

ISSN 0032-8243

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS

ТОМ
29

8

1993

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том 29 (39), №8, август, 1993

Основан в марте 1955 г.

Выходит ежемесячно

Киев

«Наукова думка»

СОДЕРЖАНИЕ

Няшин Ю.Н., Столбов В.Ю. Оптимальное управление технологическими остаточными напряжениями с целью повышения прочности и устойчивости конструкций	3
Савченко В.Г. Неосесимметричные температурные поля и термонапряженное состояние слоистых тел вращения из изотропных и криволинейно ортотропных материалов	13
Иванов Ц., Савова Р. Устойчивость упругих тел при произвольном нагружении	22
Шевченко Ю.Н., Новиков С.В. Осесимметричная связанная задача термопластичности оболочек вращения при пропорциональном циклическом деформировании	26
Золочевский А.А., Козьмин Ю.С. Решение задач о нелинейном деформировании прямоугольных в плане толстостенных оболочек из материалов, разносопротивляющихся растяжению-сжатию	38
Плеханов А.В. К определению напряженного состояния пологих оболочек с учетом краевых эффектов	46
Галишин А.З. К определению касательных напряжений в осесимметрично нагруженных слоистых оболочках вращения при процессах неупругого неизотермического деформирования	53
Худик В.Н., Повисок В.Н., Федорук М.П. О тепловой деформации биметаллического диска	61
Болкисев А.М. Конечно-элементный анализ деформированного состояния пьезоэлектрического двигателя	69
Калюх Ю.И. Петлеобразование в пространственных буксируемых системах	73
Плахтиенко Н.П. Об определении инерционных, жесткостных и демпфирующих параметров твердого тела, опирающегося на нелинейные амортизаторы	78
Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О предельных периодических движениях маятниковых двухзвенных систем с качением	85
Критика и библиография	
Григоренко Я.М. О книге «Прочность и устойчивость оболочек вращения»	94
Юбилейные даты	
Александр Юльевич Ишлинский (к 80-летию со дня рождения)	95

УДК 534.629.114

© 1993

Л.Г.Лобас, В.Г.Хребет

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКОВЫХ ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Системами с качением называются системы тел, хотя бы одно из которых катится по поверхности другого. Практически важный подкласс систем с качением образуют транспортные колесные машины. Наиболее простой физической моделью колеса является абсолютно твердое, катящееся без проскальзывания по недеформируемому и абсолютно шероховатому основанию; при этом реализуются классические неголономные связи качения [7]. Более сложные с физической точки зрения проблемы возникают при описании качения пневмоколеса. Здесь возможны два подхода: модельный и феноменологический. Преимущественное распространение во всех странах получил феноменологический подход И.Рокара [15].

В [9] дана постановка задачи о двухзвенных маятниковых системах с качением, моделирующих ведомые звенья шарнирно сочлененных транспортных колесных машин, и указаны специфические особенности таких систем типа «маятник». Наряду с двухзвенной можно также рассмотреть и n -звенную маятниковую систему, тем более что ее уравнения движения, по существу, содержатся в [6, 8]; они получаются как частный случай уравнений плоскопараллельного движения $n+1$ -звенной колесной машины, состоящей из ведущего и n ведомых звеньев.

Двухзвенные системы имеют разнообразные практические приложения и почти столь же широкий спектр направлений теоретических исследований. Отметим, в частности, анализ свободного [1, 13] и вынужденного плоскопараллельного движения связки двух твердых тел, соединенных идеальным цилиндрическим шарниром и моделирующих составной спутник в космическом пространстве, двухзвенный манипулятор, элемент дробильной машины. В системе Циглера [14], представляющей собой двойной маятник со следящей силой [16-20], последняя приводит к появлению неконсервативных позиционных сил. Маятниковая система, рассматриваемая ниже, обладает спецификой, состоящей в том, что диссипативные, потенциальные и неконсервативные позиционные силы имеют в ней общее физическое происхождение: они порождены рокаровскими аппроксимациями боковых реакций опорной плоскости.

§ 1. Постановка задачи. Пусть v_1, v_2 — курсовые углы ведомых звеньев, определяющие их абсолютную ориентацию (рис.1,а). Если точка O_1 движется вдоль оси Ox со скоростью $v = \text{const}$, то плоскопараллельное движение связки звеньев описывается уравнениями [9]

$$(J_1 + m_2 l_1^2) \ddot{v}_1 + m_2 d_2 l_1 \ddot{v}_2 \cos(v_2 - v_1) - m_2 d_2 l_1 \dot{v}_2^2 \sin(v_2 - v_1) + L_1 Y_3(\delta_3) + l_1 Y_4(\delta_4) \cos(v_2 - v_1) = 0; \quad (1.1)$$

$$J_2 \ddot{v}_2 + m_2 d_2 l_1 \ddot{v}_1 \cos(v_2 - v_1) + m_2 d_2 l_1 \dot{v}_1^2 \sin(v_2 - v_1) + L_2 Y_4(\delta_4) = 0,$$

где

$$L_i = b_i + d_i \quad (i = 1, 2); \quad l_1 = c_1 + d_1;$$

$$\delta_3 = \arctg \frac{v \sin v_1 + L_1 \dot{v}_1}{v \cos v_1};$$

$$\delta_4 = \arctg \frac{v \sin v_2 + L_2 \dot{v}_2 + l_1 \dot{v}_1 \cos(v_2 - v_1)}{v \cos v_2 - l_1 \dot{v}_1 \sin(v_2 - v_1)}.$$

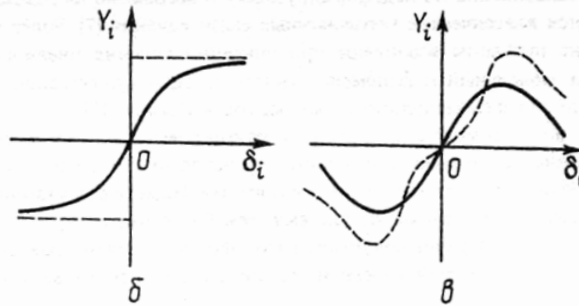
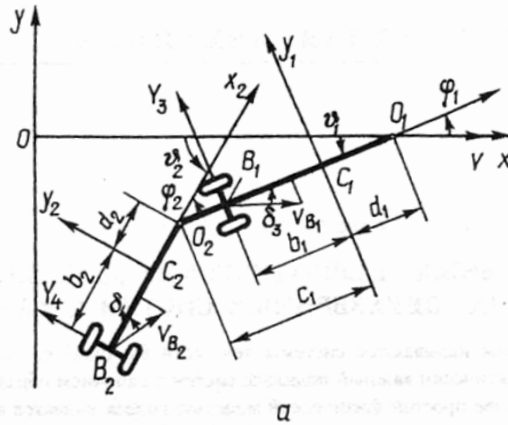


Рис. 1

Зависимости боковых реакций Y_3, Y_4 от углов δ_3, δ_4 бокового увода (по англоязычной терминологии the slip angle — угол скольжения) могут быть как монотонными (рис.1,б), так и с падающими участками (рис.1,е), причем последний случай приводит к многим специфическим явлениям [5]. Примем $Y_3 = k_3 \delta_3 - k_3 \delta_3^3 + \dots$, $Y_4 = k_4 \delta_4 - k_4 \delta_4^3 + \dots$, где k_3, k_4 — приведенные коэффициенты сопротивления боковому уводу (the cornering stiffnesses — угловые жесткости). Обозначив $x = \text{col}(v_1, \dot{v}_1, v_2, \dot{v}_2)$, запишем систему (1.1) в виде

$$\dot{x}_j = \sum_{s=1}^4 a_{js} x_s + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 a_{lmn}^{(j)} x_l x_m x_n + \dots; \quad (1.2)$$

$$a_{lmn}^{(j)} = a_{lnm}^{(j)} = a_{nml}^{(j)} \quad (j=1, \dots, 4).$$

Прямолинейная конфигурация данной связи тел соответствует решению $v_1 = 0, v_2 = 0, \dot{v}_1 = 0, \dot{v}_2 = 0$, устойчивость которого в некритических случаях исследована в [9], а в случае пары чисто мнимых собственных значений матрицы $A = \|a_{js}\|_1^4$ — в [10].

Маятниковые системы с качением являются удачной иллюстрацией n -мерных систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y); \\ x &\in R^{n_1}, \quad y \in R^{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n, \end{aligned}$$

устойчивость нулевого решения которых зависит от связей $F(x, y) \equiv f(x, y) - f(x, 0)$, $G(x, y) \equiv g(x, y) - g(0, y)$ между подсистемами

$$\dot{x} = f(x, 0); \quad \dot{y} = g(0, y).$$

В общем случае эти связи могут играть стабилизирующую или дестабилизирующую роль, а могут быть и нейтральными [8, «Заключение»]. Прямолинейное движение каждого ведомого звена, рассматриваемого как парциальная система, асимптотически устойчиво в малой окрестности начала координат фазовой плоскости, поскольку соответствующее уравнение в вариациях имеет вид

$$J_s \ddot{\varphi}_s + \frac{k_{s+2} L_s^2}{v} \dot{\varphi}_s + k_{s+2} L_s \varphi_s = 0 \quad (s=1,2).$$

Однако связка ведомых звеньев в различных областях пространства параметров может быть как устойчивой, так и неустойчивой [9]. Существенными параметрами, определяющими топологическую структуру фазового пространства системы (1.2), являются v и l_1 . При $v < v_0(l_1^2)$ все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части. Если же $v > v_0(l_1^2)$, то собственные значения таковы: $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i\omega$, $\lambda_{3,4} = \kappa \pm i\omega_1$, $\varepsilon > 0$, $\kappa < 0$. Кривая $v = v_0(l_1^2)$, являющаяся границей области устойчивости на плоскости параметров l_1 и v , и точкам которой отвечают собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\lambda_{3,4} = \kappa(v_0) \pm i\omega_1(v_0)$, $\kappa(v_0) < 0$, состоит как из устойчивых участков, так и из неустойчивых [10]. Их разделяет точка, в которой первый ляпуновский коэффициент

$$\alpha_3(v_0) = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\omega_0} (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}) \Big|_{v=v_0} \quad (1.3)$$

обращается в нуль.

§ 2. Существование, единственность и голоморфность периодического решения системы (1.2) при $v \neq v_0$. Воспользуемся методами Пуанкаре и Ляпунова, индивидуализированными И.Г.Малкиным [12] для квазилинейных автономных систем. В отличие от [12], матрицу A линейной части системы приведем к жордановой нормальной форме не только по критическим переменным, но и по некритическим; такой подход иницирован работой [2], он применялся также с использованием идеи о центральном многообразии в [16 — 20] при анализе дивергентно-флаттерных бифуркаций двойного маятника со следящей силой на конце.

Выбрав в качестве новых единиц измерения величины m_1, d_1, k_3 , представим систему (1.2) в безразмерном виде; чтобы не усложнять записей, знак обезразмеривания параметров связки тел, независимой переменной и искомым функций в дальнейшем опустим. В качестве малого параметра ε при $v \neq v_0$ возьмем действительную часть той пары собственных значений матрицы A , которые являются продолжением по параметру v собственных значений $\pm i\omega_0$. Пусть $X^{(j)}$ — собственные векторы матрицы A , отвечающие ее собственным значениям λ_j , причем $X^{(2)} = \bar{X}^{(1)}$, $X^{(4)} = \bar{X}^{(3)}$. Замена $x = \alpha \xi$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} X_1^{(2)} & \operatorname{Im} X_1^{(2)} & \operatorname{Re} X_1^{(4)} & \operatorname{Im} X_1^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_2^{(2)} & \operatorname{Im} X_2^{(2)} & \operatorname{Re} X_2^{(4)} & \operatorname{Im} X_2^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_3^{(2)} & \operatorname{Im} X_3^{(2)} & \operatorname{Re} X_3^{(4)} & \operatorname{Im} X_3^{(4)} \\ \operatorname{Re} X_4^{(2)} & \operatorname{Im} X_4^{(2)} & \operatorname{Re} X_4^{(4)} & \operatorname{Im} X_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

преобразует систему (1.2) к виду

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon \xi_1 - \omega \xi_2 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(1)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 &= \omega \xi_1 + \varepsilon \xi_2 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(2)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \\ \dot{\xi}_3 &= \kappa \xi_3 - \omega_1 \xi_4 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(3)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \\ \dot{\xi}_4 &= \omega_1 \xi_3 + \kappa \xi_4 + \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 A_{lmn}^{(4)} \xi_l \xi_m \xi_n + \dots; \\ A_{lmn}^{(j)} &= A_{lmm}^{(j)} = A_{nmm}^{(j)} \quad (j=1, \dots, 4).\end{aligned}$$

Введем новый масштаб измерения искомым функций в (2.1): $\xi_k = \sqrt{|\varepsilon|} \eta_k$ ($k=1, \dots, 4$). Окончательные соотношения для нахождения как устойчивого $\Gamma^{4,1}$, так и неустойчивого $\Gamma^{3,2}$ предельных циклов одинаковы при условии замены ε на $-\varepsilon$, поэтому дальше изложение будем вести применительно к случаю $\varepsilon > 0$.

Из (2.1) получаем

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= -\omega \eta_2 + \varepsilon \left(\eta_1 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(1)} \eta_l \eta_m \eta_n \right) + \dots; \\ \dot{\eta}_2 &= \omega \eta_1 + \varepsilon \left(\eta_2 + \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(2)} \eta_l \eta_m \eta_n \right) + \dots; \\ \dot{\eta}_3 &= \kappa \eta_3 - \omega_1 \eta_4 + \varepsilon \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(3)} \eta_l \eta_m \eta_n + \dots; \\ \dot{\eta}_4 &= \omega_1 \eta_3 + \kappa \eta_4 + \varepsilon \sum_{l,m,n} A_{lmn}^{(4)} \eta_l \eta_m \eta_n + \dots;\end{aligned} \tag{2.2}$$

Порождающая система (при $\varepsilon = 0$) имеет семейство периодических решений

$$\eta_1^0 = M_0 \cos \omega t, \quad \eta_2^0 = M_0 \sin \omega t, \quad \eta_3^0 = 0, \quad \eta_4^0 = 0,$$

причем периодическое решение системы (2.2) существует лишь для некоторых определенных значений параметра M_0 . Не уменьшая общности, начальные условия для системы (2.2) возьмем в виде

$$\eta_1|_{t=0} = M_0 + \beta, \quad \eta_2|_{t=0} = 0, \quad \eta_3|_{t=0} = \beta_1, \quad \eta_4|_{t=0} = \beta_2, \tag{2.3}$$

где $\beta = \beta(\varepsilon)$, $\beta_{1,2} = \beta_{1,2}(\varepsilon)$, $\beta(0) = 0$, $\beta_{1,2}(0) = 0$. Периодическое решение системы (2.2) будем искать, используя метод возмущений Пуанкаре

$$\begin{aligned}\eta_1(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) &= M_0 \cos \omega t + B(t)\beta + D(t)\beta_1 + E(t)\beta_2 + \\ &+ \varepsilon C(t) + \varepsilon^2 P_1(t) + \beta^2 P_2(t) + \varepsilon \beta P_3(t) + \dots; \\ \eta_2(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) &= M_0 \sin \omega t + B^*(t)\beta + D^*(t)\beta_1 + E^*(t)\beta_2 + \\ &+ \varepsilon C^*(t) + \varepsilon^2 Q_1(t) + \beta^2 Q_2(t) + \varepsilon \beta Q_3(t) + \dots; \\ \eta_3(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) &= B_1(t)\beta + A_{11}(t)\beta_1 + A_{12}(t)\beta_2 + \varepsilon C_1(t) + \dots; \\ \eta_4(t, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) &= B_2(t)\beta + A_{21}(t)\beta_1 + A_{22}(t)\beta_2 + \varepsilon C_2(t) + \dots.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в дифференциальные уравнения (2.2) и начальные условия (2.3), получаем

$$B = \cos \omega t, B^* = \sin \omega t, D = E = P_2 = D^* = E^* = Q_2 = B_1 = B_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} C(t) &= R_1 \cos \omega t + R_2 \sin \omega t - \frac{t}{2\omega} (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) - \\ &- \frac{1}{8\omega^2} (\gamma_3 \cos 3\omega t + \gamma_4 \sin 3\omega t), C^*(t) = \left(R_1 + \frac{v_1 + w_1}{2\omega} \right) \sin \omega t + \\ &+ \left(\frac{u_1 - r_1}{2\omega} - R_2 \right) \cos \omega t - \frac{t}{2\omega} (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) - \\ &- \frac{1}{8\omega} (u_3 + 3r_3) \cos 3\omega t - \frac{1}{8\omega} (v_3 - 3w_3) \sin 3\omega t; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$A_{11} = e^{\kappa t} \cos \omega_1 t; A_{12} = -e^{\kappa t} \sin \omega_1 t; A_{21} = e^{\kappa t} \sin \omega_1 t; A_{22} = e^{\kappa t} \cos \omega_1 t;$$

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{\kappa t} [- (T_1 + T_2) \cos \omega_1 t + (T_3 + T_4) \sin \omega_1 t] + T_1 \cos \omega t + \\ &+ S_1 \sin \omega t + T_2 \cos 3\omega t + S_2 \sin 3\omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= -e^{\kappa t} [(T_1 + T_2) \sin \omega_1 t + (T_3 + T_4) \cos \omega_1 t] + T_3 \cos \omega t + \\ &+ S_3 \sin \omega t + T_4 \cos 3\omega t + S_4 \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Здесь

$$u_1 = \frac{3}{4} M_0^3 (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)}), v_1 = \frac{3}{4} M_0^3 (A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)}).$$

$$u_3 = \frac{M_0^3}{4} (A_{111}^{(1)} - 3A_{122}^{(1)}), v_3 = \frac{M_0^3}{4} (3A_{112}^{(1)} - A_{222}^{(1)}), w_1 = \frac{3}{4} M_0^3 (A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)});$$

$$r_1 = \frac{3}{4} M_0^3 (A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)}), w_3 = \frac{M_0^3}{4} (A_{111}^{(2)} - 3A_{122}^{(2)});$$

$$r_3 = \frac{M_0^3}{4} (3A_{112}^{(2)} - A_{222}^{(2)}), \gamma_1 = -\omega (2M_0 + u_1 + r_1);$$

$$\gamma_2 = \omega (v_1 - w_1); \gamma_3 = \omega (3v_3 - w_3); \gamma_4 = -\omega (3u_3 + r_3).$$

Пусть $\frac{2\pi}{\omega} + \alpha$ — период искомого решения. Из необходимых и достаточных условий периодичности функций (2.4)

$$\eta_s \left(\frac{2\pi}{\omega} + \alpha, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon \right) - \eta_s (0, \beta, \beta_1, \beta_2, \varepsilon) = 0 \quad (s=1, \dots, 4)$$

находим

$$\beta_1 = \varepsilon (T_1 + T_2) + \dots, \beta_2 = \varepsilon (T_3 + T_4) + \dots,$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{P_3 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)} \left\{ C^* \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) \left[\frac{1 + A_{111}^{(1)} M_0^2}{\omega} - \frac{C^* \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)}{2M_0} \right] - P_1 \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) \right\} + \dots$$

Уравнения для определения β имеет решение, обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$ лишь при условии

$$C\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \equiv -\frac{\pi}{\omega^2}\gamma_1 = 0.$$

Отсюда

$$M_0^2 = -\frac{2\pi}{\omega\alpha_3(v)}, \quad (2.6)$$

где

$$\alpha_3(v) = \frac{3\pi}{4\omega} (A_{111}^{(1)} + A_{122}^{(1)} + A_{112}^{(2)} + A_{222}^{(2)})$$

есть продолжение по параметру v в область $v \neq v_0$ первого ляпуновского коэффициента (1.3).

Так как [12]

$$\alpha = -\frac{\varepsilon}{M_0\omega} C^*\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) + \dots$$

а для системы (2.2)

$$C^*\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \equiv -\frac{\pi}{\omega^2}\gamma_2 = -QM_0^3, \quad Q = \frac{3\pi}{4\omega} (A_{112}^{(1)} + A_{222}^{(1)} - A_{111}^{(2)} - A_{122}^{(2)}),$$

то

$$\alpha = -\varepsilon \frac{2\pi Q}{\omega^2\alpha_3(v)} + \dots \quad (2.7)$$

Согласно (2.6) и (2.7) имеем следующую зависимость между частотой $\Omega = \omega \left(1 + \frac{\alpha\omega}{2\pi}\right)^{-1}$ нелинейных колебаний и амплитудой M_0 порождающего решения:

$$\Omega = \frac{\omega}{1 + \varepsilon Q M_0^2 (2\pi)^{-1} + \dots} \quad (2.8)$$

Величины $R_1, R_2, u_1, v_1, \dots, r_3$ в (2.5) выражаются через $\omega, A_{lmn}^{(1)}, A_{lmn}^{(2)}$, причем $l = 1, 2; m = 1, 2; n = 1, 2$; такими же являются, следовательно, функции $C(t)$ и $C^*(t)$, а также β . Величины β_1, β_2 и функции $C_1(t), C_2(t)$ выражаются через $\omega, \kappa, \omega_1, A_{lmn}^{(3)}, A_{lmn}^{(4)}$, причем $l = 1, 2; m = 1, 2; n = 1, 2$. Следовательно, при интегрировании четырехмерной системы (2.2) ее можно декомпозировать на две двумерные подсистемы не только в нулевом относительно ε приближении, но и при нахождении составляющей решения, пропорциональной первой степени ε .

Для каждого значения $v > v_0$ можно найти согласно (2.6) единственное значение $|M_0|$, которому отвечают единственные и притом аналитические функции $\beta(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon), \alpha(\varepsilon)$ и, в силу (2.4), единственное периодическое решение системы (2.2). Это формальное решение является аналитическим относительно ε , таков же и период $2\pi/\omega + \alpha$ этого решения. Из (2.7) и (2.8) в силу непрерывной зависимости от параметра следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon) = \Omega(0) = \omega.$$

Существует значение l_1^* такое, что при $l_1 < l_1^*$ имеем $\alpha_3(v_0) > 0$ [10].

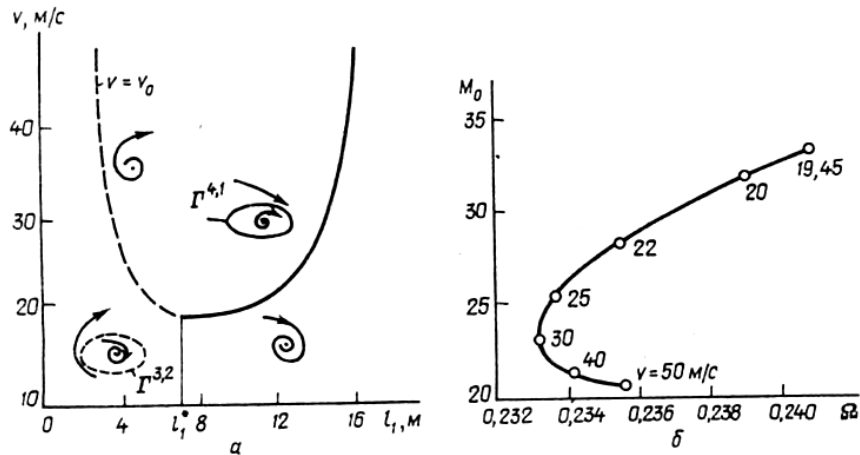


Рис. 2

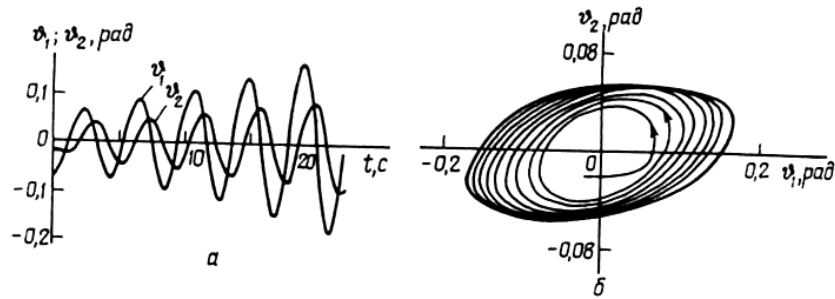


Рис. 3

Следовательно, с ростом скорости $v < v_0$ неустойчивый предельный цикл $\Gamma^{3,2}$ стягивается к началу координат фазового пространства и разрушает его устойчивость при $v \geq v_0$. Если же $l_1 > l_1^*$, то из устойчивого фокуса ($v < v_0$) с увеличением v при $v = v_0$ рождается устойчивый предельный цикл $\Gamma^{4,1}$ размеры которого тем больше, чем больше разность $v - v_0 > 0$ (рис.2,а).

Положим $m_1 = 4905$ кг, $m_2 = 9074$ кг, $I_1 = 47580$ кг·м², $I_2 = 147150$ кг·м², $b_1 = b_2 = 3$ м, $d_1 = d_2 = 1,5$ м, $k_3 = k_4 = 254080$ Н/рад, $k'_3 = k'_4 = 4321110$ Н, $l_1 = 9$ м. На рис.2,б приведена амплитудная кривая, отвечающая безразмерным значениям амплитуды M_0 порождающего решения и частоты Ω . По характеру зависимости частоты от амплитуды двухзвенник является жесткой колебательной системой.

Основное назначение приведенных построений состоит в доказательстве существования, единственности и принципиальной возможности отыскания методом возмущений периодического решения дифференциальных уравнений маятниковых систем с качением. Хотя на эти пути получены некоторые конструктивные результаты (в частности, выражения (2.6) и (2.7) для амплитуды порождающего решения и для поправки к периоду колебаний), а также аппроксимации с любой степенью точности периодического решения отрезком ряда, члены ряда, как это видно из (2.5), не являются периодическими функциями времени. Устранению указанного неудобства посвящена следующая статья.

§ 3. Результаты компьютерного моделирования. Для указанных выше числовых значений параметров $v_0 = 19,4419$ м/с. При $v = 30$ м/с линейная система колебательно неустойчивая (рис.3,а). Из асимптотического поведения

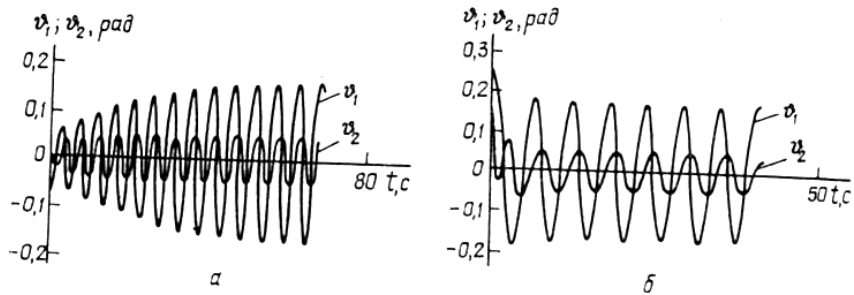


Рис. 4

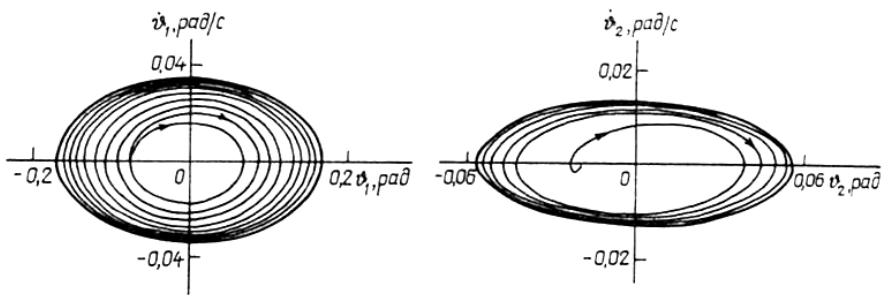


Рис. 5

кривой на «плоскости кинфигураций» (рис.3,б) следует, что в нелинейной системе с течением времени устанавливается периодическое решение, являющееся устойчивым как «снизу» (рис.4,а), так и «сверху» (рис.4,б). Соответствующие фазовые кривые показаны на рис.5.

Р Е З Ю М Е. Розглянуто задачу про плоскопаралельний рух двохланкових систем, які модулюють ведені ланки шарнірно зчеплених пневмоколесних машин. Доказано існування, єдиність та голоморфність періодичного розв'язку рівнянь збуреного руху, що містять відхилення змінних до третьої степені включно.

S U M M A R Y. A problem about plane-parallel motion of two-link systems simulating the leaded links of jointed pneumowheel machines has been considered. In their previous publications the authors have distinguished considerable parameters affecting topological structure of the phase space, and have studied motion stability in case of a pair of purely imaginary eigenvalues of the matrix of equations of linear approximation. The existence, uniqueness and holomorphicity of a periodical solution for the equations of perturbed motion containing deviations of variables of the third extent, inclusive, has been proved in the paper.

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Относительные колебания и вращения плоской шарнирной связки двух твердых тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1991. — № 2. — С. 8 — 17.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М.: Наука, 1984. — 384 с.
3. Богданов А.С. Анализ движения шарнирного двухзвенника при фиксированных шарнирных моментах. — Улан-Удэ, 1990. — 15 с. — Деп. в ВИНТИ 13.11.90, № 5677 - В90.
4. Богданов А.С. Исследование вырожденного движения шарнирного двухзвенника по заданной траектории. — Улан-Удэ, 1990. — 9 с. — Деп. в ВИНТИ 13.12.90, № 6222 - В90.
5. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // Прикл. математика и механика. — 1981. — 45, № 5. — С. 944 — 948.

6. Лобас Л.Г. Математическая модель связанных систем с качением // Прикл. механика. — 1984. — 20, № 6. — С. 80 — 87.
7. Лобас Л.Г. Неголономные модели колесных экипажей. — Киев: Наук. думка, 1986. — 232 с.
8. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. — Киев: Наукдумка, 1990. — 232 с.
9. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. О маятниковых двухзвенных системах с качением // Прикл. механика. — 1993. — 29, № 2. — С. 82 — 86
10. Лобас Л.Г., Хребет В.Г. Динамическое поведение маятниковой двухзвенной системы с качением на границе области устойчивости // Там же. — 1993. — 29, № 4. — С. 78 — 86.
11. Ляпунов А.М. Собр. соч.: В 3 т. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2. 473 с.
12. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 244 с.
13. Мохамед Э.А., Смольников Б.А. Свободное движение шарнирной связки двух тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 5. — С. 28 — 33.
14. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Там же. — 1987. — № 5. — С. 135 — 139.
15. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили, самолеты, висячие мосты. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 288 с.
16. Scheid R., Troger H., Zeman K. Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum // Int. J. Non-Linear Mech. — 1984. — 19, N 2. — P. 163 — 176.
17. Lindtner E., Steindl A., Troger H. Stabilitätsverlust der gestreckten Lage eines räumlichen Doppelpendels mit elastischer Endlagerung unter einer Folgelast // ZAMM. — 1987. — 67, N 4. — P. 105 — 107.
18. Stribersky A., Troger H., Globales Verzweigungsverhalten am Beispiel eines längselastischen Doppelpendels unter Folgelast // Ibid. — 1988. — 68, N 4. — P. 126 — 128.
19. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Bifurcations in a two-degree-of-freedom elastic system with follower forces // J.Sound and Vibr. — 1988. — 126, N 2. — P. 265 — 277.
20. Matsuzaki Y., Futura S. Codimension three bifurcation of a double pendulum subjected to a follower force with imperfection // AIAA Dyn. Spec. Conf., Long Beach, Calif., Apr. 5 — 6, 1990. — Washington, 1990. — P. 387 — 394.

Ин-т механики АН Украины,
Киев (Украина)

Поступила 28.02.92