МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНСТИТУТ ДОУНІВЕРСИТЕТСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ В СИСТЕМІ ОСВІТИ: «ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД – ДОУНІВЕРСИТЕТСЬКА ПІДГОТОВКА – ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД»

Матеріали
ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції
25 травня 2016 року

КИЇВ 2016

УДК 371.2:371.8:378.4(063)
ББК Ч 448.оя431+Ч420я431
А437

Актуальні проблеми в системі освіти: загальноосвітній навчальний заклад – доуніверситетська підготовка – вищий навчальний заклад : зб. наук. праць матеріалів ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції, 25 травня 2016 р., м. Київ, Національний авіаційний університет / наук. ред. Н. П. Муранова. – К : – НАУ, 2016. – 296 с.

До наукового збірника увійшли статті та тези доповідей учасників ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми в системі освіти: загальноосвітній навчальний заклад – доуніверситетська підготовка – вищий навчальний заклад (25 травня 2016 року, м. Київ), що проводилася на базі кафедри базових і спеціальних дисциплін Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету спільно з науковими установами та навчальними закладами освіти України. Адресований науковцям, аспірантам, викладачам ЗНЗ і ВНЗ та працівникам в галузі освіти.

Рекомендовано до друку Науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 6 від 26.09.2016 р.).

УДК 512.12 **Тарасюк Василь, Муранов Олександр, м. Київ**

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ» З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА»

У статті розглядаються окремі методи розв'язку ірраціональних нерівностей на підготовчих курсах в системі доуніверситетської підготовки з метою адаптації абітурієнтів до сприйняття математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.

Ключові слова: *математика, математичні дисципліни, ірраціональні нерівності, методи розв'язку, підготовчі курси.*

This deals with some irrational methods of solving inequalities at the preparatory courses in the system of pre-university training in order to facilitate the pupils' adaptation to assimilation of mathematical disciplines in university.

Keywords: *mathematics, mathematical disciplines, irrational inequalities, solution methods, preparatory courses.*

Ірраціональні нерівності – це нерівності, у яких невідомі величини знаходяться під знаком кореня ($\sqrt[m]{\ }$), який також інколи називають радикалом, де m набуває значень ≥ 2. Звичайний спосіб знаходження розв'язку таких нерівностей полягає в тому, що необхідно позбутись ірраціональності і тоді нерівність зводиться до раціональної. Позбуваються радикалів шляхом піднесення обох частин нерівності до однакового степеня або у більш складних випадках застосовуючи штучні методи (введення нових змінних, заміна тощо). При цьому необхідно уважно стежити за тим, щоб при цих перетвореннях утворювались нерівності рівносильні початковій.

Перетворення, що приводять до рівносильних нерівностей, сформульовані у вигляді теорем, де функції $f(x), g(x), \gamma(x)$ можуть мати і вигляд ірраціональних виразів.

Теорема 1. Якщо до обох частин нерівності додати одну і ту ж функцію $\gamma(x)$, що визначена при всіх значеннях x із області визначення даної нерівності, і при цьому залишити без зміни знак, то одержана нерівність рівносильна даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ *і* $f(x)+\gamma(x) > g(x)+\gamma(x)$ *– рівносильні.*

Теорема 2. Якщо обидві частини нерівності помножити чи поділити на одну і ту ж функцію $\gamma(x)$, яка при всіх значеннях x із області визначення даної нерівності набуває лише додатного значення, і при цьому залишити без зміни знак нерівності, то одержана нерівність рівносильна даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ *і* $f(x)\cdot\gamma(x) > g(x)\cdot\gamma(x)$ *– рівносильні.*

Теорема 3. Якщо обидві частини нерівності помножити чи поділити на одну і ту ж функцію $\gamma(x)$, що при всіх значеннях x із області визначення даної нерівності набуває від'ємного значення, і при цьому замінити на протилежний знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Нерівності $f(x) > g(x)$ *і* $f(x)\cdot\gamma(x) < g(x)\cdot\gamma(x)$ *– рівносильні, якщо* $\gamma(x) < 0$.

Теорема 4. Нехай дано нерівність $f(x) > g(x)$, причому $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$ при всіх x із області визначення нерівності. Якщо обидві частини нерівності піднести до одного і того ж натурального степеня, то нерівність $\left(f(x)\right)^n > \left(g(x)\right)^n$ – рівносильна даній.

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж прийоми, що і при розв'язуванні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж степеня, введення нових (допоміжних) змінних і т. д.

Здійснювати розв'язання можна дотримуючись, наприклад, наступного плану: 1) знайти область визначення даної нерівності; 2) користуючись теоремами про рівносильність нерівностей, розв'язати дану нерівність; 3) відібрати із знайдених розв'язків значення змінної, які належать області визначення заданої нерівності.

Слід звернути увагу на те, що піднесення обох частин нерівності до непарного степеня із збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням.

Отже, нерівність виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x)$, де n – деяке натуральне число, а символ $\vee$ позначає один із знаків <, >, ≤, ≥, рівносильна нерівності $f(x) \vee \left(g(x)\right)^{2n+1}$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x} > x$.

$$\sqrt[3]{2-x} > x \quad \Leftrightarrow \quad 2-x > x^3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3-x+2>0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3+x-2<0.$$

$x=1$ – корінь відповідного рівняння $x^3+x-2=0$. Тому початковий вираз розкладемо на множники $(x-1)(x^2+x+2)<0$ і застосуємо метод інтервалів. Так як для квадратичного виразу $D<0, a=1>0$, то його значення завжди додатні і початкова нерівність зведеться до $x-1<0$, звідки $x<1$.

Відповідь. $x\in(-\infty;1)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x-5}>x-2$.

Ця нерівність рівносильна нерівності $x^3-3x^2+2x-5>(x-2)^3$.

$$x^3-3x^2+2x-5>x^3-6x^2+12x-8;$$

$$3x^2-10x+3>0;$$

$$\frac{D}{4}=25-9=16:$$

$$x_1=3; x_2=\frac{1}{3}.$$

Множина розв'язків нерівності: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(3;\infty)$.

Відповідь. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(3;\infty)$.

Відшукання розв'язків для таких нерівностей непарного степеня не становить великих труднощів, бо, по-перше, ніяких обмежень по знаку на підкореневий вираз немає, і, по-друге, тут використовується простий і зрозумілий шаблон розв'язку: позбуваємось ірраціональності шляхом піднесення обох частин нерівності до найбільшого степеня і далі вже маємо раціональну нерівність.

Розглянемо нерівність $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$. Досить часто ті, хто навчився думати і діяти тільки «за шаблоном», позбувається ірраціональності шляхом піднесення обох частин нерівності до степеня *2n* і вважає, що отриманий результат і буде шуканим розв'язком. Так як ліва частина цієї нерівності невід'ємна, то усі значення змінної *x* знаходимо із системи:

$$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)\geq 0, \\ f(x)>\left(g(x)\right)^{2n}. \end{cases}$$

Нерівність $f(x)\geq 0$ можна виключити, оскільки решта двох гарантують виконання цієї умови.

Але якщо змінна *x* набуває таких значень з області визначення, при яких $g(x)<0$, то всі ці значення змінної також будуть розв'язками даної нерівності, за умови, що вони входять до області визначення ($f(x)\geq 0$). Усі ці значення змінної знаходяться із системи:

$$\begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$$

Отже, нерівність $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$ рівносильна сукупності двох систем раціональних нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)>\left(g(x)\right)^{2n}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

$$\sqrt{x^2-4x} > x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \ge 0, \\ \left(\sqrt{x^2-4x}\right)^2 > (x-3)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2-4x \ge 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Із першої системи $x > 4,5$, а з другої $x \le 0$. Отже $x \in (-\infty; 0] \cup (4,5; \infty)$.

Відповідь: $(-\infty; 0] \cup (4,5; \infty)$.

Вміння розв'язувати ірраціональні нерівності є важливим як в шкільному курсі математики, так і в процесі подальшого навчання. І якщо більшість слухачів теоретично знають, що для розв'язку таких нерівностей треба позбутись ірраціональності, то застосування цих знань на практиці досить часто викликає труднощі. Особливо це стосується більш складних нерівностей нестрогого виду (які пов'язані між собою знаками $\ge$ або $\le$).

Значно більший інтерес становлять нерівності виду $f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)} \ge 0$ $\left(f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)} \le 0\right)$ та $\dfrac{\sqrt[2n]{g(x)}}{f(x)} \ge 0$ $\left(\dfrac{\sqrt[2n]{g(x)}}{f(x)} \le 0\right)$, для яких розв'язок може бути не зовсім простий і містити «підводні камені».

Приклад 4. Розв'язати нерівність $(x-10)\sqrt{x-2} \le 0$.

При розв'язку таких нерівностей починаємо міркування таким чином: так як корінь парного степеня завжди $\sqrt{x-2} \ge 0$ (при $x \ge 2$), то початкова нерівність виконується при $x-10 \le 0$. Одержуємо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2, \\ x \le 10; \end{cases} \\ x-2 = 0; \end{array}\right.$$

Відповідь. $[2;10]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $(x-3)\sqrt{x^2-6x+8} \ge 0$.

У першу чергу розглядаємо корінь: $\sqrt{x^2-6x+8} \ge 0$ на всій області визначення, тобто при $x \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$. Тому, нерівність виконується при $x-3 \ge 0$ або $x \ge 3$. Якщо знайти переріз цих розв'язків, то отримаємо $x \in [4; \infty)$. Але помилкою буде вважати отримане значення змінної остаточною відповіддю. Бо якраз тут і є ще один не зовсім очевидний «шаблонний» розв'язок. Якщо розглянути випадок $\sqrt{x^2-6x+8} = 0$, тобто коли $x_1 = 2, x_2 = 4$, то знак першого множника вже не відіграє жодної ролі – головне, щоб він існував, бо він буде множитись на нуль і нерівність буде виконуватись. Тому, виходячи із цих міркувань, отримаємо ще один розв'язок, коли $x = 2$.

Одержимо: $x \in \{2\} \cup [4; \infty)$.

Відповідь. $\{2\} \cup [4; \infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{x^2-10x+9}}{x-6} \le 0$.

Розглядаємо корінь $\sqrt{x^2-10x+9} \ge 0$, звідки отримаємо розв'язок $x \in (-\infty;1] \cup [9;\infty)$. Дана початкова нерівність буде мати розв'язок, якщо $x-6 \le 0$, звідки $x \le 6$. Отже, перерізом даних проміжків буде $x \in (-\infty;1]$. Необхідно перевірити, чи буде виконуватись дана нерівність за умови $\sqrt{x^2-10x+9} = 0$, звідки $x_1 = 1, x_2 = 9$. Так як перше значення вже входить у попередній проміжок, то беремо тільки значення $x = 9$, при якому нерівність теж виконується. Тому остаточним розв'язком буде така множина: $x \in (-\infty;1] \cup \{9\}$

Відповідь. $(-\infty;1] \cup \{9\}$.

Розв'язки наведених нерівностей можна записати в загальному вигляді:

$$f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)} \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \vee 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ x \in D(f). \end{cases} \end{array}\right.$$

Тут символ $\vee$ позначає один із знаків ≤, ≥. І для іншого виду нерівностей [1, с.51]:

$$\frac{\sqrt[2n]{g(x)}}{f(x)} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\frac{\sqrt[2n]{g(x)}}{f(x)} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, можемо зробити наступний висновок: розв'язуванню ірраціональних нерівностей необхідно приділяти значно більшу увагу як в шкільному курсі з математики, так і при підготовці до здачі зовнішнього незалежного оцінювання.

Література

1. Математика. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи : практикум / уклад. : Н. П. Муранова, Л. А. Харченко, Г. В. Шевченко, О. С. Муранов. – К. : НАУ, 2011. – 96 с.