

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л.М. Ломонос, Н.П. Муранова

МАТЕМАТИКА
ВСТУПНЕ ТЕСТУВАННЯ
Навчально-методичний посібник



Київ 2007

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7
Л 753

Рецензенти: *Н.О. Вірченко*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний технічний університет України "КПІ");
К.І. Мазур, канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний авіаційний
університет);
І.М. Олександрович, канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний
університет імені Тараса Шевченка)

*Затверджено методично-редакційною радою Національного
авіаційного університету (протокол №5 від 24.05. 2007 р.).*

Ломонос Л.М., Муранова Н.П.

Л753

Математика. Вступне тестування: Навчально-методичний посіб-
ник. – К.: НАУ, 2007. – 60 с.

Посібник містить програму з математики, зразки білетів для проведення
співбесіди із вступниками на підготовче відділення, підготовчі курси та зразки
виконання основних типових задач з наведених білетів.

Наведено програму з математики, рекомендовану Міністерством освіти
і науки України для вступників до вищих навчальних закладів.

Для вступників в Інститут доуніверситетської підготовки НАУ.

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7

© Л.М. Ломонос,
Н.П. Муранова, 2007

**1. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ
СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ В ІДП (ПІДГОТОВЧЕ
ВІДДІЛЕННЯ ТА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ)**

I. Арифметика, алгебра.

1. Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК) натуральних чисел.
2. Звичайні дроби, дії над ними.
3. Десяткові дроби, дії над ними.
4. Пропорції, властивості пропорцій.
5. Відсотки.
6. Дії над степенями з натуральними та раціональними показниками. Арифметичний корінь та його властивості.
7. Модуль дійсного числа, його геометричний зміст.
8. Одночлен і многочлен. Дії над ними.
9. Формули скороченого множення $((a \pm b)^2, (a \pm b)^3, a^2 - b^2, a^3 \pm b^3, (a + b + c)^2)$.
10. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: парність, непарність, періодичність.
11. Основні властивості і графіки елементарних функцій: $y = kx + b$;
 $y = ax^2 + bx + c$; $y = \frac{k}{x}$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.
12. Лінійні рівняння з однією змінною. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.
13. Квадратні рівняння. Знаходження коренів. Теорема Вієта.
14. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
15. Основні властивості числових нерівностей.
16. Розв'язання найпростіших раціональних та ірраціональних нерівностей.
17. Арифметична прогресія.
18. Геометрична прогресія.
19. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Тригонометричні функції довільного кута.
20. Основні тригонометричні тотожності.
21. Формули зведення.
22. Тригонометричні функції подвійного та половинного аргументу.

23. Формули додавання аргументів тригонометричних функцій ($\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$).
24. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і навпаки.
25. Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

II. Геометрія.

1. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прями.
2. Вектори. Операції над векторами.
3. Трикутник. Основні лінії у трикутнику (медіана, бісектриса, висота, середня лінія), їх властивості.
4. Сума кутів трикутника. Сума кутів опуклого многокутника. Зовнішній кут трикутника, його властивість.
5. Рівносторонній, рівнобедрений та прямокутний трикутники, їх властивості. Теорема Піфагора.
6. Обчислення площі трикутника.
7. Ознаки рівності трикутників.
8. Ознаки подібності трикутників.
9. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх основні властивості і формули площ.
10. Коло і круг, їх основні елементи. Властивості дотичної до кола. Центральні і вписані кути, їх властивості.
11. Коло, вписане в трикутник та описане навколо нього.
12. Коло, вписане в чотирикутник та описане навколо нього.

III. Додаткові питання для співбесіди із вступниками на підготовче відділення.

1. Показникова функція, її властивості та графік.
2. Логарифми, їх властивості.
3. Логарифмічна функція, її властивості та графік.
4. Найпростіші показникові, логарифмічні рівняння та нерівності.
5. Похідна функції. Механічний та геометричний зміст похідної. Похідна суми, добутку і частки двох функцій.
6. Знаходження екстремумів функції та найбільшого і найменшого значень функції на заданому проміжку.
7. Рівняння дотичної до графіка функції.
8. Многогранники. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.
9. Тіла обертання. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.

2. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ

Білет № 1-К

I рівень

- Основні властивості числових нерівностей.
- Знайти кут між векторами $\vec{a} = (1; 1; 1)$ і $\vec{b} = (2; 0; 3)$.
а) $\cos \varphi = \frac{1}{2}$; б) $\cos \varphi = \frac{5\sqrt{39}}{39}$; в) $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$; г) інша відповідь, записати її.
- Розв'язати нерівність $(x+3)^4 + \sqrt{x^2 - 9} \leq 0$.
а) $x = \pm 3$; б) $x = -3$; в) $x \in [-3; 3]$; г) інша відповідь, записати її.
- Знайти значення виразу $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$.
а) $2 + \sqrt{2}$; б) 1; в) 3; г) інша відповідь, записати її.
- Скільки коренів має система рівнянь $\begin{cases} y = |x-1| + \frac{\pi}{2}, \\ y = \arcsin x. \end{cases}$
а) один; б) два; в) жодного; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- Спростити вираз $\sin^4\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.
- Знайти площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 см і 44 см, а непаралельні – 17 см і 25 см.

Білет № 2-К

I рівень

- Коло, вписане в трикутник та описане навколо нього.
- Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см². Знайти висоту цього трикутника.
а) 4 см; б) 8 см; в) $4\sqrt{3}$ см; г) інша відповідь, записати її.

- Знайти область визначення функції $y = \frac{\sqrt{4-x}}{1-2^x}$.

а) $x < 0$; б) $x \geq 4$; в) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 4]$; г) інша відповідь, записати її.

- Спростити вираз $\frac{a^2 - 3ab}{2b} \cdot \frac{b}{a^2 - 9b^2}$.

а) $\frac{3a}{a-3b}$; б) $\frac{a}{2(a+3b)}$; в) $\frac{a}{2}$; г) інша відповідь, записати її.

- Обчислити значення виразу $\sin 825^\circ \cdot \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \cdot \sin(-555^\circ) + \operatorname{tg} 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 245^\circ$.
а) 2; б) 0; в) -1; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- Розв'язати нерівність $|x+2| + |x+3| \geq x+4$.
- Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$ см, $|\vec{b}| = 8$ см, а кут між ними 120° .

Білет № 3-К

I рівень

- Формули скороченого множення: $(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$, $a^2 - b^2$, $a^3 \pm b^3$, $(a+b+c)^2$.

- Розв'язати нерівність $\left(\frac{3}{5}\right)^{1-\sqrt{x}} \leq 1$.

а) $x \in [-\infty; 1]$; б) $x \in [0; 1]$; в) $x \in [1; \infty]$; г) інша відповідь, записати її.

- Вектор, довжина якого дорівнює $3\sqrt{3}$, має рівні координати. Знайти координати вектора.

а) $(-3; -3; -3)$ або $(3; 3; 3)$; б) $(-3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ або

$(3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; в) $(1; 1; 1)$ або $(-1; -1; -1)$; г) інша відповідь, записати її.

4. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x^4 - 16} + \sqrt{x+1}$.

а) $x \in [-1; 2)$; б) $x \in [2; \infty)$; в) $(-2; 2)$; г) інша відповідь, записати її.

5. Розв'язати рівняння $|3x-8| - |3x-2| = 6$.

а) $x = \frac{3}{2}$; б) $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$; в) $x \in (0; 2)$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Довести тотожність $\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}$.

2. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см. Знайти основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

Білет № 4-К

I рівень

1. Вертикальні та суміжні кути. Ознаки паралельності двох прямих.

2. Написати рівняння прямої яка проходить через точку $(-1; 1)$ перпендикулярно до прямої $3x - y + 2 = 0$.

а) $x - y + 2 = 0$; б) $x + 3y - 2 = 0$; в) $2x + y - 3 = 0$; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити значення виразу $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10} - 3} - \sqrt{11}$.

а) 3; б) -3; в) 0; г) інша відповідь, записати її.

4. Спростити вираз $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\sin 2\alpha$; г) інша відповідь, записати її.

5. Розв'язати рівняння $3^{2x-1} - 3^x - \frac{4}{3} = 0$.

а) $\log_3 8$; б) 9; в) $\log_3 4$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність $6x^2 - 13|x-2| + 7 \geq 0$.

2. У трапеції бічні сторони дорівнюють 169 см і 125 см. Довжина вписаного кола дорівнює 120π . Знайти основи трапеції.

Білет № 5-К

I рівень

1. Пропорції, властивості пропорцій. Середнє геометричне і середнє арифметичне декількох чисел.

2. Коло з центром у точці $O(-1; 3)$ проходить через точку $A(2; -2)$. Знайти радіус даного кола.

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{34}$; в) 7; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x$.

а) $x \in (-\infty; 6\frac{4}{5})$; б) $x \in (-\infty; -3]$; в) $x \in [6; \infty)$; г) інша відповідь, записати її.

4. Знайти число, $6\frac{1}{4}\%$ якого складає $(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}) \cdot 2\frac{1}{4}$.

а) 25; б) 42; в) 36; г) інша відповідь, записати її.

5. Розв'язати рівняння $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos x} = 0$.

а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} < \frac{10}{3}$.

2. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно рівні 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.

Білет № 6-К

I рівень

1. Модуль числа та його властивості. Геометричний зміст модуля.

2. Знайти корені рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, які належать інтервалу

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

а) $-\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{3\pi}{8}$; в) $\frac{\pi}{8}$; г) $\frac{\pi}{4}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити $|\bar{a} - \bar{b}|$, якщо $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$.

а) 22; б) 6; в) 14; г) інша відповідь, записати її.

4. При яких значеннях x функція $y = 5^{\frac{2+x}{x-2}} + 1$ більша за 2?

а) $x \in (-3; 3)$; б) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; в) $x \in (4; \infty)$; г) інша відповідь, записати її.

5. Позбавитись від ірраціональності у знаменнику дробу

$$\frac{4}{\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{9}}.$$

а) $\frac{4(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}+1)}{3}$; б) $(\sqrt[4]{13} + \sqrt[4]{9})(\sqrt{13} + 3)$;

в) $2 \cdot (\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{117} + \sqrt[4]{9})$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Довести тотожність

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = \frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

2. У паралелограмі, бісектриса гострого кута, який дорівнює 60° , ділить сторону на відрізки 33 см і 55 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.

Білет № 7-К

I рівень

1. Коло, вписане в чотирикутник і описане навколо нього.

2. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, – 3 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

а) $\sqrt{70}$ см; б) $2\sqrt{13}$ см; в) 7 см; г) інша відповідь, записати її.

3. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2; 2)$ і $B(-2; 1; 4)$.

а) $(-1; 0; 0)$; б) $(-2; 0; 0)$; в) $(2; 0; 0)$; г) інша відповідь, записати її.

4. Спростити вираз $\frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2}$.

а) 3; б) 0; в) $a+1$; г) інша відповідь, записати її.

5. Скільки розв'язків має рівняння $|\cos x| = -x^2 + 3x - 4$?

а) 3; б) 0; в) 1; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. При якому значенні a відношення коренів рівняння $x^2 + ax - 16 = 0$ дорівнює -4 ?

2. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 9 см і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.

Білет № 8-К

I рівень

1. Трапеція. Середня лінія трапеції. Площа трапеції.

2. Спростити вираз $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

а) 6; б) 4; в) $-2\sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.

3. У трикутнику ABC $A(2; 1; 3)$, $B(2; 1; 5)$; $C(0; 1; 1)$. Знайти довжину AM .

а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $\sqrt{13}$; г) інша відповідь, записати її.

4. Сума двох чисел дорівнює 527. Відомо, що 8% першого числа дорівнюють 7,5% другого. Знайти ці числа.

а) 127, 400; б) 255, 272; в) 227, 300; г) інша відповідь, записати її.

5. Обчислити $\sin(2\alpha + \pi)$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

- а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{13}$; в) $-\frac{12}{13}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}\right) \cdot |x+2|}$.
2. В прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписано коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайти гіпотенузу.

Білет № 9-К

I рівень

1. Квадратні рівняння. Знаходження коренів. Теорема Вієта.
2. Позбутися від ірраціональності у знаменнику $\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.
а) $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$; б) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 20 см, а один з катетів 12 см.
а) 144 см^2 ; б) 96 см^2 ; в) 112 см^2 ; г) інша відповідь, записати її.
4. Знайти значення $\cos \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$ $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.
а) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{17}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{17}}$; г) інша відповідь, записати її.
5. На осі абсцис знайти точку M , відстань від якої до точки $A(3; -3; 0)$ дорівнює 5.
а) $(-1; 0; 0)$; б) $(7; 0; 0)$; в) $(7; 0; 0)$ і $(-1; 0; 0)$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x+4} - x + 2} > 0$.
2. Розв'язати рівняння $7 + 4 \cos x \cdot \sin x + 1,5 \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

Білет № 10-К

I рівень

1. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх основні властивості.
2. Дано вектори $\vec{a} = (4; -2; -4)$ і $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Обчислити $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
а) $\sqrt{41}$; б) $\sqrt{89}$; в) $\sqrt{105}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Обчислити значення виразу $\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} \cdot \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.
а) 2; б) -1; в) 3; г) інша відповідь, записати її.
4. Знайти суму десяти членів арифметичної прогресії, якщо $a_5 = 7,25$; $a_1 = 3,25$.
а) 90,5; б) 77,5; в) 110; г) інша відповідь, записати її.
5. Спростити вираз $\frac{\sin(-328^\circ) \cdot \sin 958^\circ}{\operatorname{ctg} 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cdot \cos(-1022^\circ)}{\operatorname{tg}(-212^\circ)}$.
а) $2 + \sqrt{3}$; б) -1; в) $3 - \sqrt{2}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати рівняння $2x^4 - 9x^3 + 9x - 2 = 0$.
2. Площа прямокутного трикутника дорівнює 25 см^2 , а катети відносяться як 2:1. Обчислити радіус вписаного та описаного кіл.

Білет № 11-К

I рівень

1. Вектори, операції над векторами.

2. Спростити вираз

$$\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}, 0 < a < 2b.$$

а) $\frac{3ab}{a + 2b}$; б) $\frac{a}{2b - a}$; в) $2a + 3b$; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити $1 + 5 \sin 2\alpha - 3 \cos^{-1} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

а) -4 ; б) 2 ; в) 6 ; г) інша відповідь, записати її.

4. Дано два вектора $\vec{a} = (1; 1; -2)$ і $\vec{b} = (2; -1; 0)$. При якому значенні α вектори $\vec{a} - \vec{b}$ і $\alpha \cdot \vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярні?

а) $\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\alpha = \frac{4}{5}$; в) $\alpha = -2$; г) інша відповідь, записати її.

5. Розв'язати рівняння $(x-1)\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{(x+1)(x+3)} = 0$.

а) 2 ; б) $1; 2$; в) $1; 2; -1; -3$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Побудувати графік функції $y = |x+1| + |x-1|$.

2. Знайти гострий кут рівнобедреної трапеції, якщо її площа дорівнює 4 см^2 , а основи дорівнюють 5 см і 3 см .

Білет № 12-К

I рівень

1. Коло і круг, їх основні елементи. Центральні та вписані кути, їх властивості.

2. Дано вектори $\vec{a} = (4; -2; -4)$ і $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Обчислити

$$(\vec{a} - \vec{b})^2.$$

а) 41 ; б) 33 ; в) 25 ; г) інша відповідь, записати її.

3. Спростити вираз $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2} + \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

а) $2\sqrt{2}$; б) 1 ; в) 3 ; г) інша відповідь, записати її.

4. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{(x^2 + 3x + 3) \left(\frac{2x+1}{x-2} - 1 \right)}.$$

а) $x \in (-1; \infty)$; б) $x \in (-\infty; -3] \cup (2; \infty)$; в) $x \in (2; 4)$; г) інша відповідь, записати її.

5. Скільки коренів має рівняння $2^{-|x|} = 2 - |x|$?

а) 3 ; б) 2 ; в) 4 ; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Спростити вираз: $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sin \frac{\alpha}{4}$.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють b і c . Знайти довжину бісектриси прямого кута.

Білет № 13-К

I рівень

1. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота, середня лінія трикутника, їх властивості.

2. Дано два вектори $\vec{a} = (1; -2; 1)$ і $\vec{b} = (2; -6; 3)$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ і \vec{b} .

а) $\cos \varphi = \frac{4}{5}$; б) $\cos \varphi = \frac{2}{7}$; в) $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

а) $-2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.

4. Обчислити $\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)}$.

а) 3 ; б) 1 ; в) 5 ; г) інша відповідь, записати її.

5. При яких значеннях a нерівність $\frac{ax}{x^2 + 4} < 1,5$ виконується для довільних значень $x \in \mathbb{R}$?

а) $a \in (-4; 3)$; б) $a \in (-6; 6)$; в) $a \in (0; 5)$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Знайти значення $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, якщо $\sin x - \cos x = 1,4$.
2. Дві бічні сторони трикутника дорівнюють 26 см і 30 см, а висота, проведена на третю сторону – 24 см. Обчислити медіану, проведenu до третьої сторони.

Білет № 14-К

I рівень

1. Сума кутів трикутника. Сума кутів опуклого багатокутника. Зовнішній кут трикутника, його властивості.
2. Дано точки $A(1; 0; 2)$, $B(3; n; 5)$, $C(2; 2; 0)$, $D(5; 4; m)$. При яких значеннях m і n вектори \overline{AB} і \overline{CD} колінеарні?
а) $n = \frac{4}{3}; m = \frac{9}{2}$; б) $n = \frac{1}{3}; m = \frac{2}{3}$; в) $n = 0,2; m = 0,5$; г) інша відповідь, записати її.
3. Знайти член a_{10} арифметичної прогресії, якщо у неї $a_8 = 33$, $a_{51} = 248$.

4. Обчислити $\cos\left(2\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$.

а) $3\sqrt{2}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{26}$; в) $4 - \sqrt{2}$; г) інша відповідь, записати її.

5. Спростити вираз $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

а) $\sqrt{x}(x+2)$; б) $x-1$; в) $2x$; г) ніша відповідь, записати її.

II рівень

1. Побудувати графік $y = \frac{x+3}{|x+3|}(x^2-16)$.

2. В коло вписано чотирикутник, три послідовні сторони якого дорівнюють $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см і 6 см, а четверта сторона – діаметр кола. Знайти радіус.

Білет № 15-К

I рівень

1. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і навпаки. Графіки функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.
2. На осі ординат знайти точку M , відстань від якої до точки $A(4; 3; 0)$ дорівнює 5.
а) $(0; 0; 0)$; б) $(0; 6; 0)$ та $(0; 0; 0)$; в) $(0; -6; 0)$; г) інша відповідь, записати її.
3. Розв'язати нерівність $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} \leq 896$.
а) $x \geq 3$; б) $x \leq 2$; в) $-1 \leq x \leq 4$; г) інша відповідь, записати її.
4. Обчислити $\sin \alpha$, якщо $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = 1,4$.
а) $-0,48$; б) $0,96$; в) $0,54$; г) інша відповідь, записати її.

5. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{x}{1-x} = x^2 + 4x + 2$?

а) 2; б) 3; в) 1; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність: $\frac{x^2(x-2)}{\log_{0,5}(x^2+1)} \geq 0$.

2. В трикутник вписано коло радіусом 4 см. Одна із сторін трикутника поділена точкою дотику на відрізки 6 см і 8 см. Знайти довжину інших сторін трикутника.

3. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ
(ПІДГОТОВЧІ КУРСИ)

Білет № 1-К

II рівень

1. Спростити вираз $\sin^4\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

Розв'язання.

Використаємо формулу зведення $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Дістаємо

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right), \text{ тобто дану умову можемо пере-}$$

$$\text{писати у вигляді } \cos^4\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) =$$

$$= \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right) =$$

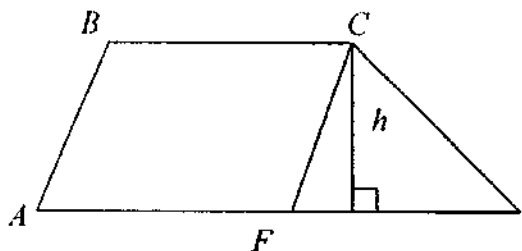
$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = A.$$

За формулою косинуса подвійного аргументу отримуємо

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right).$$

Відповідь: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)$.

2. Знайти площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 см і 44 см, а непаралельні – 17 см і 25 см.



Дано:

$ABCD$ – трапеція, $BC \parallel AD$,

$BC = 16$ см, $AD = 44$ см,

$AB = 17$ см, $CD = 25$ см

Знайти S_{ABCD}

Розв'язання.

Проводимо $CF \parallel AB$. Отримуємо $\triangle CDF$, у якого відомі всі сторони: $CF = AB = 17$ см, $FD = AD - AF = 28$ см, $CD = 25$ см.

За формулою Герона обчислюємо $S_{\triangle CDF}$:

$$S_{\triangle CDF} = \sqrt{p(p-CD)(p-FD)(p-CF)} = \sqrt{35 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 18} = 210 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Але $S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} h \cdot FD$, звідки $h = 15$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 450 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 450 см^2 .

Білет № 2-К

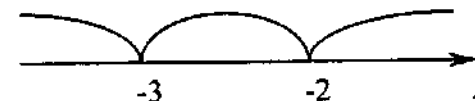
II рівень

1. Розв'язати нерівність $|x+2| + |x+3| \geq x+4$.

Розв'язання.

Використовуємо метод інтервалів. $D(f): x \in R$.

Відкладемо на числовій осі корені виразів, які знаходяться під знаками модулів



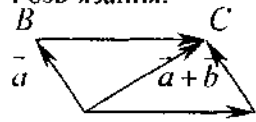
Отримуємо сукупність трьох систем

$$\begin{cases} x < -3, \\ -x-2-x-3 \geq x+4, \\ -3 \leq x \leq -2, \\ -x-2+x+3 \geq x+4, \\ x > -2, \\ x+2+x+3 \geq x+4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x = -3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-1; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; \infty)$.

2. Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 5$ см, $|\vec{b}| = 8$ см, а кут між ними 120° .

Розв'язання.



Маємо $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$$|\vec{CD}| = |\vec{AB}|.$$

В $\triangle ACD$ використовуємо теорему косинусів

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см.

Білет № 3-К

II рівень

1. Довести тотожність

$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}.$$

Розв'язання.

Застосовуємо формули

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

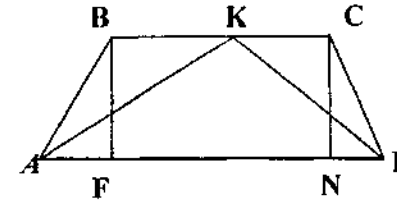
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

і перетворюємо ліву частину даної тотожності

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \frac{13\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{17\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{13\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{17\alpha}{2}} &= \frac{\sin \frac{13\alpha}{2} - \sin \frac{17\alpha}{2}}{\cos \frac{17\alpha}{2} - \cos \frac{13\alpha}{2}} = \\ &= \frac{-2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{15\alpha}{2}}{-2 \sin \alpha \cdot \sin \frac{15\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{15\alpha}{2}. \end{aligned}$$

При скороченні дробів потрібно врахувати, що
$$\begin{cases} \alpha \neq \pi k \\ \alpha \neq \frac{2\pi k}{15}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см. Знайти основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$BC \parallel AD$, $AB = 15$ см,

$CD = 13$ см, $BF \perp AD$,

$BF = 12$ см,

AK і KD – бісектриси.

Знайти BC і AD

Розв'язання.

$\angle KAD = \angle BKA$ і $\angle KDA = \angle CKD$ (внутрішні перехресні кути). Звідси випливає, що $\triangle ABK$ і $\triangle KCD$ – рівнобедрені, тобто $AB = BK = 15$ см, $CD = KC = 13$ см.

Дістаємо, що $BC = BK + KC = 28$ см. Проводимо $CN \perp AD$. За теоремою Піфагора з $\triangle NCD$ знаходимо ND , а з $\triangle ABF$ знаходимо AF :

$$ND = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ (см)}$$

$$AF = \sqrt{225 - 144} = 9 \text{ (см)}$$

$$AD = AF + FN + ND = 42 \text{ см.}$$

Відповідь: 28 см і 42 см.

Білет № 4-К

II рівень

1. Розв'язати нерівність $6x^2 - 13|x - 2| + 7 \geq 0$.

Розв'язання.

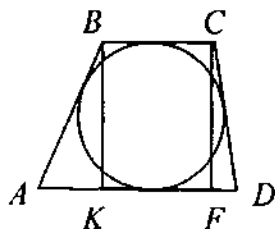
Використовуємо означення абсолютної величини. Отримуємо сукупність двох систем.

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 6x^2 - 13x + 33 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{19}{6}\right] \cup [2; \infty).$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ 6x^2 + 13x - 19 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{19}{6}\right] \cup [1; \infty).$

2. У трапеції бічні сторони дорівнюють 169 см і 125 см. Довжина вписаного кола дорівнює 120π . Знайти основи трапеції.



Дано:
 $ABCD$ – трапеція,
 $BC \parallel AD$, $AB = 169$ см, $CD = 125$ см.
 $L = 120\pi$ (L – довжина вписаного кола)
 Знайти BC і AD

Розв'язання.

$L = 2\pi r$, звідки $r = 60$ см. Проводимо висоти BK і CF ,
 $BK = CF = 2r = 120$ см.

За теоремою Піфагора з $\triangle ABK$ і $\triangle FCD$ знаходимо AK і FD :

$$AK = \sqrt{169^2 - 120^2} = 119 \text{ (см)},$$

$$FD = \sqrt{125^2 - 120^2} = 35 \text{ (см)}.$$

Використовуючи властивість описаного чотирикутника:

$AB + CD = BC + AD$, складаємо систему

$$\begin{cases} AD + BC = 294 \\ AD - BC = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 224 \\ BC = 70 \end{cases}$$

Відповідь: 70 см і 224 см.

Білет № 5-К

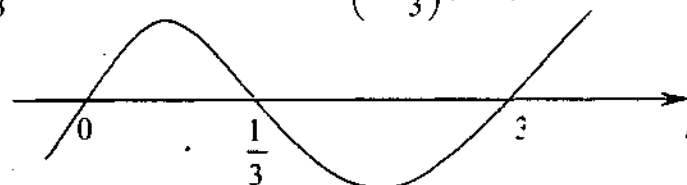
II рівень

1. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} < \frac{10}{3}$.

Розв'язання.

Позначимо $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} = t$, $t \neq 0$, тоді маємо нерівність

$$t + \frac{1}{t} < \frac{10}{3} \Leftrightarrow t(3t^2 - 10t + 3) < 0 \Leftrightarrow t\left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 3) < 0$$



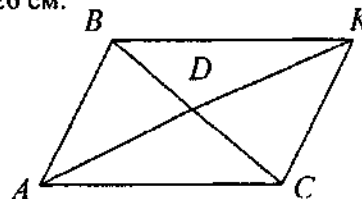
Таким чином отримуємо сукупність нерівностей

$$\begin{cases} t < 0 \\ \frac{1}{3} < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} < 0 \\ \frac{1}{3} < \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} < 0 \\ \frac{1}{27} < \frac{x-1}{x} < 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{26}\right) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{27}{26}; \infty\right).$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{26}\right) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{27}{26}; \infty\right).$

2. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно дорівнюють 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.



Дано: $\triangle ABC$,
 $AB = 27$ см, $AC = 29$ см
 $BD = DC$, $AD = 26$ см

Знайти $S_{\triangle ABC}$.

Розв'язання.

Продовжуємо AD на відстань $DK = AD$. Чотирикутник $ABKC$ буде паралелограмом, оскільки діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

$$S_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} S_{ABKC}, \text{ але}$$

$$S_{\triangle MBK} = \frac{1}{2} S_{ABKC}, \text{ звідки}$$

$$S_{\triangle ABK} = S_{\triangle MBK}.$$

У $\triangle ABK$ всі сторони відомі. За формулою Герона знаходимо

$$S_{\triangle ABK} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 270 см^2 .

Білет № 6-К

II рівень

1. Довести тотожність:

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язання.

Використовуючи формули зведення, а також формули пониження

степеня $\left(\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)$, перетворюємо

ліву частину тотожності

$$\sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(2\pi + \frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) =$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) =$$

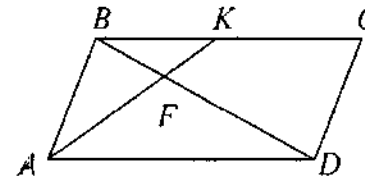
$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right) \right) = A.$$

Далі використовуємо формулу перетворення суми тригонометричних функцій у добуток $\left(\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, дістаємо

$$A = -\cos \frac{\pi}{4} \cos 4\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4\alpha = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

2. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 60° , ділить сторону на відрізки 33 см і 55 см , починаючи від вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.



Дано:

$ABCD$ – паралелограм,

$$\angle BAD = 60^\circ,$$

$$\angle BAK = \angle KAD,$$

$$BK = 33 \text{ см}, KC = 55 \text{ см}.$$

Знайти BF і FD

Розв'язання.

$\angle KAD = \angle BKA$ (внутрішні перехресні кути), звідси $\triangle ABK$ – рівнобедрений і $AB = BK = 33 \text{ см}$, $BC = BK + KC = 88 \text{ см}$.

$AD = BC = 88 \text{ см}$ (протилежні сторони паралелограма).

У $\triangle ABD$ за теоремою косинусів знаходимо BD :

$$BD = \sqrt{33^2 + 88^2 - 2 \cdot 33 \cdot 88 \cdot \cos 60^\circ} = 77 \text{ (см)}.$$

Далі використовуємо властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника і складемо систему

$$\begin{cases} BF + FD = 77 \\ \frac{BF}{FD} = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BF = 21 \\ FD = 56. \end{cases}$$

Відповідь: 21 см і 56 см .

Білет № 7-К

II рівень

1. При якому значенні a відношення коренів рівняння $x^2 + ax - 16 = 0$ дорівнює -4 ?

Розв'язання.

Позначимо корені даного квадратного рівняння через x_1 і x_2 .

Використовуючи умову задачі і теорему Вієта, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = -16 \\ x_1 + x_2 = -a \end{cases}$$

З першого і другого рівнянь системи знаходимо

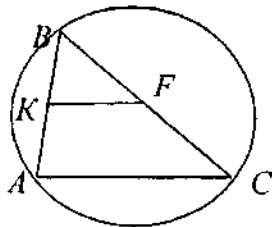
$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 8 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Підставляємо знайдені значення x_1 і x_2 у третє рівняння системи.

Дістаємо $a = \pm 6$.

Відповідь: $a = \pm 6$.

2. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 9 см і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.



Дано:
коло, AB, BC – хорди,
 $AB = 9$ см, $BC = 17$ см, $BK = AK$,
 $BF = CF$, $KF = 5$ см,
Знайти R

Розв'язання.

З'єднуємо точки A і C . Отримали $\triangle ABC$, в якому KF – середня лінія. За властивістю середньої лінії маємо $AC = 2KF = 10$ см.

Отже у $\triangle ABC$ відомі всі сторони. Використовуючи формулу Герона, знаходимо площу $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{85}{8} \text{ см.}$$

Відповідь: $\frac{85}{8}$ см.

Білет № 8-К

II рівень

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}\right)|x+2|}$.

Розв'язання.

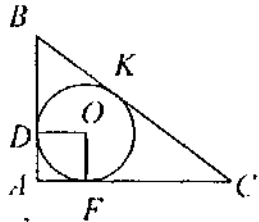
$$\begin{cases} |x+2| \geq 0 \text{ для } x \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}\right)|x+2| \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x^2 - 4x - 12) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x+2)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 0) \cup [6; \infty)$$



Відповідь: $x \in [-2; 0) \cup [6; \infty)$

2. В прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписано коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайти гіпотенузу.



| |
|--|
| Дано: |
| $\Delta ABC, \angle BAC = 90^\circ,$ |
| $P_{\Delta ABC} = 36 \text{ см}, \frac{BK}{KC} = \frac{2}{3}.$ |
| Знайти BC |

Розв'язання

Позначимо $BK = 2x, KC = 3x$. Тоді за властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, маємо $BD = BK = 2x, FC = KC = 3x, AD = AF = r$ (оскільки ADO – квадрат).

Використовуючи умову задачі і теорему Піфагора, складаємо

систему рівнянь
$$\begin{cases} 10x + 2r = 36 \\ (r + 2x)^2 + (r + 3x)^2 = 25x^2 \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом підстановки, дістаємо $x = 3$ см.

Отже $BC = 15$ см.

Відповідь: 15 см.

Білет № 9-К

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x + 4} - x + 2} > 0.$

Розв'язання.

Враховуючи, що чисельник завжди додатний, отримуємо ірраціональну нерівність

$$\sqrt{x + 4} > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 4 > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 5).$$

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [2; 5).$

2. Розв'язати рівняння $7 + 4 \cos x \sin x + 1,5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0.$

Розв'язання.

$$D(f): x \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Використовуємо формулу синуса подвійного кута ($\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$) і основу тригонометричну одиницю, переписуємо

дане рівняння $7 + 2 \sin 2x + \frac{3}{\sin 2x} = 0.$

Позначимо $\sin x = t, \begin{cases} |t| \leq 1, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Маємо квадратне рівняння відносно t

$$2t^2 + 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \text{ (сторонній корінь)} \\ t_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $X = \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Білет № 10-К

II рівень

1. Розв'язати рівняння $2x^4 - 9x^3 + 9x - 2 = 0.$

Розв'язання.

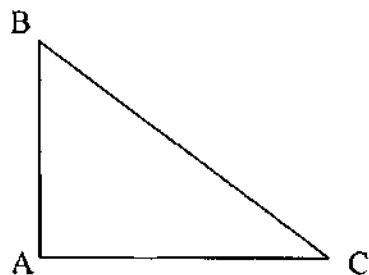
Методом групування розкладемо ліву частину рівняння на множники

$$2(x^4 - 1) - 9x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 9x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x^2 - 9x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 2x^2 - 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ x_{3,4} = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4} \end{cases}$$

Відповідь: $X = \left\{ \pm 1; \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4} \right\}.$

2. Площа прямокутного трикутника дорівнює 25 см^2 , а катети відносяться як 2:1. Обчислити радіуси вписаного та описаного кіл.



Дано:
 $\triangle ABC, \angle A = 90^\circ, S_{\triangle ABC} = 25 \text{ см}^2,$
 $AC : AB = 2 : 1.$

 Знайти r і R .

Розв'язання.

Позначимо $AB = x, AC = 2x,$

$$\text{тоді } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} x \cdot 2x = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \text{ (сторнній корінь)} \end{cases}$$

Отже визначили катети даного трикутника $AB = 5 \text{ см}, AC = 10 \text{ см}.$

За теоремою Піфагора знаходимо гіпотенузу.

$$BC = 5\sqrt{5} \text{ см}.$$

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ см}.$$

$$r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{50}{15 + 5\sqrt{5}} = \frac{10}{3 + \sqrt{5}} = \frac{5(3 - \sqrt{5})}{2} \text{ см}.$$

$$\text{Відповідь: } R = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ см}, \quad r = \frac{5(3 - \sqrt{5})}{2} \text{ см}.$$

4. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ

Білет № 1-В

I рівень

- Логарифмічна функція, її властивості і графік.
- Знайти значення похідної функції $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
 а) 0,5; б) -0,5; в) 2; г) інша відповідь, записати її.
- Знайти значення m і n , при яких вектори $\vec{a} = (15; m; 1)$ і $\vec{b} = (18; 12; n)$ колінеарні.
 а) $m = 10; n = 5/6$; б) $m = 10; n = 1,2$; в) $m = 14,5; n = 1,2$; г) інша відповідь, записати її.
- Обчислити $10^{3 - \lg 2}$.
 а) 2000; б) 500; в) 10; г) інша відповідь, записати її.
- Куги опуклого чотирикутника пропорційні числам 2, 4, 12, 18. Знайти найбільший з них.
 а) 75° ; б) 210° ; в) 180° ; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- Розв'язати рівняння $\sqrt{3} \sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$.
- Обчислити катети прямокутного трикутника, якщо їх відношення дорівнює 20:21, а різниця між радіусами описаного та вписаного кіл дорівнює 17 см.

Білет № 2-В

I рівень

- Види трикутників. Ознаки рівності трикутників.
- Дано вектори $\vec{a} = (1; 0; 2)$ і $\vec{b} = (3; -1; 1)$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ і \vec{b} .
 а) $\cos \varphi = -\frac{1}{7}$; б) $\cos \varphi = -\frac{7}{\sqrt{319}}$; в) $\cos \varphi = \frac{1}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} < (0,81)^{-2x}$.
- а) $x \in \left(-\frac{1}{3}; 3\right)$; б) $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$; в) $x \in (-\infty; 3)$; г) інша відповідь, записати її.
4. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, якщо $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$.
- а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) інша відповідь, записати її.
5. Спростити вираз $\frac{a-36a^{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}}$.
- а) $a^{\frac{1}{3}} + 1$; б) $a^{\frac{1}{3}} - 6$; в) $6 + a^{\frac{2}{3}}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Чи можуть числа $\sqrt{3}, 2, \sqrt{8}$ бути членами (не обов'язково сусідніми) арифметичної прогресії?
2. Навколо кола радіуса r описано прямокутну трапецію, менша із сторін якої дорівнює $1,5r$. Визначити площу трапеції.

Білет № 3-В

I рівень

1. Похідна функції. Механічний та геометричний зміст похідної.
2. Знайти значення виразу $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.
- а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) інша відповідь, записати її.
3. При якому значенні x вектори $\vec{a} = (6; 0; 12)$ і $\vec{b} = (x; 13; 4)$ перпендикулярні?
- а) 8; б) 106; в) -8; г) інша відповідь, записати її.

4. Знайти 20% від числа $\left(3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}\right)$.
- а) $2\frac{1}{6}$; б) $1\frac{13}{36}$; в) $3\frac{1}{6}$; г) інша відповідь, записати її.
5. Обчислити $\operatorname{tg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 288^\circ + \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$.
- а) -2; б) 0; в) 3; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати рівняння $\frac{3 - \log_3(5x+2)}{\log_3(x-4)} = 1$.
2. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів дорівнює 6 см. Обчислити периметр трикутника.

Білет № 4-В

I рівень

1. Логарифми та їх властивості. Основна логарифмічна тотожність.
2. Знайти суму перших п'яти членів арифметичної прогресії, якщо $a_3 = 10$, а різниця $d = 3$.
- а) 30; б) 50; в) 45; г) інша відповідь, записати її.
3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.
- а) $x \in (-2; 0)$; б) $x \in (1; \infty)$; в) $x \in (-5; \infty)$; г) інша відповідь, записати її.
4. Обчислити $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.
- а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.
5. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \geq 4^{x-1}$.

- а) $x \in [1; 4)$; б) $x \in [-4; 1]$; в) $x \in [-1; 4]$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- Розв'язати рівняння $1 + \sin x = (\sin 2x + \cos 2x)^2$.
- Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ і $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

Білет № 5-В

I рівень

- Коло і круг, їх основні елементи. Пропорційні відрізки у колі.
- Розв'язати нерівність $\frac{x^2 - 9}{\log_{0,5}(x^2 + 4)} \geq 0$.
а) $x \in (-\infty; 3]$; б) $x \in [-3; 3]$; в) $x \in [-3; \infty)$; г) інша відповідь, записати її.
- Знайти площу прямокутника, якщо одна з його сторін дорівнює 6 см, а радіус описаного навколо нього кола дорівнює 5 см.
а) $25\pi^2$; б) $48\pi^2$; в) $24\pi^2$; г) інша відповідь, записати її.
- Знати число, 3% від якого дорівнює $3\frac{2}{7} - \frac{3}{14} : \frac{1}{6}$.
а) $30\frac{1}{3}$; б) $66\frac{2}{3}$; в) $21\frac{1}{6}$; г) інша відповідь, записати її.

- Спростити вираз $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right) \cdot \cos 4\alpha$.
а) $-1,5$; б) 0 ; в) 2 ; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x$.
- Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 + 1$, якщо ця дотична проходить через точку $A(1; 1)$.

Білет № 6-В

I рівень

- Похідна суми, добутку і частки двох функцій.
- Обчислити $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.
а) 22; б) 19; в) 31; г) інша відповідь, записати її.
- Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-2; 2]$.
а) $y_{\text{найм}} = 0$; $y_{\text{наиб}} = 10$; б) $y_{\text{найм}} = -\frac{14}{3}$; $y_{\text{наиб}} = \frac{2}{3}$;
в) $y_{\text{найм}} = 1$; $y_{\text{наиб}} = \frac{10}{3}$; г) інша відповідь, записати її.
- Розв'язати рівняння $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;
г) інша відповідь, записати її.
- Сторони трикутника дорівнюють $1, 3\sqrt{2}$ і 5. Знайти градусну міру найбільшого з кутів трикутника.
а) 60° ; б) 45° ; в) 135° ; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

- У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, ділить сторону на відрізки 21 см і 30 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону.
- Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

Білет № 7-В

I рівень

- Види трикутників. Ознаки подібності трикутників.
- Обчислити $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Знайти область визначення функції $y = \log_{\frac{1}{5}} \left(\log_6 (17 - x^2) \right)$.

а) $x \in (-\sqrt{17}; \sqrt{17})$; б) $x \in (-4; 4)$; в) $x \in (1; \infty)$;

г) інша відповідь, записати її.

4. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1; 4)$ і $\vec{b} = (5; 3; x)$. При якому значенні x скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$?

а) 3; б) 0; в) $\frac{7}{4}$; г) інша відповідь, записати її.

5. Знайти значення похідної функції $f(x) = (x^2 - x) \cos x$ у точці $x_0 = 0$.

а) -2; б) -1; в) 1; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність $x^2 + |x - 4| + 5x - 3 \leq 0$.

2. У рівнобедреній трапеції, описаній навколо кола, основи дорівнюють 36 см і 10 см. Визначити радіус кола.

Білет № 8-В

I рівень

1. Поняття функції. Способи задання функції. Рівняння дотичної до графіка функції.

2. Знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії, якщо $b_3 = 18$, $q = 3$.

а) 28; б) 80; в) 124; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити $f'(0)$, якщо $f(x) = 5(x+1)^2 \cdot \sqrt[3]{x-1}$.

а) -12; б) -9; в) 6; г) інша відповідь, записати її.

4. Порівняти вирази $N = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ і $M = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$.

а) $N = M$; б) $N > M$; в) $N < M$; г) порівняти неможливо.

5. У трикутнику ABC $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; 4)$, $C(0; 1; 3)$. Чи перпендикулярні вектори \vec{AB} і \vec{CM} , де M – середина відрізка AB ?
а) так; б) ні; в) визначити неможливо.

II рівень

1. Розкласти на множники $(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) + 2$.

2. Знайти $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\cos \alpha = 0,5$; $\sin \beta = -0,4$;

$$\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right); \beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$$

Білет № 9-В

I рівень

1. Формули площ трикутника, трапеції.

2. Обчислити $\cos^2 240^\circ - \sin^2 240^\circ$.

а) $\sqrt{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Знайти найбільше значення функції $y = 1 + 12x - 3x^2$ на проміжку $[-3; 3]$.

а) 14; б) 13; в) 62; г) інша відповідь, записати її.

4. Довжина дуги кола дорівнює 5 см. Знайти довжину хорди, що стягує цю дугу, якщо довжина кола дорівнює 30 см.

а) $\frac{14}{\pi}$ см; б) 7 см; в) $\frac{15}{\pi}$ см; г) інша відповідь, записати її.

5. Знайти вектор \vec{b} , колінеарний вектору $\vec{a} = (2\sqrt{2}; -1; 4)$, якщо

$$|\vec{b}| = 10.$$

а) $(6\sqrt{2}; -3; 12)$; б) $(4\sqrt{2}; -2; 8)$ або $(-4\sqrt{2}; 2; -8)$;

в) $(-6\sqrt{2}; 3; -12)$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\log_2^2 x^2 - 4 \log_2 x^3 \geq 16$.

2. Скласти рівняння дотичних до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ так, щоб точка дотику x_0 ($x_0 \neq 0$) була одна і та ж сама для обох графіків і щоб ці дотичні були паралельні між собою.

Білет № 10-В

I рівень

1. Ознаки рівності прямокутних трикутників.
2. При яких значеннях x функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+3}}$ більша за 1?
а) $x \in (-2; -3)$; б) $x \in (-\infty; -3)$; в) $x \in (-3; \infty)$;
г) інша відповідь, записати її.
3. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 2x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$.
а) 2; б) 6; в) -4; г) інша відповідь, записати її.
4. Знайти область визначення функції

$$y = \log_3 \frac{x-3}{\sqrt{x^2-4x+3}} + \sqrt{25-x^2}.$$

- а) $x \in (3; \infty)$; б) $x \in (3; 5]$; в) $x \in [-5; 5]$; г) інша відповідь, записати її.
5. Знайти $\cos 2\alpha$, якщо $\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$.
а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.
2. У рівнобедреній трапеції одна основа дорівнює 40 см, інша 24 см. Діагоналі взаємоперпендикулярні. Знайти площу трапеції.

Білет № 11-В

I рівень

1. Арифметична і геометрична прогресії. Формули n -го члена і суми n перших членів.

2. Знайти проміжки зростання функції $f(x) = -x(x-3)^2$.
а) $x \in (-\infty; 1)$; б) $x \in (1; 3)$; в) $x \in (3; \infty)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Обчислити значення виразу $0,1^{\lg\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right)}$.
а) 2,5; б) 0,25; в) 3; г) інша відповідь, записати її.

4. Обчислити значення похідної функції $y = \left(x^2 + \sqrt[3]{x^2}\right)\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$ у точці $x_0 = 1$.
а) -10; б) 5; в) 12; г) інша відповідь, записати її.

5. При якому значенні k довжина вектора $\vec{a} = (-2; 2; 4k)$ вдвічі менша довжини вектора $\vec{b} = (3; 3k; 0)$?
а) $k = 2$; б) $k \in \emptyset$; в) $k = -3$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розкласти на множники вираз $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
2. Довести тотожність $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Білет № 12-В

I рівень

1. Знаходження екстремумів функції.
2. Розв'язати нерівність $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \geq 0$.
а) $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; в) $x \in \left[-\frac{1}{2}; \infty\right)$; г) інша відповідь, записати її.
3. У точці x_0 до графіка функції $y = x^2 - 7x + 3$ проведено дотичну, паралельну прямій $y = -5x + 3$. Знайти x_0 .
а) 1; б) -6; в) -1/2; г) інша відповідь, записати її.

4. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (2; 3; -4)$ і $\vec{b} = (m; -6; 8)$ колінеарні?
а) $m = 2$; б) $m = -4$; в) $m = 5$; г) інша відповідь, записати її.
5. Обчислити $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$.
а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{16}$; в) $\frac{1}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Розв'язати рівняння $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$.
2. У трикутнику з основою 15 см проведено відрізок паралельно основі. Площа здобутої трапеції становить 75% від площі трикутника. Знайти довжину цього відрізка.

Білет № 13-В

I рівень

1. Показникова функція $y = a^x$, її властивості та графік.
2. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.
а) 2; б) 4; в) $4 - \sqrt{15}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Від точки A відкладено вектор $\vec{AB} = \vec{a}$. Знайти координати точки B , якщо $A(-1; 5; 0)$, $\vec{a} = (1; -3; 0)$.
а) $(2; 2; 0)$; б) $(0; 8; 0)$; в) $(0; 2; 0)$; г) інша відповідь, записати її.
4. Знайти похідну функції $y = \cos 3x \cos x$ та обчислити її значення, якщо $x = -\frac{\pi}{2}$.
а) 3; б) 0; в) -2; г) інша відповідь, записати її.
5. Розв'язати нерівність $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12,25^{\frac{3x+1}{2}} \geq 1$.
а) $x > -1$; б) $x \leq 11$; в) $1 < x < 3$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Спростити вираз $\sqrt{\frac{4}{x} + \frac{1}{4x^{-1}}} - 2 + \sqrt{\frac{1}{4x^{-1}} + \frac{2^{-2}}{x} + \frac{1}{2}}$.
2. Після ділення деякого двозначного числа на суму його цифр в частці отримали 7, а в залишку 5. Після ділення цього ж числа на добуток його цифр в частці отримали 3, а в залишку 11. Знайти це двозначне число.

Білет № 14-В

I рівень

1. Формула коренів квадратного рівняння. Розкладання квадратного тричлена на множники.
2. Обчислити $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.
а) $2 + \sqrt{3}$; б) 6; в) $3 - \sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Знайти значення похідної функції $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{12}$.
а) -2; б) 1; в) 3; г) інша відповідь, записати її.
4. Розв'язати нерівність $\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$.
а) $x \in (-2; \infty)$; б) $x \in [-2; -1]$; в) $x \in [-2; -1]$; г) інша відповідь, записати її.
5. Дано вектори $\vec{a} = (0; m; 5)$ і $\vec{b} = (-3; -2; 1)$. При якому значенні m скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$?
а) 5; б) 4; в) 0; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Побудувати графік функції $y = \frac{\sqrt{(x+1)^2} \cdot (|x|+1)}{(\sqrt{x+1})^2}$.
2. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 6 см. Знайти радіуси кіл, вписаного в трапецію і описаного навколо неї, якщо відомо, що ці кола існують.

Білет № 15-В

I рівень

1. Формули додавання аргументів тригонометричних функцій.
2. Сферу задано рівнянням $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$. Знайти об'єм кулі, обмеженої цією сферою.
а) 108π ; б) $\frac{4}{3}\pi$; в) 36π ; г) інша відповідь, записати її.
3. Знайти, при яких значеннях x послідовність чисел $\log_6 \frac{1}{x}$, $\log_6 x$, $\log_6 8$ є арифметичною прогресією.
а) 3; б) 6; в) 2; г) інша відповідь, записати її.
4. Знайти $\cos^2 2\alpha$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
а) 0,8; б) 0,36; в) 0,42; г) інша відповідь, записати її.
5. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де \vec{p} і \vec{q} – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.
а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

II рівень

1. Визначити, при яких значеннях a, b, c виконується рівність

$$\frac{x^2 + 5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. Розв'язати нерівність $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

5. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ
(ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ)

Білет № 1-В

II рівень

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3} \sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$.

Розв'язання.

Використаємо формулу зведення

$$\sin(x + 45^\circ) = \cos(90^\circ - x - 45^\circ) = \cos(45^\circ - x) = \cos(x - 45^\circ)$$

і перепишемо умову задачі $\sqrt{3} \sin(x - 45^\circ) + \cos(x - 45^\circ) = \sqrt{2}$.

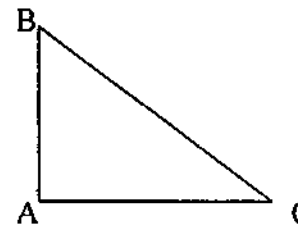
Вводимо допоміжний кут

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x - 45^\circ) + \frac{1}{2} \cos(x - 45^\circ) \right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $X = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \pi k \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. Обчислити катети прямокутного трикутника, якщо їх відношення дорівнює 20:21, а різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 17 см.



Дано:

$$\Delta ABC, \quad \angle A = 90^\circ,$$

$$AB : AC = 20 : 21,$$

$$R - r = 17 \text{ см.}$$

Знайти AB і AC

Розв'язання.

Позначимо $AB = 20x$, $AC = 21x$. За теоремою Піфагора маємо

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 29x. \text{ Оскільки } R = \frac{BC}{2}, \text{ дістаємо } R = \frac{29x}{2}.$$

Визначимо далі r через x . Для цього використаємо формули обчислення площі $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = p \cdot r, \quad p = \frac{AB + BC + AC}{2}, \quad \text{звідки } r = 6x.$$

$$\text{Складаємо рівняння } \frac{29x}{2} - 6x = 17 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (см).}$$

Дістаємо $AB = 40$ см, $AC = 42$ см.

Відповідь: 40 см, 42 см.

Білет № 2-В

II рівень

1. Чи можуть числа $\sqrt{3}; 2; \sqrt{8}$ бути членами (не обов'язково сусідніми) арифметичної прогресії?

Розв'язання.

Припустимо, що можуть. Нехай $a_k = \sqrt{3}$, $a_p = 2$, $a_m = \sqrt{8}$.

Використаємо формулу загального члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} = a_1 + (k-1)d \\ 2 = a_1 + (p-1)d \\ \sqrt{8} = a_1 + (m-1)d \end{cases}$$

З отриманої системи виключаємо a_1

$$\begin{cases} \sqrt{3} - 2 = (k-p)d, \\ \sqrt{8} - 2 = (m-p)d. \end{cases}$$

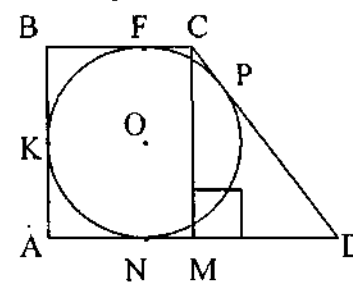
Далі виключаємо d

$$\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{8} - 2} = \frac{k-p}{m-p}.$$

В отриманій рівності зліва маємо ірраціональне число, а справа – раціональне число. Тобто рівність не виконується.

Відповідь: ні.

2. Навколо кола радіуса r описано прямокутну трапецію, менша із сторін якої дорівнює $1,5r$. Визначити площу трапеції.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$BC \parallel AD$, $BC = 1,5r$, $AB = 2r$.

Знайти S_{ABCD}

Розв'язання.

Використовуємо властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола і умову задачі.

Дістаємо: $BK = BF = AK = AN = r$,

$FC = CP = 0,5r$, $PD = ND = x$. Проводимо $CM \perp AD$, тоді $NM = AM - AN = 0,5r$; $MD = ND - NM = x - 0,5r$.

$\triangle CMD$ – прямокутний, $\angle CMD = 90^\circ$. За теоремою Піфагора

$$\text{знаходимо } CD^2 = CM^2 + MD^2 \Leftrightarrow \left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = 4r^2 + \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2r.$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} r^2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{9}{2} r^2 \text{ см}^2.$$

Білет № 3-В

II рівень

1. Розв'язати рівняння $\frac{3 - \log_3(5x+2)}{\log_3(x-4)} = 1$.

Розв'язання.

Білет № 4-В

II рівень

1. Розв'язати рівняння $1 + \sin x = (\sin 2x + \cos 2x)^2$.

Розв'язання.

$$1 + \sin x = (\sin 2x + \cos 2x)^2 \Leftrightarrow 1 + \sin x = \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x.$$

Використовуємо тригонометричну одиницю і формулу синуса подвійного кута, дістаємо $1 + \sin x = 1 + \sin 4x \Leftrightarrow \sin 4x - \sin x = 0$. Перетворюємо різницю синусів у добуток.

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \pi k \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Відповідь: $X = \left\{ \frac{2}{3} \pi k; \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ і $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

Розв'язання.

Знаходимо вектори – діагоналі: $\vec{a} + \vec{b} = (2; -1; 1)$; $\vec{a} - \vec{b} = (2; 3; -1)$.

Далі за формулою знаходження косинуса кута між двома векторами

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

знаходимо косинус кута між діагоналями паралелограма:

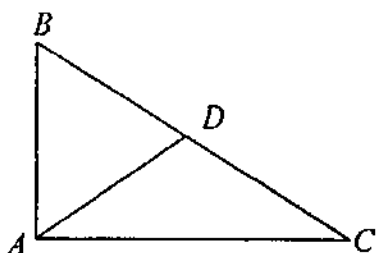
$$D(f): \begin{cases} 5x+2 > 0 \\ x-4 > 0 \\ x-4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \neq 5. \end{cases}$$

$$3 - \log_3(5x+2) = \log_3(x-4) \Leftrightarrow 3 = \log_3(x-4) + \log_3(5x+2) \Leftrightarrow 3 = \log_3(x-4) \cdot (5x+2) \Leftrightarrow 27 = (x-4) \cdot (5x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 18x - 35 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \in D(f) \\ x_2 = -\frac{7}{5} \notin D(f) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Відповідь: $x \in \emptyset$.

2. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів дорівнює 6 см. Обчислити периметр трикутника.



Дано:
 $\Delta ABC, \angle A = 90^\circ, BD = DC,$
 $AD = 15 \text{ см}, AC - AB = 6 \text{ см}.$

Знайти $P_{\Delta ABC}$.

Розв'язання.

$AD = \frac{1}{2} BC$, звідси $BC = 30$ см. Позначимо $AC = x$ см,

$AB = y$ см. Використовуючи умову і теорему Піфагора складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^2 + y^2 = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ (x - y)^2 + 2xy = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ xy = 432 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 18 \end{cases}$$

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 72$ (см).

Відповідь: 72 см.

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})}{|\bar{a} + \bar{b}| \cdot |\bar{a} - \bar{b}|} = \frac{4 - 3 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = 0, \text{ звідси } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Білет № 5-В

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x$.
Розв'язання.

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 > 4 - 4x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < 0 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 9x - 10 > 0 \\ x > 2 \\ 2x^2 + 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -10) \cup (1; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -10) \cup (1; \infty)$.

2. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 + 1$, якщо ця дотична проходить через точку $A(1; 1)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної має вигляд $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, $(x_0; y_0)$ - точка дотику. Дістаємо

$$y = -x_0^2 + 1 - 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 1 - 2x_0x.$$

Оскільки дотична проходить через точку $A(1; 1)$, то координати точки A задовольняють рівняння дотичної

$$1 = x_0^2 + 1 - 2x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Отримуємо рівняння дотичних:

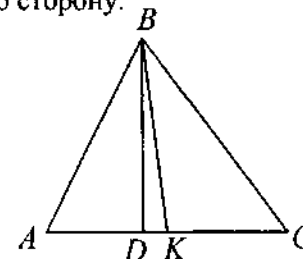
$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 5 - 4x. \end{cases}$$

Відповідь: $y = 1$, $y = 5 - 4x$.

Білет № 6-В

II рівень

1. У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, ділить сторону на відрізки 21 см і 30 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону.



Дано:

$\triangle ABC$, $BD \perp AC$, $BD = 72$ см,

$AD = 21$ см, $DC = 30$ см,

$\angle ABK = \angle KBC$.

Знайти AK і KC .

Розв'язання.

Використаємо властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}.$$

З $\triangle ABD$ і $\triangle DBC$ за теоремою Піфагора знаходимо AB і BC :

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 75 \text{ (см)}$$

$$BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = 78 \text{ (см)}.$$

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{AK}{KC} = \frac{25}{26} \\ AK + KC = 51, \end{cases}$$

звідси маємо $AK = 25$ см, $KC = 26$ см.

Відповідь: 25 см, 26 см.

2. Розв'язати рівняння $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 0$.

Розв'язання.

$$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння отриманої сукупності однорідне. Маємо:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь: $X = \left\{ \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Білет № 7-В

II рівень

1. Розв'язати нерівність $x^2 + |x - 4| + 5x - 3 \leq 0$.

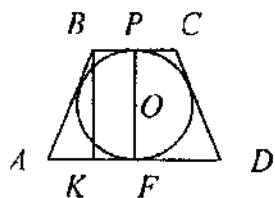
Розв'язання.

За означенням абсолютної величини дістаємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x^2 + 6x - 7 \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4 < 0, \\ x^2 + 4x + 1 \leq 0. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}].$$

Відповідь: $x \in [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}]$.

2. У рівнобедреній трапеції, описаній навколо кола, основи дорівнюють 36 см і 10 см. Визначити радіус кола.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$BC \parallel AD, AB = CD,$

$BC = 10 \text{ см}, AD = 36 \text{ см},$

Знайти r

Розв'язання.

Використаємо властивість сторін описаного чотирикутника, дістаємо

$$AB = \frac{BC + AD}{2} = 23 \text{ (см)}.$$

Проводимо $BK \perp AD, PF \perp AD$ (радіус, проведений в точку дотику перпендикулярний до дотичної). $BK = PF = 2r$. Оскільки $ABCD$ – рівнобедрена трапеція, то маємо:

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = 13 \text{ (см)}.$$

У $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора маємо

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 6\sqrt{10} \text{ (см)}, \text{ звідси } r = 3\sqrt{10} \text{ см}.$$

Відповідь: $r = 3\sqrt{10}$ см.

Білет № 8-В

II рівень

1. Розкласти на множники $(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) + 2$.

Розв'язання.

Позначимо $x^2 + 2x = t$ Одержуємо $t^2 + 3t + 2 = (t + 2)(t + 1) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 2x + 2)(x + 1)^2$.

Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 2$ має $D < 0$, тобто дійсних коренів не має.

Відповідь: $(x^2 + 2x + 2)(x + 1)^2$.

2. Знайти $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\cos \alpha = 0,5; \sin \beta = -0,4;$

$$\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi \right); \beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right).$$

Розв'язання.

Використаємо формулу синуса різниці двох аргументів

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Оскільки $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, то $\sin \alpha < 0$ і з тригонометричної одиниці

$$\text{дістаємо } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Оскільки $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, то $\cos \beta < 0$ і з тригонометричної одиниці

$$\text{дістаємо } \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Остаточно маємо } \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{63} + 2}{10} = \\ &= \frac{3\sqrt{7} + 2}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3\sqrt{7} + 2}{10}.$$

Білет № 9-В

II рівень

1. Розв'язати нерівність $\log_2^2 x^2 - 4 \log_2 x^3 \geq 16$.

Розв'язання.

Використаємо властивість логарифмів $\log_a N^k = k \cdot \log_a N$ ($a > 0, a \neq 1, N > 0$) і перепишемо дану нерівність

$$4 \log_2^2 x - 12 \log_2 x \geq 16.$$

Робимо заміну $\log_2 x = t$. Дістаємо нерівність

$$t^2 - 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [16; \infty).$$

2. Скласти рівняння дотичних до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ так, щоб точка дотику x_0 ($x_0 \neq 0$) була одна і та ж сама для обох графіків і щоб ці дотичні були паралельні між собою.

Розв'язання.

Рівняння дотичної має вигляд $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, (x_0, y_0) – точка дотику.

$$\text{Дістаємо } y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \quad y = x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0).$$

Оскільки ці дотичні паралельні між собою, то їх кутові коефіцієнти

$$\text{рівні між собою, тобто } 2x_0 = 3x_0^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Таким чином шукані дотичні мають вигляд

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}; \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}; \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}.$$

6. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ, РЕКОМЕНДОВАНА МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЛЯ ВСТУПНИКІВ ДО ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Програма з математики до вищих навчальних закладів складається з трьох розділів.

Перший з них є переліком основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теореми).

У другому розділі вказано теореми, які необхідно вміти доводити.

У третьому розділі перелічені основні математичні вміння і навички, якими повинен володіти вступник.

І. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ І ФАКТИ

Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа (N). Прості та складені числа. Дільник, кратне. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне.
2. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Цілі числа (Z). Раціональні числа (Q). Їх додавання, віднімання, множення і ділення. Порівняння раціональних чисел.
4. Дійсні числа (R), їх запис у вигляді десяткового дробу.
5. Зображення чисел на прямій. Модуль числа, його геометричний зміст.
6. Числові вирази. Вирази із змінними.
7. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь та його властивості.
8. Логарифми, їх властивості.
9. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.
10. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена).
11. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції. Функція обернена до даної.

12. Графік функції. Зростання і спадання функції, періодичність, парність, непарність функції.
13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма). Достатня умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
14. Означення й основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневий $y = ax^n$ ($n \in Z$), показниковий $y = ax$, $a > 0$, логарифмічної $y = \log_a x$, тригонометричних: $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.
15. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.
16. Нерівності. Розв'язування нерівностей, Рівносильні нерівності.
17. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь. Текстові задачі.
18. Арифметична і геометрична прогресії. Формули n -го члена і суми n -перших членів прогресії.
19. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули).
20. Перетворення в добуток сум $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \cos \beta$.
21. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст.
22. Похідні суми, добутку, частки та функцій: $y = kx + b$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, де $n \in N$.
23. Первісна та визначений інтеграл.
24. Елементи комбінаторики.
25. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики.

Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Відношення площ подібних фігур. Рівність і подібність геометричних фігур.
2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.
3. Вектори. Операції над векторами. Скалярний добуток векторів.

4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.
5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
6. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція, їх основні властивості.
7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола, Сектор, сегмент.
8. Центральні і вписані кути, їх властивості.
9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції.
10. Довжина кола та довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
11. Площина. Паралельні площини та площини, що перетинаються.
12. Паралельність прямої і площини.
13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.
14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма і похила призма; піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіеди, їх види.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.
17. Формули площ поверхонь і об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса.
18. Формули об'єму кулі та її частин і формула площі поверхні сфери.

II. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ І ТЕОРЕМИ

Алгебра і початки аналізу

1. Функція $y = ax + b$, її властивості, графік.
2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості, графік.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості, графік.
4. Формула коренів квадратного рівняння.

5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
6. Властивості числових нерівностей.
7. Логарифм добутку, степеня, частки.
8. Функції $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, їх означення, властивості, графіки.
9. Розв'язки рівнянь $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
10. Формули зведення.
11. Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу.
12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
13. Похідна суми, добутку і частки двох функцій, степеневі функції.
14. Рівняння дотичної до графіка функції.
15. Похідні тригонометричних функцій, показникової і логарифмічної функцій.
16. Дослідження функцій за допомогою похідної. Побудова графіків функцій.
17. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об'ємів.

Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Ознаки рівності, подібності трикутників.
11. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
12. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
13. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
14. Ознаки паралельності прямої й площини.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Передмова | 3 |
| 1. Програма з математики для проведення співбесіди із вступниками в ІДП НАУ | 4 |
| 2. Зразки білетів з математики для проведення співбесіди із вступниками на підготовчі курси | 6 |
| 3. Зразки виконання завдань. Підготовчі курси | 18 |
| 4. Зразки білетів з математики для проведення співбесіди із вступниками на підготовче відділення | 31 |
| 5. Зразки виконання завдань. Підготовче відділення | 43 |
| 6. Програма з математики, рекомендована Міністерством освіти і науки України для вступників до вищих навчальних закладів | 54 |
| Список літератури | 59 |