Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Кіровоградська льотна академія
Національного авіаційного університету

Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції

«Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем»

15-16 листопада

Кіровоград, 2012

УДК 531.011: 629.114

В.Г. Хребет, к.ф.-м.н., доцент;
В.С. Сырых, ст. IV курса, АТР,
Государственное высшее учебное заведение
“Донецкий национальный технический университет”
Горловский автомобильно- дорожный институт

К чувствительности транспортных систем

Чувствительность транспортных систем к направлению движения может быть продемонстрирована на примере одной неголономной модели, представленной на рисунке 1 (сани Чаплыгина). Направление движения, при котором ползуны оказываются сзади, оказывается неустойчивым [1]. Анализ устойчивости может быть проведен на основе прямого метода Ляпунова [2].

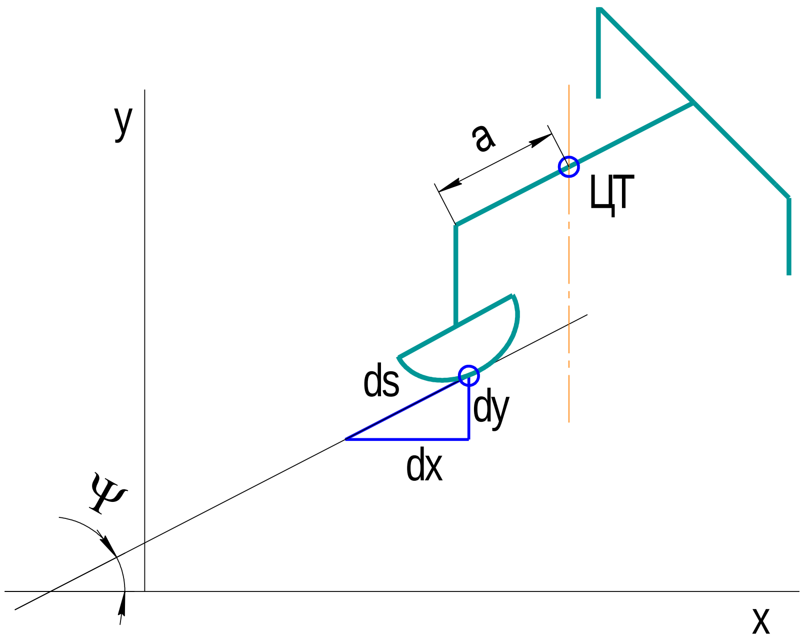


Рис. 1

Положение системы задается координатами точки контакта острия *x*, *y* и курсовым углом Ψ , определяющим положение продольной оси. Центр масс системы лежит на продольной оси на расстоянии *a* от точки контакта лезвия. В данном случае скорость точки лезвия, контактирующей с поверхностью, должна лежать вдоль плоскости лезвия (боковая составляющая тождественно равна нулю), и, следовательно, имеет место соотношение $dy=tg\Psi\times dx$ или $\dot{y}=tg\Psi\times\dot{x}$, которое называется неинтегрируемой кинематической связью (неголономной связью). Эта кинематическая связь не может быть «перенесена» на связь между обобщенными координатами x, *y*, Ψ (т.е. не может быть проинтегрирована) – очевидно, что она может реализовываться в произвольной точке конфигурационного пространства *x*, *y*, Ψ .

При составлении уравнений движения данной системы необходимо учесть наличие, упомянутой неголономной связи и реализующей ее реакции связи ***Y*** (неизвестной силы, препятствующей поперечному проскальзыванию лезвия).

Уравнения движения запишем в подвижной системе координат (жестко связанной с телом) с началом в ЦМ системы (системе Кенига). В неподвижной системе координат II-й закон Ньютона имеет вид $m\bar{a}_C=\Sigma\bar{F}_i$ или $m\dot{\bar{V}}_C=\Sigma\bar{F}_i$ (описывает движение ЦМ системы). В подвижной системе (оси Кенига), вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}$, ускорение ЦМ представляется в виде суммы двух слагаемых – первое слагаемое учитывает изменение модулей проекций скорости ЦМ на оси подвижной системы координат $\{\dot{V},\dot{u}\}$, второе слагаемое учитывает изменение вектора скорости $\bar{V}_C$ за счет вращения вместе с подвижной системой координат $\{-u\omega, V\omega\}$:

$$\frac{d\bar{V}_c}{dt}=\frac{d\tilde{\tilde{\bar{V}}}_c}{dt}+\left[\bar{\omega}\times\bar{V}_c\right];$$
$$m(\dot{V}-\omega u)=0;$$
$$m(\dot{u}+\omega V)=Y;$$
$$J\dot{\omega}=-aY.$$

Поперечная составляющая скорости точки касания лезвия тождественно равна нулю, следовательно, $u-a\omega=0$.

Исключая неизвестную силу реакции Y из уравнений движения (из второго уравнения), и учитывая соотношение, получим два дифференциальных уравнения движения относительно переменных V, ω

$$\dot{V}=a\omega^2;$$
$$(J+ma^2)\dot{\omega}=-amV\omega.$$

Последние допускают интеграл энергии (умножив левую и правую части уравнений соответственно на mV и ω, сложим между собой)

$$m\dot{V}V+(J+ma^2)\dot{\omega}\omega=0,\Rightarrow\tfrac{1}{2}[mV^2+(J+ma^2)\omega^2]=const.$$

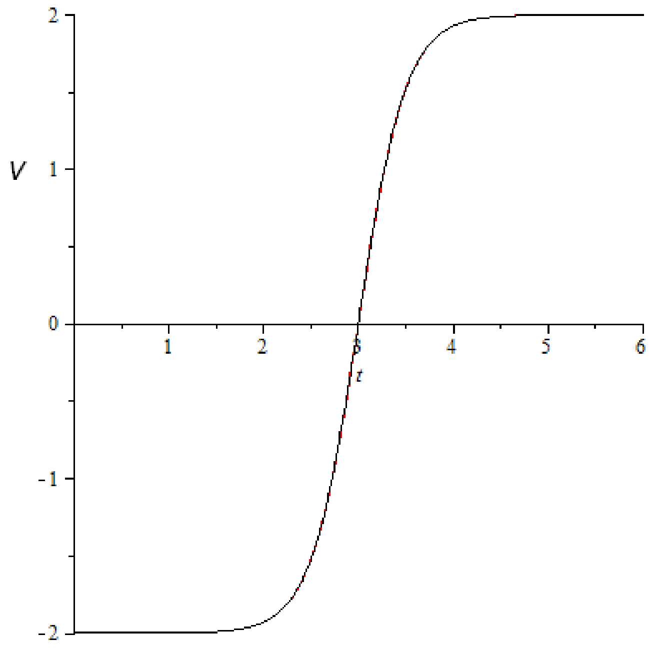
Так как продольная составляющая скорости ЦМ V монотонно растет ($\dot{V}>0$ при $\omega\neq 0$), а кинетическая энергия системы постоянна, то составляющая кинетической энергии вращательного движения с течением времени стремится к нулю, а продольная составляющая скорости ЦМ V стремится к максимальному значению

$$V^2=\sqrt{(mV_0{}^2+(J+ma^2)\,\omega_0{}^2)/m},$$

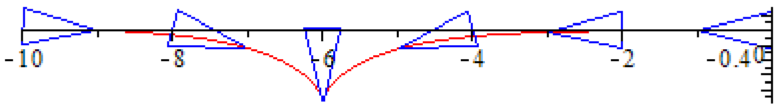
где V_0,ω_0 – начальные значения переменных. Таким образом, приходим к выводу – траектория саней с течением времени стремится к прямолинейному движению вдоль продольной оси ($\omega(t)\to 0,\ u(t)\to 0$).

Сопоставление аналитического и численного решений представлено на рисунке 2, а:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}=2\omega(t)\left(\frac{d\omega(t)}{dt}\right);\quad \frac{d^2V(t)}{dt^2}=-2\big(\omega(t)\big)^2V(t);$$
$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}=-2\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)V(t);\quad \frac{dV(t)}{dt}=-\big(V(t)\big)^2+C_1;$$
$$V(t)=th\big(t\sqrt{C_1}+C_2\sqrt{C_1}\big)\sqrt{C_1}.$$



а)



б)

Рис. 2.

Рисунок 2 , б иллюстрирует изменение направления движения саней Чаплыгина с течением времени.

Список литературы

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем.–М.: Наука, 1967.–250 с.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л; Гостехиздат, 1950.–472 с.