

ISSN 0032-8243

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS

ТОМ
29

2

1993

УДК 531.36:629.114

© 1993

Л.Г.Лобас, В.Г. Хребет

О МАЯТНИКОВЫХ ДВУХЗВЕННЫХ СИСТЕМАХ С КАЧЕНИЕМ

§ 1. Введение. После классических опытов G.Galilei (1632 г.) по изучению изохронизма колебаний маятника и трактата «Маятниковые часы» С.Huygens (1659 г.) с расчетными формулами для математического и физического маятников развитие динамики таких систем происходило все нарастающими темпами. Был обнаружен ряд необычных физических эффектов, нашедших применения в различных областях естествознания и техники. обстоятельный анализ развития теории маятниковых систем содержится в [6], обзор работ по бифуркациям рождения предельного цикла из устойчивого фокуса (бифуркации Андронова—Хопфа), каскадному удвоению периода колебаний и переходу к хаосу приведен в [11]. Отметим также работы [5,7] по устойчивости и колебаниям двойного маятника. В [12] исследована устойчивость положения равновесия двухзвенного маятника с упругой восстанавливающей силой на конце, находящегося под воздействием неконсервативной «следающей» силы. С помощью приведения исходной системы дифференциальных уравнений к трехмерной системе на центральном многообразии, расщепления последней на одно- и двумерную подсистемы и удержания лишь главных частей нелинейностей (до третьего порядка включительно) выполнен постбифуркационный анализ связанных флаттерных и дивергентных движений. Двойной маятник в виде двухзвенной стержневой системы с нижней точкой шарнирного закрепления при воздействии «следающей» нагрузки на верхнюю точку системы рассмотрен в [8], граница области устойчивости характеризуется двумя нулевыми собственными значениями матрицы линейного приближения. При другом сочетании параметров в той же системе возможны [9] простые нулевое и чисто мнимые собственные значения. В задаче о пространственных колебаниях сферического маятника, состоящего из двух стержней с вязкоупругими шарнирами (система с четырьмя степенями свободы), матрица линейного приближения может иметь [10] либо двойное нулевое собственное значение (дивергентная бифуркация), либо двойную пару чисто мнимых собственных значений (флаттерная бифуркация). Аналогичная система рассмотрена в [13], найдены амплитуды устойчивых и неустойчивых предельных циклов.

Маятниковые системы с качением, которые вводятся в данной работе, возникли в результате математического моделирования движения ведомых звеньев шарнирно соединенных колесных машин [1]. Потеря устойчивости прямолинейного движения автопоезда может быть обусловлена [3] либо ведущим звеном (экспоненциальная неустойчивость), либо ведомыми звеньями (колебательная неустойчивость). Подсистема, соответствующая изолированному ведущему звену, исследована в настоящее время достаточно подробно [4], в отличие от подсистемы, соответствующей ведомым звеньям. Механическая система, рассматриваемая ниже, получается в результате расщепления трехзвенной системы [2] на ведущее звено и двухзвенную маятниковую систему. Физические предпосылки такого расщепления состоят в том, что ведущее звено предполагается настолько массивным по сравнению с ведомыми звеньями, что возмущения от последних не воспринимаются ведущим звеном. Считая движение этого звена прямолинейным и невозмущаемым, изучим вращательные движения ведомых звеньев в предположении, что точка сцепки O_1 [2, рисунок] ведущего и первого ведомого звеньев движется прямолинейно. Аналогично можно поставить задачу о движении n -звенной маятниковой системы с качением [1].

§ 2. Дифференциальные уравнения движения. Обозначим через i, j орты осей Ox, Oy инерциальной системы координат, i_1, j_1 и i_2, j_2 — орты подвижных осей C_1x_1, C_1y_1 и C_2x_2, C_2y_2 , неизменно связанных с первым и вторым ведомыми звеньями; C_1, C_2 — центры масс звеньев; O_1, O_2 — точки сцепок, причем $v_{O_1} = iv$; δ_3, δ_4 — приведенные углы бокового увода колес (в предположениях одноколейной модели); M_1, M_2 — моменты в опорно-сцепных устройствах, развиваемые упругими элементами (например, кольцевыми пружинами) и демпфирующими устройствами (рис.1); m_1, m_2, I_1, I_2 — массы и центральные моменты инерции звеньев относительно вертикальных осей;

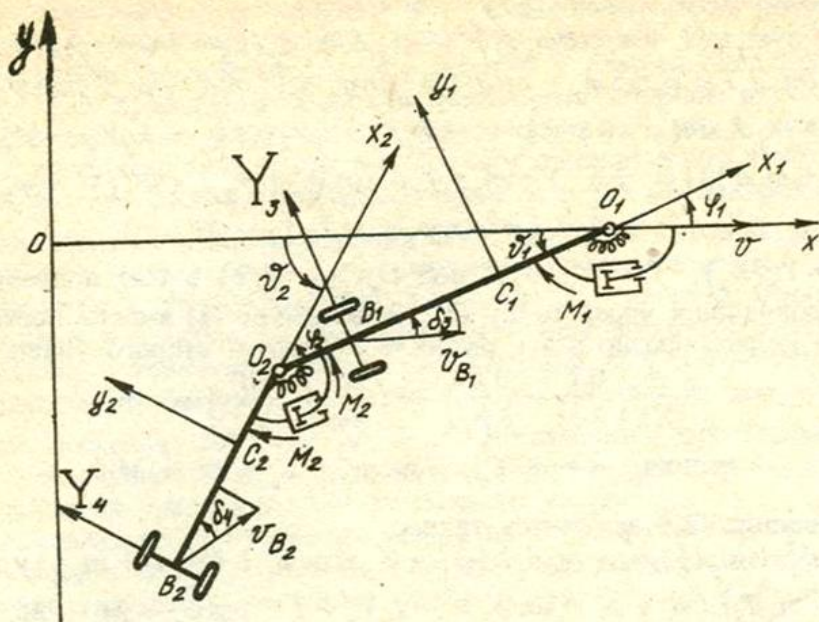


Рис. 1

$C_1O_1 = d_1$, $B_1C_1 = b_1$, $C_2O_2 = d_2$, $B_2C_2 = b_2$, $L_i = b_i + d_i$ ($i=1,2$); $O_2C_1 = c_1$, причем c_1 — алгебраическая величина: $c_1 > 0$, если точка O_2 находится сзади точки C_1 , в противном случае $c_1 < 0$; $O_2O_1 = l_1 = c_1 + d_1$; φ_1, φ_2 — углы складывания; $v_1 = \dot{\varphi}_1$, $v_2 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$ — курсовые углы звеньев. Так как

$$v_{c_1} = i_1 v_1 + j_1 u_1, \quad v_{c_2} = i_2 v_2 + j_2 u_2, \quad v_1 = v \cos \varphi_1,$$

$$u_1 = -v \sin \varphi_1 - d_1 \dot{\varphi}_1, \quad v_2 = v \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2,$$

$$u_2 = -v \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (l_1 \cos \varphi_2 + d_2) \dot{\varphi}_2,$$

то для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} (m_1 v_{c_1}^2 + I_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 v_{c_2}^2 + I_2 \dot{\varphi}_2^2)$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} \{ (m_1 + m_2) v^2 + [I_1 + I_2 + m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2d_2 l_1 \cos \varphi_2)] \dot{\varphi}_1^2 +$$

$$+ (I_2 + m_2 d_2^2) \dot{\varphi}_2^2 + 2[I_2 + m_2 d_2 (l_1 \cos \varphi_2 + d_2)] \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 +$$

$$+ 2m_2 d_2 v \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + 2v \dot{\varphi}_1 [(m_1 d_1 + m_2 l_1) \sin \varphi_1 + m_2 d_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \}.$$

Углы бокового увода определяются выражениями [2]

$$\delta_3 = \arctg \frac{-u_1 + b_1 \dot{\varphi}_1}{v_1} = \arctg \frac{v \sin \varphi_1 + L_1 \dot{\varphi}_1}{v \cos \varphi_1},$$

$$\delta_4 = \arctg \frac{-u_2 + b_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)}{v_2} =$$

$$= \arctg \frac{v \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + (L_2 + l_1 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + L_2 \dot{\varphi}_2}{v \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2}.$$

Боковые реакции Y_3, Y_4 опорной плоскости обычно являются монотонными функциями соответствующих углов увода, но могут иметь и падающие участки [4]. Уравнения для определения углов φ_1, φ_2

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \text{mom}_{O_1 z_1} (Y_3 + Y_4) - M_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \text{mom}_{O_2 z_2} Y_4 - M_2$$

(2.1)

в развернутой форме имеют вид

$$[I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 l_1 (l_1 + d_2 \cos \varphi_2)] \dot{\varphi}_1 + [I_2 + m_2 d_2 (d_2 + l_1 \cos \varphi_2)] (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) - 2m_2 d_2 l_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - m_2 d_2 l_1 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + [(m_1 d_1 + m_2 l_1) \sin \varphi_1 + m_2 d_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \dot{v} = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos \varphi_2 - L_2 Y_4 - M_1, \quad (2.2)$$

$$(I_2 + m_2 d_2^2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + m_2 d_2 l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 + m_2 d_2 \dot{v} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + m_2 d_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_2 = -L_2 Y_4 - M_2. \quad (2.3)$$

Здесь $Y_3 = Y_3(\delta_3)$, $Y_4 = Y_4(\delta_4)$; под $O_s z_s$ ($s=1,2$) в (2.1) подразумевается ось z_s , проходящая через точку O_s . Аналогично [2] вместо первого уравнения (2.1) целесообразно взять разность первого и второго уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} \right) = \text{mom}_{O_1 z_1} (Y_3 + Y_4) - \text{mom}_{O_2 z_2} Y_4 - M_1 + M_2.$$

Тогда уравнение (2.2) заменится таким:

$$(I_1 + m_1 d_1^2 + m_2 l_1^2) \dot{\varphi}_1 + m_2 d_2 l_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 + (m_1 d_1 + m_2 l_1) \dot{v} \sin \varphi_1 - m_2 d_2 l_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \sin \varphi_2 = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos \varphi_2 - M_1 + M_2. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4), (2.3) можно упростить, перейдя в них к переменным v_1, v_2 .

Считая $v = \text{const}$, $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, получаем

$$(J_1 + m_2 l_1^2) \dot{v}_1 + m_2 d_2 l_1 \dot{v}_2 \cos(v_2 - v_1) = -L_1 Y_3 - l_1 Y_4 \cos(v_2 - v_1) + m_2 d_2 l_1 \dot{v}_2^2 \sin(v_2 - v_1), \quad J_2 \dot{v}_2 + m_2 d_2 l_1 \dot{v}_1 \cos(v_2 - v_1) = -L_2 Y_4 - m_2 d_2 l_1 \dot{v}_1^2 \sin(v_2 - v_1). \quad (2.5)$$

Здесь $J_1 = I_1 + m_1 d_1^2$, $J_2 = I_2 + m_2 d_2^2$ есть моменты инерции звеньев относительно вертикальных осей, проходящих через точки O_1 и O_2 соответственно. Разрешим уравнения (2.5) относительно старших производных

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{D} [a^2 \dot{v}_1^2 \sin(v_2 - v_1) \cos(v_2 - v_1) + a J_2 \dot{v}_2^2 \sin(v_2 - v_1) - L_1 J_2 Y_3 - J_1 l_1 Y_4 \cos(v_2 - v_1)], \quad \dot{v}_2 = \frac{1}{D} \{-a (J_1 + m_2 l_1^2) \dot{v}_1^2 \sin(v_2 - v_1) - a^2 \dot{v}_2^2 \sin(v_2 - v_1) \cos(v_2 - v_1) + a L_1 Y_3 \cos(v_2 - v_1) - [L_2 (J_1 + m_2 l_1^2) - a l_1 \cos^2(v_2 - v_1)] Y_4\}, \quad (2.6)$$

где

$$a = m_2 d_2 l_1, \quad J = I_2 - m_2 b_2 d_2, \\ D = J_1 J_2 + m_2 l_1^2 [J_2 - m_2 d_2^2 \cos^2(v_2 - v_1)].$$

§ 3. Устойчивость движения в не критических случаях. Поскольку функции $Y_3(\delta_3)$, $Y_4(\delta_4)$ обращаются в нуль при $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$, то уравнения (2.5) имеют решение $v_1 = v_2$, $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$, которое соответствует прямолинейной конфигурации маятниковой системы. Назовем это решение невозмущенным. Положив $Y_3 = k_3 \delta_3$, $Y_4 = k_4 \delta_4$, получим для него следующее уравнение в вариациях:

$$A \ddot{x} + B \dot{x} + (C + P) x = 0, \quad (3.1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} J_1 + m_2 l_1^2 & m_2 d_2 l_1 \\ m_2 d_2 l_1 & J_2 \end{vmatrix}, \\ B = \frac{1}{v} \begin{vmatrix} k_3 L_1^2 + k_4 l_1^2 & k_4 l_1 L_2 \\ k_4 l_1 L_2 & k_4 L_2^2 \end{vmatrix}, \\ C = \begin{vmatrix} k_3 L_1 & \frac{k_4 l_1}{2} \\ \frac{k_4 l_1}{2} & k_4 L_2 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_4 l_1}{2} \\ -\frac{k_4 l_1}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

т.е. система находится под воздействием инерционных, диссипативных, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Матрицы B, C, P имеют одинаковое физическое происхождение: в рамках аксиоматики теории Рокара они порождены боковыми реакциями опорной плоскости. Порядок диссипативных, упругих и циркуляционных сил в маятниковых системах с качением один и тот же, все они одновременно исчезают, если $k_3 = k_4 = 0$. В этом состоит принципиальное отличие рассматриваемых механических систем от других маятниковых систем, в которых упругие характеристики значительно превосходят диссипативные, чем и обуславливаются в первую очередь колебательные свойства «маятника».

Величины v и l_1 являются параметрами, определяющими интенсивности диссипативных и неконсервативных позиционных сил соответственно. При $l_1 = 0$ последние отсутствуют, а система (3.1) распадается на две независимые подсистемы, поскольку матрицы A, B, C, P становятся диагональными. Чем меньше v , тем больше диссипация; можно ожидать поэтому неустойчивости нулевого решения уравнения (3.1) при больших скоростях.

Если исходить не из уравнений (2.5), а из (2.6), можно выделить частный случай, суждение об устойчивости в котором основывается непосредственно на структуре уравнений. Линейное приближение системы (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = & -\frac{1}{v\Delta}(k_3 L_1^2 J_2 + k_4 l_1^2 J) \dot{v}_1 - k_3 J_2 \frac{L_1}{\Delta} v_1 - k_4 J \frac{l_1 L_2}{v\Delta} \dot{v}_2 - \\ & - k_4 J \frac{l_1}{\Delta} v_2, \quad \dot{v}_2 = -\frac{l_1}{v\Delta} [k_4 (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2) - k_3 m_2 d_2 L_1^2] \dot{v}_1 + \\ & + k_3 L_1 \frac{a}{\Delta} v_1 - \frac{k_4 L_2}{v\Delta} (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2) \dot{v}_2 - \frac{k_4}{\Delta} (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2) v_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Delta = J_1 J_2 + m_2 l_1^2 I_2$.

При $J = 0$ в первом уравнении исчезают члены \dot{v}_2 и v_2 , и система (3.3) упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} (J_1 + m_2 l_1^2 \frac{I_2}{J_2}) \dot{v}_1 + k_3 \frac{L_1^2}{v} \dot{v}_1 + k_3 L_1 v_1 = 0, \\ \dot{v}_2 + g \dot{v}_2 + h v_2 = c \dot{v}_1 + d v_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку $g > 0, h > 0$, то система (3.4) асимптотически устойчива при $V v$ и $V l_1$. Заметим, что условие $I_2 = m_2 b_2 d_2$ идентично условию $I = = tab$, приводящему для одиночной колесной машины к некоторым упрощениям [4] в дифференциальных уравнениях движения.

Характеристическое уравнение для (3.1) и (3.3) имеет вид

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0, \quad (3.5)$$

где $A_0 = \Delta, A_1 = \frac{a_1}{v}, a_1 = k_3 J_2 L_1^2 + k_4 (J_1 L_2^2 + J_0 l_1^2), J_0 = I_2 + m_2 b_2^2,$

$$A_2 = c + \frac{d}{v^2}, c = k_3 J_2 L_1 + k_4 (J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2), d = k_3 k_4 L_1^2 L_2^2,$$

$$A_3 = \frac{b}{v}, b = k_3 k_4 L_1 L_2 (L_1 + L_2), A_4 = k_3 k_4 L_1 L_2.$$

Поскольку $V A_i > 0$, необходимым и достаточным условием устойчивости является требование

$$\begin{aligned} \Delta_3 = A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2 - A_1^2 A_4 = \frac{1}{v^4} [a_1 b d + (a_1 b c - A_0 b^2 - a_1^2 A_4) v^2] \equiv \\ \equiv \frac{1}{v^4} [\delta + P_2(l_1^2) v^2] > 0 \Rightarrow v < v_0, \quad v_0^2 = -\kappa \frac{1 + \delta_0 l_1^2}{P_2(l_1^2)}. \end{aligned}$$

Здесь

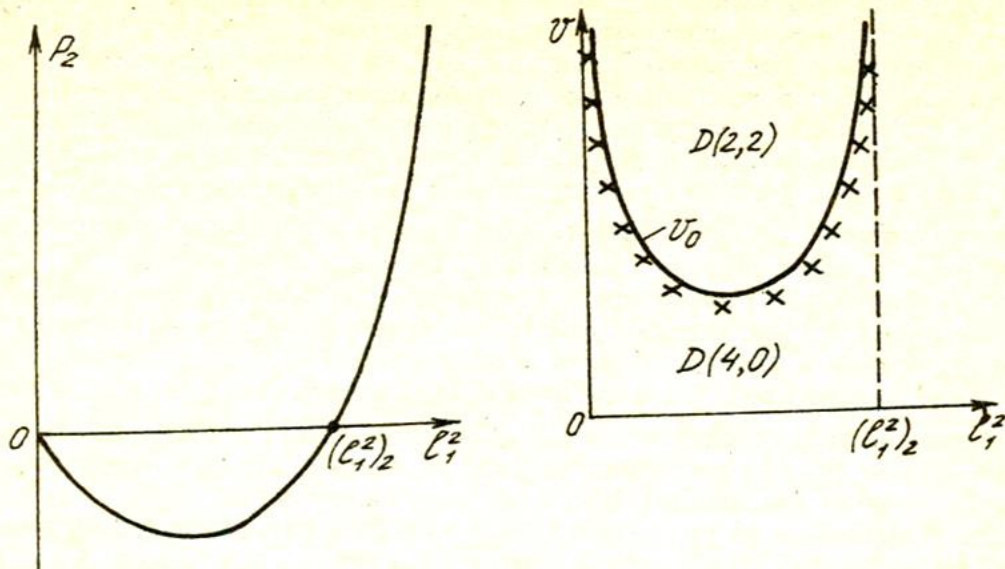


Рис. 2

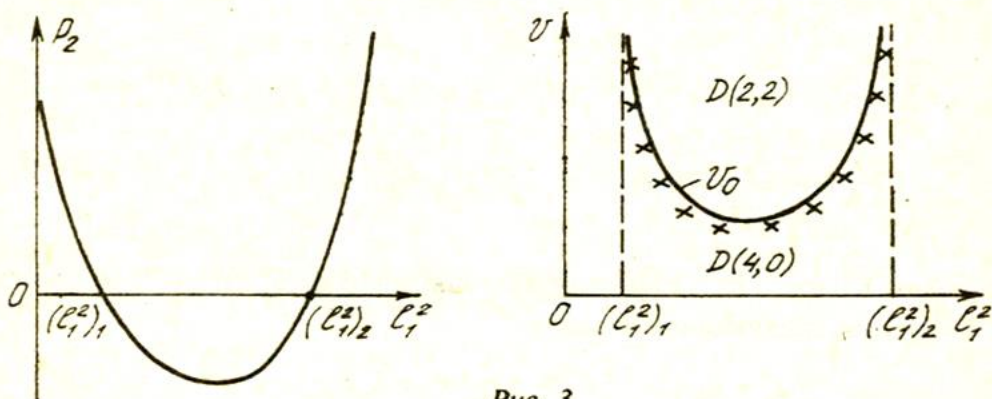


Рис. 3

$$\kappa = k_3^2 k_4^2 L_1^3 L_2^3 (L_1 + L_2) (k_3 J_2 L_1^2 + k_4 J_1 L_2^2), \quad \delta_0 = k_4 J_0 (k_3 J_2 L_1^2 + k_4 J_1 L_2^2)^{-1},$$

$$P_2(l_1^2) = \alpha l_1^4 + \beta l_1^2 + \gamma, \quad \alpha = k_3 k_4^3 J_0 L_1 L_2 [m_2 b_2 (L_1 + d_2) - I_2],$$

$$\beta = k_3 k_4^2 L_1 L_2 \{ [m_2 b_2 (L_1 + d_2) - I_2] (k_3 J_2 L_1^2 + k_4 J_1 L_2^2) +$$

$$+ J_0 L_1 L_2 (k_3 J_2 + k_4 J_1) - k_3 m_2 I_2 L_1 L_2 (L_1 + L_2)^2 \},$$

$$\gamma = k_3 k_4 L_1^2 L_2^2 (k_3 J_2 L_1 - k_4 J_1 L_2)^2.$$

Всегда $\kappa > 0$, $\delta_0 > 0$, $\gamma \geq 0$. При

$$(l_1^2)_0 = \frac{1}{\delta_0} \left[\sqrt{1 + \frac{\delta_0}{\alpha} (\delta_0 \gamma - \beta)} - 1 \right].$$

Функция $P_2(l_1^2)$ достигает экстремума. Значению $v = v_0$ отвечает граница области устойчивости на плоскости параметров v , l_1 диссипативных и неконсервативных позиционных сил. Из формулы Орlando для уравнения степени n

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} A_0^{n-1} \prod_{j < k}^{1 \dots n} (\lambda_j + \lambda_k)$$

следует, что $\Delta_{n-1} = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_m + \lambda_l = 0$ ($m \neq l$). Равенство $\Delta_{n-1} = 0$ реализуется в случаях: 1) $\lambda_m = i\omega$, $\lambda_l = -i\omega$; 2) $\lambda_m = 0$, $\lambda_l = 0$; 3) $\lambda_m = \alpha$, $\lambda_l = -\alpha$; 4) $\lambda_m = \alpha + i\omega$, $\lambda_l = -\alpha - i\omega$.

Поскольку $\kappa > 0$, $\delta_0 > 0$, то значения функции $v_0(l_1^2)$ в значительной мере определяются квадратным трехчленом $P_2(l_1^2)$. Интерес представляют лишь области, где $P_2(l_1^2) < 0$. Возможные ситуации показаны на рис.2, для

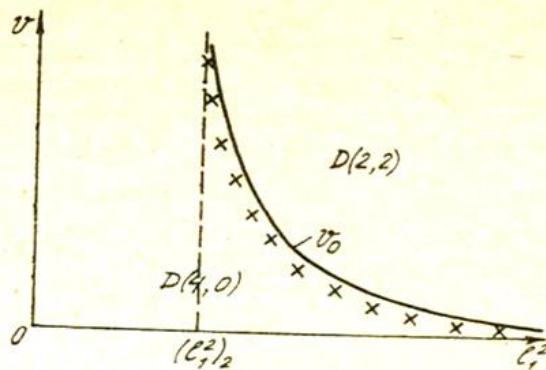
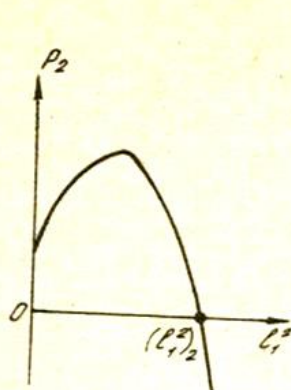


Рис. 4

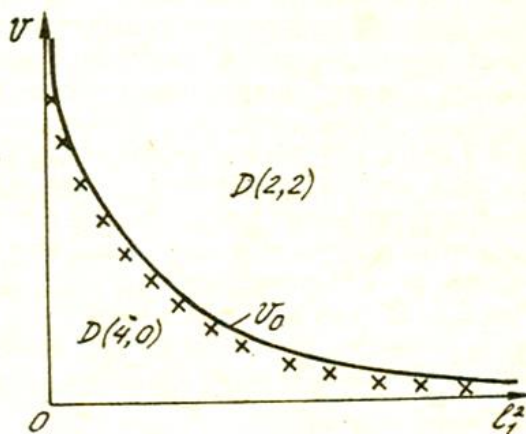
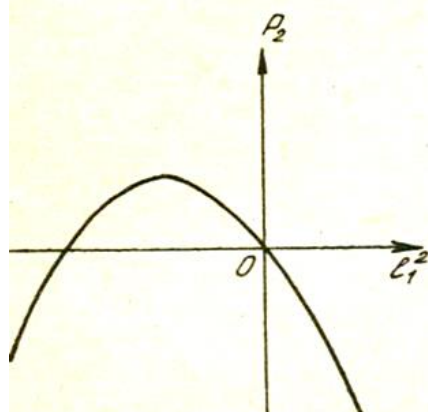


Рис. 5

второго $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma > 0, \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$; на рис.3, где $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma = 0$; на рис.4, для которого $\alpha < 0, \beta \leq 0, \gamma > 0$ (при этом $(l_1^2)_1 < 0$) или $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma = 0$ (при этом $(l_1^2)_1 = 0$); на рис.5, где $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma = 0$.

Для выяснения характера распределения корней уравнения (3.5) в различных областях плоскости параметров l_1^2 и v запишем систему (3.1) или (3.3) в виде

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.6)$$

где, в отличие от (3.2),

$$x = \begin{pmatrix} v \\ \dot{v}_1 \\ v_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

$$a_{21} = -k_3 J_2 \frac{L_1}{\Delta}, \quad a_{22} = -\frac{k_3 J_2 L_1^2 + k_4 J l_1^2}{v \Delta}, \quad a_{23} = -k_4 J \frac{l_1}{\Delta},$$

$$a_{24} = -k_4 J \frac{l_1 L_2}{v \Delta}, \quad a_{41} = k_3 L_1 \frac{a}{\Delta}, \quad a_{42} = \frac{l_1}{v \Delta} (k_3 m_2 d_2 L_1^2 - k_4 G_0),$$

$$G_0 = J_1 L_2 + m_2 b_2 l_1^2, \quad a_{43} = -\frac{k_4}{\Delta} G_0, \quad a_{44} = -\frac{k_4 L_2}{v \Delta} G_0.$$

На рис.2—5 через $D(2,2)$ обозначена область, в которой два собственных

значения матрицы A (3.7) имеют отрицательные действительные части, а два других — положительные действительные части; $D(4, 0)$ — область, в которой действительные части всех четырех собственных значений отрицательны. Для $v = v_0$ имеем $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\lambda_{3,4} = \kappa \pm i\omega_1$, $\kappa < 0$. Подчеркнем принципиальный характер отличия кривых $v_0 = v_0(l_1^2)$ на рис. 2, 3 от таковых на рис. 4, 5. При малых значениях v два или четыре корня уравнения (3.5) являются действительными (и отрицательными). Это объясняется тем, что — подсистема и — подсистема, описываемые уравнениями

$$J_s \ddot{v}_s + k_{s+2} \frac{L^2}{v} \dot{v}_s + k_{s+2} L_s v_s = 0 \quad (s=1,2)$$

обладают при таких v большими коэффициентами демпфирования. С ростом v коэффициенты уменьшаются. При $v > v_0$ соответствующие парциальные системы становятся осцилляторами, а все корни уравнения (3.5) — комплексными, т.е. лишь начиная с этих v можно говорить о маятниковом характере рассматриваемой системы с качением.

Р Е З Ю М Е. Розглядається новий клас механічних систем типу «маятник» - маятникові системи, які котяться. Вони виникають при моделюванні руху ведених ланок шарнірно з'єднаних колісних машин відносно ведучої в припущенні, що ведуча ланка є настільки масивною порівняно з веденими ланками, що збурення від останніх не сприймаються ведучою ланкою. Вивчаються обертальні рухи ведених ланок при умові, що точка зчеплення ведучої і першої веденої ланок рухається прямолінійно. Побудовано області стійкості на площині характерних параметрів. Починаючи з певних швидкостей руху внаслідок двох власних значень матриці лінійного наближення з позитивними дійсними частинами відбувається втрата стійкості.

S U M M A R Y. A new class of «pendulum» type mechanical systems—pendulum oscillatory systems is considered. They arise during modelling of motion for driven members of wheel machines with articulated joint relative to driving one in supposition that driving member is so massive in comparison with driven members to be perceptive of the disturbances by the latter ones. Rotary motions of driven members are studied providing that coupling point of driving member and the first driven one moves rectilinearly. Stability areas at the plane of specific parameters are considered. Beginning from some velocities of motion, there occurs a loss of stability in consequence of two own values for linear approximation matrix with positive real parts.

1. Лобас Л.Г. Математическая модель связанных систем с качением // Прикл. механика. — 1984. — 20, N 6. — С. 80 - 87.
2. Лобас Л.Г. К теории кругового качения трехзвенных упруго-деформируемых систем // Там же. — 1985. — 21, N 11. — С. 104 - 110.
3. Лобас Л.Г. Курсовая устойчивость двухзвенных колесных машин // Там же. — 1989. — 25, N 4. — С. 104—111.
4. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. — Киев: Наук.думка, 1990. — 232 с.
5. Сокол Э.Н. Устойчивость стационарного движения двойного физического маятника // Мат.методы и физ.-мех. поля. — 1983. — N 17. — С. 90 — 94.
6. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». — Алма-Ата: Наука Каз. ССР. — 1981. — 254 с.
7. Чешанков М., Славкова М. Върху трептения на едно двойно махало // Год. ВУЗ. Техн. мех. — 1983. — 18, N 2. — С. 17 — 26.
8. Jin J.-D., Matsuzaki V. Bifurcations in a two-degree-of-freedom elastic system with follower forces // J. Sound and Vibr. — 1988. — 126, N 2. — P. 265 — 277.
9. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Stability and bifurcations of a double pendulum subjected to a follower force // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 30-th Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Mobile, Ala, Apr. 3 - 5, 1989: Collect. Techn. Pap. Pt. 1- Washington, 1989. — P. 432 — 439.
10. Lindtner E., Steindl A., Troger H. Stabilitätsverlust der gestreckten Lage eines räumlichen Doppelpendels mit elastischer Endlagerung unter einer Folgelast // Z. angew. Math. und Mech. — 1987. — 67, N 4. — P. 105 — 107.
11. Miles J.W. The pendulum from Huygens' horologium to symmetry breaking and chaos // Theor. and Appl. Mech.: Proc. 17th Int. Congr., Grenoble, 21 — 27 Aug., 1988. — Amsterdam ets., 1989. — P. 193 — 215.
12. Scheidl R., Troger H., Zeman K. Coupled flutter and divergence bifurcation of a double pendulum // Int. J. Non-Linear Mech. — 1984. — 19, N 2. — P. 163— 176.
13. Stribesky A., Troger H. Globales Verzweigungsverhalten am Beispiel eines längselastischen Doppelpendels unter Folgelast // Z. angew. Math. und Mech. - 1988. — 68, N 4. — P. 126 — 128.