МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ

Матеріали
VII міжрегіонального семінару

КИЇВ 2012

УДК 378. 141/141.5 (082)

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ АБІТУРІЄНТІВ ДО ВСТУПУ У ВНЗ: **МАТЕРІАЛИ VII МІЖРЕГІОНАЛЬНОГО СЕМІНАРУ. – К. : НАУ, 2012. – 148 с.**

До збірника увійшли матеріали доповідей семінару, в яких висвітлено основні методи роботи щодо впровадження новітніх технологій в тестування. Пропонується методика використання тестових завдань, впровадження якої в навчальний процес дозволяє ефективно перевірити відповідність знань та умінь учнів програмовим вимогам, оцінити рівень навчальних досягнень слухачів, оцінити ступінь підготовленості випускників ЗНЗ до подальшого навчання у ВНЗ. Відображено реальний досвід, подано рекомендації щодо вдосконалення методики та методологічних підходів до викладання навчальних дисциплін.

Рекомендовано викладачам та учням загальноосвітніх навчальних закладів, слухачам підготовчих курсів.

Рекомендовано до друку науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки Національного авіаційного університету (протокол № 2 від 30.04.2012 р.)

УДК 519.21:164.043 (045)

Л.І. Нестеренко,
викладач кафедри базових та спеціальних дисциплін ІДП НАУ, м. Київ,
О.С. Муранов,
кандидат технічних наук, м. Київ

АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ»

«Той, хто народився математиком, маючи комбінаторний розум, має добрі здібності до всіх інших знань»

Сократ

У статті розглядаються шляхи підвищення якості вивчення теми «Основи комбінаторики».

Людська діяльність – це неперервний процес прийняття рішень в обставинах ризику або невизначеності щодо стану навколишнього світу. Яке прийняти рішення? Яку ціну встановити, щоб продати товар і отримати прибуток? Ці та інші питання постійно виникають, і люди намагаються знайти на них науково обґрунтовану відповідь. Значною мірою їм у цьому допомагають знання із теорії ймовірностей.

Отже, зараз вже не стоїть питання: навчати чи не навчати дітей стохастиці? Проблема в іншому – як навчати.

Комбінаторика – важливий інструмент для розв'язування великого кола задач з теорії ймовірностей.

Представникам різних спеціальностей доводиться розв'язувати задачі, в яких з деякої сукупності об'єктів потрібно вибирати елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку тощо. Так, керівнику цеху потрібно розподілити кілька видів робіт між наявними працівниками, агроному – розмістити посіви сільськогосподарських культур на кількох полях, завуч школи – скласти розклад уроків, хіміку – розглянути можливі зв'язки між атомами і молекулами, лінгвісту – врахувати різні варіанти значень букв у незнайомій мові тощо.

Оскільки в таких задачах мова йде про комбінування (від лат. combino – з'єдную, поєдную) об'єктів, їх називають комбінаторними задачами, а галузь математики, в якій вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, що відповідають тим чи іншим умовам, можна скласти із заданих об'єктів, називається комбінаторикою.

Історія виникнення комбінаторики.

Комбінаторика виникла в XVI ст.. У житті привілейованих класів тодішнього суспільства значне місце займали азартні ігри (від араб. «аз-зарх» - гральні кості (шестигранні гральні кубики), що згодом трансформувалося в французьке hazard – випадок, ризик). У карти і гральні кості вигравалися та програвалися золото й діаманти, палаци й маєтки, породисті коні й коштовності. Широко були розповсюджені всілякі лотереї. Зрозуміло, що початкові комбінаторні задачі торкалися в основному азартних ігор – запитань, скількома способами можна викинути дану кількість очок, кидаючи дві або три гральні кості, чи скількома способами можна одержати двох королів у даній карточній грі. Проблеми азартних ігор стали рушійною силою в розвитку комбінаторики і теорії ймовірностей, що розвивалася разом із комбінаторикою.

Одним із перших зацікавився підрахунком кількості різних комбінацій під час гри в кості італійський математик Н. Тарталья. Теоретичними дослідженнями питань комбінаторики займалися у XVII ст. французькі вчені Б. Паскаль і П. Ферма. Вихідним пунктом їх досліджень також були проблеми азартних ігор. Термін комбінаторика було введено в математику відомим ученим Лейбніцем. У 1666 р. Лейбніц опублікував «Міркування про комбінаторне мистецтво».

У XVIII ст. до розв'язування комбінаторних задач зверталися видатні математики. Так, Леонард Ейлер розглядав задачі про циклічні розміщення, про побудову магічних і латинських квадратів.

У 1713 р. було опубліковано працю Я. Бернуллі «Мистецтво припущень», у якій з достатньою повнотою було викладено відомі на той час комбінаторні факти.

Особливо велику роль тут зіграла задача про розподіл ставки, яку запропонував Б. Паскалю його друг, азартний гравець Ш. де Мере.

Задача. Гра в «орлянку» проводиться до шести виграних партій. Вона була перервана, коли один гравець виграв п'ять партій, а другий чотири. Як розподілити між гравцями ставку?

Було зрозуміло, що розподіл у відношенні 5:4 несправедливий. Застосувавши методи комбінаторики, Б. Паскаль розв'язав задачу в загальному випадку, коли одному гравцю залишається до виграшу r партій, а другому – s. Інше розв'язання цієї самої задачі дав П. Ферма.

Останнім часом комбінаторика переживає період бурхливого розвитку, пов'язаний із загальним підвищенням інтересу до проблеми дискретної математики. Комбінаторні методи використовуються під час розв'язування транспортних задач, зокрема задачі на складання розкладу руху, для складання планів виробництва і реалізації продукції тощо. Установлено зв'язки між комбінаторикою і задачами лінійного програмування, статистики. Комбінаторика використовується для складання і декодування шифрів, а також для розв'язування інших задач. Значну роль комбінаторні методи відіграють і в чисто математичних питаннях – теорії груп та їх представлень, вивчені основ геометрії, неасоціативних алгебр тощо.

Види комбінаторних задач.

Розглянемо такі задачі.

1. Розмістіть 10 точок і 5 відрізків так, щоб на кожному відрізку було по 4 точки.

2. Знайдіть усі розміщення восьми ферзів на шахівниці, для яких жодний не може взяти іншого.

3. Дізнайтеся, скількома способами із 7 хлопчиків і 9 дівчаток можна набрати команду для естафетного бігу, якщо до команди повинні увійти 4 хлопчики і 4 дівчинки.

4. Турист повинен відвідати кілька міст, побувавши у кожному з них один раз, і повернутися назад. Знайдіть найкоротший варіант подорожі, якщо відомі відстані між містами, причому з кожного міста можна потрапити до будь-якого, минаючи інші.

Наведені приклади задач показують, що існують різні комбінаторні задачі на відшукання хоча б одного розв'язку(задача 1), на відшукання всіх розв'язків(задача 2), на відшукання кількості розв'язків(задача 3), на вибір серед різних варіантів оптимального(задача 4).

Комбінаторні задачі бувають різних видів. Але більшість із них розв'язують з допомогою двох основних правил: **правила суми** і **правила добутку**.

Приклад 1. Нехай на тарілці лежать 5 яблук і 9 груш.

Тоді вибрати один плід можна

$5+9=14$ (способами).

Взагалі справедливе таке твердження, яке називається правилом суми.

Правило суми. *Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b – n способами, то вибір a або b можна здійснити m + n способами.*

Мовою теорії множин, якщо $n(M)$ – кількість елементів множини M, правило суми можна записати так:

Якщо $A\cap B=\varnothing$, то $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

Наслідок.

$A_i\cap A_k=\varnothing, i\neq k,$ то $n(A_1\cup ... \cup A_k)=n(A_1)+...+n(A_k)$. (1)

Правило суми та його наслідок застосовують для розв'язування комбінаторних задач, в яких можна розбивати всю множину сполук на такі підмножини, що попарно не перетинаються, підраховувати кількість елементів у кожній, а потім їх додавати.

Якщо деякі сполуки потраплять відразу до двох класів, тобто якщо множини мають не порожні перерізи, то ми одержимо $m+n-k$ способів вибору, де k – число збігів, або:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$. (2)

Задача 1. У класі навчаються 42 учні. Із них 16 відвідують секцію з легкої атлетики, 24 – футбольну, 15 – шахову, 11 – з легкої атлетики і футболу одночасно, 8 – шахову і з легкої атлетики, 12 – футбольну і шахову, а 6 – усі три секції. Решта учнів займається лише туризмом. Скільки учнів займаються лише туризмом?

Розв'язання.

Нехай

U – множина всіх учнів;

A – члени секції з легкої атлетики;

B – футбольної;

C – шахової;

D – туристичної

За умовою задачі

$U=A\cup B\cup C\cup D$,

причому

$D\cap(A\cup B\cup C)=\varnothing$

$n(U)=42, n(A)=16, n(B)=24, n(C)=15, n(A\cap B)=11,$

$n(A\cap C)=8, n(B\cap C)=12, n(A\cap B\cap C)=6.$

За формулою (3) маємо:

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-$

$n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=16+24+15-11-8-12+6=30.$

Звідси

$n(D)=n(U)-n(A\cup B\cup C)=42-30=12$ (учнів).

Відповідь: 12 учнів.

Задача 2. У відділі інституту працює кілька співробітників, причому кожний із них знає хоча б одну іноземну мову. Крім того, 6 співробітників знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1 – усі три мови.

А) Скільки співробітників у відділі інституту?

Б) Скільки співробітників знають лише англійську мову?

В) Скільки співробітників знають лише одну мову?

Розв'язання.

А) Нехай U – множина всіх співробітників,

A – множина тих, хто знає англійську мову,

B – множина тих, хто знає німецьку,

C – множина тих, хто знає французьку.

Маємо:

$n(A)=6, n(B)=6, n(C)=7, n(A\cap C)=2, n(A\cap B)=4,$

$n(B\cap C)=3, n(A\cap B\cap C)=1.$

$U=A\cup B\cup C.$

Тоді у відділі:

$n(U)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+$

Б) Лише англійську мову знають:

В) Лише французьку мову знають:

Лише німецьку мову знають:

Отже, лише одну мову знають $1+3=4$ (співробітники).

Задача 3. Припустимо, що потрібно сформувати команду космічного корабля з трьох осіб: командира, інженера і лікаря. На місце командира є 4 кандидати, на місце інженера – 3, а на місце лікаря – 5. Скількома способами може бути сформовано команду корабля?

Розв'язання.

Вибір командира може бути здійснено чотирма способами, інженера – трьома, а лікаря – п'ятьма.

Отже, вибір командира й інженера можна здійснити способами.

Лікаря для кожної вибірки командира й інженера можна вибрати п'ятьма способами.

Отже, команда може бути сформована

Відповідь: 60 способами.

Проте в реальному житті не все так просто. Відомо, що під час формування команд багатомісного космічного корабля виникає питання про психологічну сумісність учасників космічної подорожі.

Правило добутку. Якщо елемент a можна вибрати m способами та якщо після кожного такого вибору елемент b можна вибрати n способами, то вибір пари a і b можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Задача 4. А) Скількома способами можна впорядкувати чотирьохелементну множину $A=\{1,2,3,4\}$, або скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 так, щоб цифри не повторювалися?

Розв'язання.

На перше місце можна поставити будь-який елемент множини. Це можна зробити чотирма способами.

На друге місце можна поставити будь-який елемент із тих, які залишилися. Таке можна зробити трьома способами. Усього

різних способів вибору перших двох елементів (за правилом добутку).

Як тільки вибранні перші два елементи, то на третє місце можна поставити будь-який із двох елементів, які залишилися. Це можна зробити двома способами. Маємо різних способів.

На останнє місце претендує один елемент і таке можна зробити одним способом.

Отже, всього способів

Відповідь: 24 способи.

Б) Розв'яжіть попередню задачу, якщо множина $A=\{1,2,3,4,\dots,n\}$.

Розв'язання.

Міркуючи аналогічно, знаходимо кількість способів, якими можна впорядкувати множину A:

$n(n-1)(n-2)\cdot\square\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$

Відповідь: n! способів.

Означення 1. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається перестановкою n елементів і позначається P_n.

Отже, перестановки з n елементів відрізняються між собою лише порядком елементів.

Задача 5. Скільки різних чисел можна утворити з цифр 0, 2, 6?

Розв'язання.

Знайдемо кількість чисел, зважаючи на те, що цифра 0 не може стояти на першому місці:

$3!-2!=6-2=4.$

Отже, маємо чотири числа: 260, 206,620,602.

Відповідь: 4 числа.

У задачах 4 – 5 ми утворювали деякі впорядковані сполучення, які містили всі елементи даної множини.

Проте зустрічаються задачі, в яких треба утворювати сполучення, які містили сполучення, які містять не всі, а лише кілька елементів множини.

Задача 6. а) Є тканини п'яти різних кольорів. Скількома різними способами можна утворити триколірний смугастий прапор (триколор)? (Усі смуги різного кольору).

Розвязання.

Почнемо, наприклад, з верхньої смуги. Вона може бути вибрана п'ятьма способами, середня смуга – трьома.

За правилом добутку триколірний смугастий прапор можна утворити такою кількістю способів:

Дістали 60 різних прапорів, тобто 60 різних впорядкованих множин.

Відповідь. 60 способів.

Б) Дано множину ***M***, що містить ***n*** елементів $(k \le n)$. Скільки впорядкованих підмножин, кожна з яких містить ***k*** елементів, можна утворити з елементів множини ***M***?

Розв'язання.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) =$$

Відповідь: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ множин.

Впорядковані множини позначаються буквою ***A***, оскільки з цієї букви починається французьке слово *arranger*, що означає «упорядковувати».

Задача 7. У змаганнях бере участь 25 спортсменів. Скількома способами можуть розподілятися три перших місця?

Розв'язання.

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Відповідь: 13800 способів.

Означення 2. Будь-яка впорядкована підмножина з ***k*** елементів даної множини ***M***, яка містить ***n*** елементів, де $k \le n$, називається розміщення з ***n*** елементів по ***k***.

Якщо $k = n$, то маємо:

$A_n^n = P_n$, тобто перестановка – окремий випадок розміщення.

Мають місце задачі, в яких потрібно утворити невпорядковані сполучення, які містять декілька елементів множин.

Задача 8. У класі 25 учнів. Скількома способами можна вибрати трьох делегатів від класу на районні збори організації «Молода просвіта»?

На відміну від попередньої задачі три елементи, які слід вибрати, рівноправні між собою, тобто невпорядковані. Позначимо кількість способів якими можна це зробити, через C_{25}^3.

Щоб утворити невпорядковані множини, які містять 3 елементи з даних 25, потрібно виділити які-небудь 3 елементи з даних 25, що можна зробити C_{25}^3 способами.

Упорядкувати три елементи можна P_3 способами.

Разом дістанемо таку кількість упорядкованих множин (за правилом добутку):

$$C_{25}^3 \cdot P_3.$$

Отже, маємо:

$$A_{25}^3 = C_{25}^3 \cdot P_3,$$

звідки

$$C_{25}^3 = \frac{A_{25}^3}{P_3}.$$

У загальному випадку, щоб утворити впорядковані множини, які містять ***k*** елементів із даних ***n*** елементів, потрібно:

1) Виділити які-небудь ***k*** елементів з даних ***n*** елементів C_n^k способами;

2) Виділені ***k*** елементи впорядкувати P_k способами, що можна зробити такою кількістю способів:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Звідки

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Означення 3. Будь-яка підмножина з ***k*** елементів даної множини ***M***, що містить ***n*** елементів, називається комбінацією з ***n*** елементів по ***k***.

Для позначення кількості комбінацій вибрали букву C, оскільки з цієї букви починається латинське слово *combino*, що означає «з'єдную, сполучаю».

Узагальнити інформацію про правила суми і добутку та види сполучень доцільно з допомогою таблиці «Розв'язування комбінаторних задач». Бажано, щоб такі самі за змістом таблиці лежали в учнів на партах.

Задача 9. З 10 різних троянд і 8 різних гербер потрібно скласти букет, що містить 2 троянди і 3 гербери. Скільки різних букетів можна скласти?

Розв'язання.

2 троянди з 10 можна вибрати C_{10}^2 способами, 3 гербери з 8 – C_8^3 способами.

Квіти вибираємо з множин троянд і гербер. За правилом добутку маємо:

$$C_{10}^2 \cdot C_8^3 = \frac{10!}{8!\cdot 2!} \cdot \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 4\cdot 9\cdot 10 = 2520 \text{ (букетів)}$$

Відповідь: 2520 букетів.

Задача 10. Скільки існує семизначних телефонних номерів, якщо в жодному номері немає цифр, які повторюються?

Розв'язання.

Оскільки з 10 елементів вибираємо 7 і має значення порядок розміщення цих елементів, то дане сполучення є розміщенням.

Тому маємо:

$$A_{10}^7 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 604800 \text{ (телефонних номерів)}.$$

Відповідь. 604800 телефонних номерів.

При розв'язуванні різного виду комбінаторних задач зручно користуватися наступною таблицею.

Таблиця 1

Розв'язування комбінаторних задач.

<table>
<tr><td colspan="6">I. ВИБІР ПРАВИЛА</td></tr>
<tr><td colspan="3">ПРАВИЛО СУМИ</td><td colspan="3">ПРАВИЛО ДОБУТКУ</td></tr>
<tr><td colspan="3">Якщо елемент A можна вибрати n способами, а після цього елемент $B - m$ способами, то A або B можна вибрати $m + n$ способами</td><td colspan="3">Якщо елемент A можна вибрати n способами, а елемент $B - m$ способами, то A і B можна вибрати $n \cdot m$ способами.</td></tr>
<tr><td colspan="6">II. ВИБІР ФОРМУЛИ</td></tr>
<tr><td colspan="6">Чи враховується порядок розміщення елементів?</td></tr>
<tr><td colspan="4">ТАК</td><td colspan="2" rowspan="3">НІ</td></tr>
<tr><td colspan="4">Чи всі елементи входять до сполучення?</td></tr>
<tr><td colspan="2">ТАК</td><td colspan="2">НІ</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПЕРЕСТАНОВКИ</td><td colspan="2">РОЗМІЩЕННЯ</td><td colspan="2">КОМБІНАЦІЇ</td></tr>
<tr><td>Без повторень</td><td>З повтореннями</td><td>Без повторень</td><td>З повтореннями</td><td>Без повторень</td><td>З повтореннями</td></tr>
<tr><td>$P_n = n!$</td><td>$\overline{P}_n = \frac{n!}{k!...k_m!}$,
$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$</td><td>$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$</td><td>$\overline{A}_n = n^k$</td><td>$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$</td><td>$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$</td></tr>
</table>

Соціально-економічні зміни в нашому суспільстві обумовлюють гостро актуальну потребу сформованості в підлітків гнучкості, варіативності, критичності, динамічності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій. Комбінаторика саме сприяє розвитку уміння знаходити різні варіанти розв'язування однієї задачі, а з них обирати найбільш раціональні. Комбінаторні задачі формують у слухачів правильні уявлення про роль математичного моделювання в науковому пізнанні і практиці. Слухачі набувають умінь і навичок будувати та інтерпретувати математичні моделі деяких конкретних ситуацій. Фабула майже кожної комбінаторної задачі має практичне спрямування, наближена до реалій життя.

Література

1. Ващенко Л.І. Основні правила комбінаторики. // Матем. в шк. – 2002. – № 1.
2. Істер О. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. – К.: Факт, 1997.
3. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук .– 2-ге вид.– Зодіак-ЕКО, 2001.– 656 с.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підруч. для 11кл. з погл. вивч. математики в серед. закл. освіти. – К.: Освіта,