ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 7, с. 1306–1313

УДК 519.634

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАСКАДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ СОРБЦИОННЫХ АППАРАТОВ

© 2004 г. Л. Н. Бондаренко, П. Ф. Жук

(73034 Херсон, ул. Фонвизина, 1, Пед. ун-т, Украина)
e-mail: zuk@kei.Kherson.ua

Поступила в редакцию 01.10.2003 г.

Изучен характер сходимости последовательностей вектор-функций $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образующих решение нелинейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов периодического действия. Показано, что они сходятся к своим пределам $\mathbf{a}_\infty$, $\mathbf{c}_\infty$, описывающим установившийся режим работы каскада, вдоль некоторых асимптотических направлений со скоростью геометрической прогрессии. Библ. 10.

ВВЕДЕНИЕ

Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов находит важное практическое применение, например, в промышленном водоснабжении [1]. Его работа циклична, и после окончания любого цикла аппарат на входе выводится на регенерацию, а в конец каскада подключается аппарат с отрегенерированным сорбентом. Цикл работы каскада завершается обычно либо при достижении выходной концентрации вещества в потоке предельно допустимого значения, либо периодически.

Такая схема функционирования приводит к тому, что с увеличением числа циклов работа каскада стабилизируется и он выходит на установившийся режим, являющийся важнейшей его оптимизационной характеристикой (см. [2]–[5]).

Практически единственно возможным подходом к расчету и оптимизации работы каскада аппаратов является математическое моделирование процесса сорбции в каскаде с последующей оптимизацией параметров модели. При этом возникает принципиальный вопрос о существовании установившегося режима работы каскада аппаратов в рамках используемой математической модели, рассмотренный впервые в работах [6], [7], соответственно, для линейной и нелинейной моделей. Было доказано, что последовательности функций, образующих решение математической модели каскада, равномерно и монотонно сходятся к некоторым предельным функциям, описывающим установившийся режим.

Следующий важный вопрос состоит в разработке эффективных приближенных методов расчета установившегося режима. Поскольку приближенное отыскание установившегося режима может быть сведено к вычислению нескольких начальных циклов работы каскада, то один из путей повышения эффективности расчета состоит в уменьшении необходимого числа циклов.

В [8] показано, что в случае линейной изотермы адсорбции уменьшение необходимого числа циклов может быть достигнуто за счет учета особенностей асимптотического поведения решения математической модели, а именно: по двум последовательным приближениям строилось новое приближение, которое было существенно точнее, чем исходные приближения, взятые в отдельности.

В большинстве приложений, однако, изотерма адсорбции нелинейная, поэтому значительный практический интерес представляет распространение полученных в [8] результатов на нелинейный случай, чему и посвящена данная работа.

В разд. 1 сформулирована математическая модель каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов с периодическим переключением и поставлена задача.

В разд. 2 решение математической модели представлено в виде итерационной последовательности и исходная задача сведена к изучению свойств некоторых линейных ограниченных операторов.

В разд. 3 изучаются свойства оператора, определяющего поведение решения математической модели в сколь угодно малых окрестностях предельных функций, описывающих установившийся режим.

В разд. 4 исследовано асимптотическое поведение решения математической модели: доказано, что последовательности функций, образующих решение, сходятся со скоростью геометрической прогрессии вдоль некоторых асимптотических направлений.

Таким образом, при естественных предположениях об изотерме адсорбции найдено в окрестности предельных функций, описывающих установившийся режим, асимптотическое представление функций, описывающих работу каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов периодического действия. Это представление характеризует асимптотическое поведение решения математической модели каскада аппаратов и может быть использовано для построения формул уточнения предельных функций, описывающих установившийся режим.

Перспективным в данном направлении является распространение полученных результатов на случай нелинейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов периодического действия при поглощении смеси веществ, а также применение найденных асимптотических представлений к задаче приближенного описания установившегося режима работы каскада.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Нелинейная математическая модель (см. [7]) каскада n последовательно соединенных сорбционных аппаратов с периодическим переключением, на вход которого подается с постоянной (равной 1) линейной скоростью поток вещества с постоянной (равной 1) входной концентрацией, представляет собой бесконечное множество задач Гурса в прямоугольнике $\Pi = [0, l] \times [0, T]$:

$$\partial a_{ik}/\partial t + \partial c_{ik}/\partial x = 0, \quad \partial a_{ik}/\partial t = p(a_{ik}, c_{ik}), \quad (x, t) \in \Pi, \tag{1.1а}$$

$$c_{ik}(0, t) = \psi_{ik}(t), \quad 0 \le t \le T, \quad a_{ik}(x, 0) = \varphi_{ik}(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.1б}$$

где l – длина одного аппарата, T – длительность одного цикла работы каскада, i ($i = 1, 2, \ldots, n$) – номер аппарата, отсчитываемый от входа в каскад, k ($k = 1, 2, \ldots$) – номер цикла, t – локальное время k-го цикла, отличающееся от глобального времени на константу $(k-1)T$ (в начале k-го цикла $t = 0$), x – локальное расстояние i-го аппарата (отсчитываемое от начала i-го аппарата), $a_{ik}(x, t)$, $c_{ik}(x, t)$ – концентрации вещества, соответственно, в сорбенте и потоке в точке x i-го аппарата в момент времени t k-го цикла.

Начальное и граничное условия задачи Гурса (1.1) для i-го аппарата на k-м цикле определяются состояниями $(i+1)$-го аппарата на $(k-1)$-м цикле и $(i-1)$-го аппарата на k-м цикле при помощи условий согласования

$$\varphi_{ik}(x) = \begin{cases} 0, & k = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ a_{i+1, k-1}(x, T), & k > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 0, & k \ge 1, \quad i = n, \end{cases} \tag{1.2а}$$

$$\psi_{ik}(t) = \begin{cases} 1, & k \ge 1, \quad i = 1, \\ c_{i-1, k}(l, t), & k \ge 1, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.2б}$$

Условие $\varphi_{i1}(x) = 0$ означает, что в начале работы каскад свободен от вещества. Условия $\varphi_{ik}(x) = a_{i+1, k-1}(x, T)$ и $\varphi_{nk}(x) = 0$ отражают способ переключения аппаратов: $(i+1)$-й аппарат на $(k-1)$-м цикле становится i-м на k-м цикле; при этом аппарат, бывший первым на $(k-1)$-м цикле, на k-м цикле изымается из каскада на регенерацию, а в конец каскада подключается аппарат со свежим сорбентом. Условие (1.2б) выражает тот факт, что на вход каскада подается поток с постоянной (равной 1) концентрацией вещества и что вещество непрерывно распределено в потоке (концентрация вещества в потоке на выходе $(i-1)$-го аппарата равна концентрации вещества на входе i-го аппарата).

Под решением математической модели (1.1), (1.2) понимаются решения $a_{ik}(x, t)$, $c_{ik}(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, задач Гурса (1.1), непрерывные вместе со своими частными производными $(a_{ik})'_t$, $(c_{ik})'_x$ в прямоугольнике Π и удовлетворяющие условиям согласования (1.2).

В [7] доказано, что при некоторых условиях на функцию $p(a, c)$ решение математической модели (1.1), (1.2) существует и единственно, а последовательности функций a_{ik}, c_{ik}, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно и равномерно сходятся на прямоугольнике П к некоторым предельным функциям $a_{i\infty}$, $c_{i\infty}$, описывающим установившийся режим работы каскада. Таким образом, приближенный расчет установившегося режима работы каскада сводится к вычислению (например, методом сеток) функций a_{ik}, c_{ik} с достаточно большим (зависящим от требуемой точности) номером k.

Для повышения эффективности расчета предельных функций $a_{i\infty}$, $c_{i\infty}$ нами была рассмотрена (по аналогии с линейным случаем [8]) следующая задача: установить характер сходимости последовательностей a_{ik} и c_{ik} путем выделения из ошибок $u_{ik} = a_{i\infty} - a_{ik}$, $v_{ik} = c_{i\infty} - c_{ik}$ главных членов.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Обозначим через $C[0, l]$, $C[\Pi]$ вещественные банаховы пространства непрерывных функций, определенных, соответственно, на множествах $[0, l]$, П, со стандартными max-нормами, а через $C[0, l]^n = C[0, l] \times \ldots \times C[0, l]$, $C[\Pi]^n = C[\Pi] \times \ldots \times C[\Pi]$ – пространства вектор-функций с нормами $\|\mathbf{u}\| = \|(u_1, \ldots, u_n)\| = \max(\|u_1\|, \ldots, \|u_n\|)$.

Здесь и далее будем предполагать, что функция $p(a, c)$ определена и непрерывно дифференцируема на единичном квадрате, удовлетворяет на нем вместе со своими частными производными 1-го порядка условию Липшица и неравенствам $p(a, 0) \le 0$, $p(a, 1) \ge 0$, $p(0, c) \ge 0$, $p(1, c) \le 0$, $\partial p/\partial a < 0$, $\partial p/\partial c > 0$ (множество таких функций обозначим через $\mathfrak{R}$). Тогда разность $p(a_{i\infty}, c_{i\infty}) - p(a_{i\infty} - u_{ik}, c_{i\infty} - v_{ik})$ может быть представлена в виде $\alpha_{ik}u_{ik} + \beta_{ik}v_{ik}$, где $\alpha_{ik} = \alpha_{i\infty} + \Delta\alpha_{ik}$, $\beta_{ik} = \beta_{i\infty} + \Delta\beta_{ik}$, $\alpha_{i\infty} = \partial p(a_{i\infty}, c_{i\infty})/\partial a$, $\beta_{i\infty} = \partial p(a_{i\infty}, c_{i\infty})/\partial c$ – непрерывные на прямоугольнике П функции.

Предполагая известными функции α_{ik}, β_{ik}, образуем систему n линейных задач Гурса в прямоугольнике П:

$$\begin{aligned} &\partial u_i/\partial t + \partial v_i/\partial x = 0, \quad \partial u_i/\partial t = \alpha_{ik}u_i + \beta_{ik}v_i, \quad (x, t) \in \Pi, \\ &v_i(0, t) = \eta_i(t), \quad 0 \le t \le T, \quad u_i(x, 0) = \xi_i(x), \quad 0 \le x \le l, \end{aligned} \tag{2.1}$$

с условиями $\xi_n(x) = 0$, $\eta_1(t) = 0$, $\eta_i(t) = v_{i-1}(l, t)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Эта система порождает линейные ограниченные операторы $U_k, V_k: C[0, l]^{n-1} \longrightarrow C[\Pi]^n$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, задаваемые соотношениями $u = U_k\boldsymbol{\xi}$, $\eta_1(t) = 0$, где $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ – вектор-функция начальных условий (учтено, что $\xi_n = 0$), а $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ – вектор-функции решения.

Операторы U_k, V_k обладают следующим важным для дальнейшего изложения свойством: $\mathbf{u}_k = U_k\boldsymbol{\xi}_k$, $\mathbf{v}_k = V_k\boldsymbol{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где обозначено $\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_\infty - \mathbf{a}_k$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{c}_\infty - \mathbf{c}_k$, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\varphi}_\infty - \boldsymbol{\varphi}_k$. Поскольку $\xi_{k+1}(x) = (u_{2k}(x, T), u_{3k}(x, T), \ldots, u_{nk}(x, T))$, то из него, в частности, вытекает, что $\boldsymbol{\xi}_{k+1} = SDU_k\boldsymbol{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где D: $C[\Pi]^n \longrightarrow C[0, l]^n$ – оператор сечения, задаваемый формулой $D\mathbf{u} = \mathbf{u}|_{i=T}$, а S: $C[0, l]^n \longrightarrow C[0, l]^{n-1}$ – оператор сдвига, действующий по правилу $S(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Таким образом, исследование асимптотического поведения решения математической модели (1.1), (1.2) сводится к изучению свойств линейных ограниченных операторов $\Lambda_k = SDU_k$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$.

3. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА Λ_∞

Обозначим через $K = \{\xi \in C[0, l] \mid \xi(t) \ge 0 \ \forall t \in [0, l]\}$ конус пространства $C[0, l]$, состоящий из неотрицательных функций, через $K^{n-1} = K \times \ldots \times K$ – конус пространства $C[0, l]^{n-1}$, через K_+^{n-1} – внутренность конуса K^{n-1}.

Напомним (см. [9]), что линейный оператор называется положительным относительно конуса, если он отображает этот конус в себя, и сильно положительным, если образ любой ненулевой точки конуса является его внутренней точкой.

Лемма 1. *Если $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \mathfrak{R}$, то оператор Λ_∞ положительный, а оператор Λ_∞^{n-1} сильно положителен относительно конуса K^{n-1}.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу Гурса

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t + \partial v/\partial x = 0, \quad \partial u/\partial t = \alpha u + \beta v, \quad (x, t) \in \Pi, \\ &v(0, t) = \eta(t), \quad 0 \le t \le T, \quad u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 \le x \le l, \end{aligned} \tag{3.1}$$

с непрерывными краевыми и начальными данными и коэффициентами $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Для доказательства леммы достаточно установить следующее:

1) если $\eta \geq 0$, $\xi \geq 0$, то функции $v(l, t)$, $u(x, T)$ неотрицательны, причем если $\xi \neq 0$, то $v(l, t) > 0$ на отрезке $[0, T]$, а $u(x, T)$ – ненулевая точка конуса K;

2) если $\eta > 0$, $\xi \geq 0$, то $u(x, T) \in K_+$.

Задача (3.1) эквивалентна системе линейных интегральных уравнений

$$v(x,t) = \exp\left(-\int_0^x \beta(\lambda, t)d\lambda\right)\left[\eta(t) - \int_0^x \alpha(\lambda, t)\exp\left(\int_0^\lambda \beta(\tau, t)d\tau\right)u(\lambda, t)d\lambda\right],$$

$$u(x,t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(x, \lambda)d\lambda\right)\left[\xi(x) + \int_0^t \beta(x, \lambda)\exp\left(-\int_0^\lambda \alpha(x, \tau)d\tau\right)v(x, \lambda)d\lambda\right],$$

решение которой может быть получено методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} v^{(k)}(x,t) &= \exp\left(-\int_0^x \beta(\lambda, t)d\lambda\right)\left[\eta(t) - \int_0^x \alpha(\lambda, t)\exp\left(\int_0^\lambda \beta(\tau, t)d\tau\right)u^{(k)}(\lambda, t)d\lambda\right], \\ u^{(k+1)}(x,t) &= \exp\left(\int_0^t \alpha(x, \lambda)d\lambda\right)\left[\xi(x) + \int_0^t \beta(x, \lambda)\exp\left(-\int_0^\lambda \alpha(x, \tau)d\tau\right)v^{(k)}(x, \lambda)d\lambda\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$k = 0, 1, \ldots$, $u^{(0)}(x, t) = 0$. Поскольку $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то при условии $\eta \geq 0$, $\xi \geq 0$ из соотношений (3.2) вытекает, что при любом $k = 0, 1, \ldots$ приближения $v^{(k)}$, $u^{(k)}$ неотрицательны в прямоугольнике П. Следовательно, неотрицательны также функции $v(l, t)$, $u(x, T)$. Доказательство остальных утверждений аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \mathfrak{R}$, то оператор Λ_∞^{n-1} компактный.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{I}$ – произвольное ограниченное в пространстве $C[0, l]^{n-1}$ множество. В силу теоремы Арцела, достаточно показать, что множество вектор-функций $\Lambda_\infty^{n-1}(\mathfrak{I})$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Равномерная ограниченность очевидным образом следует из непрерывности оператора Λ_∞ и ограниченности $\mathfrak{I}$.

Для доказательства равностепенной непрерывности выберем произвольную вектор-функцию $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{I}$ и положим $\boldsymbol{\xi}^{(j)} = \Lambda_\infty^{j-1}\boldsymbol{\xi}$, $u^{(j)} = U_\infty\boldsymbol{\xi}^{(j)}$, $v^{(j)} = V_\infty\boldsymbol{\xi}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Зафиксируем две любые точки x, $x + \Delta x$ $(0 \leq x < x + \Delta x \leq l)$ и рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\chi}^{(j)}(t) = [\mathbf{u}^{(j)}(x + \Delta x, t) - \mathbf{u}^{(j)}(x, t)]/\Delta x$. Так как $\partial u_i^{(j)}/\partial t = \alpha_{i\infty}u_i^{(j)} + \beta_{i\infty}v_i^{(j)}$, то компонента $\chi_i^{(j)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $d\chi_i^{(j)}/dt = \alpha_{i\infty}\chi_i^{(j)} + f_i^{(j)}$, где обозначено $f_i^{(j)}(t) = [(\beta_{i\infty}(x, t)\delta v_i^{(j)}(t) + \delta\alpha_{i\infty}(t)u_i^{(j)}(x + \Delta x, t) + \delta\beta_{i\infty}(t)v_i^{(j)}(x + \Delta x, t)]/\Delta x$, $\delta g(t) = g(x + \Delta x, t) - g(x, t)$. Разрешая это уравнение относительно $\chi_i^{(j)}$ и учитывая, что $\alpha_{i\infty} < 0$, получаем неравенство

$$\left|\chi_i^{(j)}(T)\right| \leq \left|\chi_i^{(j)}(0)\right| + T\left\|f_i^{(j)}\right\|. \tag{3.3}$$

Последовательно оценивая слагаемые в правой части выражения $f_i^{(j)}(t)$, нетрудно показать, что $\|f_i^{(j)}\| \leq M$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где число M не зависит от x, Δx и вектор-функции $\boldsymbol{\xi}$. Так как $\chi_n^{(j)}(0) = 0$, $\chi_{i-1}^{(j+1)}(0) = \chi_i^{(j)}(T)$, то из неравенства (3.3) получаем оценку $|\chi_i^{(n)}(0)| \leq (n-1)TM$, т.е. $\|\xi_i^{(n)}(x + \Delta x) - \xi_i^{(n)}(x)\| \leq (n-1)TM\Delta x$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Обозначим через Φ линейный функционал, заданный на пространстве $C[0, l]^{n-1}$ формулой

$$\Phi(\varphi) = \int_0^l \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(x)dx.$$

Имеет место

Лемма 3. *Пусть* $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \Re$, *а* $\xi \neq 0$ – *произвольная вектор-функция из конуса* K^{n-1}. *Тогда* $\Phi(\Lambda_\infty\xi) < \Phi(\xi)$.

Доказательство. Положим $\mathbf{u} = U_\infty\xi$. Исходя из определения оператора Λ_∞, достаточно показать, что

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{n} (u_i(x, t+\Delta t) - u_i(x, t))dx < 0$$

при $t \in [0, T[$ и малых $\Delta t > 0$.

Аппроксимируя приращение $u_i(x, t+\Delta t) - u_i(x, t)$ с точностью $(\Delta t)^2$ выражением $[\alpha_{i\infty}(x, t)u_i(x, t) + \beta_{i\infty}(x, t)v_i(x, t)]\Delta t$, достаточно установить, что $\forall t \in [0, T]$

$$w(t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{n} [\alpha_{i\infty}(x, t)u_i(x, t) + \beta_{i\infty}(x, t)v_i(x, t)]dx < 0. \tag{3.4}$$

Преобразуем $w(t)$. Для этого зафиксируем t и выразим с помощью уравнений (2.1) функции v_i через u_i:

$$v_i(x, t) = -e^{-b_i(x, t)}\left[\int_0^l \sum_{j=1}^{i-1} e^{b_j(\lambda, t)}\alpha_{j\infty}(\lambda, t)u_j(\lambda, t)d\lambda + \int_0^x e^{b_i(\lambda, t)}\alpha_{i\infty}(\lambda, t)u_i(\lambda, t)d\lambda\right],$$

где

$$b_i(x, t) = \int_0^l s_{1, i-1}(\lambda, t)d\lambda + \int_0^x \beta_{i\infty}(\lambda, t)d\lambda, \quad s_{ij}(x, t) = \sum_{k=i}^{j} \beta_{k\infty}(x, t).$$

Подставляя найденное выражение функций v_i в (3.4) и выполняя несложные преобразования, имеем

$$w(t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\int_x^l \beta_{i\infty}(\lambda, t)d\lambda - \int_0^l s_{i+1, n}(\lambda, t)d\lambda\right)\alpha_{i\infty}(x, t)u_i(x, t)dx < 0,$$

так как функции $\alpha_{i\infty}$ отрицательны на прямоугольнике Π. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если* $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \Re$, *то верно следующее*:

1) *оператор* Λ_∞^{n-1} *обладает единственным наибольшим по модулю собственным значением* ρ_1 $(0 < \rho_1 < 1)$, *а соответствующее* ρ_1 *собственное подпространство* C_1 *одномерно и порождается некоторым вектором* $\zeta \in K_+^{n-1}$;

2) *пространство* $C[0, l]^{n-1}$ *представимо в виде прямой суммы* $C_1 \oplus C_2$, *где* C_2 – *инвариантное относительно оператора* Λ_∞^{n-1} *подпространство, на котором сужение оператора* Λ_∞^{n-1} *имеет спектральный радиус* ρ_2, *меньший* ρ_1;

3) *число* $\rho = \sqrt[n-1]{\rho_1}$ *и вектор* ζ *образуют собственную пару оператора* Λ_∞.

Доказательство. В силу лемм 1, 2, Λ_∞^{n-1} – компактный и сильно положительный относительно конуса K^{n-1} оператор. Поэтому (см. [10]) его спектральный радиус ρ_1 является единственным наибольшим по модулю собственным значением, а соответствующее ему собственное подпространство C_1 одномерно и порождается некоторым вектором $\xi \in K_+^{n-1}$. Далее, в силу леммы 3, $\rho_1\Phi(\xi) = \Phi(\Lambda_\infty^{n-1}\xi) < \Phi(\xi)$, следовательно, $\rho_1 < 1$, и утверждение 1) теоремы доказано.

Утверждение 2) вытекает непосредственно из [9, с. 117]. Наконец, из соотношения $\Lambda_\infty^{n-1}(\Lambda_\infty\zeta) = \Lambda_\infty(\Lambda_\infty^{n-1}\zeta) = \rho_1\Lambda_\infty\zeta$ следует, что $\Lambda_\infty\zeta = \rho\zeta$, где $\rho = \sqrt[n-1]{\rho_1}$. Теорема доказана.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Предварительно оценим скорость сходимости последовательностей операторов $\Delta U_k = U_k - U_\infty$, $\Delta V_k = V_k - V_\infty$, $\Delta\Lambda_k = \Lambda_k - \Lambda_\infty$. Положим $\delta_k = \max\{\|\Delta U_k\|, \|\Delta V_k\|, \|\Delta\Lambda_k\|\}$.

Лемма 4. *Если* $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \mathfrak{R}$, *то* $\delta_k = O(\rho^k)$.

Доказательство. Положим $\boldsymbol{\lambda}_k = \Delta U_k\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\mu}_k = \Delta V_k\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{u}^{(k)} = U_k\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{v}^{(k)} = V_k\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ – произвольная вектор-функция из $C[0, l]^{n-1}$. Исходя из системы (2.1), находим, что

$$\begin{gathered} \partial\lambda_{ik}/\partial t + \partial\mu_{ik}/\partial x = 0, \quad \partial\lambda_{ik}/\partial t = \alpha_{i\infty}\lambda_{ik} + \beta_{i\infty}\mu_k + f_{ik}, \quad (x, t) \in \Pi, \\ \mu_{ik}(0, t) = \eta_{ik}(t), \quad 0 \le t \le T, \quad \lambda_{ik}(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\eta_{1k}(t) = 0$, $\eta_{ik}(t) = \mu_{i-1,k}(l, t)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $f_{ik} = \Delta\alpha_{ik}u_i^{(k)} + \Delta\beta_{ik}v_i^{(k)}$, а λ_{ik}, μ_{ik}, $u_i^{(k)}$, $v_i^{(k)}$ суть i-е компоненты вектор-функций $\boldsymbol{\lambda}_k$, $\boldsymbol{\mu}_k$, $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{v}^{(k)}$.

Разрешив систему (4.1) методом последовательных приближений, приходим к оценке $\max\{\|\boldsymbol{\lambda}_k\|, \|\boldsymbol{\mu}_k\|\} \le d_1\|\mathbf{f}_k\|$, где число d_1 не зависит от выбора $\boldsymbol{\xi}$.

Далее, заметим, что $\max\{\|\Delta\boldsymbol{\alpha}_k\|, \|\Delta\boldsymbol{\beta}_k\|\} \le d_2\varepsilon_k$, где d_2 – константа Липшица для функций $\partial p/\partial a$, $\partial p/\partial c$, а $\varepsilon_k = \max\{\|\mathbf{u}_k\|, \|\mathbf{v}_k\|\}$. Поэтому $\|\mathbf{f}_k\| \le d_2d_3\varepsilon_k\|\boldsymbol{\xi}\|$, где d_3 – верхняя граница норм операторов U_k, V_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, $\max\{\|\Delta U_k\|, \|\Delta V_k\|\} \le d\varepsilon_k$, где $d = d_1d_2d_3$. Поскольку $\Delta\Lambda_k = SD\Delta U_k$, то $\|\Delta\Lambda_k\| \le \|\Delta U_k\|$ и имеет место оценка

$$\delta_k \le d\varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Согласно [7], последовательность ε_k сходится к нулю, следовательно, $\delta_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$ и, в частности, последовательность операторов Λ_k сходится по норме к оператору Λ_∞. Поэтому, в силу теоремы 1, итерационная последовательность $\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \Lambda_k\boldsymbol{\xi}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится к нулю со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ρ, т.е. $\|\boldsymbol{\xi}_k\| = O(\rho^k)$. Но $\mathbf{u}_k = U_k\boldsymbol{\xi}_k$, $\mathbf{v}_k = V_k\boldsymbol{\xi}_k$, следовательно, $\varepsilon_k = O(\rho^k)$ и, в силу неравенства (4.2), $\delta_k = O(\rho^k)$, что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Положим $q_1 = \max\{\rho_2, \rho_1^2\}$, $q = \sqrt[n-1]{q_1}$.

Лемма 5. *Пусть* $n > 1$, $l > 0$, $T > 0$, $p \in \mathfrak{R}$, r *– произвольное фиксированное число из интервала* (q, ρ). *Тогда имеет место разложение*

$$\boldsymbol{\xi}_k = \rho^k\boldsymbol{\zeta} + r^k\boldsymbol{\zeta}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{\zeta} \in K_+^{n-1} \cap C_1$ *– собственный вектор оператора* Λ_∞, *соответствующий собственному значению* ρ, *а* $\boldsymbol{\zeta}_k$ *– сходящаяся к нулю в пространстве* $C[0, l]^{n-1}$ *последовательность.*

Доказательство. Сначала получим разложение для подпоследовательности $\boldsymbol{\xi}^{(m)} = \boldsymbol{\xi}_{m(n-1)+1}$, $m = 1, 0, \ldots$. В силу теоремы 1, имеет место разложение $\boldsymbol{\xi}^{(m)} = \boldsymbol{\xi}_1^{(m)} + \boldsymbol{\xi}_2^{(m)}$, где $\boldsymbol{\xi}_1^{(m)} = P_1\boldsymbol{\xi}^{(m)} \in C_1$, $\boldsymbol{\xi}_2^{(m)} = P_2\boldsymbol{\xi}^{(m)} \in C_2$, P_1, P_2 – операторы проектирования на подпространства C_1, C_2, компоненты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1^{(m+1)} &= (\rho_1 + \mathrm{P}_1\Delta Q_m)\boldsymbol{\xi}_1^{(m)} + \mathrm{P}_1\Delta Q_m\boldsymbol{\xi}_2^{(m)}, \\ \boldsymbol{\xi}_2^{(m+1)} &= \mathrm{P}_2\Delta Q_m\boldsymbol{\xi}_1^{(m)} + (\Lambda_\infty^{n-1} + \mathrm{P}_2\Delta Q_m)\boldsymbol{\xi}_2^{(m)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

(здесь обозначено $Q_m = \Lambda_{(m+1)(n-1)}\Lambda_{(m+1)(n-1)-1} \dots \Lambda_{m(n-1)+1}$, $\Delta Q_m = Q_m - \Lambda_\infty^{n-1}$). В силу леммы 4, $\|\Delta Q_m\| = O(\rho_1^m)$, поэтому, учитывая одномерность подпространства C_1, из (4.4) находим, что $\xi_1^{(m+1)} = (\rho_1 + \sigma_m)\xi_1^{(m)}$, где $\sigma_m = O(\rho_1^m)$. Следовательно,

$$\xi_1^{(m)} = \rho_1^m(1+\omega_n)\zeta, \quad m = 0, 1, \dots, \text{где } \zeta = \prod_{m=0}^{\infty}(1+\sigma_m/\rho_1)\xi_1^{(0)} \in K_1^{n-1} \cap C_1, \quad \omega_m = O(\rho_1^m).$$

При анализе асимптотического поведения последовательности $\xi_2^{(m)}$ учтем следующее:

1) в силу теоремы 1, спектральный радиус сужения оператора Λ_∞^{n-1} на подпространстве C_2 равен ρ_2;

2) $\|P_2\Delta Q_m\xi_1^{(m)}\| = O(\rho_1^{2m})$ (так как $\|\xi_1^{(m)}\| = O(\rho_1^m)$).

Тогда из соотношений (4.4) вытекает, что последовательность $\chi^{(m)} = \xi_2^{(m)}/r_1^m$ сходится к нулю в пространстве $C[0, l]^{n-1}$ (здесь $r_1 = r^{n-1}$).

Таким образом, имеет место разложение $\xi^{(m)} = \rho_1^m\zeta + r_1^m\zeta^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots$, где $\zeta^{(m)} = \chi^{(m)} + (\rho_1/r_1)^m\omega_m\zeta \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$, или, переходя к последовательности ξ_k,

$$\xi_{m(n-1)+1} = \rho^{m(n-1)}\zeta + r^{m(n-1)}\zeta_{m(n-1)+1}, \quad m = 0, 1, \dots, \tag{4.5}$$

где $\zeta_{m(n-1)+1} = \zeta^{(m)}$. Подействовав на обе части равенства (4.5) оператором $\Lambda_{m(n-1)+1}$, представленным в виде $\Lambda_\infty + \Delta\Lambda_{m(n-1)+1}$, и учтя, что, в силу леммы 4, величина $\|\Delta\Lambda_{m(n-1)+1}\|$ порядка $\rho^{m(n-1)+1}$, найдем, что $\xi_{m(n-1)+2} = \rho^{m(n-1)+1}\zeta + r^{m(n-1)+1}\zeta_{m(n-1)+2}$, где

$$\zeta_{m(n-1)+2} = \frac{1}{r}\Lambda_\infty\zeta_{m(n-1)+1} + \frac{\Delta\Lambda_{m(n-1)+1}\xi_{m(n-1)+1}}{r^{m(n-1)+1}} \longrightarrow 0 \text{ при } m \longrightarrow \infty.$$

Так же получаем разложения для подпоследовательностей $\xi_{m(n-1)+3}, \dots, \xi_{(m+1)(n-1)}$, а следовательно, $\xi_k = \rho^{k-1}\zeta + r^{k-1}\zeta_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\zeta_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, или, после очевидных замен $\zeta := \rho\zeta$, $\zeta_k := r\zeta_k$, разложенному (4.3). Лемма доказана.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть $n > 1, l > 0, T > 0, p \in \Re$, r – произвольное фиксированное число из интервала (q, ρ), ζ – собственный вектор оператора Λ_∞, определенный в лемме 5. Тогда имеют место разложения*

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_\infty - \rho^k\mathbf{h} - r^k\mathbf{h}_k, \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{c}_\infty - \rho^k\mathbf{g} - r^k\mathbf{g}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{h} = U_\infty\zeta$, $\mathbf{g} = V_\infty\zeta$, а $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{g}_k$ – сходящиеся к нулю в пространстве $C[\Pi]^n$ последовательности.

Доказательство. Подействовав на обе части равенства (4.3) оператором U_k, представленным в виде $U_\infty + \Delta U_k$, найдем, что $\mathbf{u}_k = \rho^k\mathbf{h} + \rho^k\Delta U_k\zeta + r^kU_k\zeta_k$, т.е. $\mathbf{a}_\infty - \mathbf{a}_k = \rho^k\mathbf{h} + r^k\mathbf{h}_k$, где, в силу лемм 4, 5, $\mathbf{h}_k = (\rho/r)^k\Delta U_k\zeta + U_k\zeta_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Первое разложение получено. Доказательство второго аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Когановский А.М., Клименко Н.А., Левченко Т.М. и др.* Очистка и использование сточных вод в промышленном водоснабжении. М.: Химия, 1983.

2. *Chen J.W., Cunningham R.L., Buege J.A.* Computer simulation of plantscale multicolumn adsorption processes under periodic counter-current operation // Ind. Engng. Chem. Proc. Design Develop. 1972. V. 11. № 3. P. 430–436.

3. *Svedberg G.* Numerical solution of multicomponent adsorption process under periodic counter-current operation // Chem. Engng. Sci. 1976. V. 31. № 5. P. 345–354.

4. *Sung E., Han C.D., Rhee H.* Optimal design of multistage adsorption-bed systems // AIChE Journal. 1979. V. 25. № 1. P. 87–100.

5. *Рода И.Г., Жук П.Ф.* Расчет каскада аппаратов с неподвижным слоем при произвольных изотермах сорбции // Химия и технология воды. 1989. Т. 11. № 6. С. 552–554.
6. *Бондаренко Л.Н.* Математическая модель каскада сорбционных аппаратов // Матем. моделирование. 1997. Т. 9. № 11. С. 23–32.
7. *Бондаренко Л.Н.* Каскад последовательно соединенных сорбционных аппаратов (нелинейный случай) // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 4. С. 41–50.
8. *Бондаренко Л.Н., Жук П.Ф.* Асимптотическое поведение решения линейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 410–416.
9. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.