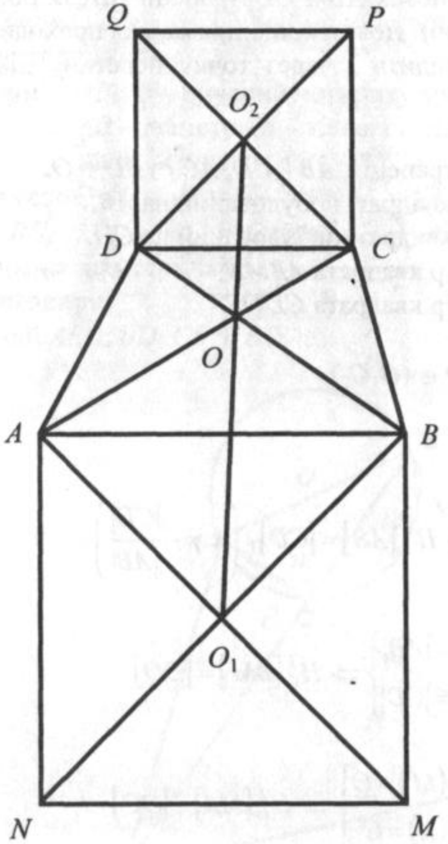

Рис. 33

Гомотетія зберігає відношення відрізків. Тому середина відрізка MA перейде в середину відрізка $[QC]$:

$$H_O^k(O_1) = O_2 .$$

Таким чином, точки O_1 і O_2 відповідні в гомотетії з центром в точці O і коефіцієнтом k, тому точки O_1 і O_2 колінеарні з точкою O, що і треба було довести.

САМОСТІЙНА РОБОТА

1. В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина CB, N – середина CD. Довести, що прямі AM і AN ділять діагональ BD на три рівних частини.

Вказівка: медіани в точці перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини.

2. Довести, що у всякому трикутнику добуток двох сторін дорівнює добутку висоти, опущеної на третю сторону і діаметра описаного кола.

Вказівка: скористатися формулою для площі трикутника, вираженої через радіус описаного кола.

3. Довести, що в будь-якій трапеції площа трикутника, основою якого є одна з непаралельних сторін, а вершиною – середина протилежної сторони, дорівнює половині площі трапеції.

Вказівка: через середину однієї сторони провести пряму паралельну другій бічній стороні.

4. Навколо кола описана рівнобічна трапеція $ABCD$. Точки E і K – точки дотику цього кола з бічними сторонами AB і CD. Доведіть, що відрізок $EK \parallel AB$.

Вказівка: перпендикуляр до середин основ трапеції є віссю симетрії для кола і трапеції.

5. Через кінці дуги кола, яка містить 120°, проведені дотичні, і в фігуру, обмежену цими дотичними і даною дугою, вписане коло. Довести, що довжини вписаного кола дорівнює довжини даної дуги.

6. В прямокутному трикутнику ΔABC кут $B = 90°$, BD – висота, опущена на гіпотенузу AC. Доведіть, що BD дорівнює сумі радіусів кіл, вписаних в ΔABC, ΔADB і ΔCDB.

7. Доведіть, що лінія центрів двох кіл, які перетинаються, ділить навпіл їх спільну хорду.

Вказівка: доведіть, що лінія центрів є віссю симетрії двох кіл.

8. Дан рівнобедрений трикутник ABC, R і r – радіуси описаного і вписаного кіл. Доведіть, що відстань між центрами кіл дорівнює

$$\sqrt{R(R-2r)}.$$

Вказівка: скористайтеся тим, що шукана відстань дорівнює також

$$|h-(R+r)|,\ h \text{ – висота до основи.}$$

9. В трикутнику висота і медіана, проведені з однієї вершини ділять кут при цій вершині на 3 рівних частини. Доведіть, що кути цього трикутника дорівнюють 30°, 60° і 90°.

10. Доведіть, що в трапеції, діагоналі якої є бісектрисами кутів при одній основі, довжини трьох сторін рівні.

Вказівка: нехай в трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$. Доведіть, що ΔABC і ΔBCD – рівнобедрені.

11. В рівнобедреному трикутнику з основою a і бічною стороною b кут при вершині дорівнює 20°. Доведіть, що $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Вказівка: $a = 2b \sin 10°$. Підставте в рівність і скористайтесь формулою для синуса потрійного кута.

12. Кожна сторона опуклого чотирикутника перетинається деяким колом в двох точках, причому довжини відрізків сторін, які лежать всередині кола, рівні. Доведіть, що і даний чотирикутник можна вписати коло.

Вказівка: доведіть, що центр вписаного кола співпадає з центром даного кола, а точками дотику будуть середини відрізків сторін, які лежать всередині даного кола.

13. Доведіть, що із всіх трикутників з даним периметром найбільшу площу має правильний трикутник.

Вказівка: використайте формулу Герона.

14. Доведіть, що якщо c – довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, a, b – довжини катетів, то площа

$$S_{\Delta ABC} = p\,(p-c) = (p-a)\,(p-b), \text{ де } p = (a+b+c)/2.$$

15. Доведіть, що якщо площі двох прямокутних трикутників відносяться як квадрати гіпотенуз, то трикутники подібні.

16. Доведіть, що якщо в трикутник вписані три рівних квадрата, то трикутник правильний.

Вказівка: розглянути симетрію відносно прямих, які містять бісектриси кутів трикутника.

17. Дано два конгруентних кола α (O_1, r) і β (O_2, r), які перетинаються в точках M і N. Пряма l, паралельна O_1O_2 перетинає коло α в точках A і B, а коло β – в точках C і D. Довести, що величина кута AMC не залежить від положення прямої l, якщо прямі AB і CD співнапрямлені і $l \cap (MN) \neq 0$.

Вказівка: розглянути паралельне перенесення: T: $O_1 \to O_2$.

18. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, відсікає від нього трикутник MCN. Довести, що кола, описані навколо трикутників ABC і MCN, дотикаються.

Вказівка: розглянути H_C^k.

19. Довести, що в трикутнику точка перетину медіан, центр кола, описаного навколо трикутника і ортоцентр лежать на одній прямій.

Вказівка: розглянути $H_O^{-\frac{1}{2}}$, де O – точка перетину медіан.

20. Довести, що основи перпендикулярів, опущених з будь-якої точки кола на три прямі, які містять сторони вписаного в нього трикутника, лежать на одній прямій.

Вказівка: нехай $D \in (O, r)$, M, N і P – основи перпендикулярів, опущених із D на (AB), (BC) і (AC). Довести подібність двох пар трикутників: ΔBMD і ΔDCP, ΔBDC і ΔMDP.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вересова Е. Е.* и др. Практикум по решению математических задач. М., Просвещение, 1979. – 237 с.

2. *Говоров В. М.* и др. Сборник конкурсных задач по математике.– М., Наука, 1986. – 378 с.

3. *Залогин Н. С.* Конкурсные задачи по математике. К.: ГИТЛ, 1964. – 613 с.

4. *Збірник* усіх конкурсних задач з математики / За ред. М. І. Сканаві. – К.: Агенство "Книга Пам'яті України", 1997. – 430 с.

5. *Дыбов П. Т. и др. Сборник* задач по математике для поступающих в ВУЗы. – М.: Высш. шк., 1989.– 272 с.

6. *Понарин Я. П., Скопец З. А.* Перемещения и подобия плоскости. –К.: Радянська школа, 1981. – 179 с.