МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л.М. ЛОМОНОС, Н.П. МУРАНОВА

МАТЕМАТИКА

ВСТУПНЕ ТЕСТУВАННЯ

Навчально-методичний
посібник

Київ 2006

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7
Л 753

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Н.О. Вірченко* (Національний технічний університет України "КПІ"), канд. техн. наук, доц. *В.І. Кубанський* (Національний авіаційний університет)

Затверджено науково-методично-редакційною радою Інституту доуніверситетської підготовки НАУ 15 травня 2006 року.

Ломонос Л.М., Муранова Н.П.

Л753 Математика. Вступне тестування: Навчально-методичний посібник. К.: НАУ, 2006 – 52 с.

Посібник містить програму з математики, зразки білетів для проведення співбесіди із вступниками на підготовче відділення, на підготовчі курси, зразки виконання основних типових задач з вказаних білетів.

Наведено програму з математики, рекомендовану Міністерством освіти і науки України для вступників до вищих навчальних закладів.

Призначений для вступників в Інститут доуніверситетської підготовки, а також для викладачів для проведення вхідної співбесіди.

УДК 378.141(076.5)
ББК В 10я7

ПЕРЕДМОВА

Вхідна співбесіда з математики проводиться із вступниками в ІДП НАУ з метою виявлення знань в рамках шкільної програми з даної дисципліни. Вступники в ІДП повинні впевнено володіти математичними знаннями і навиками, передбаченими програмою, вміти застосовувати їх при розв'язуванні задач і вправ.

Білет співбесіди містить чотири завдання. Перше і друге завдання – тести, оцінюються по 10 балів, третє і четверте завдання – по 20 балів. Максимальна кількість балів дорівнює 60.

Даний посібник складається з шести розділів. Перший розділ містить програму з математики для проведення співбесіди із вступниками в ІДП. В 2 і 4 розділах наводяться зразки білетів для проведення співбесіди із вступниками на підготовчі курси та підготовче відділення. У 3 і 5 розділах наводяться зразки виконання деяких завдань з вказаних білетів. В шостому розділі міститься програма з математики, рекомендована Міністерством освіти і науки України для вступників до вищих навчальних закладів.

Проведення вхідної співбесіди сприяє розвитку правильної індивідуальної роботи викладачів із слухачами ІДП.

Даний посібник допоможе вступникам в ІДП систематизувати свої знання з математики при підготовці до вхідної співбесіди і підготувати себе для успішного навчання в ІДП.

1. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ В ІДП (ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ ТА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ)

І. Арифметика, алгебра.

1. Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК) натуральних чисел.
2. Звичайні дроби, дії над ними.
3. Десяткові дроби, дії над ними.
4. Пропорції, властивості пропорцій.
5. Відсотки.
6. Дії над степенями з натуральними та раціональними показниками. Арифметичний корінь та його властивості.
7. Модуль дійсного числа, його геометричний зміст.
8. Одночлен і многочлен. Дії над ними.
9. Формули скороченого множення $((a \pm b)^2, (a \pm b)^3, a^2 - b^2, a^3 \pm b^3, (a+b+c)^2)$.
10. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення та область значень функції. Властивості функцій: парність, непарність, періодичність.
11. Основні властивості і графіки елементарних функцій: $y = kx + b$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = \frac{k}{x}$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tg\, x$; $y = ctg\, x$.
12. Лінійні рівняння з однією змінною. Системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.
13. Квадратні рівняння. Знаходження коренів. Теорема Вієта.
14. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
15. Основні властивості числових нерівностей.
16. Розв'язання найпростіших раціональних та ірраціональних нерівностей.
17. Арифметична прогресія.
18. Геометрична прогресія.
19. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Тригонометричні функції довільного кута.
20. Основні тригонометричні тотожності.
21. Формули зведення.
22. Тригонометричні функції подвійного та половинного аргументу.

23. Формули додавання аргументів тригонометричних функцій $(\sin(\alpha \pm \beta), \cos(\alpha \pm \beta), tg(\alpha \pm \beta))$.
24. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і навпаки.
25. Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.

II. Геометрія.

1. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі.
2. Вектори. Операції над векторами.
3. Трикутник. Основні лінії у трикутнику (медіана, бісектриса, висота, середня лінія), їх властивості.
4. Сума кутів трикутника. Сума кутів опуклого многокутника. Зовнішній кут трикутника, його властивість.
5. Рівносторонній, рівнобедрений та прямокутний трикутники, їх властивості. Теорема Піфагора.
6. Обчислення площі трикутника.
7. Ознаки рівності трикутників.
8. Ознаки подібності трикутників.
9. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Їх основні властивості і формули площ.
10. Коло і круг, їх основні елементи. Властивості дотичної до кола. Центральні і вписані кути, їх властивості.
11. Коло, вписане в трикутник та описане навколо нього.
12. Коло, вписане в чотирикутник та описане навколо нього.

III. Додаткові питання для співбесіди із вступниками на підготовче відділення.

1. Показникова функція, її властивості та графік.
2. Логарифми, їх властивості.
3. Логарифмічна функція, її властивості та графік.
4. Найпростіші показникові, логарифмічні рівняння та нерівності.
5. Похідна функції. Механічний та геометричний зміст похідної. Похідна суми, добутку і частки двох функцій.
6. Знаходження екстремумів функції та найбільшого і найменшого значень функції на заданому проміжку.
7. Рівняння дотичної до графіка функції.
8. Многогранники. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.
9. Тіла обертання. Формули площ їх поверхонь та об'ємів.

2. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧІ КУРСИ

Білет № 1-К

1. Знайти значення виразу $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$.

   а) $2+\sqrt{2}$; б) 1; в) 3; г) інша відповідь, записати її.

2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$.

   а) $x\in\left(-\infty;\,6\dfrac{4}{5}\right)$; б) $x\in(-\infty;\,-3]$; в) $x\in[6;\,\infty)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Спростити вираз $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin^4\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

4. Знайти площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 см і 44 см, а непаралельні – 17 см і 25 см.

Білет № 2-К

1. Спростити вираз $\dfrac{a^2-3ab}{2b}\cdot\dfrac{b}{a^2-9b^2}$.

   а) $\dfrac{3a}{a-3b}$; б) $\dfrac{a}{2(a+3b)}$; в) $\dfrac{a}{2}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити значення виразу

   $\sin 825^0\cdot\cos(-15^0)+\cos 75^0\cdot\sin(-555^0)+tg\,155^0\cdot tg\,245^0$.

   а) 2; б) 0; в) -1; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $|x+2|+|x+3|\ge x+4$.

4. Знайти довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=5$ см, $|\vec{b}|=8$ см, а кут між ними 120^0.

Білет № 3-К

1. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{x^4-16}+\sqrt{x+1}$.

   а) $x\in[-1;\ 2)$; б) $x\in[2;\ \infty)$; в) $(-2;\ 2)$; г) інша відповідь, записати її.

2. Розв'язати рівняння $|3x-8|-|3x-2|=6$.

   а) $x=\dfrac{3}{2}$; б) $x\in\left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right)$; в) $x\in(0;\ 2)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Довести тотожність $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=ctg\dfrac{15\alpha}{2}$.

4. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см. Знайти основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

Білет № 4-К

1. Спростити вираз $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

   а) $ctg^2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\sin 2\alpha$; г) інша відповідь, записати її.

2. Розв'язати рівняння $3^{2x-1}-3^x-\dfrac{4}{3}=0$.

   а) $\log_3 8$; б) 9; в) $\log_3 4$; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $6x^2-13|x-2|+7\geq 0$.

4. У трапеції бічні сторони дорівнюють 169 см і 125 см. Довжина вписаного кола дорівнює 120π. Знайти основи трапеції.

Білет № 5-К

1. Знайти число, $6\frac{1}{4}\%$ якого складає $\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)\cdot 2\frac{1}{4}$.

   а) 25; б) 42; в) 36; г) інша відповідь, записати її.

2. Розв'язати рівняння $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos x}=0$.

   а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$; б) $x=2\pi k, k\in Z$; в) $x=\pi+2\pi k, k\in Z$;

   г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}<\frac{10}{3}$.

4. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно рівні 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.

Білет № 6-К

1. При яких значеннях x функція $y=5^{\frac{2+x}{x-2}}+1$ більша за 2?

   а) $x\in(-3;3)$; б) $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$; в) $x\in(4;\infty)$; г) інша відповідь, записати її.

2. Позбавитись від ірраціональності у знаменнику дробу

$$\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}.$$

   а) $\frac{4(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}+1)}{3}$; б) $\left(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$;

   в) $2\cdot\left(\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{117}+\sqrt[4]{9}\right)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Довести тотожність

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

4. У паралелограмі, бісектриса гострого кута, який дорівнює 60^0, ділить сторону на відрізки 33 см і 55 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.

Білет № 7-К

1. Спростити вираз $\dfrac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\dfrac{18}{27a^3+8}-\dfrac{1}{3a+2}$.

   а) 3; б) 0; в) $a+1$; г) інша відповідь, записати її.

2. Скільки розв'язків має рівняння $|\cos x| = -x^2+3x-4$?

   а) 3; б) 0; в) 1; г) інша відповідь, записати її.

3. При якому значенні a відношення коренів рівняння $x^2+ax-16=0$ дорівнює -4?

4. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 9 см і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.

Білет № 8-К

1. Сума двох чисел дорівнює 527. Відомо, що 8% першого числа дорівнюють 7,5% другого. Знайти ці числа.

   а) 127, 400; б) 255, 272; в) 227, 300; г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити $\sin(2\alpha+\pi)$, якщо $tg\,\alpha = \dfrac{2}{3}$.

   а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{2}{13}$; в) $-\dfrac{12}{13}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{3}\right)\cdot|x+2|}$.

4. В прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписано коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайти гіпотенузу.

Білет№ 9-К

1. Позбутися від ірраціональності у знаменнику $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

   а) $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}}$; б) $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 20 см, а один з катетів 12 см.

а) 144 см^2; б) 96см^2; в) 112см^2; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x+4}-x+2} > 0.$

4. Розв'язати рівняння $7 + 4\cos x \cdot \sin x + 1{,}5 \cdot (tg\, x + ctg\, x) = 0.$

Білет № 10-К

1. Знайти суму десяти членів арифметичної прогресії, якщо $a_5 = 7{,}25;\ a_1 = 3{,}25.$

   а) 90,5; б) 77,5; в) 110; г) інша відповідь, записати її.

2. Спростити вираз

$$\frac{\sin(-328^0)\cdot\sin 958^0}{ctg\,572^0} - \frac{\cos(-508^0)\cdot\cos(-1022^0)}{tg(-212^0)}.$$

   а) $2+\sqrt{3}$; б) -1; в) $3-\sqrt{2}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати рівняння $2x^4 - 9x^3 + 9x - 2 = 0.$

4. Площа прямокутного трикутника дорівнює 25 см^2, а катети відносяться як 2:1. Обчислити радіус вписаного та описаного кіл.

Білет № 11-К

1. Спростити вираз

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}} - \frac{8ab}{a^2-4b^2} + \frac{2b}{a-2b},\ 0 < a < 2b.$$

   а) $\dfrac{3ab}{a+2b}$; б) $\dfrac{a}{2b-a}$; в) $2a+3b$; г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити $1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha$, якщо $tg\,\alpha = -2.$

   а) -4; б) 2; в) 6; г) інша відповідь, записати її.

3. Побудувати графік функції $y = |x+1| + |x-1|.$

4. Знайти гострий кут рівнобедреної трапеції, якщо її площа дорівнює 4см^2, а основи дорівнюють 5 см і 3 см.

Білет № 12-К

1. Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{(x^2+3x+3)\left(\frac{2x+1}{x-2}-1\right)}.$$

а) $x\in(-1;\infty)$; б) $x\in(-\infty;-3]\cup(2;\infty)$; в) $x\in(2;4)$; г) інша відповідь, записати її.

2. Скільки коренів має рівняння $2^{-|x|}=2-|x|$?

а) 3; б) 2; в) 4; г) інша відповідь, записати її.

3. Спростити вираз: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{4}$..

4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють b і c. Знайти довжину бісектриси прямого кута.

Білет№ 13-К

1. Обчислити $\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}$.

а) 3; б) 1; в) 5; г) інша відповідь, записати її.

2. При яких значеннях a нерівність $\dfrac{ax}{x^2+4}<1,5$ виконується для довільних значень $x\in R$?

а) $a\in(-4;3)$; б) $a\in(-6;6)$; в) $a\in(0;5)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Знайти значення $tg\dfrac{x}{2}$, якщо $\sin x-\cos x=1,4$.

4. Дві бічні сторони трикутника дорівнюють 26 см і 30 см, а висота, проведена на третю сторону – 24 см. Обчислити медіану, проведену до третьої сторони.

Білет № 14-К

1. Обчислити $\cos\left(2\alpha+\frac{7\pi}{4}\right)$, якщо $ctg\,\alpha=\frac{2}{3}$.

   а) $3\sqrt{2}$; б) $\frac{7\sqrt{2}}{26}$; в) $4-\sqrt{2}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Спростити вираз $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

   а) $\sqrt{x}(x+2)$; б) $x-1$; в) $2x$; г) ніша відповідь, записати її.

3. Побудувати графік $y=\frac{x+3}{|x+3|}(x^2-16)$.

4. В коло вписано чотирикутник, три послідовні сторони якого дорівнюють $2\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см і 6 см, а четверта сторона – діаметр кола. Знайти радіус.

Білет № 15-К

1. Обчислити $\sin\alpha$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$.

   а) $-0{,}48$; б) $0{,}96$; в) $0{,}54$; г) інша відповідь, записати її.

2. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{x}{1-x}=x^2+4x+2$?

   а) 2; б) 3; в) 1; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність: $\frac{x^2(x-2)}{\log_{0,5}(x^2+1)}\geq 0$.

4. В трикутник вписано коло радіусом 4 см. Одна із сторін трикутника поділена точкою дотику на відрізки 6 см і 8 см. Знайти довжину інших сторін трикутника.

3. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ (ПІДГОТОВЧІ КУРСИ)

Білет № 1-К

3. Спростити вираз $\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

Розв'язання.

Використаємо формулу зведення $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Дістаємо

$\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos^4\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$, тобто дану умову можемо переписати у вигляді $\cos^4\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$

$$=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)=$$

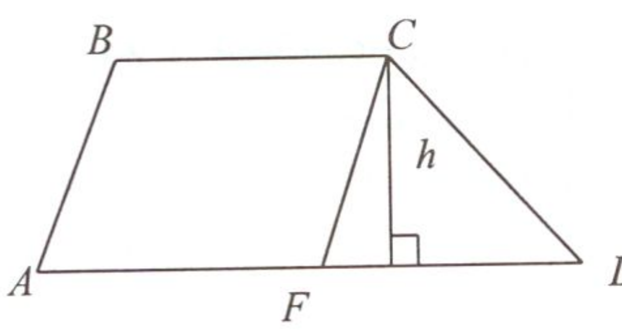
$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=A.$$

За формулою косинуса подвійного аргументу отримуємо

$A=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$.

Відповідь: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$.

4. Знайти площу трапеції, паралельні сторони якої дорівнюють 16 см і 44 см, а непаралельні – 17 см і 25 см.



Дано:
$ABCD$ – трапеція,
$BC \parallel AD$,
$BC = 16$ см, $AD = 44$ см,
$AB = 17$ см, $CD = 25$ см

Знайти S_{ABCD}

Розв'язання.

Проводимо $CF \parallel AB$. Отримуємо ΔCDF, у якого відомі всі сторони: $CF = AB = 17$ см, $FD = AD - AF = 28$ см, $CD = 25$ см. За формулою Герона обчислюємо $S_{\Delta CDF}$:

$$S_{\Delta CDF} = \sqrt{p(p-CD)(p-FD)(p-CF)} = \sqrt{35 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 18} = 210 \left(\text{см}^2\right).$$

Але $S_{\Delta CDF} = \dfrac{1}{2} h \cdot FD$, звідки $h = 15$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = 450 \left(\text{см}^2\right).$$

Відповідь: $450\,\text{см}^2$.

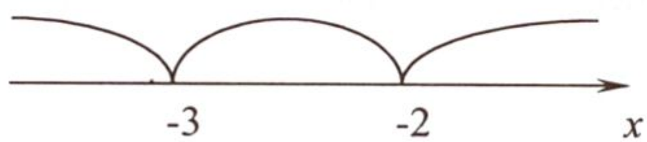
Білет № 2-К

3. Розв'язати нерівність $|x+2| + |x+3| \geq x + 4$.

Розв'язання.

Використовуємо метод інтервалів. $D(f): x \in R$.

Відкладемо на числовій осі корені виразів, які знаходяться під знаками модулів

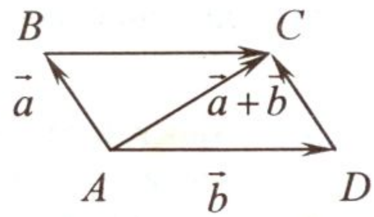


Отримуємо сукупність трьох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3, \\ -x - 2 - x - 3 \geq x + 4, \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq -2, \\ -x - 2 + x + 3 \geq x + 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x + 2 + x + 3 \geq x + 4, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x = -3 \\ x \geq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-1; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; \infty)$.

4. Знайти довжину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 5\,\text{см}$, $\left|\vec{b}\right| = 8\,\text{см}$, а кут між ними 120^0.



Розв'язання.

Маємо $\angle ADC = 180^0 - 120^0 = 60^0$,

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

В ΔACD використовуємо теорему косинусів

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^0} = 7\ (\text{см}).$$

Відповідь: 7 см.

Білет № 3-К

3. Довести тотожність

$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha} = ctg\frac{15\alpha}{2}.$$

Розв'язання.

Застосовуємо формули

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

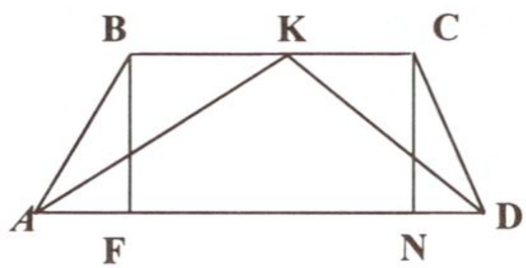
і перетворюємо ліву частину даної тотожності

$$\frac{2\sin\frac{13\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{17\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{13\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{17\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{13\alpha}{2} - \sin\frac{17\alpha}{2}}{\cos\frac{17\alpha}{2} - \cos\frac{13\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{-2\sin\alpha\cdot\cos\frac{15\alpha}{2}}{-2\sin\alpha\cdot\sin\frac{15\alpha}{2}} = ctg\frac{15\alpha}{2}.$$

При скороченні дробів потрібно врахувати, що $\begin{cases} \alpha \neq \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{2\pi k}{15}, \quad k \in Z \end{cases}$

4. Бісектриси гострих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см. Знайти основи трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$BC \parallel AD$, $AB = 15$ см,

$CD = 13$ см., $BF \perp AD$,

$BF = 12$ см,

AK і KD – бісектриси.

Знайти BC і AD

Розв'язання.

$\angle KAD = \angle BKA$ і $\angle KDA = \angle CKD$ (внутрішні перехресні кути). Звідси випливає, що ΔABK і ΔKCD – рівнобедрені, тобто $AB = BK = 15$ см, $CD = KC = 13$ см.

Дістаємо, що $BC = BK + KC = 28$ см. Проводимо $CN \perp AD$. За теоремою Піфагора з ΔNCD знаходимо ND, а з ΔABF знаходимо AF:

$$ND = \sqrt{169 - 144} = 5 \ (\text{см})$$

$$AF = \sqrt{225 - 144} = 9 \ (\text{см})$$

$$AD = AF + FN + ND = 42 \text{ см}.$$

Відповідь: 28 см і 42 см.

Білет № 4-К

3. Розв'язати нерівність $6x^2 - 13|x - 2| + 7 \geq 0$.

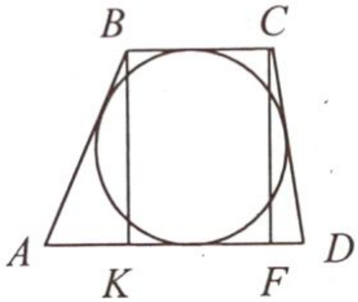
Розв'язання.

Використовуємо означення абсолютної величини. Отримуємо сукупність двох систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\ge 0\\ 6x^2-13x+33\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0\\ 6x^2+13x-19\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -\dfrac{19}{6}\\ 1\le x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\, -\frac{19}{6}\right]\cup[1;\,\infty).$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\, -\frac{19}{6}\right]\cup[1;\,\infty)$.

4. У трапеції бічні сторони дорівнюють 169 см і 125 см. Довжина вписаного кола дорівнює 120π. Знайти основи трапеції.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$BC \parallel AD$, $AB = 169$ см, $CD = 125$ см.

$L \doteq 120\,\pi$ (L – довжина вписаного кола)

Знайти BC і AD

Розв'язання.

$L=2\pi r$, звідки $r=60$ см. Проводимо висоти BK і CF, $BK=CF=2r=120$ см.

За теоремою Піфагора з ΔABK і ΔFCD знаходимо AK і FD:

$$AK=\sqrt{169^2-120^2}=119\,(\text{см}),$$

$$FD=\sqrt{125^2-120^2}=35\,(\text{см}).$$

Використовуючи властивість описаного чотирикутника:

$AB+CD=BC+AD$, складаємо систему

$$\begin{cases}AD+BC=294\\ AD-BC=154\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AD=224\\ BC=70\end{cases}$$

Відповідь: 70 см і 224 см.

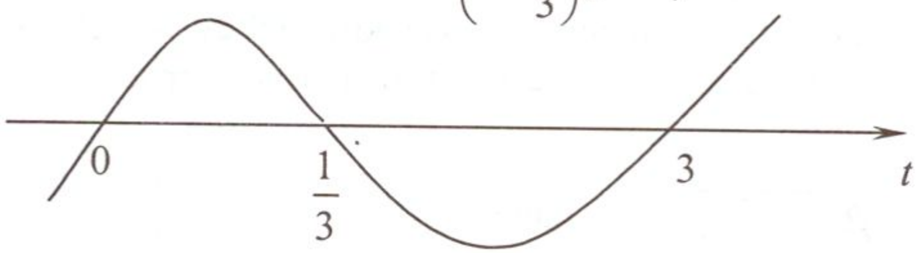
Білет № 5-К

3. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}<\dfrac{10}{3}$.

Розв'язання.

Позначимо $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}=t,\ t\neq 0$, тоді маємо нерівність

$$t+\frac{1}{t}<\frac{10}{3}\Leftrightarrow t(3t^2-10t+3)<0\Leftrightarrow t\left(t-\frac{1}{3}\right)(t-3)<0$$



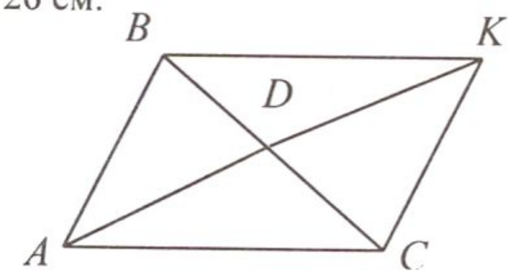
Таким чином отримуємо сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} t<0 \\ \dfrac{1}{3}<t<3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}<0 \\ \dfrac{1}{3}<\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x}}<3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x}<0 \\ \dfrac{1}{27}<\dfrac{x-1}{x}<27 \end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{26}\right)\cup(0;1)\cup\left(\frac{27}{26};\infty\right).$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{26}\right)\cup(0;1)\cup\left(\dfrac{27}{26};\infty\right)$.

4. Знайти площу трикутника, якщо дві його сторони відповідно дорівнюють 27 см і 29 см, а медіана третьої сторони дорівнює 26 см.



Дано: ΔABC,

$AB=27$ см, $AC=29$ см

$BD=DC$, $AD=26$ см

Знайти $S_{\Delta ABC}$.

Розв'язання.

Продовжуємо AD на відстань $DK = AD$. Чотирикутник $ABKC$ буде паралелограмом, оскільки діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABKC}$, але

$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} S_{ABKC}$, звідки

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABK}$.

У ΔABK всі сторони відомі. За формулою Герона знаходимо $S_{\Delta ABC} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270 \left(\text{см}^2\right)$.

Відповідь: $270\ \text{см}^2$.

Білет № 6-К

Довести тотожність:

$$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язання.

Використовуючи формули зведення, а також формули пониження степеня $\left(\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)$, перетворюємо ліву частину тотожності

$$\sin^2\left(2\pi - \frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(2\pi + \frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) =$$

$$= \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - 2\alpha\right) =$$

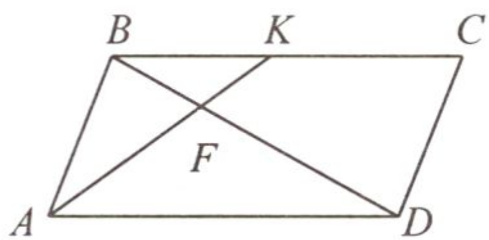
$$= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 4\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4\alpha\right)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right) = A.$$

Далі використовуємо формулу перетворення суми тригонометричних функцій у добуток $\left(\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, дістаємо

$$A = -\cos\frac{\pi}{4}\cos 4\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4\alpha = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

4. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 60^0, ділить сторону на відрізки 33 см і 55 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса меншу діагональ паралелограма.



Дано:
$ABCD$ – паралелограм,
$\angle BAD = 60^0$,
$\angle BAK = \angle KAD$,
$BK = 33$ см, $KC = 55$ см.

Знайти BF і FD

Розв'язання.
$\angle KAD = \angle BKA$ (внутрішні перехресні кути), звідси ΔABK – рівнобедрений і $AB = BK = 33$ см, $BC = BK + KC = 88$ см.

$AD = BC = 88$ см (протилежні сторони паралелограма).

У ΔABD за теоремою косинусів знаходимо BD:

$$BD = \sqrt{33^2 + 88^2 - 2\cdot 33\cdot 88\cdot\cos 60^0} = 77 \text{ (см)}.$$

Далі використовуємо властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника і складаємо систему

$$\begin{cases} BF + FD = 77 \\ \dfrac{BF}{FD} = \dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BF = 21 \\ FD = 56. \end{cases}$$

Відповідь: 21 см і 56 см.

Білет № 7-К

3. При якому значенні a відношення коренів рівняння $x^2+ax-16=0$ дорівнює -4?

Розв'язання.

Позначимо корені даного квадратного рівняння через x_1 і x_2. Використовуючи умову задачі і теорему Вієта, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_2}=-4\\ x_1\cdot x_2=-16\\ x_1+x_2=-a\end{cases}$$

З першого і другого рівнянь системи знаходимо

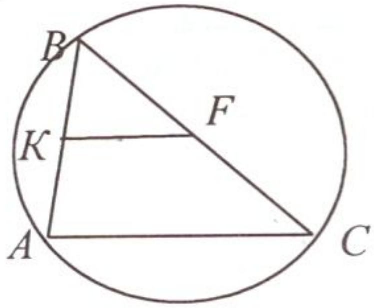
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=-8\\ x_2=2\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=8\\ x_2=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Підставляємо знайдені значення x_1 і x_2 у третє рівняння системи.

Дістаємо $a=\pm 6$.

Відповідь: $a=\pm 6$.

4. Із однієї точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють 9 см і 17 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами даних хорд дорівнює 5 см.



Дано:
коло, AB, BC – хорди,
$AB=9$ см, $BC=17$ см, $BK=AK$,
$BF=CF$, $KF=5$ см,

Знайти R

Розв'язання.

З'єднуємо точки A і C. Отримали ΔABC, в якому KF – середня лінія. За властивістю середньої лінії маємо $AC = 2KF = 10$ см. Отже у ΔABC відомі всі сторони. Використовуючи формулу Герона, знаходимо площу ΔABC:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 36\left(\text{см}^2\right).$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{85}{8} \text{ см.}$$

Відповідь: $\frac{85}{8}$ см.

Білет № 8-К

3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}\right)|x+2|}$.

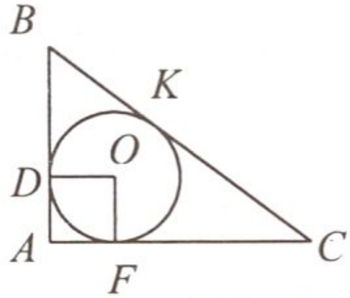
Розв'язання.

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3}\right)|x+2| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| \geq 0 \text{ для } x \in R \\ \frac{x}{3} - \frac{4}{x} - \frac{4}{3} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x^2 - 4x - 12) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x+2)(x-6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 0) \cup [6; \infty)$$

Відповідь: $x \in [-2; 0) \cup [6; \infty)$

4. В прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см, вписано коло. Гіпотенуза ділиться точкою дотику у відношенні 2:3. Знайти гіпотенузу.



Дано:
$\Delta ABC,\ \angle BAC = 90^0,$

$P_{\Delta ABC} = 36$ см, $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{2}{3}.$

Знайти BC

Позначимо $BK = 2x,\ KC = 3x.$ Тоді за властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, маємо $BD = BK = 2x$, $FC = KC = 3x,\ AD = AF = r$ (оскільки $ADOF$ – квадрат).
Використовуючи умову задачі і теорему Піфагора, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x + 2r = 36 \\ (r+2x)^2 + (r+3x)^2 = 25x^2 \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом підстановки, дістаємо $x = 3$ см.
Отже $BC = 15$ см.
Відповідь: 15 см.

Білет № 9-К

3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x+4} - x + 2} > 0.$

Розв'язання.
Враховуючи, що чисельник завжди додатний, отримуємо ірраціональну нерівність

$$\sqrt{x+4} > x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ x + 4 > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 4 \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [2; 5).$$

Відповідь: $x \in [2; 5)$.

4. Розв'язати рівняння $7+4\cos x\sin x+1,5(tg\, x+ctg\, x)=0$.

Розв'язання.

$$D(f): x\neq\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z.$$

Використовуємо формулу синуса подвійного кута ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$) і основу тригонометричну одиницю, переписуємо дане рівняння $7+2\sin 2x+\dfrac{3}{\sin 2x}=0$.

Позначимо $\sin x=t$, $\begin{cases}|t|\leq 1,\\ t\neq 0.\end{cases}$

Маємо квадратне рівняння відносно t

$$2t^2+7t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-3\,(\text{сторонній корінь})\\ t_2=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Отже $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$.

Відповідь: $X=\left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}\right\}, k\in Z$.

Білет № 10-К

3. Розв'язати рівняння $2x^4-9x^3+9x-2=0$.

Розв'язання.

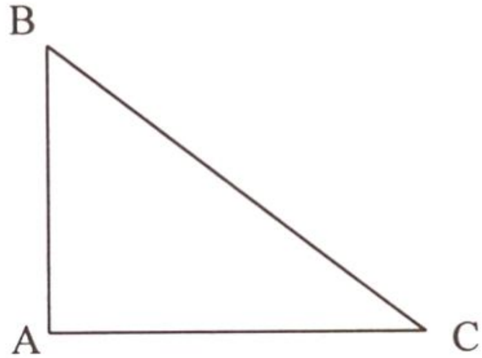
Методом групування розкладфємо ліву частину рівняння на множники

$$2(x^4-1)-9x(x^2-1)=0\Leftrightarrow 2(x^2-1)(x^2+1)-9x(x^2-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)(2x^2-9x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\ 2x^2-9x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm 1\\ x_{3,4}=\dfrac{9\pm\sqrt{65}}{4}\end{array}\right.$$

Відповідь: $X=\left\{\pm 1; \dfrac{9\pm\sqrt{65}}{4}\right\}$.

4. Площа прямокутного трикутника дорівнює 25 $см^2$, а катети відносяться як 2:1. Обчислити радіуси вписаного та описаного кіл.



Дано:

ΔABC, $\angle A = 90^0$, $S_{\Delta ABC} = 25\,см^2$,

$AC : AB = 2:1$.

Знайти r і R.

Розв'язання.

Позначимо $AB = x$, $AC = 2x$,

тоді $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} x \cdot 2x = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \text{ (сторонній корінь)} \end{array}\right.$

Отже визначили катети даного трикутника $AB = 5$ см, $AC = 10$ см.

За теоремою Піфагора знаходимо гіпотенузу.

$BC = 5\sqrt{5}$ см.

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ см.}$$

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{50}{15 + 5\sqrt{5}} = \frac{10}{3 + \sqrt{5}} = \frac{5\left(3 - \sqrt{5}\right)}{2} \text{ см.}$$

Відповідь: $R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ см, $r = \frac{5\left(3 - \sqrt{5}\right)}{2}$ см.

4. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ СПІВБЕСІДИ ІЗ ВСТУПНИКАМИ НА ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ

Білет № 1-В

1. Обчислити $10^{3-\lg 2}$.

   а) 2000; б) 500; в) 10; г) інша відповідь, записати її.
2. Кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 2, 4, 12, 18. Знайти найбільший з них.

   а) 75^0; б) 210^0; в) 180^0; г) інша відповідь, записати її.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin(x-45^0)+\sin(x+45^0)=\sqrt{2}$.
4. Обчислити катети прямокутного трикутника, якщо їх відношення дорівнює 20:21, а різниця між радіусами описаного та вписаного кіл дорівнює 17 см

Білет № 2-В

1. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, якщо $f(x)=\cos^6 x+\sin^6 x$.

   а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) інша відповідь, записати її.
2. Спростити вираз $\frac{a-36a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+6a^{\frac{1}{3}}}$.

   а) $a^{\frac{1}{3}}+1$; б) $a^{\frac{1}{3}}-6$; в) $6+a^{\frac{2}{3}}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Чи можуть числа $\sqrt{3}, 2, \sqrt{8}$ бути членами (не обов'язково сусідніми) арифметичної прогресії?
4. Навколо кола радіуса r описано прямокутну трапецію, менша із сторін якої дорівнює $1,5r$. Визначити площу трапеції

Білет № 3-В

1. Знайти 20% від числа $\left(3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\right)$.

   а) $2\frac{1}{6}$; б) $1\frac{13}{36}$; в) $3\frac{1}{6}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити $tg\,18^0\cdot tg\,288^0+\sin 32^0\cdot\sin 148^0-\sin 302^0\cdot\sin 122^0$.

   а) -2; б) 0; в) 3; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати рівняння $\dfrac{3-\log_3(5x+2)}{\log_3(x-4)}=1$.

4. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів дорівнює 6 см. Обчислити периметр трикутника.

Білет № 4-В

1. Знайти суму перших п'яти членів арифметичної прогресії, якщо $a_3=10$, а різниця $d=3$.

   а) 30; б) 50; в) 45; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$.

   а) $x\in(-2;0)$; б) $x\in(1;\infty)$; в) $x\in(-5;\infty)$; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати рівняння $1+\sin x=(\sin 2x+\cos 2x)^2$.

4. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$ і $\vec{b}=(0;-2;1)$.

Білет № 5-В

1. Знати число, 3% від якого дорівнює $3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}$.

   а) $30\frac{1}{3}$; б) $66\frac{2}{3}$; в) $21\frac{1}{6}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Спростити вираз $1-\sin 4\alpha + ctg\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)\cdot\cos 4\alpha$.

   а) $-1{,}5$; б) 0; в) 2; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$.
4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=-x^2+1$, якщо ця дотична проходить через точку $A(1;1)$.

Білет № 6-В

1. Обчислити $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

   а) 22; б) 19; в) 31; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ на проміжку $[-2;2]$.

   а) $y_{\text{найм}}=0; y_{\text{найб}}=10$; б) $y_{\text{найм}}=-\frac{14}{3}; y_{\text{найб}}=\frac{2}{3}$;

   в) $y_{\text{найм}}=1; y_{\text{найб}}=\frac{10}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

3. У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, ділить сторону на відрізки 21 см і 30 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону.
4. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

Білет № 7-В

1. Обчислити $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, якщо $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5}$.

   а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти область визначення функції $y = \log_{\frac{1}{5}}\left(\log_6\left(17 - x^2\right)\right)$.

   а) $x \in \left(-\sqrt{17}; \sqrt{17}\right)$; б) $x \in (-4; 4)$; в) $x \in (1; \infty)$;

   г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $x^2 + |x-4| + 5x - 3 \leq 0$.
4. У рівнобедреній трапеції, описаній навколо кола, основи дорівнюють 36 см і 10 см. Визначити радіус кола.

Білет № 8-В

1. Знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії, якщо $b_3 = 18$, $q = 3$.

   а) 28; б) 80; в) 124; г) інша відповідь, записати її.
2. Обчислити $f'(0)$, якщо $f(x) = 5(x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x-1}$.

   а) -12; б) -9; в) 6; г) інша відповідь, записати її.

3. Розкласти на множники $\left(x^2 + 2x\right)^2 + 3\left(x^2 + 2x\right) + 2$.
4. Знайти $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\cos\alpha = 0,5$; $\sin\beta = -0,4$;

   $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$; $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

Білет № 9-В

1. Обчислити $\cos^2 240^0 - \sin^2 240^0$.

   а) $\sqrt{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти найбільше значення функції $y = 1 + 12x - 3x^2$ на проміжку $[-3; 3]$.

   а) 14; б) 13; в) 62; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати нерівність $\log_2^2 x^2 - 4\log_2 x^3 \geq 16$.

4. Скласти рівняння дотичних до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ так, щоб точка дотику x_0 $(x_0 \neq 0)$ була одна і та ж сама для обох графіків і щоб ці дотичні були паралельні між собою.

Білет № 10-В

1. При яких значеннях x функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+3}}$ більша за 1?

   а) $x \in (-2; -3)$; б) $x \in (-\infty; -3)$; в) $x \in (-3; \infty)$;
   г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = 5 \cdot \sqrt[5]{x^2} + 2x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$.

   а) 2; б) 6; в) -4; г) інша відповідь, записати її.

3. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.
4. У рівнобедреній трапеції одна основа дорівнює 40 см, інша 24 см. Діагоналі взаємоперпендикулярні. Знайти площу трапеції.

Білет № 11-В

1. Обчислити значення похідної функції
$y=\left(x^2+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)$ у точці $x_0=1$.
а) -10; б) 5; в) 12; г) інша відповідь, записати її.
2. При якому значенні k довжина вектора $\vec{a}=(-2;2;4k)$ вдвічі менша довжини вектора $\vec{b}=(3;3k;0)$?
а) $k=2$; б) $k\in\varnothing$; в) $k=-3$; г) інша відповідь, записати її.
3. Розкласти на множники вираз $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
4. Довести тотожність $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{3}{2}$.

Білет № 12-В

1. При якому значенні m вектори $\vec{a}=(2;3;-4)$ і $\vec{b}=(m;-6;8)$ колінеарні?
а) $m=2$; б) $m=-4$; в) $m=5$; г) інша відповідь, записати її.
2. Обчислити $\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 60^0\cdot\sin 80^0$.
а) $\dfrac{1}{8}$; б) $\dfrac{3}{16}$; в) $\dfrac{1}{3}$; г) інша відповідь, записати її.
3. Розв'язати рівняння $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.
4. У трикутнику з основою 15 см проведено відрізок паралельно основі. Площа здобутої трапеції становить 75% від площі трикутника. Знайти довжину цього відрізка.

Білет № 13-В

1. Знайти похідну функції $y = \cos 3x \cos x$ та обчислити її значення, якщо $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

   а) 3; б) 0; в) -2; г) інша відповідь, записати її.

2. Розв'язати нерівність $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12{,}25^{\frac{3x+1}{2}} \ge 1$.

   а) $x > -1$; б) $x \le 11$; в) $1 < x < 3$; г) інша відповідь, записати її.

3. Спростити вираз $\sqrt{\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{4x^{-1}} - 2} + \sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}} + \dfrac{2^{-2}}{x} + \dfrac{1}{2}}$.

4. Після ділення деякого двозначного числа на суму його цифр в частці отримали 7, а в залишку 5. Після ділення цього ж числа на добуток його цифр в частці отримали 3, а в залишку 11. Знайти це двозначне число.

Білет № 14-В

1. Обчислити $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$.

   а) $2 + \sqrt{3}$; б) 6; в) $3 - \sqrt{3}$; г) інша відповідь, записати її.

2. Знайти значення похідної функції $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

   а) -2; б) 1; в) 3; г) інша відповідь, записати її.

3. Побудувати графік функції $y = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2} \cdot (|x|+1)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}$.

4. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 6 см. Знайти радіуси кіл, вписаного в трапецію і описаного навколо неї, якщо відомо, що ці кола існують.

Білет № 15-В

1. Знайти $\cos^2 2\alpha$, якщо $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   а) 0,8; б) 0,36; в) 0,42; г) інша відповідь, записати її.

2. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

   а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{\pi}{3}$; г) інша відповідь, записати її.

3. Визначити, при яких значеннях a, b, c виконується рівність

$$\frac{x^2+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

4. Розв'язати нерівність $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

5. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ (ПІДГОТОВЧЕ ВІДДІЛЕННЯ)

Білет № 1-В

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin\left(x-45^0\right)+\sin\left(x+45^0\right)=\sqrt{2}.$

Розв'язання.

Використаємо формулу зведення

$$\sin\left(x+45^0\right)=\cos\left(90^0-x-45^0\right)=\cos\left(45^0-x\right)=\cos\left(x-45^0\right)$$

і перепишемо умову задачі $\sqrt{3}\sin\left(x-45^0\right)+\cos\left(x-45^0\right)=\sqrt{2}$.

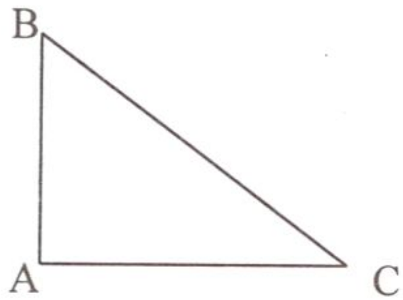
Вводимо допоміжний кут

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x-45^0\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x-45^0\right)\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь: $X=\left\{(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}+\pi k\right\},\ k\in Z.$

4. Обчислити катети прямокутного трикутника, якщо їх відношення дорівнює 20:21, а різниця між радіусами описаного і вписаного кіл дорівнює 17 см.



Дано:

$\Delta ABC,\ \angle A=90^0,$

$AB:AC=20:21,$

$R-r=17$ см.

Знайти AB і AC

Розв'язання.

Позначимо $AB=20x,\ \ AC=21x.$ За теоремою Піфагора маємо

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=29x.$ Оскільки $R=\dfrac{BC}{2}$, дістаємо $R=\dfrac{29x}{2}.$

Визначимо далі r через x. Для цього використаємо формули обчислення площі ΔABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = p \cdot r, \ p = \frac{AB + BC + AC}{2}, \text{ звідки } r = 6x.$$

Складаємо рівняння $\frac{29x}{2} - 6x = 17 \Leftrightarrow x = 2$ (см).

Дістаємо $AB = 40$ см, $AC = 42$ см.

Відповідь: 40 см, 42 см.

Білет № 2-В

3. Чи можуть числа $\sqrt{3}; 2; \sqrt{8}$ бути членами (не обов'язково сусідніми) арифметичної прогресії?

Розв'язання.

Припустимо, що можуть. Нехай $a_k = \sqrt{3}$, $a_p = 2$, $a_m = \sqrt{8}$. Використаємо формулу загального члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} = a_1 + (k-1)d \\ 2 = a_1 + (p-1)d \\ \sqrt{8} = a_1 + (m-1)d \end{cases}$$

З отриманої системи виключаємо a_1

$$\begin{cases} \sqrt{3} - 2 = (k-p)d, \\ \sqrt{8} - 2 = (m-p)d. \end{cases}$$

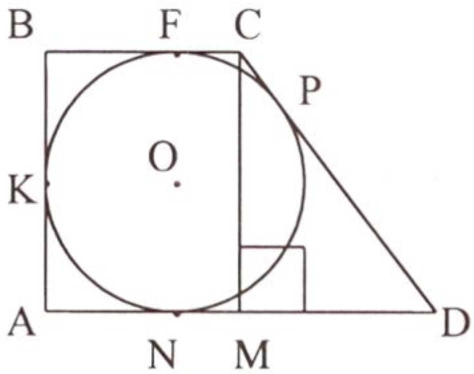
Далі виключаємо d

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{8}-2} = \frac{k-p}{m-p}.$$

В отриманій рівності зліва маємо ірраціональне число, а справа – раціональне число. Тобто рівність не виконується.

Відповідь: ні.

4. Навколо кола радіуса r описано прямокутну трапецію, менша із сторін якої дорівнює 1,5r. Визначити площу трапеції.



Дано:
$ABCD$ – трапеція,
$BC \parallel AD$, $BC = 1,5\ r$, $AB = 2\ r$,

Знайти S_{ABCD}

Розв'язання.

Використовуємо властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола і умову задачі.

Дістаємо: $BK = BF = AK = AN = r$,

$FC = CP = 0,5r$, $PD = ND = x$. Проводимо $CM \perp AD$, тоді $NM = AM - AN = 0,5r$; $MD = ND - NM = x - 0,5r$.

ΔCMD – прямокутний, $\angle CMD = 90^0$. За теоремою Піфагора знаходимо $CD^2 = CM^2 + MD^2 \Leftrightarrow \left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = 4r^2 + \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2r$.

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CM = \frac{9}{2} r^2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\frac{9}{2} r^2$ см^2.

Білет № 3-В

3. Розв'язати рівняння $\dfrac{3 - \log_3(5x+2)}{\log_3(x-4)} = 1$.

Розв'язання.

$$D(f):\ \begin{cases} 5x+2>0 \\ x-4>0 \\ x-4\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq 5. \end{cases}$$

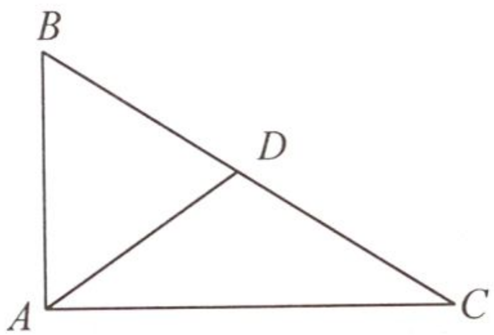
$$3-\log_3(5x+2)=\log_3(x-4) \Leftrightarrow 3=\log_3(x-4)+\log_3(5x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3=\log_3(x-4)\cdot(5x+2) \Leftrightarrow 27=(x-4)\cdot(5x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-18x-35 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5\ \overline{\in}\ D(f) \\ x_2=-\dfrac{7}{5}\ \overline{\in}\ D(f) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Відповідь: $x\in\varnothing$.

4. Відрізок, проведений з вершини прямого кута до середини гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а різниця катетів дорівнює 6 см. Обчислити периметр трикутника.



Дано:

$\Delta ABC,\ \angle A=90^0,\ BD=DC,$

$AD=15$ см, $AC-AB=6$ см.

Знайти $P_{\Delta ABC}$.

Розв'язання.

$AD=\dfrac{1}{2}BC$, звідси $BC=30$ см. Позначимо $AC=x$ см, $AB=y$ см. Використовуючи умову і теорему Піфагора складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+y^2=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ (x-y)^2+2xy=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ xy=432 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=18 \end{cases}$$

$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=72$ (см).

Відповідь: 72 см.

Білет № 4-В

3. Розв'язати рівняння $1+\sin x=(\sin 2x+\cos 2x)^2$.

Розв'язання.

$$1+\sin x=\left(\sin 2x+\cos 2x\right)^2 \Leftrightarrow 1+\sin x=$$
$$=\sin^2 2x+2\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x.$$

Використовуємо тригонометричну одиницю і формулу синуса подвійного кута, дістаємо $1+\sin x=1+\sin 4x \Leftrightarrow \sin 4x-\sin x=0$. Перетворюємо різницю синусів у добуток.

$$2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=\pi k\\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\frac{2}{3}\pi k\\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z\end{array}\right. .$$

Відповідь: $X=\left\{\frac{2}{3}\pi k;\ \frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k\right\},\ k\in Z.$

4. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$ і $\vec{b}=(0;-2;1)$.

Розв'язання.

Знаходимо вектори – діагоналі: $\vec{a}+\vec{b}=\left(2;-1;1\right)$; $\vec{a}-\vec{b}=\left(2;3;-1\right)$.

Далі за формулою знаходження косинуса кута між двома векторами $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

знаходимо косинус кута між діагоналями паралелограма:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{4-3-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = 0, \text{ звідси } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Білет № 5-В

3. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$.

Розв'язання.

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 2x^2+5x-6 > 4-4x-x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x < 0 \\ 2x^2+5x-6 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2 \\ x^2+9x-10 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ 2x^2+5x-6 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -10) \cup (1; \infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -10) \cup (1; \infty)$.

4. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2+1$, якщо ця дотична проходить через точку $A(1; 1)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної має вигляд $y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0)$, $(x_0; y_0)$ – точка дотику. Дістаємо

$y = -x_0^2+1-2x_0(x-x_0) = x_0^2+1-2x_0x.$

Оскільки дотична проходить через точку $A(1; 1)$, то координати точки A задовольняють рівняння дотичної

$$1 = x_0^2+1-2x_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

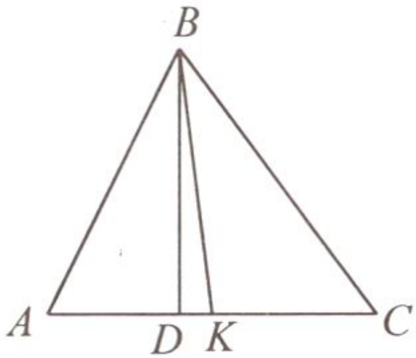
Отримуємо рівняння дотичних:

$$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=5-4x. \end{array}\right.$$

Відповідь: $y=1,\ \ y=5-4x.$

Білет № 6-В

3. У трикутнику висота, яка дорівнює 72 см, ділить сторону на відрізки 21 см і 30 см. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса цю сторону.



Дано:

$\Delta ABC,\ BD \perp AC,\ BD = 72$ см,

$AD = 21$ см, $DC = 30$ см,

$\angle ABK = \angle KBC.$

Знайти AK і KC.

Розв'язання.

Використаємо властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}.$$

З ΔABD і ΔDBC за теоремою Піфагора знаходимо AB і BC:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 75\,(\text{см})$$

$$BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = 78\,(\text{см}).$$

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{25}{26} \\ AK + KC = 51, \end{cases}$$

звідси маємо $AK = 25$ см, $KC = 26$ см.

Відповідь: 25 см, 26 см.

4. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

Розв'язання.

$$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0. \end{array}\right.$$

Друге рівняння отриманої сукупності однорідне. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ tg\, x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k \\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $X = \left\{\pi k;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k\right\},\ k \in Z.$

Білет № 7-В

3. Розв'язати нерівність $x^2 + |x-4| + 5x - 3 \le 0$.

Розв'язання.

За означенням абсолютної величини дістаємо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 4 \ge 0, \\ x^2 + 6x - 7 \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4 < 0, \\ x^2 + 4x + 1 \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3}\right].$$

Відповідь: $x \in \left[-2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3}\right]$.

4. У рівнобедреній трапеції, описаній навколо кола, основи дорівнюють 36 см і 10 см. Визначити радіус кола.

Дано:

$ABCD$ – трапеція,
$BC \parallel AD$, $AB = CD$,
$BC = 10$ см, $AD = 36$ см,

Знайти r

Розв'язання.

Використаємо властивість сторін описаного чотирикутника, дістаємо

$$AB = \frac{BC + AD}{2} = 23\,(\text{см}).$$

Проводимо $BK \perp AD$, $PF \perp AD$ (радіус, проведений в точку дотику перпендикулярний до дотичної). $BK = PF = 2r$. Оскільки $ABCD$ – рівнобедрена трапеція, то маємо:

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = 13\,(\text{см}).$$

У ΔABK за теоремою Піфагора маємо

$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = 6\sqrt{10}\,(\text{см})$, звідси $r = 3\sqrt{10}$ см.

Відповідь: $r = 3\sqrt{10}$ см.

Білет № 8-В

3. Розкласти на множники $\left(x^2 + 2x\right)^2 + 3\left(x^2 + 2x\right) + 2$.

Розв'язання.

Позначимо $x^2 + 2x = t$ Одержуємо $t^2 + 3t + 2 = (t+2)(t+1) =$
$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 2x + 2)(x+1)^2$.

Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 2$ має $D < 0$, тобто дійсних коренів не має.

Відповідь: $(x^2 + 2x + 2)(x+1)^2$.

4. Знайти $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\cos\alpha = 0,5$; $\sin\beta = -0,4$;

$$\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right); \ \beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right).$$

Розв'язання.

Використаємо формулу синуса різниці двох аргументів

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Оскільки $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, то $\sin\alpha < 0$ і з тригонометричної одиниці

дістаємо $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки $\beta \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, то $\cos\beta < 0$ і з тригонометричної одиниці

дістаємо $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Остаточно маємо $\sin(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{63}+2}{10} =$

$= \frac{3\sqrt{7}+2}{10}$.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{7}+2}{10}$.

Білет № 9-В

3. Розв'язати нерівність $\log_2^2 x^2 - 4\log_2 x^3 \geq 16$.

Розв'язання.

Використаємо властивість логарифмів $\log_a N^k = k\cdot\log_a N$ $(a>0, a\neq 1, N>0)$ і перепишемо дану нерівність

$$4\log_2^2 x - 12\log_2 x \geq 16.$$

Робимо заміну $\log_2 x = t$. Дістаємо нерівність

$$t^2 - 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 16 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [16; \infty)$.

4. Скласти рівняння дотичних до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ так, щоб точка дотику x_0 $(x_0 \neq 0)$ була одна і та ж сама для обох графіків і щоб ці дотичні були паралельні між собою.

Розв'язання.

Рівняння дотичної має вигляд $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$, (x_0, y_0) – точка дотику.

Дістаємо $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$, $y = x_0^3 + 3x_0^3(x - x_0)$.

Оскільки ці дотичні паралельні між собою, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тобто $2x_0 = 3x_0^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Таким чином шукані дотичні мають вигляд

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}; \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{9}$; $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{16}{27}$.

Білет № 10-В

3. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

Розв'язання.

Використаємо формулу пониження степеня $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

Дістаємо рівняння $\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$.

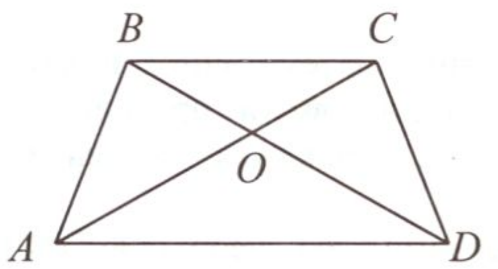
Використаємо формулу перетворення суми тригонометричних функції у добуток. Дістаємо

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 7x - \cos 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\sin 2x \sin 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi k}{2}, \\ x_2 = \dfrac{\pi k}{5}, \ k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $X = \left\{ \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi k}{5} \right\}, \; k \in Z.$

4. У рівнобедреній трапеції одна сторона дорівнює 40 см, інша 24 см. Діагоналі взаємоперпендикулярні. Знайти площу трапеції.



Дано:
$ABCD$ – трапеція,
$BC \parallel AD$, $AB = CD$,
$BC = 24$ см, $AD = 40$ см,
$AC \perp BD$

Знайти S_{ABCD}

Розв'язання.

Оскільки $ABCD$ – рівнобедрена трапеція, то $AC = BD$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2.$$

Маємо $\Delta ABC = \Delta BCD$ і $\Delta ABD = \Delta ACD$ (за трьома сторонами). Звідси випливає, що $\angle BCA = \angle CBD$ і $\angle BDA = \angle CAD$. Дістаємо, що ΔCOB і ΔAOD – рівнобедрені, прямокутні. За теоремою Піфагора дістаємо

$$AO = \sqrt{\frac{AD^2}{2}} = 20\sqrt{2} \; (\text{см}), \; OC = \sqrt{\frac{BC^2}{2}} = 12\sqrt{2} \; (\text{см}).$$

Знаходимо діагональ трапеції

$$AC = AO + OC = 32\sqrt{2} \; (\text{см}).$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 = 1024 \; (\text{см}^2).$$

Відповідь: 1024 см^2.

6. ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ, РЕКОМЕНДОВАНА МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ ДЛЯ ВСТУПНИКІВ ДО ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Програма з математики до вищих навчальних закладів складається з трьох розділів.

Перший з них є переліком основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем).

У другому розділі вказано теореми, які необхідно вміти доводити.

У третьому розділі перелічені основні математичні вміння і навички, якими повинен володіти вступник.

І. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ І ФАКТИ

Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа (*N*). Прості та складені числа. Дільник, кратне. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне.
2. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Цілі числа (*Z*). Раціональні числа (*Q*). Їх додавання, віднімання, множення і ділення. Порівняння раціональних чисел.
4. Дійсні числа (*R,)*, їх запис у вигляді десяткового дробу.
5. Зображення чисел на прямій. Модуль числа, його геометричний зміст.
6. Числові вирази. Вирази із змінними.
7. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь та його властивості.
8. Логарифми, їх властивості.
9. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.
10. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена).
11. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції. Функція обернена до даної.

12. Графік функції. Зростання і спадання функції, періодичність, парність, непарність функції.
13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма). Достатня умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.
14. Означення й основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневої $y = ax^n$ $(n \in Z)$, показникової $y = ax, a > 0$, логарифмічної $y = \log_a x$, тригонометричних: $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tgx$.
15. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.
16. Нерівності. Розв'язування нерівностей, Рівносильні нерівності.
17. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь.
18. Арифметична і геометрична прогресії. Формули *n*-го члена і суми *n*-перших членів прогресії.
19. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули).
20. Перетворення в добуток сум $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$.
21. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст.
22. Похідні суми, добутку, частки та функцій: $y = kx + b$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg\, x$, $y = x^n$, *де* $n \in N$.

Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Відношення площ подібних фігур. Рівність і подібність геометричних фігур.
2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.
3. Вектори. Операції над векторами.
4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.
5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

6. Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція, їх основні властивості.
7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола, Сектор, сегмент.
8. Центральні і вписані кути, їх властивості.
9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції.
10. Довжина кола та довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
11. Площина. Паралельні площини та площини, що перетинаються.
12. Паралельність прямої і площини.
13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.
14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма і похила призми; піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіпеди, їх види.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.
17. Формули площ поверхонь і об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса.
18. Формули об'єму кулі та її частин і формула площі поверхні сфери.

II. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ І ТЕОРЕМИ

Алгебра і початки аналізу

1. Функція $y = ax + b$, її властивості, графік.
2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості, графік.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості, графік.
4. Формула коренів квадратного рівняння.
5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
6. Властивості числових нерівностей.
7. Логарифм добутку, степеня, частки.

8. Функції $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg\, x$, їх означення, властивості, графіки.
9. Розв'язки рівнянь $\cos x = a$, $\sin x = a$, $tg\, x = a$.
10. Формули зведення.
11. Залежність між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу.
12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
13. Похідна суми, добутку і частки двох функцій, степеневої функції.
14. Рівняння дотичної до графіка функції.
15. Похідні тригонометричних функції, показникової і логарифмічної функцій.

Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Ознаки рівності, подібності трикутників.
11. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
12. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
13. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
14. Ознаки паралельності прямої й площини.
15. Ознака паралельності площин.
16. Теорема про перпендикулярність прямої й площини.
17. Перпендикулярність двох площин.
18. Паралельність прямих і площин.
19. Перпендикулярність прямих і площин.

III. ОСНОВНІ ВМІННЯ І НАВИЧКИ

Вступник повинен уміти:

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами, користуватися калькулятором і таблицями для проведення обчислень.
2. Виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.
3. Будувати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій.
4. Розв'язувати рівняння і нерівності першого та другого ступеня, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; розв'язувати системи рівнянь та нерівностей першого і другого ступеня і ті, що мають степеневі показникові, логарифмічні та тригонометричні функції.
5. Розв'язувати задачі на складання рівнянь і систем рівнянь.
6. Зображати геометричні фігури на площині і виконувати найпростіші побудови на площині.
7. Використовувати відомості з геометрії при розв'язуванні алгебраїчних задач, а методи алгебри і тригонометрії – при розв'язуванні геометричних задач.
8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання і віднімання векторів, множення вектора на число) і використовувати їх при розв'язуванні практичних задач.
9. Застосовувати похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремуми і для побудови графіків функцій.
10. Застосовувати інтеграл для знаходження площі фігур обмежених нескладними графіками.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алексеев В.М.* Элементарная математика. Решение задач. – К.:Вища шк., 1989.
2. *Вишенський В.А., Перестюк М.О.* Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища шк., 2001.
3. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Збірник задач з математики: Посібник для вступників до вузів. – К.: ТВІМС, 2000.
4. *Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П.* Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища шк., 1988.
5. *Зайцев В.В., Рыжов В.В., Сканави М.И.* Элементарная математика. – М.: Наука, 1987.
6. *Збірник* задач з математики для вступників до ВТУЗів. /За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища шк., 1996.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна
МУРАНОВА Наталія Петрівна

МАТЕМАТИКА

ВСТУПНЕ ТЕСТУВАННЯ

Навчально-методичний
посібник

В авторській редакції

Підп. до друку 08.06.06. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,02. Обл.-вид. арк. 3,25.
Тираж 1500 пр. Замовлення № 123-1. Вид. № 24/IV.

Видавництво НАУ
03680, Київ-680, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №977 від 05.07.2002