УДК 519.634

П. Ф. Жук, Л. М. Бондаренко

Паралельне обчислення нерухомої точки циклічного оператора

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Визначено поняття циклічного оператора в напівупорядкованому банаховому просторі. Цей оператор має блочну структуру і виникає при моделюванні циклічних хімічних процесів у каскадах апаратів. За певних умов циклічний оператор має нерухому точку, що моделює усталений режим роботи каскаду. Запропоновано і обгрунтовано метод паралельного обчислення цієї нерухомої точки циклічного оператора.

Перспективи розвитку і вдосконалення технології обчислювального експерименту О. А. Самарського у фізиці, хімії, біології тісно пов'язані з можливостями застосування багатопроцесорних обчислювальних систем. При цьому на передній план виступають такі завдання обчислювальної математики, як створення нових методів і алгоритмів, орієнтованих на ефективне використання в багатопроцесорних системах, а також модернізація існуючих алгоритмів з реалізацією можливостей широкого паралелізму (див., наприклад, [1]). Незважаючи на те, що проблематиці паралельних обчислень присвячено значне число публікацій (особливо це стосується задач лінійної алгебри (наприклад, [2])), питання побудови паралельних алгоритмів для систем як звичайних диференціальних рівнянь, так і в частинних похідних, а також для операторних рівнянь, які є математичною основою для сучасних наукових і інженерних задач, залишаються актуальними (див. [3, 4]).

У даній роботі розглядається можливість паралельного обчислення нерухомої точки нелінійного оператора спеціального вигляду, названого нами циклічним, оскільки оператори такого роду виникають при математичному моделюванні циклічних хімічних процесів [5].

1. Постановка завдання. Позначимо через E_1 і E_2 банахові простори, напівупорядковані за допомогою конусів K_1 і K_2 відповідно. У цих просторах зафіксуємо деякі конусні відрізки $J_1 = \langle a_*, a^* \rangle \subseteq E_1$, $J_2 = \langle c_*, c^* \rangle \subseteq E_2$ і неперервний монотонний оператор P, що відображає конусний відрізок $J_1 \times J_2$ простору $E_1 \times E_2$ на себе.

Для визначення циклічного оператора задамо деяке натуральне число m і розглянемо $m + 1$ співвідношень

$$\begin{aligned} &(a'_0, c_1) = P(a_1, c^*), \\ &(a'_i, c_{i+1}) = P(a_{i+1}, c_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1, \\ &(a'_m, c_{m+1}) = P(a_*, c_m), \end{aligned} \tag{1}$$

послідовне застосування яких дозволяє для будь-яких відомих елементів $a_1,\ a_2, \ldots, a_m$ конусного відрізка J_1 однозначно знайти елементи $a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$ конусного відрізка J_1 і елементи $c_1,\ c_2, \ldots, c_{m+1}$ конусного відрізка J_2. Тому рівняння

$$A\vec{a} = \vec{a}', \qquad C\vec{a} = \vec{c}, \tag{2}$$

де вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in J_1^m$, $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_m) \in J_1^m$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in J_2^m$, задають деякі неперервні оператори $A\colon J_1^m \to J_1^m$, $C\colon J_1^m \to J_2^m$. Покажемо, що ці оператори монотонні.

Дійсно, нехай $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, $j = 1, 2$, — дві довільні точки конусного відрізка J_1^m такі, що $\vec{a}_1 \leqslant \vec{a}_2$. Тоді компоненти векторів $\vec{a}'_j = (a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}) = A\vec{a}_j$, $\vec{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{mj}) = C\vec{a}_j$, $j = 1, 2$, задовольняють нерівності

$$(a'_{01}, c_{11}) = P(a_{11}, c^*) \leqslant P(a_{12}, c^*) = (a'_{02}, c_{12}),$$
$$(a'_{i1}, c_{i+1,1}) = P(a_{i+1,1}, c_{i1}) \leqslant P(a_{i+1,2}, c_{i2}) = (a'_{i2}, c_{i+1,2}), \qquad i = 1, \ldots, m-1,$$
$$(a'_{m1}, c_{m+1,1}) = P(a_*, c_{m1}) \leqslant P(a_*, c_{m2}) = (a'_{m2}, c_{m+1,2}),$$

тобто $A\vec{a}_1 \leqslant A\vec{a}_2$, $C\vec{a}_1 \leqslant C\vec{a}_2$, що і потрібно було показати.

Оператор A, заданий співвідношенням (2), називатимемо циклічним, якщо виконується хоч би одна з двох умов:

1) серед множин $A^j J_1^m$, $j = 0, 1, \ldots$, є принаймні одна компактна множина;

2) конус K_1 правильний.

Практичне значення мають нерухомі точки циклічного оператора. Щодо них є вірним твердження.

Теорема 1. *Нехай A є циклічним оператором, а $\vec{a}_*$ є найменшою точкою конусного відрізка J_1^m. Тоді ітераційна послідовність $\vec{a}_1 = \vec{a}_*$, $\vec{a}_{k+1} = A\vec{a}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно зростає і збігається в просторі E_1^m до найменшої нерухомої точки $\vec{a}_\infty$ оператора A.*

Доведення. Оскільки $\vec{a}_1$ є найменшою точкою J_1^m, то $\vec{a}_2 = A\vec{a}_1 \geqslant \vec{a}_1$, отже, $\vec{a}_{k+1} = A\vec{a}_k \geqslant A\vec{a}_{k-1} = \vec{a}_k$, $k = 2, 3, \ldots$, тобто послідовність $\vec{a}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно зростає. Але вона обмежена зверху найбільшою точкою $\vec{a}^*$ конусного відрізка J_1^m, а тому, за умови циклічності оператора A, збігається в просторі E_1^m (див., наприклад, [6]), причому її границя $\vec{a}_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{a}_k$ є, очевидно, нерухомою точкою оператора A.

Нехай $\vec{a}$ — довільна нерухома точка оператора A. Оскільки $\vec{a}_1 \leqslant \vec{a}$, то $\vec{a}_k = A^{k-1}\vec{a}_1 \leqslant \vec{a}$, $k = 1, 2, \ldots$, отже, $\vec{a}_\infty \leqslant \vec{a}$. Тому $\vec{a}_\infty$ є найменшою нерухомою точкою оператора A. Теорему доведено.

Наше завдання полягає в організації паралельного обчислення нерухомої точки $\vec{a}_\infty$ оператора A.

2. Паралельне обчислення нерухомої точки $\vec{a}_\infty$. Введемо поняття узагальненого циклічного оператора. Для цього використовуватимемо аналоги співвідношень (1):

$$(a'_0, c'_1) = P(a_1, c^*),$$
$$(a'_i, c'_{i+1}) = P(a_{i+1}, c_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{3}$$
$$(a'_m, c'_{m+1}) = P(a_*, c_m).$$

Рівність (3) дозволяє для будь-яких відомих елементів a_1, $a_2, \ldots, a_m$ з J_1 і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ з J_2 однозначно знаходити елементи $a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$, $c'_1, c'_2, \ldots, c'_{m+1}$. Тому існує оператор, що відображає конусний відрізок $J_1^m \times J_2^m$ банахова простору $E_1^m \times E_2^m$ на себе за формулою

$$B(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}', \vec{c}'), \tag{4}$$

де компоненти векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in J_1^m$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in J_2^m$, $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_m) \in J_1^m$, $\vec{c}' = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_m) \in J_2^m$ задовольняють співвідношення (3).

Нам будуть необхідні деякі властивості оператора B, сформульовані у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай B — оператор, визначений рівністю* (4). *Тоді:*

1) оператор B неперервний і монотонний;

2) рівність $B(\vec{a},\vec{c}) = (A\vec{a},\vec{c})$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \in J_1^m$, $\vec{c} = C\vec{a}$;

3) якщо $(\vec{a},\vec{c}) \in J_1^m \times J_2^m$ і $(\vec{a},\vec{c}) \leqslant B(\vec{a},\vec{c})$, то $(\vec{a},\vec{c}) \leqslant (A\vec{a},C\vec{a}) \leqslant B^m(\vec{a},\vec{c})$.

Доведення. Неперервність оператора B випливає безпосередньо із співвідношень (3) і неперервності оператора P. Доведемо монотонність.

Візьмемо дві довільні точки $(\vec{a}_j,\vec{c}_j) = ((a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}),(c_{1j},c_{2j},\ldots,c_{mj}))$, $j = 1,2$, конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$ такі, що $(\vec{a}_1,\vec{c}_1) \leqslant (\vec{a}_2,\vec{c}_2)$. Тоді компоненти точок $(\vec{a}'_j,\vec{c}'_j) = ((a'_{1j},a'_{2j},\ldots,a'_{mj}),(c'_{1j},c'_{2j},\ldots,c'_{mj})) = B(\vec{a}_j,\vec{c}_j)$, $j = 1,2$, задовольняють співвідношення

$$(a'_{01},c'_{11}) = P(a_{11},c^*) \leqslant P(a_{12},c^*) = (a'_{02},c'_{12}),$$

$$(a'_{i1},c'_{i+1,1}) = P(a_{i+1,1},c_{i1}) \leqslant P(a_{i+1,2},c_{i2}) = (a'_{i2},c'_{i+1,2}), \qquad i = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$(a'_{m1},c'_{m+1,1}) = P(a_*,c_{m1}) \leqslant P(a_*,c_{m2}) = (a'_{m2},c'_{m+1,2}),$$

тобто $B(\vec{a}_1,\vec{c}_1) \leqslant B(\vec{a}_2,\vec{c}_2)$, що і потрібно було довести.

Для доведення другого твердження зазначимо, що рівність $(\vec{a}',\vec{c}') = B(\vec{a},\vec{c}) = (A\vec{a},\vec{c})$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \in J_1^m$, $\vec{a}' = A\vec{a}$, $\vec{c}' = \vec{c}$. При цьому співвідношення (1), (3) збігаються, отже, $\vec{c} = C\vec{a}$, що і потрібно було довести.

Припустимо, нарешті, що $(\vec{a},\vec{c}) \in J_1^m \times J_2^m$ і $(\vec{a},\vec{c}) \leqslant B(\vec{a},\vec{c})$. Тоді, через монотонність оператора B, послідовність $B^j(\vec{a},\vec{c})$, $j = 0,1,\ldots$, монотонно зростає. Вважаючи, що $A\vec{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$, $C\vec{a} = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$, $B^j(\vec{a},\vec{c}) = ((a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}),(c_{1j},c_{2j},\ldots,c_{mj}))$, маємо

$$(a_{01},c_1) \leqslant (a_{01},c_{11}) = P(a_1,c^*) = (\alpha_0,\beta_1),$$

$$(a_i,c_{i+1}) \leqslant (a_{i1},c_{i+1,1}) = P(a_{i+1},c_i) \leqslant P(a_{i+1},\beta_i) = (\alpha_i,\beta_{i+1}), \qquad i = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$(a_m,c_{m+1,1}) = (a_{m1},c_{m+1,1}) = P(a_*,c_m) \leqslant P(a_*,\beta_m) = (\alpha_m,\beta_{m+1}),$$

тобто $(\vec{a},\vec{c}) \leqslant (A\vec{a},C\vec{a})$. Аналогічно отримуємо

$$(\alpha_0,\beta_1) = P(a_1,c^*) = (a_{01},c_{11}),$$

$$(\alpha_i,\beta_{i+1}) = P(a_{i+1},\beta_i) \leqslant P(a_{i+1,i},c_{ii}) = (a_{i,i+1},c_{i+1,i+1}), \qquad i = 1,2,\ldots,m-1,$$

$$(\alpha_m,\beta_{m+1}) = P(a_*,\beta_m) \leqslant P(a_*,c_{mm}) = (a_{mm},c_{m+1,m+1}),$$

тобто $(A\vec{a},C\vec{a}) \leqslant B^m(\vec{a},\vec{c})$. Лему доведено.

Оператор B, заданий співвідношенням (4), називатимемо узагальненим циклічним, якщо виконується хоч би одна з двох умов:

1) серед множин $B^j(J_1^m \times J_2^m)$, $j = 0,1,\ldots$, є принаймні одна компактна множина;

2) конус K_1 правильний, а конус K_2 нормальний.

Для узагальненого циклічного оператора має місце аналог теореми 1.

Теорема 2. *Нехай B — циклічний оператор, а $(\vec{a}_*,\vec{c}_*)$ — найменша точка конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$. Тоді ітераційна послідовність*

$$(\vec{a}_1,\vec{c}_1) = (\vec{a}_*,\vec{c}_*), \qquad (\vec{a}_{k+1},\vec{c}_{k+1}) = B(\vec{a}_k,\vec{c}_k), \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

монотонно зростає і збігається в просторі $E_1^m \times E_2^m$ до найменшої нерухомої точки $(\vec{a}_\infty,\vec{c}_\infty)$ оператора B, де $\vec{a}_\infty$ — найменша нерухома точка оператора A, а $\vec{c}_\infty = C\vec{a}_\infty$.

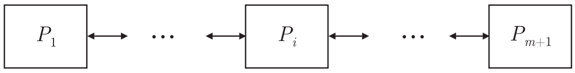

Рис. 1. Паралельна система для реалізації оператора B

Доведення. Оскільки $(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$ — найменша точка конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$, то, очевидно, $(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leqslant B(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$. Тому, за лемою 1, послідовність $(\vec{a}_k, \vec{c}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно зростає, обмежена зверху найбільшою точкою $(\vec{a}^*, \vec{c}^*)$ конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$ і мають місце оцінки

$$(\vec{a}_{jm+1}, \vec{c}_{jm+1}) \leqslant (A\vec{a}_{jm+1}, C\vec{a}_{jm+1}) \leqslant (\vec{a}_{(j+1)m+1}, \vec{c}_{(j+1)m+1}), \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{6}$$

Покажемо, що послідовність $(\vec{a}_k, \vec{c}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, збігається в просторі $E_1^m \times E_2^m$. Дійсно, у разі коли певна множина $B^j(J_1^m \times J_2^m)$, $j = 0, 1, \ldots$, компактна, це безпосередньо випливає з монотонності і обмеженості послідовності $(\vec{a}_k, \vec{c}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ (див., наприклад, [6]).

У другому можливому випадку конус K_1 є правильний, а тому послідовність $\vec{a}_k, k = 1, 2, \ldots$, збігається. Але тоді з нерівностей (6) і нормальності конуса K_2 випливає збіжність послідовності $\vec{c}_k, k = 1, 2, \ldots$.

Таким чином, існує границя $(\vec{a}, \vec{c}) = \lim\limits_{k \to \infty} (\vec{a}_k, \vec{c}_k)$. Оскільки оператор B неперервний, то $(\vec{a}, \vec{c})$ — його нерухома точка. Більш того, з оцінок (6) випливає, що $\vec{a}$ — нерухома точка оператора A і $\vec{c} = C\vec{a}$. Залишається показати, що $\vec{a} = \vec{a}_\infty$.

Дійсно, за лемою 1, $B(\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty) = (A\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty) = (\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$, тобто $(\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$ — нерухома точка оператора B. Тому $(\vec{a}, \vec{c}) \leqslant (\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$, $\vec{a} \leqslant \vec{a}_\infty$. Але, за теоремою 1, $\vec{a} \geqslant \vec{a}_\infty$, отже, $\vec{a} = \vec{a}_\infty$. Теорему доведено.

Зауваження. Фактично доведено, що ітераційна послідовність $(\vec{a}_k, \vec{c}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, монотонно зростає і збігається до $(\vec{a}_\infty, \vec{c}_\infty)$ у просторі $E_1^m \times E_2^m$ при будь-якому початковому наближенні $(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$ такому, що $\vec{a}_1 \leqslant \vec{a}_\infty$, $(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leqslant B(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$.

Теорема 2 дозволяє знаходити найменшу нерухому точку $\vec{a}_\infty$ циклічного оператора A за допомогою ітераційної послідовності (5), тобто шляхом послідовного застосування узагальненого циклічного оператора B.

Оператор B допускає чисельну реалізацію на паралельній системі у вигляді лінійного масиву $m + 1$ процесорів з локальною пам'яттю, зображеного на рис. 1.

Для обчислення компонент векторів $(\vec{a}', \vec{c}') = B(\vec{a}, \vec{c})$ у локальній пам'яті процесора P_1 розміщується інформація про елементи a_1, c^*; у локальній пам'яті процесора P_i, $i = 2, 3, \ldots, m$, — інформація про елементи a_i, c_{i-1}; у P_{m+1} — про елементи a_*, c_m. Алгоритм обчислення компонент векторів $(\vec{a}', \vec{c}')$ на даній паралельній системі складається з двох етапів.

На першому етапі реалізуються співвідношення (3): на процесорі P_1 обчислюються елементи a_0', c_1'; на процесорі P_i, $i = 2, 3, \ldots, m$, — елементи a_{i-1}', c_i'; на P_{m+1} — елементи a_m', c_{m+1}'. На другому етапі відбувається обмін інформацією в системі: у локальну пам'ять процесора P_1 надходить з локальної пам'яті процесора P_2 інформація про елемент a_1'; у локальну пам'ять процесора P_i, $i = 2, 3, \ldots, m$, надходить інформація про елемент c_{i-1}' з P_{i-1} та інформація про елемент a_i' з P_{i+1}; у пам'ять процесора P_{m+1} надходить інформація про елемент c_m'. Обмін інформацією між процесорами P_{i-1}, P_i, P_{i+1} схематично показаний на рис. 2.

Тут позначено (a_{i-1}, c_{i-2}), (a_i, c_{i-1}), (a_{i+1}, c_i) — початкові дані, а (a_{i-2}', c_{i-1}'), (a_{i-1}', c_i'), (a_i', c_{i+1}') — результати роботи процесорів P_{i-1}, P_i, P_{i+1} на першому етапі.

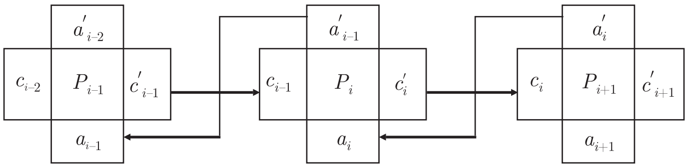

Рис. 2. Схема взаємодії процесора P_i із сусідніми процесорами P_{i-1}, P_{i+1}

Як перший, так і другий етапи обчислення векторів $(\vec{a}', \vec{c}')$ можуть бути здійснені для всіх процесорів паралельної системи одночасно. Тим самим досягається максимальний ступінь паралелізму.

1. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
2. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – Москва: Мир, 1991. – 368 с.
3. *Воеводин В. В.* Вычислительная математика и структура алгоритмов. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – 112 с.
4. *Ильин В. П.* Параллельные алгоритмы для больших прикладных задач: проблемы и технологии // Автометрия. – 2007. – **43**, № 2. – С. 3–21.
5. *Жук П. Ф., Бондаренко Л. Н.* Асимптотическое поведение решения нелинейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 7. – С. 1306–1313.
6. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Інститут інформаційно-діагностичних систем
Національного авіаційного університету, Київ

Надійшло до редакції 26.11.2010

P. F. Zhuk, L. M. Bondarenko

The parallel computing of the fixed point of a cyclic operator

The concept of cyclic operator is defined in a semiordered Banach space. This operator has a sectional structure and arises at the design of cyclic chemical processes in the cascades of apparatus. Under certain conditions, a cyclic operator has a fixed point which designs a withstand mode of operations of a cascade. The method of parallel computing of this fixed point of the cyclic operator is offered and grounded.