СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И МОДИФИКАЦИИ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

Юрчук А.А.,
Национальный авиационный университет (г. Киев)
alindim@ukr.net
Колганова Е.О.,
к.т.н., Национальный авиационный университет (г. Киев)
vnshutko@mail.ru
Конин В.В.,
д.т.н., Национальный авиационный университет (г. Киев)
Шутко В.Н.,
д.т.н., Национальный авиационный университет (г. Киев)

Аннотация. Рассмотрена аппроксимация двух дискретных последовательностей между детерминированными основами которых существует аналитическая связь. Учет аналитической связи позволяет повысить вероятность обнаружения и качество фильтрации радиолокационного и навигационного сигнала. Показано сравнение результатов сплайн-аппроксимации корреляционных последовательностей классическим и предложенным методами.

Ключевые слова: сигнал, сплайн-аппроксимация, аналитическая связь, оператор свертки, корреляционная последовательность.

SPLINE APPROXIMATION WITH ANALYTICAL RELATIONS FOR CORRELATION SEQUENCES AND MODIFICATION OF COMPRESSION OPERATOR

Yurchuk A., Kolganova E., Konin V., Shutko V.,
National Aviation University (Kiev)

Abstract. The approximation of two discrete sequences between determinated bases with analytical relation has been reviewed. Consideration of analytical relation lets to increase probability of determination and also the quality of filtration of radio location and navigation signal. The comparison of spline approximation results of correlation sequences has been showed via classic and proposed method.

Keywords: signal, spline approximation, analytical relation, compression operator, correlation sequence.

Вступление. В данной работе рассматривается аппроксимация не одной, а двух зашумленных дискретных последовательностей между детерминированными основами, которых существует аналитическая связь. Учет аналитической связи позволяет повысить качество фильтрации и обнаружения сигнала по сравнению с классическими методами. Теоретические разработки возникают из практических задач радиолокации и спутниковой навигации.

Анализ последних исследований и публикаций. Для возобновления дискретной измерительной информации, как аппроксимирующие, обычно применяются полиномиальные сплайновые функции (или сплайны), в разработку которых существенную наработку внесли Дж. Алберг, Е. Нильсон, Дж. Уолш, М. П. Корнейчук, Ю. С. Зав'ялов, Б. г. Марченко, В. П. Денисюк, М. О. Шутко, О. П. Приставка и другие [1, 2, 3, 4]. В работах выше указанных авторов сплайны разрабатывались для аппроксимации одиночных однополярных или n-мерных последовательностей. В предлагаемой статье в отличие от этого разработана сплайн-аппроксимация 2-х зашумленных последовательностей между детерминированными основами которых существует аналитическая связь.

Причины возникновения и попытки уменьшения влияния помех разной природы на сигналы радиосвязи и спутниковых навигационных систем приводятся в литературе [5, 6, 7]. В этих работах автора предлагают методы улучшения фильтрации обнаруженного сигнала от помех, но они не обеспечивают улучшение обнаружения сигналов. В отличие от этих методов разработанный метод позволяет повысить вероятность правильного обнаружения сигналов в радиолокации и навигации.

Постановка задания. Априорно неизвестные отклонения реальных сигналов от идеальной гармоничной модели приводят к значительному падению характеристик выявление этих сигналов. Поэтому нужно разработать метод, который будет стойким к таким отклонениям. Актуальной так же остается важная задача решения научно-технической проблемы разработки методов и средств повышения эффективности алгоритмов первичной обработки радиолокационной информации в условиях априорной неопределенности относительно распределения сигналов и помех, которая имеет важное практическое значение.

Решение поставленного задания. Сплайны в ряде ситуаций имеют хорошие аппроксимационные свойства, которые обеспечивают минимально возможную погрешность для решения практически-технических задач обработки результатов измерений. Тем более при применении сплайнов существенно уменьшается объем вычислений.

В задачах числовой обработки гармонических сигналов, которые содержат случайные составляющие, часто необходимо оценить тренды корреляционных последовательностей этих сигналов. В классическом случае для этого можно использовать комплексные сплайны с разным расположением узлов “склейки” в зависимости от частоты сигнала [4]. Но такая аппроксимация не учитывает аналитическую связь между мнимой и действительной частями оценок корреляционных последовательностей

$$\hat{r}(l)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-l-1} y[n+l]\,y^{*}[n], & 0\le l\le N-1,\\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-|l|-1} y^{*}[n+|l|]\,y[n], & -(N-1)\le l<0,\end{cases} \quad (1)$$

где N – объем входной последовательности.

Отметим, что эта связь для каждого временного смещения l является независимой от амплитуды и фазы гармоничного сигнала и равняется

$$q(l)=\frac{\mathrm{Im}[\hat{r}(l)]}{\mathrm{Re}[\hat{r}(l)]}=\frac{\sin[\frac{2\pi}{N}kl]}{\cos[\frac{2\pi}{N}kl]},\ \ -(N-1)\le l\le N-1, \quad (2)$$

где k – фиксирована нормируемая частота. В формуле (1) выбрана сдвинутая оценка (дальше оценка) корреляционной функции (нормирующий коэффициент $\frac{1}{N}$, а не $\frac{1}{N-l}$) для уменьшения дисперсии отсчетов этой функции при значительных смещениях l.

Дальше приведем примеры построения предложенной аппроксимации. Пусть наблюдается гармонический процесс с амплитудой $A=1$, случайной начальной фазой ϕ, равномерно распределенной на интервале $[0;\,2\pi]$, нормируемой частотой $k=4$, объемом выборки $N=10$:

$$z(n)=z_r(n)+jz_i(n)=A\exp\{j(\frac{2\pi}{N}knt+\phi)\}+ \\ +\xi_r(n)+j\xi_i(n),\ n=\overline{0,N-1}, \quad (3)$$

где $\xi_r(n),\xi_i(n)$ – действительная и мнимая составляющие гаусового белого шума с нулевым средним и дисперсиями $V_r=V_i=1$. За формулой (1) найдем оценку корреляционной функции $\hat{r}(l)$. Качественную сплайн-аппроксимацию такой последовательности построить трудно из-за того, что на десять отсчетов приходится четыре колебания. Поэтому сначала проведем интерполяцию данной оценки, а затем по большему количеству отсчетов рассчитаем аппроксимирующие сплайны за классическим и предложенным методами.

На рис. 1 приведена интерполированная правая часть действительной составляющей оцененной корреляционной функции. За счет наличия шума она значительно отличается от идеальной (построенной в случае отсутствия шума). Классическая сплайн-аппроксимация (рис. 1, а) хорошо приближает входную последовательность, но никакой новой информации о процессе не добавляет. Однако сплайн-аппроксимация, построенная с учетом аналитической связи между мнимой и действительной составляющими интерполированной оценки корреляционной функции (рис. 1, б), наоборот вовсе не приближает эту входную последовательность, а воспроизводит функцию подобную идеальной.

неопределенности относительно многолучевого распространения сигналов решается научно-техническая задача – разработка метода сплайн-аппроксимации с аналитическими связями, которая позволяет повысить вероятность правильного обнаружения спутниковых сигналов в условиях многолучевого распространения сигналов.

В реальной ситуации в амплитуде, частоте и фазе полученного спутникового сигнала, присутствуют естественные помехи, которые зависят от стабильности передатчика, модели спутника, расстояния к нему, погодных условий и других. Поэтому рассмотрим обобщенную модель меандрового сигнала [8]:

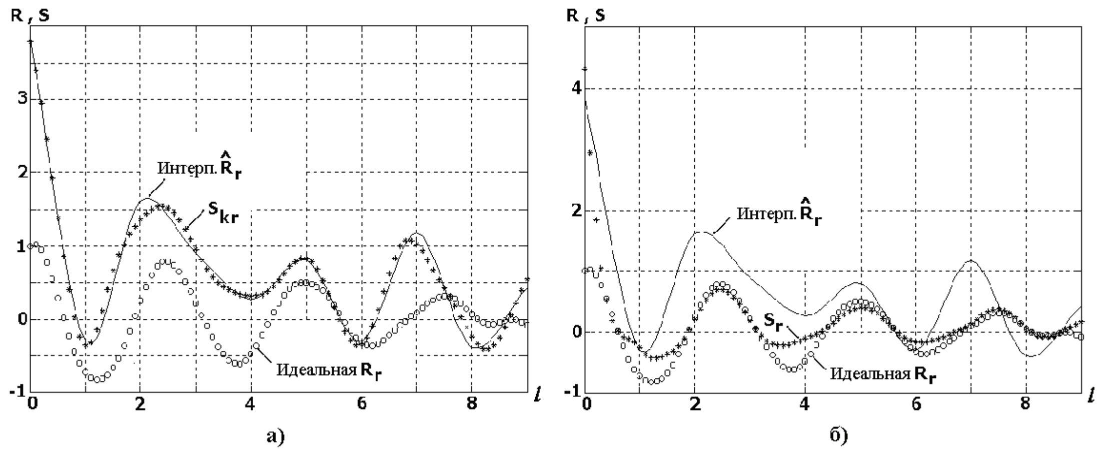

Рис. 1. Сплайн-аппроксимации корреляционных последовательностей

а) классическим (S_{kr}) и б) предложенным (S_r) методами.

В выше приведенном примере для построения аппроксимации классическим и предложенным методами матрицы планирования рассчитывались для одинаково расположенных абсцисс узлов “склейки” фрагментов сплайнов.

В этом примере очевидное свойство сплайн-аппроксимации с учетом аналитической связи выравнивать определенной мерой последовательности, которые сглаживаются под эту связь.

Для повышения вероятностных характеристик выявления спутниковых сигналов на основе модификации оператора свертки в условиях априорной

$$s\left(t-t_0\right)=Ad(t-t_0)Cos\left[\omega_0\left(t-t_0\right)+\phi\left(t\right)\right]+\gamma(t), \quad (4)$$

где A – амплитуда сигнала, $\omega_0=2\pi f_0$ – круговая несущая частота, f_0 – несущая частота, $\phi\left(t\right)$ – фаза сигнала, t_0 – начало отсчета, $d\left(t\right)$ – меандрова ПСП дальномерного кода, $\gamma\left(t\right)$ – независимые отсчеты нормального шума с нулевыми средними и единичными СКО.

Заметим, что при перемножении вектора-столбца, который состоит из отсчетов $g(t)$, на кодовую последовательность сигнала получаем отсчеты подинтегральной функции $y(t)$ с постоянной амплитудой. Значение этой амплитуды зависит от амплитуды A, но важно, что:

$$y(t) = const1,\ t = \overline{0,\ N-1}.$$

Очевидно, что накопление этих отсчетов происходит за линейными законами. При постепенном добавлении отсчетов $y(t)$ получаем отсчеты первообразной функции $h(t)$, значение которой в точке $t = N-1$ равняется амплитуде свертки сигнала в своем максимуме. Тогда неизменными являются соотношения:

$$c(t) = \frac{h(t)}{y(t)} = t+1,\ t = \overline{0,\ N-1}, \qquad (5)$$

Дальше для обобщенной модели меандрового сигнала (4) построим метод полиномиального сглаживания последовательностей $h(t)$ и $y(t)$ с наложением условий связи (5). Заметим, что хотя отсчеты нормального шума $\gamma\,(t)$ есть независимыми, шумовые составные последовательности $h(t)$ будут коррелируемыми. Полиномиальное оценивание сначала построим для двух последовательностей без учета корреляционных свойств шумовых составляющих $h(t)$, а затем с помощью обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) их учтем.

Взаимная корреляция между отсчетами $y(t)$ и $h(t)$ быстро снижается к нулю, потому в данном методе она не учитывается. В реальной ситуации корреляционные свойства полезного случайного сигнала учесть невозможно из-за отсутствия достаточной априорной информации, а корреляционную матрицу для фоновых шумов всегда можно оценить численно.

Составим следующий функционал:

$$\Phi_R = \sum_{t=0}^{N-1}\{h(t) - S_h(t)\}^2 + \sum_{t=0}^{N-1}\{y(t) - S_y(t)\}^2 + \\ + \lambda\sum_{t=0}^{N-1}\{S_h(t)] - (t+1)S_y(t)\}^2, \qquad (6)$$

где: $S_h(t) = ZA_h$ и $S_y(t) = PA_y$ – кубические полиномы, которые аппроксимируют отсчеты первообразной $h(t)$ и подинтегральной $y(t)$ функций; Z, P – матрицы планирования (в общем случае они могут быть неодинаковыми в результате разного расположения коэффициентов) для полиномов S_h, S_y; $A_h = \{a_{hl}\}_{l=1}^{4}$, $A_y = \{a_{yl}\}_{l=1}^{4}$ – векторы оцениваемых параметров (коэффициенты кубических полиномов).

Минимизируем функционал: $\Phi_R = \min$.

Запишем функционал Φ_R в матричном виде:

$$\Phi_R = (H - ZA_h)^T (H - ZA_h) + \\ + (Y - PA_y)^T (Y - PA_y) + \\ + \lambda(ZA_h - \tilde{P}A_y)^T (ZA_h - \tilde{P}A_y),$$

λ имеет содержание веса (в этом примере $\lambda = 1$), где: матрица

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} -1p_{11} & -1p_{12} & \dots & -1p_{1s} \\ -2p_{21} & -2p_{22} & \dots & -2p_{2s} \\ . & . & . & \\ -Np_{N,1} & -Np_{N,2} & \dots & -Np_{N,s} \end{bmatrix}.. \qquad (7)$$

Обозначим:

$$R = \begin{bmatrix} H \\ Y \\ D \end{bmatrix},\ H = \left[h(0),\ h(1), \dots,\ h(N-1)\right]^T,$$

$Y = \left[y(0),\ y(1), \dots,\ y(N-1)\right]^T$ – векторы, которые состоят из отсчетов первообразной и подинтегральной функций; $D = [0, 0, \dots, 0]^T$, размерности $(N*1)$; $A = \begin{bmatrix} A_h \\ A_y \end{bmatrix}$, $A_h = [a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hs}]^T$, $A_y = [a_{y1}, a_{y2}, \dots, a_{ys}]^T$ – векторы коэффициентов полиномов.

Дальше обозначим: $W = \begin{bmatrix} Z & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & P \\ Z & \tilde{P} \end{bmatrix}$,

Z, P – матрицы планирования полиному, столбцами которых являются функции формы полинома ${}^{m}z(t)$, ${}^{m}p(t)$, $m = 1 \div 4$;

O – нулевая матрица, размерности $N*r$; $\tilde{P}$ – матрица (7). Размерность матрицы W – $(3N*8)$.

Тогда требования МНК:

$$(R - WA)^T (R - WA) = \min,$$

Дальше классическое решение:

$$A = (W^T W)^{-1} W^T R,$$

а с учетом корреляции решения обобщенного МНК: $\tilde{A} = (W^T \tilde{M}\, W)^{-1} W^T \tilde{M}\ R$,, где: $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M^{-1} & O & O \\ O & E & O \\ O & O & E \end{bmatrix}$,

M^{-1} – матрица, обратная к корреляционной матрице шумовых составляющих $h(t)$; E – единичная матрица, размерности $(N * N)$, O – нулевая матрица, размерности $N * N$.

Находим, $\tilde{S}_h = Z\tilde{A}_h$, $\tilde{S}_y = P\tilde{A}_y$ – кубические полиномы, которые построены уже с учетом аналитических связей (6).

Эти оценки получены путем полиномиального выравнивания часовых последовательностей $h(t)$ и $y(t)$ с выполнением условий (5), что отвечают модели меандрового сигнала (4). Отметим, что выравнивая последовательности полезных сигналов, искаженных помехами, мы также "выравниваем" последовательности шумовых составляющих в случае отсутствия полезной информации.

Построим характеристики предложенного метода и классического метода, полученные с помощью компьютерного моделирования:

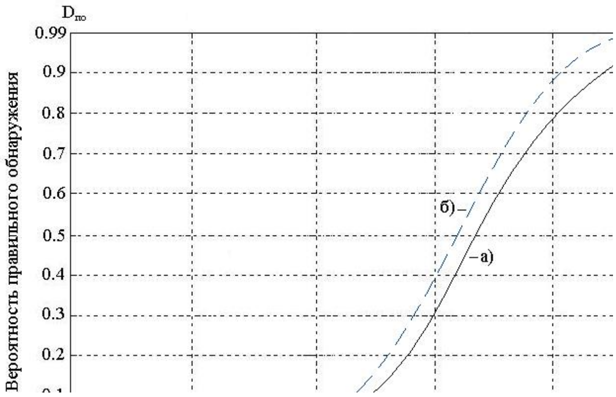

Рис. 2. Характеристики обнаружения спутникового сигнала на основе:

а) метода ДПФ, б) предложенного метода

Априорно неизвестные отклонения реальных сигналов от идеальной гармоничной модели приводят к значительному падению характеристик обнаружения этих сигналов. Предложенный метод отличается от известных стойкостью к таким отклонениям. Применение данного метода позволяет достичь заданных характеристик спутниковых сигналов с меньшей мощностью передатчика.

Выводы. Совокупность полученных результатов решает важную научно-техническую проблему разработки нового математического метода обработки сигналов, использование которого позволяет обнаруживать радиолокационные сигналы с высокой вероятностью в условиях априорной неопределенности относительно распределения сигналов и помех, даже в тех случаях, когда ни один из известных методов не позволяет этого сделать.

Список литературы

1. Денисюк В.П. Применение сплайн-функций в задачах статистического анализа информационных сигналов / Денисюк В.П., Марченко Б.Г., Шутко Н.А. – К.: Знание, 1981. – 20 с.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів / Шутко М.О., Шелевицький І.В., Шутко В.М., Колганова О.О. – Кривий Ріг: "Видавничий дім", 2008. – 231 с.
5. Мазурков М.И. Системы широкополосной радиосвязи: [учеб. пособие для студ. вузов.] / Мазурков М.И. – О.: Наука и техника, 2010. – 340 с.
6. Garin L. Strobe & Edge correlator multipath mitigation for code. / Garin L., Van Diggelen F. and Rousseau J.M. // Proc. of ION GPS-96, The Institute of Navigation, Alexandria. – VA, 1996. – pp. 657–664.
7. Veitsel V. The mitigation of multipath errors by strobe correlators in GPS/GLONASS receivers. / Veitsel V., Zhdanov A., Zhodzishsky M. // GPS Solutions. – 1998. – V. 2, №2. – pp. 38–45.
8. Вейцель А.В. Новый класс меандровых шумоподобных радиосигналов для радионавигационных систем / А. В. Вейцель // Электроника, радиотехника и связь. Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16, №7. – С. 43–48.