УДК 519.6

Об одной гипотезе Дж. Форсайта

Жук П. Ф., Бондаренко Л. Н.

Введение

Пусть R^n — n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$. Для решения уравнения $Au=f$ ($u, f \in R^n$) с симметричной положительно определенной матрицей A применим s-шаговый метод наискорейшего спуска (сокращенно — s-шаговый метод). Последовательные приближения $u_1, u_2, \dots$ к решению u^* строятся по правилу [1]:

$$u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^k A^{i-1} z_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad u_0 \in R^n, \tag{1}$$

где u_0 — заданное начальное приближение, $z_k = Au_k - f$ — невязка, а числа $\{\gamma_i^k, i=1, \dots, s\}$ выбираются из условия минимума величины $F(u_{k+1}) = 0{,}5(Au_{k+1}, u_{k+1}) - (u_{k+1}, f)$.

Каждая итерация s-шагового метода может быть реализована с помощью s итераций метода сопряженных градиентов [2, с. 355]; поэтому метод (1) можно рассматривать как бесконечную последовательность циклов длины s. В этом смысле s-шаговый метод занимает промежуточное положение между двухслойными градиентными методами и трехслойными методами сопряженных градиентов. Известно (см., например, [2], [3]), что хотя метод сопряженных градиентов теоретически является прямым методом, но при реализации на ЭВМ в случае матриц высокого порядка, как правило, уже через несколько десятков итераций реальный процесс перестает отражать свойства реализуемого метода. В связи с этим, в [4, с. 478] отмечается, что важно было бы разобраться в вопросах влияния ошибок округления на сходимость метода сопряженных градиентов. В [3, с. 197], также в связи с ошибками округления, указывается на возможность проводить анализ метода сопряженных градиентов как анализ нестационарного итерационного метода с некоторой длиной цикла s. Поэтому, на наш взгляд, необходимо детальное изучение s-шагового метода, в частности, его асимптотических свойств.

В данной работе рассматривается известное предположение Дж. Форсайта [5] об асимптотическом поведении s-шагового метода: если $z_i \neq 0$, то последовательности нормированных невязок $\{y_{2k} = z_{2k}\|z_{2k}\|^{-1}, k = 0, 1, \dots\}$ и $\{y_{2k+1} = z_{2k+1}\|z_{2k+1}\|^{-1}, k=0, 1, \dots\}$ сходятся. Для одношагового метода сформулированная гипотеза верна [6], но для любого $s > 1$ вопрос о справедливости ее остается, по-видимому, открытым.

В § 1 данной работы доказана справедливость гипотезы Дж. Форсайта для $s=2$ (основная теорема) и в качестве применения в § 2 определена существенная область значений асимптотической скорости сходимости двухшагового метода (теорема 1). Теорема 1 позволяет также автоматически распространить полученный результат и на s-шаговый метод, если для него справедлива гипотеза Дж. Форсайта. Отметим, что для одношагового метода оценки асимптотической скорости сходимости при различных условиях на начальные приближения получены в [7]; существенная точная верхняя грань ее указана в [8] (без доказательств).

Пусть $\varepsilon>0$ и $k_s(u_0, \varepsilon)=\min\{k: \|u_k-u^*\|_A\leqslant\varepsilon\|u_0-u^*\|_A\}$. Будем говорить, что s_1-шаговый метод с начальным приближением u_0 асимптотически эффективнее s_2-шагового метода с начальным приближением v_0, если существует $\varepsilon(u_0, v_0)>0$ такое, что для всех $0<\varepsilon<\varepsilon(u_0, v_0)$ выполняется неравенство

$$s_1k_{s_1}(u_0, \varepsilon)<s_2k_{s_2}(v_0, \varepsilon).$$

Из соотношений (2.3), (2.4), замечания 3 и леммы 3 следует, что если гипотеза Дж. Форсайта справедлива для некоторого $s\geqslant1$, то почти для всех (по мере Лебега) пар начальных приближений (u_0, v_0) $2s$-шаговый метод асимптотически эффективнее s-шагового метода. Если итерации строить по схеме сопряженных градиентов, то, как следует из [2, с. 353], количество арифметических операций, требуемых для двух итераций s-шагового метода, практически равно количеству арифметических операций при одной итерации $2s$-шагового метода. Следовательно, почти для всех пар начальных приближений $2s$-шаговый метод асимптотически эффективнее чем s-шаговый метод и в смысле вычислительных затрат.

В § 3 изучаются асимптотические спектры двухшагового метода, а в приложении рассмотрены приемы его ускорения, аналогичные приемам ускорения одношагового метода [2], [3], [9]. В приложении также указан способ, основанный на асимптотических свойствах и позволяющий уменьшить объем вычислительной работы двухшагового метода при решении нескольких систем уравнений с одинаковой матрицей A и различными правыми частями f.

Отметим, что доказанные в работе свойства метода (1) могут быть перенесены с помощью известных замен (см., например, [2], [3], [10]) на неявный s-шаговый метод.

§ 1. Основная теорема

Здесь и далее будем предполагать, что A — диагональная матрица с различными собственными значениями $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$. Общий случай рассмотрен в § 3.

Изложим сначала некоторые известные свойства s-шагового метода, которые будут использоваться на протяжении всей работы.

Обозначим через Σ множество единичных векторов пространства R^n, а через R_s^n — множество векторов, у которых по крайней мере $s+1$ ненулевых компонент. Пусть $\Sigma_s=R_s^n\cap\Sigma$.

1. Известно [5], что если $z_0\in R_s^n$, то для любого $k=0, 1, \ldots$ $u_k\neq u^*$, $z_k\in R_s^n$, а числа $\{\gamma_i^k, i=1, \ldots, s\}$ определяются однозначно; в противном случае, $u_k=u^*$, $k=1, 2, \ldots$.

2. Последовательные невязки, как следует из (1), связаны между собой соотношением

$$z_{k+1}=P_s(A, z_k)z_k, \tag{1.1}$$

где $P_s(A, z_k) = I + \gamma_1^k A + \ldots + \gamma_s^k A^s$ — матричный многочлен, реализующий k-ю итерацию s-шагового метода. В силу предыдущего свойства многочлены $\{P_s(A, z_k), k=0, 1, \ldots\}$ при $z_0 \in R_s^n$ определены однозначно. Поэтому, полагая $z_0 = z$, для любого $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R_s^n$ можно определить многочлен $P_s(A, z) = I + \gamma_1(z) A + \ldots + \gamma_s(z) A^s$. Положим $P_s(t, z) = 1 + \gamma_1(z) t + \ldots + \gamma_s(z) t^s$. Мы будем использовать следующие свойства $P_s(t, z)$ [5], [11]:

а) для любого многочлена $P(t)$ степени $< s$

$$\sum_{i=1}^{n} P_s(\lambda_i, z) P(\lambda_i) z_i^2 = 0, \tag{1.2}$$

б)

$$P_s(t, z) = \det \begin{bmatrix} \mu_0 \mu_1 \ldots \mu_{s-1} & 1 \\ \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s & t \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \mu_s \mu_{s+1} \ldots \mu_{2s-1} & t^s \end{bmatrix} \left(\det \begin{bmatrix} \mu_1 \ldots \mu_s \\ \ldots\ldots \\ \mu_s \ldots \mu_{2s-1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \tag{1.3}$$

где $\mu_\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\nu z_i^2$, $\nu = 0, \ldots, 2s-1$,

в) многочлен $P_s(t, z)$ имеет s простых вещественных корней, расположенных в (λ_1, λ_n).

Из б) следует, что

г) $P_s(t, \alpha z) = P_s(t, z)$, если $\alpha \neq 0$,

д) $\{\gamma_i(z), i=1, \ldots, s\}$ — непрерывные функции от $z \in R_s^n$, следовательно, отображение $z' = P_s(A, z) z$ непрерывно на R_s^n.

3. Пусть $z_0 \in R_s^n$, $\bar{P}_s(A, z_k) = P_s(A, z_k)/\gamma_s^k$, $k=0, 1, \ldots$. (1.4)

Рассмотрим последовательность векторов

$$w_0 = z_0, \quad w_{k+1} = \bar{P}_s(A, z_k) w_k, \quad k=0, 1, \ldots . \tag{1.5}$$

В [5] доказано, что $\beta_k = \|w_{k+1}\|^2 \|w_k\|^{-2}$ — неубывающая сходящаяся последовательность. Положим

$$\beta = \lim_{k\to\infty} \beta_k. \tag{1.6}$$

4. Пусть

$$\bar{Q}_{2s}(A, z_k) = \bar{P}_s(A, z_{k+1}) \bar{P}_s(A, z_k), \quad R_{2s}(A, z_k) = \bar{Q}_{2s}(A, z_k) - \beta I. \tag{1.7}$$

Согласно [12], справедливо утверждение: если для коэффициентов матричных многочленов $\{R_{2s}(A, z_{2k}), k=0, 1, \ldots\}$ существуют предельные значения (при $k\to\infty$), то для четных итераций процесса (1) существует предельное направление, т. е. последовательность $\{y_{2k}, k=0, 1, \ldots\}$ сходится.

5. Рассмотрим отображение $T_s: \Sigma_s \to \Sigma_s$, заданное формулой

$$y' = T_s y = P_s(A, y) y / \|P_s(A, y) y\|, \tag{1.8}$$

и множество $F(A)$ векторов $y \in \Sigma_s$ таких, что

$$y = T_s y' \equiv T_s^2 y. \tag{1.9}$$

Известно [5], что

а) отображение T_s непрерывно на Σ_s,

б) если $y \in F(A)$, то число ненулевых компонент вектора y не менее $s+1$ и не более $2s$, в) каждый предельный вектор последовательности $\{y_k,\ k=0, 1, \ldots\}$ принадлежит $F(A)$,

г) множество $G(y_0)$ предельных векторов последовательности $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$ — континуум, т. е. связное и замкнутое в R^n множество.

Перейдем теперь к доказательству гипотезы Дж. Форсайта для двухшагового метода.

Рассмотрим последовательность

$$\rho_k^{(s)}(u_0) = (F(u_{k+1}) - F(u^*))(F(u_k) - F(u^*))^{-1},\ k=0, 1, \ldots,$$

характеризующую скорость сходимости метода (1) при заданном начальном приближении u_0. Имеет место

Лемма 1. *Если $u_0 - u^* \in R_s^n$, то $\{\rho_k^{(s)}(u_0),\ k=0, 1, \ldots\}$ — неубывающая сходящаяся последовательность.*

Доказательство. В силу построения u_{k+1} при любом начальном приближении u_0 имеем [1], что для каждого $k=0, 1, \ldots$

$$(z_k,\ z_{k+1}) = \ldots = (A^{s-1}z_k,\ z_{k+1}) = 0.$$

Поэтому

$$(z_k,\ z_{k+2})_{A^{-1}} = (z_k,\ P_s(A,\ z_{k+1})\,z_{k+1})_{A^{-1}} = (P_s(A,\ z_{k+1})\,z_k,\ z_{k+1})_{A^{-1}} =$$

$$= \|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}} + ((P_s(A,\ z_{k+1}) - P_s(A,\ z_k))\,z_k,\ z_{k+1})_{A^{-1}} = \|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}}, \quad (1.10)$$

так как многочлен $(P_s(t,\ z_{k+1}) - P_s(t,\ z_k))\,t^{-1}$ степени $s-1$ (здесь $(u,\ v)_{A^{-1}} = (A^{-1}u,\ v)$). Поскольку $u_0 - u^* \in R_s^n$, то $z_0 \in R_s^n$ и $z_1 \neq 0$ (так как многочлен $P_s(t,\ z_0)$ имеет не более s корней). Из (1.10) при $k=0$ имеем $(z_0,\ z_2)_{A^{-1}} = \|z_1\|^2_{A^{-1}}$, следовательно, $z_2 \neq 0$. Используя (1.10) при $k = 1, 2, \ldots$, убеждаемся, что все $z_k \neq 0$. Но тогда для каждого $k = 0, 1, \ldots$ $z_k \in R_s^n$. Действительно, если $z_k \notin R_s^n$, то $z_{k+1} = P_s(A,\ z_k)\,z_k = 0$. Следовательно, так как

$$F(u_k) - F(u^*) = 0{,}5\,\|z_k\|^2_{A^{-1}}, \quad (1.11)$$

последовательность $\{\rho_k^{(s)}(u_0),\ k=0, 1, \ldots\}$ определена.

Из (1.10), после применения неравенства $(z_k,\ z_{k+2})_{A^{-1}} \leqslant \|z_k\|_{A^{-1}}\|z_{k+2}\|_{A^{-1}}$, получаем

$$\|z_{k+1}\|^2_{A^{-1}}\,\|z_k\|^{-2}_{A^{-1}} \leqslant \|z_{k+2}\|^2_{A^{-1}}\,\|z_{k+1}\|^{-2}_{A^{-1}},\quad k = 0, 1, \ldots . \quad (1.12)$$

Используя (1.11), (1.12) и то, что $\rho_k^{(s)}(u_0) < 1$, $k=0, 1, \ldots$, имеем $\rho_0^{(s)}(u_0) \leqslant \rho_1^{(s)}(u_0) \leqslant \cdots < 1$. Лемма доказана.

Замечание 1. В ходе доказательства леммы было установлено, что если $z_0 \in R_s^n$, то и все $z_k \in R_s^n$. Аналогичный факт доказывается в [5, с. 75], но значительно сложнее.

Замечание 2. Для одношагового метода в [2, с. 338] установлено так называемое асимптотическое свойство, которое эквивалентно лемме 1 при $s=1$. Для s-шагового метода в [5, с. 68] при выполнении условия леммы 1 доказано лишь существование d_1, d_2 таких, что $0 < d_1 \leqslant \rho_k^{(s)}(u_0) \leqslant d_2 < 1$, $k=0, 1, \ldots$.

Пусть $F(i_1, \ldots, i_{2s}, A)$ — множество векторов из $F(A)$, у которых не равны нулю только i_j $(j=1, \ldots, 2s)$ компоненты, а

$$\rho_s(u_0) = \lim_{k\to\infty} \rho_k^{(s)}(u_0). \quad (1.13)$$

Имеет место основная

Теорема. *Если $s=2$ и $u_0 - u^* \in R_2^n$, то последовательности $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$, $\{y_{2k+1},\ k=0, 1, \ldots\}$ сходятся.*

Докажем сначала сходимость последовательности $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$. Пусть $y \in \Sigma_2$, а

$$\overline{Q}_4(t, y) = \overline{P}_2(t, y')\overline{P}_2(t, y) = t^4 + \alpha_3(y)t^3 + \ldots + \alpha_0(y),$$

где вектор y' определен в (1.8). Покажем, что функции $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$ постоянны на $G(y_0)$ — множестве предельных векторов последовательности $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$.

Пусть $M(i_1, \ldots, i_4) = G(y_0) \cap F(i_1, \ldots, i_4, A) \neq \varnothing$ и все i_j $(j=1, \ldots, 4)$ различны. Тогда, в силу (1.9), для любого $y \in M(i_1, \ldots, i_4)$ имеем

$$\overline{Q}_4(\lambda_{i_1}, y) = \ldots = \overline{Q}_4(\lambda_{i_4}, y) > 0.$$

Поэтому, используя свойства 3, получаем

$$\overline{Q}_4(\lambda_{i_j}, y) = \lim_{p\to\infty} \| w_{k_p+2} \| \cdot \| w_{k_p} \|^{-1} = \lim_{p\to\infty} \beta_{k_p}^{1/2} \beta_{k_p+1}^{1/2} = \beta, \tag{1.14}$$

где $j=1, \ldots, 4$, k_p — такая последовательность индексов, что $y_{k_p} \to y$. Так как β не зависит от $y \in M(i_1, \ldots, i_4)$, то из (1.14) следует, что $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$ постоянны на $M(i_1, \ldots, i_4)$.

Предположим теперь, что i_j $(j=1, \ldots, 4)$ различны не все, например, $i_3 = i_4$. Аналогично (1.14) доказывается, что для любого $y \in M(i_1, \ldots, i_4)$

$$\overline{Q}_4(\lambda_{i_1}, y) = \ldots = \overline{Q}_4(\lambda_{i_3}, y) = \beta, \tag{1.15}$$

$$\overline{Q}_4(\lambda_{i_1}, y) = \ldots = \overline{Q}_4(\lambda_{i_3}, y) = \rho_2(u_0)\alpha_0(y). \tag{1.16}$$

Из (1.15), (1.16) следует, что $\alpha_0(y) = \beta(\rho_2(u_0))^{-1}$ не зависит от $y \in M(i_1, \ldots, i_4)$. Остальные функции $\{\alpha_i(y),\ i=1, 2, 3\}$ можно определить из (1.15):

$$\alpha_1(y)\lambda_{i_j} + \alpha_2(y)\lambda_{i_j}^2 + \alpha_3(y)\lambda_{i_j}^3 = \beta - \alpha_0(y) - \lambda_{i_j}^4, \quad j=1, 2, 3. \tag{1.17}$$

Система (1.17) имеет единственное решение относительно $\{\alpha_i(y),\ i=1, \ldots, 3\}$, следовательно, функции $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$ постоянны на $M(i_1, \ldots, i_4)$.

Так как различных множеств $F(i_1, \ldots, i_4, A)$ конечное число, то в силу доказанного выше и свойств 5б, 5в каждая из функций $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$ может принимать на $G(y_0)$ лишь конечное число различных значений. С другой стороны, функции $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$, в силу свойства 2д, непрерывны на $G(y_0)$. Поэтому, так как $G(y_0)$ — связное множество (свойство 5г), то указанные функции либо постоянны на $G(y_0)$, либо принимают бесконечное число различных значений (см., например, [13, с. 122]).

Таким образом, функции $\{\alpha_i(y),\ i=0, \ldots, 3\}$ постоянны на $G(y_0)$, следовательно, для коэффициентов многочленов $\overline{Q}_4(A, y_{2k})$ существуют предельные значения (при $k\to\infty$). В силу свойства 4 последовательность $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$ сходится ($\overline{Q}_4(A, y_{2k}) = \overline{Q}_4(A, z_{2k})$ в силу свойства 2г).

Сходимость $\{y_{2k+1},\ k=0, 1, \ldots\}$ следует из сходимости $\{y_{2k},\ k=0, 1, \ldots\}$ и свойства 5а:

$$\lim_{k\to\infty} y_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} T_2 y_{2k} = T_2 \lim_{k\to\infty} y_{2k}.$$

Теорема доказана.

§ 2. Асимптотическая скорость сходимости

Пусть $u=u_0\in R^n$ — начальное приближение s-шагового метода.

Под асимптотической скоростью сходимости s-шагового метода будем понимать следующую функцию от начального приближения:

$$q_s(u)=\begin{cases} -\ln\rho_s(u), & \text{если } u-u^*\in R_s^n, \\ +\infty & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\rho_s(u)=\rho_s(u_0)=\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k^{(s)}(u_0)$.

Пусть μ — n-мерная мера Лебега, заданная на R^n.

Лемма 2. *Функция $q_s(u)$ μ-измерима на R^n.*

Доказательство. Пусть $n\geqslant s+1$. Рассмотрим последовательность функций, заданных на R^n:

$$q_k^{(s)}(u)=\begin{cases} -\ln\rho_k^{(s)}(u), & \text{если } u-u^*\in R_s^n, \\ +\infty & \text{в противном случае,}\end{cases} \tag{2.1}$$

$k=0, 1, \ldots$. Функции $\{q_k^{(s)}(u),\ k=0, 1, \ldots\}$ μ-измеримы на R^n. Действительно, пусть $V(c)=\{u\colon q_k^{(s)}(u)<c\}$. Множество $V(c)$ открыто для любого $c\in R$, так как если $u-u^*\in R_s^n$, то существует окрестность точки u, на которой функция $q_k^{(s)}(\cdot)$ конечна и непрерывна. Следовательно, для каждого $c\in R$ множество $V(c)$ измеримо по Лебегу (см., например, [14, с. 262]); отсюда вытекает μ-измеримость функций $\{q_k^{(s)}(u),\ k=0, 1, \ldots\}$.

Рассмотрим множество $U_1=\{u\colon u-u^*\notin R_s^n\}$, представляющее собой объединение конечной совокупности аффинных множеств размерностей $<s+1$. Ясно, что $\mu(U_1)=0$, поэтому последовательность измеримых функций $\{q_k^{(s)}(u),\ k=0, 1, \ldots\}$ сходится к функции $q_s(u)$ почти всюду. Следовательно, функция $q_s(u)$ μ-измерима (см., например, [14, с. 286]). Для $n<s+1$ измеримость $q_s(u)$ очевидна. Лемма доказана.

Основной задачей данного параграфа является отыскание $\operatorname{vrai\,sup}\limits_{R^n} q_2(u)$ и $\operatorname{vrai\,inf}\limits_{R^n} q_2(u)$ относительно меры μ. Обозначим через $\pi_s(t)$ многочлен степени s, наименее уклоняющийся от нуля на спектре матрицы A и нормированный условием $\pi_s(0)=1$. Положим

$$\alpha_s=\max_{i=\overline{1,n}}|\pi_s(\lambda_i)|. \tag{2.2}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если гипотеза Дж. Форсайта справедлива для некоторого $s\geqslant1$ и $n\geqslant2s+1$, то*

$$\operatorname{vrai\,sup}_{R^n} q_s(u)=-\ln\alpha_{2s}, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{vrai\,inf}_{R^n} q_s(u)=-2\ln\alpha_s. \tag{2.4}$$

Сформулируем предварительно несколько лемм. Вектор $u\in R^n$ будем называть вырожденным, если для некоторого конечного $k=0, 1, \ldots$ существует $i=1, \ldots, n$ такое, что $u_{i,k}=u_i^*$ (здесь $u_{i,k}$ — i-я компонента k-го приближения s-шагового метода u_k при $u_0=u$, а u_i^* — i-я компонента вектора u^*). Пусть U_s — множество всех вырожденных векторов.

Лемма 3. *Если $n\geqslant s+1$, то $\mu(U_s)=0$.*

Доказательство. Зададим некоторое $j\in\{1, \ldots, n\}$ и рассмотрим множество $Z_n(j)$ векторов $z=(z_1, \ldots, z_n)\in R^n$ таких, что $z_i\neq0$ ($i=$

$=1, \ldots, n$) и

$$\det\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_{s-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_s & \lambda_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_s & \mu_{s+1} & \ldots & \mu_{2s-1} & \lambda_j^s \end{bmatrix} = 0, \tag{2.5}$$

где $\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha z_i^2$ ($\alpha=0, \ldots, 2s-1$). Докажем индукцией по $n=s+1, \ldots,$ что для любого $j=1, \ldots, n$

$$\mu(Z_n(j)) = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $n=s+1$. Тогда $Z_n(j)=\varnothing$ в силу свойства 1 и соотношения (1.3). Предположим теперь, что равенство (2.6) справедливо для $n<m$, и докажем его для $n=m$. Заметим, что в силу свойства 2в $Z_m(1)=\varnothing$, $Z_m(m)=\varnothing$. Следовательно, можно считать, что $j\in\{2, \ldots, m-1\}$. Запишем (2.5) в виде

$$z_m^2\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_m^{i-1} d_i\right) = -\det\begin{bmatrix} \mu_0' & \mu_1' & \ldots & \mu_{s-1}' & 1 \\ \mu_1' & \mu_2' & \ldots & \mu_s' & \lambda_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_s' & \mu_{s+1}' & \ldots & \mu_{2s-1}' & \lambda_j^s \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

где $\mu_\alpha' = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^\alpha z_i^2$, d_i — определитель, получающийся из

$$\det\begin{bmatrix} \mu_0' & \mu_1' & \ldots & \mu_{s-1}' & 1 \\ \mu_1' & \mu_2' & \ldots & \mu_s' & \lambda_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_s' & \mu_{s+1}' & \ldots & \mu_{2s-1}' & \lambda_j^s \end{bmatrix}$$

заменой i-го столбца на столбец $(1\ \lambda_m \ldots \lambda_m^s)^T$.

Положим $Z_m(1, j)$ — множество векторов $z\in Z_m(j)$, для которых $\sum_{i=1}^{s} \lambda_m^{i-1} d_i \neq 0$, а $Z_m(2, j)=Z_m(j)\setminus Z_m(1, j)$. Из (2.7) следует, что если $z\in Z_m(2, j)$, то вектор $\tilde{z}=(z_1, \ldots, z_{m-1})\in Z_{m-1}(j)$. В силу предположения индукции $(m-1)$-мерная мера Лебега множества $Z_{m-1}(j)$ $(1\leqslant j<m)$ равна нулю, поэтому $\mu(\{z\colon z=(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m),\ (z_1, \ldots, z_{m-1})\in Z_{m-1}(j)\})=0$. Следовательно,

$$\mu(Z_m(2, j)) = 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим множество $Z_m(1, j)$. Поделив обе части (2.7) на $\sum_{i=1}^{s} \lambda_m^{i-1} d_i$, получим $z_m^2 = g(z_1, \ldots, z_{m-1})$. Положим $D=\{z\colon z=(z_1, \ldots, z_{m-1}, 0),\ z_1\neq 0, \ldots, z_{m-1}\neq 0,\ g(z_1, \ldots, z_{m-1})>0\}$. Если $z\in D$, то из непрерывности $\sum_{i=1}^{s} \lambda_m^{i-1} d_i$ и правой части (2.7) в точке z, следует существование в подпространстве $R^{m-1}=\{z\colon z=(z_1, \ldots, z_{m-1}, 0)\}$ окрестности точки z, на которой функция $g(z_1, \ldots, z_{m-1})$ определена и непрерывна, поэтому, существует окрестность $O(z)\subseteq D$. Таким образом, D — открытое множество в топологии R^{m-1}.

Определим на D функцию $z_m=(g(z_1, \ldots, z_{m-1}))^{1/2}$ и $z_m= =-(g(z_1, \ldots, z_{m-1}))^{1/2}$. Пусть S_1 и S_2 — графики соответственно первой и второй функций в R^m. Ясно, что

$$S_1 \cap S_2 = \varnothing, \quad S_1 \cup S_2 = Z_m(1, j). \tag{2.9}$$

Докажем, что $\mu(S_1)=\mu(S_2)=0$. Разобьем подпространство R^{m-1} на счетное множество $(m-1)$-мерных гиперкубов

$$E_{i_1 \ldots i_{m-1}} = \{z\colon i_1 < z_1 \leqslant i_1+1, \ldots, i_{m-1} < z_{m-1} \leqslant i_{m-1}+1,$$
$$i_p = 0, \pm 1, \ldots, p = 1, \ldots, m-1\}.$$

Пусть $E^0_{i_1 \ldots i_{m-1}}$ — внутренность $E_{i_1 \ldots i_{m-1}}$ в R^{m-1}, а $G=E^0_{i_1 \ldots i_{m-1}} \cap D \neq \varnothing$. Так как G — непустое ограниченное открытое в R^{m-1} множество, то, в силу [15, с. 20], $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, где $\{\Delta_i\}$ — замкнутые, пересекающиеся разве что по своим границам, гиперкубы. На каждом из Δ_i функция $z_m= =(g(z_1, \ldots, z_{m-1}))^{1/2}$ определена и непрерывна, так как она непрерывна на D, поэтому [15, с. 20] поверхность

$$S_1^{i_1 \ldots i_{m-1} i} = \{z\colon z=(z_1, \ldots, z_{m-1}, (g(z_1, \ldots, z_{m-1}))^{1/2}), (z_1, \ldots, z_{m-1}, 0) \in \Delta_i\}$$

имеет m-мерную жорданову меру нуль, следовательно, $\mu(S_1^{i_1 \ldots i_{m-1} i}) = = 0$. Но тогда [14]

$$\mu(S_1^{i_1 \ldots i_{m-1}}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_1^{i_1 \ldots i_{m-1} i}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Рассмотрим $\tilde{S}_1 = \bigcup\limits_{i_1=0, \pm 1, \ldots} \ldots \bigcup\limits_{i_{m-1}=0, \pm 1, \ldots} S_1^{i_1 \ldots i_{m-1}}$. Множество $S_1 \setminus \tilde{S}_1$ принадлежит объединению счетного числа гиперплоскостей в R^m $z_i=p$, $p=0, \pm 1, \ldots, i=1, \ldots, m-1$. Поэтому, в силу (2.10), $\mu(S_1)=\mu(\tilde{S}_1)+ +\mu(S_1 \setminus \tilde{S}_1)=0$. Аналогично убеждаемся, что $\mu(S_2)=0$. Следовательно, в силу (2.8), (2.9) и $\mu(Z_m(j))=0$.

Таким образом, (2.6) выполняется в силу индукции для любого $n \geqslant \geqslant s+1$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$. Положим

$$Z_n = \bigcup_{j=1}^{n} Z_n(j), \quad U = \{u_0\colon \exists k = 0, 1, \ldots, z_k \in Z_n\}.$$

Докажем, что при $n \geqslant s+1$

$$U_s \subseteq U \cup W_1 \cup \ldots \cup W_n, \tag{2.11}$$

где $W_i = \{u\colon u=(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i^*, u_{i+1}, \ldots, u_n)\}$, $i=1, \ldots, n$. Действительно, пусть $u \in U_s$ и $k=0, 1, \ldots$ — минимальный номер, при котором существует $i=1, \ldots, n$ такое, что $u_{i,k}=u_i^*$. Если $k=0$, то $u \in W_i$. При $k>0$ $z_{k-1} \in Z_n(i)$ в силу определения множества $Z_n(i)$ и соотношений (1.1), (1.3); следовательно, $u \in U$.

Из соотношения (2.11) получаем

$$\mu(U_s) \leqslant \mu(U) + \mu(W_1) + \ldots + \mu(W_n) = 0,$$

так как $\mu(U)=\mu(W_1)=\ldots=\mu(W_n)=0$. Лемма доказана.

Положим $U(\varepsilon) = \{u\colon q_s(u) \geqslant -\ln \alpha_{2s} + \varepsilon\}$.

Лемма 4. *Если гипотеза Дж. Форсайта справедлива для некоторого $s \geqslant 1$ и $n \geqslant 2s+1$, то для каждого $\varepsilon > 0$ $U(\varepsilon) \subseteq U_s$.*

Доказательство. Пусть $u \notin U_s$. Тогда для каждого $k=0, 1, \ldots$ и $i=1, \ldots, n$ $u_{i,k} \neq u_i^*$, следовательно, $z_1 \neq 0$ (здесь $u_0=u$). Поэтому, в силу условия теоремы и свойства 5в, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} y_{2k} = y \in F(i_1, \ldots, i_{2s}, A). \tag{2.12}$$

Положим

$$Q_{2s}(t, y) = P_s(t, y') P_s(t, y),$$

где $y' = T_s y$, $P_s(t, y)$ определяется в (1.3). Используя (1.11), можно, аналогично (1.14), доказать, что

$$Q_{2s}(\lambda_{i_1}, y) = \ldots = Q_{2s}(\lambda_{i_{2s}}, y) = \rho_s(u) > 0. \tag{2.13}$$

Кроме того, для всех $j \in \overline{1, n} \setminus \{i_1, \ldots, i_{2s}\}$ справедливо неравенство $|Q_{2s}(\lambda_j, y)| \leqslant \rho_s(u)$, причем равенство возможно лишь тогда, когда среди чисел $i_1, \ldots, i_{2s}$ есть равные.

Действительно, предположим противное: $|Q_{2s}(\lambda_j, y)| > \rho_s(u)$ для некоторого j. Используя свойство 2д, имеем

$$\lim_{k\to\infty} |Q_{2s}(\lambda_j, y_{2k})| = |Q_{2s}(\lambda_j, y)|. \tag{2.14}$$

В силу предположения и соотношения (2.14) получаем, что начиная с некоторого номера K будет выполнено неравенство

$$|Q_{2s}(\lambda_j, y_{2k})| > \rho_s(u).$$

Поэтому, учитывая (2.13) и то, что аналогично (2.14)

$$\lim_{k\to\infty} Q_{2s}(\lambda_{i_p}, y_{2k}) = Q_{2s}(\lambda_{i_p}, y), \quad p = 1, \ldots, 2s,$$

убеждаемся в существовании номера K, начиная с которого

$$|Q_{2s}(\lambda_j, y_{2k})| > Q_{2s}(\lambda_{i_p}, y_{2k}), \quad p = 1, \ldots, 2s.$$

Так как $y_{i_p} \neq 0$, $p = 1, \ldots, 2s$, то и $y_j \neq 0$ — противоречие.

Таким образом, многочлен $Q_{2s}(t, y)$ обладает свойствами:

$$Q_{2s}(0, y) = 1, \quad \max_{i=\overline{1,n}} |Q_{2s}(\lambda_i, y)| = \rho_s(u).$$

Поэтому, в силу определения α_{2s}, имеем $\rho_s(u) \geqslant \alpha_{2s}$; следовательно, $q_s(u) = -\ln \rho_s(u) < -\ln \alpha_{2s} + \varepsilon$, т. е. $u \notin U(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Пусть $P_s(t) = 1 + \gamma_1 t + \ldots + \gamma_s t^s$ — некоторый многочлен с вещественными коэффициентами. Имеет место

Лемма 5. *Для того чтобы существовал вектор $z \in R^n_{n-1}$ такой, что $P_s(t, z) = P_s(t)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $P_s(\lambda_1), \ldots, P_s(\lambda_n)$ имела в точности s перемен знака.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющий условию леммы, но последовательность $P_s(\lambda_1), \ldots, P_s(\lambda_n)$ имеет меньше чем s перемен знака. Тогда существует многочлен $P_l(t)$ степени $l < s$ такой, что ненулевые значения $P_s(\lambda_i)$ и $P_l(\lambda_i)$ совпадают по знаку. В силу свойства 2а, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} P_s(\lambda_i, z) P_l(\lambda_i) z_i^2 = 0,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} P_s(\lambda_i) P_l(\lambda_i) z_i^2 = 0. \tag{2.15}$$

Так как $z \in R^n_{n-1}$, то $P_s(\lambda_i, z) z_i^2 \neq 0$ для некоторого i, следовательно,

$\sum_{i=1}^{n} P_s(\lambda_i) P_l(\lambda_i) z_i^2 > 0$ — противоречие с (2.15).

Достаточность. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно $x_1, \ldots, x_n$:

$$(a^j, x) = 0, \; j = 1, \ldots, s, \tag{2.16}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a^j = (\lambda_1^{j-1} P_s(\lambda_1), \ldots, \lambda_n^{j-1} P_s(\lambda_n))$. Покажем, что система (2.16) имеет положительное решение.

Пусть $L = L(a^1, \ldots, a^s)$ — линейная оболочка векторов $a^1, \ldots, a^s$; R_+^s — неотрицательный ортант пространства R^s. Тогда $R_+^s \cap L = \varnothing$.

Действительно, в противном случае существовали бы такие числа $\tau_1, \ldots, \tau_s$, что

$$P_s(\lambda_1) \sum_{j=1}^{s} \tau_j \lambda_1^{j-1} \geqslant 0, \; \ldots, \; P_s(\lambda_n) \sum_{j=1}^{s} \tau_j \lambda_n^{j-1} \geqslant 0, \; \tau_1^2 + \ldots + \tau_s^2 \neq 0. \tag{2.17}$$

Положим

$$Q_{s-1}(t) = \sum_{j=1}^{s} \tau_j t^{j-1} = \tau (t^2 + p_1 t + q_1)^{m_1} \ldots (t^2 + p_k t + q_k)^{m_k} \times$$
$$\times (t - \theta_1)^{n_1} \ldots (t - \theta_l)^{n_l},$$

где $\tau = \tau_\nu$, если $\tau_\nu \neq 0$, $\tau_{\nu+1} = 0$, $\tau_{\nu+2} = 0, \ldots$, и $2(m_1 + \ldots + m_k) + n_1 + \ldots$ $\ldots + n_l = \nu - 1$, $m_i \neq 0$, $n_i \neq 0$, $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_l$. Пусть $n_1, \ldots, n_p$ — все нечетные числа из $n_1, \ldots, n_l$. Рассмотрим многочлен $Q_p(t) = \tau(t - \theta_1) \ldots$ $\ldots (t - \theta_p)$. Из (2.17) следует, что

$$Q_p(\lambda_i) P_s(\lambda_i) \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

Так как последовательность $P_s(\lambda_1), \ldots, P_s(\lambda_n)$ имеет s перемен знака, то существуют такие числа $i_1, \ldots, i_{s+1} \in \{1, \ldots, n\}$, что $P_s(\lambda_{i_1}) > 0$, $P_s(\lambda_{i_2}) < 0, \ldots$ (здесь мы учли также то, что $P_s(0) = 1 > 0$). Из (2.18) следует, что на отрезке $[\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}]$ есть по крайней мере один корень многочлена $Q_p(t)$. Пусть η^- — наименьший из этих корней. Тогда существует точка ξ $(\lambda_{i_3} > \xi > \eta^-)$ такая, что $Q_p(\xi) < 0$. Ясно, что на $(\xi, \lambda_{i_3}]$ также существует по крайней мере один корень $Q_p(t)$, следовательно, на $[\lambda_{i_1}, \lambda_{i_3}]$ есть по крайней мере два различных корня. Пусть η^+ — наибольший из них. Тогда существует точка ξ $(\lambda_{i_4} > \xi > \eta^+)$ такая, что $Q_p(\xi) > 0$, следовательно, на отрезке $[\lambda_{i_1}, \lambda_{i_4}]$ есть по крайней мере три различных корня. Продолжая рассуждения, убеждаемся, что на $[\lambda_{i_1}, \lambda_{i_{s+1}}]$ существуют по крайней мере s различных корней. Но так как $p < s$, то $Q_p(t) \equiv 0$ и $\tau_j = 0$, $j = 1, \ldots, s$, — противоречие с (2.17).

Таким образом, $R_+^s \cap L = \varnothing$, и, в силу теоремы Штимке (см., например, [16]), система (2.16) имеет положительное решение $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим вектор $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R_{n-1}^n$, где $z_i = x_i^{1/2} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Докажем, что $P_s(t, z) = P_s(t)$.

Полагая в качестве $P_s(t) = t^l$, $l = 0, \ldots, s-1$, имеем, в силу свойства 2a,

$$\sum_{i=1}^{n} P_s(\lambda_i, z) \lambda_i^{j-1} z_i^2 = 0, \; j = 1, \ldots, s. \tag{2.19}$$

Вычитая соответствующие уравнения (2.16) из (2.19), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j-1} (P_s(\lambda_i, z) - P_s(\lambda_i)) z_i^2 = 0, \; j = 1, \ldots, s. \tag{2.20}$$

Так как $P_s(t, z) - P_s(t) = t\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — некоторый многочлен степени $<s$, то (2.20) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j \Phi(\lambda_i) z_i^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{2.21}$$

Пусть $z_i' = z_i \lambda_i^{1/2}$. Тогда из (2.21) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{j-1} \Phi(\lambda_i) (z_i')^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{2.22}$$

Умножая на постоянные и складывая уравнения системы (2.22), можно показать, что для любого многочлена $P(t)$ степени $<s$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) \Phi(\lambda_i) (z_i')^2 = 0.$$

Положим $P(t) = \Phi(t)$. Так как $z_i' \neq 0$, то $\Phi(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Учитывая, что $s < n$, имеем $\Phi(t) \equiv 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. 1. Докажем справедливость (2.3). Исходя из определения $\operatorname{vrai\,sup}_{R^n} q_s(u)$ (см., например, [17]), достаточно показать, что для каждого $\varepsilon > 0$

а) $\mu(U(\varepsilon)) = \mu(\{u\colon q_s(u) > -\ln \alpha_{2s} + \varepsilon\}) = 0$,

б) $\mu(U(-\varepsilon)) = \mu(\{u\colon q_s(u) > -\ln \alpha_{2s} - \varepsilon\}) \neq 0$.

Соотношение а) следует непосредственно из лемм 3,4: $\mu(U(\varepsilon)) \leqslant \leqslant \mu(U_s) = 0$. Докажем соотношение б). В силу определения $\pi_{2s}(t)$ существуют числа $1 < i_1 < \ldots < i_{2s-1} < n$ такие, что (см., например, [18])

$$(-1)^j \pi_{2s}(\lambda_{i_j}) = \pi_{2s}(\lambda_1) = \pi_{2s}(\lambda_n) = \alpha_{2s}, \quad j = 1, \ldots, 2s-1.$$

Выберем числа σ, δ из условий

$$0 < \sigma < 0{,}5\alpha_{2s}, \quad \ln(\alpha_{2s} + \sigma) < \ln \alpha_{2s} + \varepsilon, \quad \delta > 0. \tag{2.23}$$

Построим многочлен $\tilde{\pi}_{2s}(t)$ степени $2s$, удовлетворяющий следующим $(2s+1)$ условиям:

1) $\tilde{\pi}_{2s}(0) = 1$,

2) $\tilde{\pi}_{2s}(\lambda_1) = \tilde{\pi}_{2s}(\lambda_{i_{2k}}) = \tilde{\pi}_{2s}(\lambda_n) = (\alpha_{2s} + \sigma)(1 + \sigma)^{-1}$, $k = 1, \ldots, s-1$,

3) $\tilde{\pi}_{2s}(\lambda_{j_k}) = (\alpha_{2s} + \sigma - \delta)(1 + \sigma)^{-1}$, $\quad k = 1, \ldots, m$,

4) $\tilde{\pi}_{2s}(\lambda_{i_{2k+1}}) = (-\alpha_{2s} + \sigma + \delta)(1 + \sigma)^{-1}$, $k = 1, \ldots, s-1-m$,

где λ_{j_k} $(k = 1, \ldots, m)$ — отличные от $\lambda_1, \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{2s-1}}, \lambda_n$ собственные значения, удовлетворяющие равенству $\pi_{2s}(\lambda_{j_k}) = \alpha_{2s}$. Причем, если $m = 0$, то $\tilde{\pi}_{2s}(t)$ выбирается из условий 1), 2), 4); если $s - 1 - m = 0$, то из условий 1)—3). Если $s = 1$, то $\tilde{\pi}_2(t)$ выбираем из условий

1) $\tilde{\pi}_2(0) = 1$,

2) $\tilde{\pi}_2(\lambda_1) = \tilde{\pi}_2(\lambda_n) = (\alpha_{2s} + \sigma)(1 + \sigma)^{-1}$.

Нетрудно показать, что при достаточно малом $\delta > 0$ многочлен $\tilde{\pi}_{2s}(t)$ будет иметь действительные корни $t_1 < \ldots < t_{2s}$ и

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\tilde{\pi}_{2s}(\lambda_i)| = (\alpha_{2s} + \sigma)(1 + \sigma)^{-1}, \tag{2.24}$$

причем максимум в (2.24) достигается лишь при $i=1, i_2, \ldots, i_{2s-2}, n$. Положим

$$P_s(t) = \prod_{i=1}^{s} (1 - t \cdot t_{2i}^{-1}).$$

Из построения следует, что последовательность $P_s(\lambda_1), P_s(\lambda_{i_2}), \ldots$ $\ldots, P_s(\lambda_{i_{2s-2}}), P_s(\lambda_n)$ имеет в точности s перемен знака. Поэтому, в силу леммы 5, существует вектор $z=(z_1, \ldots, z_{s+1}) \in R_s^{s+1}$ такой, что $P_s(t, z) = P_s(t)$. Но тогда и вектор $\tilde{z}=(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$, где $\tilde{z}_1=z_1, \tilde{z}_{i_2}=$ $=z_2, \ldots, \tilde{z}_{i_{2s-2}}=z_s, \tilde{z}_n=z_{s+1}, \tilde{z}_i=0$ для $i \in \overline{2, n-1} \setminus \{i_2, \ldots, i_{2s-2}\}$, обладает свойством: $P_s(t, \tilde{z}) = P_s(t)$.

Положим $y=\tilde{z}\|\tilde{z}\|^{-1}$, $u=u^*+A^{-1}y$. Используя (2.23), (2.24) и [5, теорема 4.8], имеем, что

$$q_s(u) = -\ln\left(\frac{\alpha_{2s}+\sigma}{1+\sigma}\right) > -\ln \alpha_{2s} - \varepsilon. \tag{2.25}$$

Докажем, что существует окрестность $O(u)$ точки u в R^n такая, что для любого $v \in O(u)$

$$q_s(v) > -\ln \alpha_{2s} - \varepsilon. \tag{2.26}$$

Для этого достаточно доказать (с учетом (2.25)), что функция $q_s(v)$ непрерывна в точке u.

Пусть $\tilde{y} \in \Sigma_s$, а $\varphi(\tilde{y}) = \lim\limits_{k\to\infty} T_s^{2k}\tilde{y}$ (предел существует в силу условия теоремы). Непрерывность $q_s(v)$ в точке u следует из непрерывности $\varphi(\tilde{y})$ в точке y. Покажем, что для каждого $\varepsilon_1>0$ существует $\delta(\varepsilon_1)>0$ такое, что из $\|y-\tilde{y}\|<\delta(\varepsilon_1)$ следует $\|y-\varphi(\tilde{y})\|<\varepsilon_1$ (здесь мы учли, что $\varphi(y)=y$).

Пусть $H(1, i_2, \ldots, i_{2s-2}, n) = \{u: u=(u_1, \ldots, u_n), u_i=0$ при $i \in \overline{2, n-1} \setminus \{i_2, \ldots, i_{2s-2}\}\}$ — подпространство R^n. Обозначим через $\tilde{y}^{\parallel}$ и $\tilde{y}^{\perp}$ соответственно проекцию на подпространство $H(1, i_2, \ldots, i_{2s-2}, n)$ и ортогональное дополнение вектора $\tilde{y}$.

Используя построение вектора y, можно показать [7, с. 57], что существуют $\delta_1>0$ и $M=M(\delta_1)>0$, $0<\rho=\rho(\delta_1)<1$ такие, что для любого $\tilde{y} \in \Sigma_s$ и $\|\tilde{y}-y\|<\delta_1$ выполнены неравенства

$$\|T_s^2\tilde{y} - \tilde{y}\| \leqslant M\|\tilde{y}^{\perp}\|, \tag{2.27}$$

$$\|(T_s^2\tilde{y})^{\perp}\| \leqslant \rho\|\tilde{y}^{\perp}\|. \tag{2.28}$$

Положим $\delta_2=(1-\rho)\delta_1(1-\rho+M)^{-1}$. Тогда если $\|\tilde{y}-y\|<\delta_2$, $\tilde{y} \in \Sigma_s$, то для каждого $k=0, 1, \ldots$ $\|T_s^{2k}\tilde{y}-y\|<\delta_1$. Действительно, пусть для $k \leqslant p$ утверждение справедливо. Так как

$$\|T_s^{2p+2}\tilde{y} - y\| \leqslant \|T_s^{2p+2}\tilde{y} - T_s^{2p}\tilde{y}\| + \ldots + \|\tilde{y} - y\|,$$

а в силу неравенств (2.27), (2.28) для $k=0, \ldots, p$

$$\|T_s^{2k+2}\tilde{y} - T_s^{2k}\tilde{y}\| \leqslant M\rho^k\delta_2,$$

то

$$\|T_s^{2p+2}\tilde{y} - y\| \leqslant M\delta_2(\rho^p + \ldots + 1) + \delta_2 < \delta_2 \frac{1-\rho+M}{1-\rho} = \delta_1. \tag{2.29}$$

Если $0<\delta(\varepsilon_1) \leqslant \min\left\{\frac{1-\rho}{1-\rho+M}\varepsilon_1, \delta_2\right\}$, то аналогично (2.29)

$$\|T_s^{2p+2}\tilde{y} - y\| < \delta(\varepsilon_1)(1-\rho+M)(1-\rho)^{-1} \leqslant \varepsilon_1, \quad p=0, 1, \ldots, \tag{2.30}$$

если только $\|\tilde{y}-y\|<\delta(\varepsilon_1)$. Непрерывность $\varphi(\tilde{y})$ в точке y следует из (2.30) переходом к пределу по p.

Таким образом, для всех точек v некоторой окрестности $O(u)$ в R^n справедливо (2.26), следовательно, $\mu(U(-\varepsilon))\geqslant\mu(O(u))>0$. Соотношение б) доказано.

2. Рассмотрим (2.4). Необходимо доказать, что для каждого $\varepsilon>0$

$$\mu(\{u\colon q_s(u)<-2\ln\alpha_s-\varepsilon\})=0, \tag{2.31}$$

$$\mu(\{u\colon q_s(u)<-2\ln\alpha_s+\varepsilon\})\neq 0. \tag{2.32}$$

Так как [19] $\{u\colon q_s(u)<-2\ln\alpha_s\}=\varnothing$, то (2.31) верно. Рассмотрим множества $F_k=\{u\colon q_k^{(s)}(u)<-2\ln\alpha_s+\varepsilon\}$, $k=0, 1, \ldots$, где $\{q_k^{(s)}(u)\}$ определены в (2.1). Множества F_k открыты в R^n и, в силу леммы 1, $F_0\subseteq\subseteq F_1\subseteq\ldots$. Поскольку

$$\{u\colon q_s(u)<-2\ln\alpha_s+\varepsilon\}=\bigcup_{i=0}^{\infty}F_i,$$

то соотношение (2.32) справедливо. Теорема доказана.

Таким образом, в силу основной теоремы и теоремы 1 существенная область значений асимптотической скорости сходимости двухшагового метода определяется соотношениями (2.3), (2.4) с $s=2$.

Замечание 3. Положим $V_s=R^n\setminus U_s$ — множество невырожденных векторов. В силу лемм 3, 4 и теоремы 1, имеем

$$\sup_{u\in V_s}q_s(u)=\operatorname{vrai}\sup_{R^n}q_s(u)=-\ln\alpha_{2s},$$

следовательно, для всех $u\in V_s$

$$q_s(u)\leqslant-\ln\alpha_{2s}. \tag{2.33}$$

Достигается ли равенство в (2.33) на V_s? Для одношагового метода, как следует из [7, с. 37], ответ отрицательный. В общем случае можно доказать, что если для некоторого $s\geqslant 1$ и $n\geqslant 2s+1$ справедлива гипотеза Дж. Форсайта, то для любого $u\in V_s$

$$q_s(u)<\ln\alpha_{2s}.$$

Замечание 4. Основным результатом работы [19] является определение неулучшаемой оценки скорости сходимости s-шагового метода, т. е. определение такого числа ρ, что для всех начальных приближений $u_0\in R^n$

$$F(u_1)-F(u^*)\leqslant\rho(F(u_0)-F(u^*)), \tag{2.34}$$

причем для некоторых u_0 (2.34) обращается в равенство. Доказано, что $\rho=\alpha_s^2$, где α_s определено в (2.2).

Покажем, что с помощью леммы 5 можно получить этот же результат, причем гораздо проще.

В силу определения многочлена $\pi_s(t)$, существуют числа $1<i_1<\ldots\ldots<i_{s-1}<n$ такие, что

$$(-1)^j\pi_s(\lambda_{i_j})=\pi_s(\lambda_1)=(-1)^s\pi_s(\lambda_n)=\alpha_s,\ \ j=1, \ldots, s-1.$$

Последовательность $\pi_s(\lambda_1), \pi_s(\lambda_{i_1}), \ldots, \pi_s(\lambda_{i_{s-1}}), \pi_s(\lambda_n)$ имеет s перемен знака, следовательно, в силу леммы 5, существует вектор $z==(z_1, \ldots, z_{s+1})\in R_s^{s+1}$ такой, что $P_s(t, z)=\pi_s(t)$. Но тогда и для вектора $\tilde{z}=(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)\in R^n$, где $\tilde{z}_1=z_1$, $\tilde{z}_{i_1}=z_2$, $\ldots$, $\tilde{z}_{i_{s-1}}=z_s$, $\tilde{z}_n=z_{s+1}$, $\tilde{z}_i=0$ для $i\in\overline{2, n-1}\setminus\{i_1, \ldots, i_{s-1}\}$, выполняется равенство $P_s(t, \tilde{z})=\pi_s(t)$. Поэтому

$$F(u_1)-F(u^*)=\alpha_s^2(F(u_0)-F(u^*)),$$

где $u_0=u^*+A^{-1}\tilde z$. С другой стороны, следуя [20], имеем, что для всех u_0

$$F(u_1)-F(u^*)\leqslant\alpha_s^2(F(u_0)-F(u^*)).$$

Таким образом, неулучшаемая оценка скорости сходимости s-шагового метода имеет место при $\rho=\alpha_s^2$.

§ 3. Асимптотические спектры

1. Пусть $n>4$, $u_0\in V_2$ — невырожденный вектор. В силу основной теоремы и свойства 5в, последовательность нормированных невязок $\{y_{2k},\ k=0,\ 1,\ \ldots\}$ двухшагового метода с начальным приближением u_0 сходится и

$$y=\lim_{k\to\infty}y_{2k}\in F(i_1,\ \ldots,\ i_4,\ A),\quad i_1\leqslant\ldots\leqslant i_4. \tag{3.1}$$

Асимптотическим спектром, соответствующим начальному приближению u_0, будем называть $(\lambda_{i_1},\ \ldots,\ \lambda_{i_4})$.

В отличие от одношагового метода, у которого для всех u_0 лишь один асимптотический спектр $(\lambda_1,\ \lambda_n)$, двухшаговый метод имеет конечное число различных асимптотических спектров.

Так как $u_0\in V_2$, то в (3.1) обязательно $i_1=1$, $i_4=n$. Поэтому асимптотический спектр, соответствующий u_0, мы будем в дальнейшем отождествлять с парой $(i,\ j)$, $i=i_2$, $j=i_3$.

Не всякая пара $(i,\ j)$ $(1<i\leqslant j<n)$ может являться асимптотическим спектром. Так, например, если $i+1<j$, то $(i,\ j)$ — не асимптотический спектр (т. е. не существует $u_0\in V_2$, которому бы соответствовал $(i,\ j)$).

Существует ли хотя бы один асимптотический спектр $(i,\ j)$ с $i\neq j$, по-видимому, неизвестно. Ниже исследуются асимптотические спектры вида $(i)=(i,\ i)$.

Рассмотрим многочлен

$$P(\alpha,\ t)=(1-t\lambda_1^{-1})(1-t\alpha^{-1})(1-t\lambda_i^{-1})(1-t\lambda_n^{-1}),$$

где $\lambda_{i-1}\leqslant\alpha\leqslant\lambda_{i+1}$. Положим $\omega_1(\alpha)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|P(\alpha,\ \lambda_k)|$, а p — один из индексов, при котором максимум достигается. Зададим отрезок $[\xi_1,\ \xi_2]$ следующим образом

$$[\xi_1,\ \xi_2]=\begin{cases}[\lambda_1,\ \alpha], & \alpha\leqslant\lambda_i\leqslant\lambda_p,\\ [\lambda_i,\ \lambda_n], & \lambda_p\leqslant\alpha\leqslant\lambda_i,\\ [\lambda_1,\ \lambda_i], & \lambda_i\leqslant\alpha\leqslant\lambda_p,\\ [\alpha,\ \lambda_n], & \lambda_p\leqslant\lambda_i\leqslant\alpha,\end{cases}$$

и положим $\omega_2(\alpha)=\max\limits_{t\in[\xi_1,\xi_2]}|P(\alpha,\ t)|$. Пусть $V(i)$ — множество $u_0\in V_2$, для которых (i) — асимптотический спектр. Имеет место

Теорема 2. *Если существует α $(\lambda_{i-1}<\alpha<\lambda_{i+1})$ такое, что $\omega_2(\alpha)>0{,}5\omega_1(\alpha)$, то $\mu(V(i))>0$, следовательно, (i) — асимптотический спектр. Если же для любого α $(\lambda_{i-1}\leqslant\alpha\leqslant\lambda_{i+1})$ $\omega_2(\alpha)<0{,}5\omega_1(\alpha)$, то $V(i)=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_{i-1}<\alpha<\lambda_{i+1}$ и $\omega_2(\alpha)>0{,}5\omega_1(\alpha)$. Рассмотрим многочлен $\pi(t)=(P(\alpha,\ t)+\omega)(P(\alpha,\ 0)+\omega)^{-1}$, где ω выбирается из условия $0{,}5\omega_1(\alpha)<\omega<\omega_2(\alpha)$. Тогда

1) корни $t_1<\ldots<t_4$ $\pi(t)$ вещественные и различные и расположены в $(\lambda_1,\ \lambda_n)$,

2) максимум $|\pi(t)|$ на спектре $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ достигается только при $t=\lambda_1, \lambda_i, \lambda_n$,

3) $\pi(0)=1$.

Положим $P_2(t)=(1-t\cdot t_1^{-1})(1-t\cdot t_4^{-1})$. Так как числа $P_2(\lambda_1)$, $P_2(\lambda_i)$, $P_2(\lambda_n)$ образуют две перемены знака, то, в силу леммы 5, существует вектор $z=(z_1, z_2, z_3)\in R_2^3$ такой, что $P_2(t, z)=P_2(t)$. Пусть $\tilde{z}=(\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$, где $\tilde{z}_1=z_1$, $\tilde{z}_i=z_2$, $\tilde{z}_n=z_3$, $\tilde{z}_m=0$ $(m\in\overline{2, n-1}\setminus\{i\})$. Тогда $P_2(t, \tilde{z})=P_2(t, z)=P_2(t)$.

Положим $y=\tilde{z}\|\tilde{z}\|^{-1}$. Из построения следует, что $y\in F(1, i, n, A)$, поэтому, в силу свойства 2 многочлена $\pi(t)$, вектор y отделим от множества $F(A)\setminus F(1, i, n, A)$, т. е. существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$O(\varepsilon)\cap(F(A)\setminus F(1, i, n, A))=\varnothing, \tag{3.2}$$

где $O(\varepsilon)=\{\tilde{y}\in\Sigma_2: \|y-\tilde{y}\|<\varepsilon\}$.

Так же как при доказательстве теоремы 1 устанавливается, что функция $\varphi(\tilde{y})=\lim\limits_{k\to\infty} T_2^{2k}\tilde{y}$ (определенная, в силу основной теоремы, на Σ_2) непрерывна в точке y. Поэтому существует $\delta>0$ такое, что $\varphi(O(\delta))\subseteq O(\varepsilon)$, следовательно, в силу (3.2), $\varphi(O(\delta))\subseteq F(1, i, n, A)$ (здесь $O(\delta)=\{\tilde{y}\in\Sigma_2: \|y-\tilde{y}\|<\delta\}$).

Пусть

$$\tilde{D}=\{u: u=u^*+\theta A^{-1}\tilde{y}, \tilde{y}\in O(\delta), -\infty<\theta<\infty\},$$

а $D=\tilde{D}\setminus(\tilde{D}\cap U_2)$. В силу леммы 3, $\mu(U_2)=0$, следовательно, $\mu(V(i))\geqslant\mu(D)=\mu(\tilde{D})>0$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что для любого α $(\lambda_{i-1}\leqslant\alpha\leqslant\lambda_{i+1})$

$$\omega_2(\alpha)<0{,}5\omega_1(\alpha), \tag{3.3}$$

но $V(i)\neq\varnothing$. Пусть $u_0\in V(i)$, $y=\varphi(y_0)$. Как следует из (2.13), $\lambda_1, \lambda_i, \lambda_n$ — корни уравнения

$$Q_4(t, y)\equiv P_2(t, y')P_2(t, y)=\rho_2(u_0). \tag{3.4}$$

Пусть $\tilde{\alpha}$ — четвертый корень уравнения (3.4). Тогда $\lambda_{i-1}\leqslant\tilde{\alpha}\leqslant\lambda_{i+1}$ (иначе бы, как следует из доказательства леммы 4, либо $y_{i-1}\neq0$, либо $y_{i+1}\neq0$). Поэтому

$$Q_4(t, y)-\rho_2(u_0)=P(\tilde{\alpha}, t)(1-\rho_2(u_0)),$$

и, пользуясь условием (3.3), получаем

$$|Q_4(\lambda_p, y)|>\rho_2(u_0)$$

(в противном случае многочлен $Q_4(t, y)$ имел бы комплексные корни, что невозможно в силу свойства 2в). Но тогда (см. доказательство леммы 4) $y_p\neq0$ — противоречие. Теорема доказана.

2. До сих пор предполагалось, что A — диагональная матрица с различными собственными значениями. Рассмотрим общий случай.

Пусть $\{e_i, i=1, \ldots, n\}$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы A. В базисе $\{e_i, i=1, \ldots, n\}$ пространства R^n матрица A имеет диагональный вид. Предположим, что

$$0<\lambda_1=\ldots=\lambda_{k_1}<\lambda_{k_1+1}=\ldots=\lambda_{k_2}<\lambda_{k_2+1}=\ldots<\lambda_{k_{m-1}+1}=\ldots=\lambda_{k_m}$$

— собственные значения матрицы A. Установим связь между свойствами s-шагового метода при решении уравнений $Au=f$ и $Bv=0$, где

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_{k_1} & & & 0\\ & \lambda_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{k_m}\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение Λ: $R^n \to R^m$, заданное формулой

$$\Lambda(z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_m),$$

где $x_i = \Lambda_i(z_1, \ldots, z_n) = (z^2_{k_{i-1}+1} + \ldots + z^2_{k_i})^{1/2}$, $i=1, \ldots, m$; $k_0=0$.

Пусть $P_s(A, z)$, $P_s(B, x)$ — матричные многочлены, реализующие итерацию s-шагового метода при решении соответственно уравнений $Au=f$ и $Bv=0$. Если $x=\Lambda z$, то $\mu_\nu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\nu z_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{k_i}^\nu x_i^2$, следовательно, в силу (1.3) при $x \in R_s^m$ имеем

$$P_s(\lambda_{k_i}, x) = P_s(\lambda_{k_{i-1}+1}, z) = \ldots = P_s(\lambda_{k_i}, z), \quad i = 1, \ldots, m; k_0 = 0. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, в частности, что если $v_0 = \Lambda(u_0 - u^*) \in R_s^m$, а $\{y_k, k=0, 1, \ldots\}$ — последовательность нормированных невязок s-шагового метода при решении уравнения $Au=f$ с начальным приближением u_0, то

$$x_0 = \Lambda y_0, \; x_k = (\alpha_{1,k}\Lambda_1 y_k, \ldots, \alpha_{m,k}\Lambda_m y_k), \quad k=1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

— последовательность нормированных невязок s-шагового метода при решении уравнения $Bv=0$ с начальным приближением v_0 (здесь $\alpha_{i,k} = \mathrm{sign}(P_s(\lambda_{k_i}, y_k) x_{i,k-1})$, $i=1, \ldots, m$). Более того, из сходимости последовательностей $\{y_{2k}, k=0, 1, \ldots\}$, $\{y_{2k+1}, k=0, 1, \ldots\}$ следует сходимость $\{x_{2k}, k=0, 1, \ldots\}$, $\{x_{2k+1}, k=0, 1, \ldots\}$ и наоборот. Таким образом, основная теорема в общем случае формулируется так:

если $s=2$ и $\Lambda(u_0 - u^*) \in R_2^m$, то последовательности $\{y_{2k}, k=0, 1, \ldots\}$, $\{y_{2k+1}, k=0, 1, \ldots\}$ сходятся.

Обобщение леммы 1 аналогично:

если $\Lambda(u_0 - u^*) \in R_s^m$, то $\{\rho_k^{(s)}(u_0), k=0, 1, \ldots\}$ — неубывающая сходящаяся последовательность.

Поэтому под асимптотической скоростью сходимости s-шагового метода в общем случае следует понимать

$$q_s(u_0) = \begin{cases} -\ln \rho_s(u_0), & \text{если } \Lambda(u_0 - u^*) \in R_s^m, \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(отметим, что если $\Lambda(u_0 - u^*) \notin R_s^m$, то $u_1 = u_2 = \ldots = u^*$). Имеет место

Теорема 1*. *Если гипотеза Дж. Форсайта справедлива для некоторого $s \geqslant 1$ и $m \geqslant 2s+1$, то выполняются соотношения* (2.3), (2.4).

Доказательство. Обозначим через $q_s(v)$ $(v \in R^m)$ асимптотическую скорость сходимости s-шагового метода при решении уравнения $Bv=0$. Используя (3.5), (3.6), получаем, что

$$q_s(v) = \begin{cases} q_s(u), & v = \Lambda(u - u^*) \in R_s^m, \\ +\infty, & v \notin R_s^m. \end{cases} \tag{3.7}$$

Положим

$$V(\varepsilon) = \{v : q_s(v) > -\ln \alpha_{2s} + \varepsilon\}, \quad U(\varepsilon) = \{u - u^* : q_s(u) > -\ln \alpha_{2s} + \varepsilon\}.$$

Из (3.7) вытекает, что для любого ε

$$U(\varepsilon) = \Lambda^{-1} V(\varepsilon). \tag{3.8}$$

В силу теоремы 1 $\nu(V(\varepsilon)) = 0$ при $\varepsilon > 0$ и $\nu(V(\varepsilon)) > 0$ при $\varepsilon < 0$ (здесь ν — m-мерная мера Лебега), поэтому, используя (3.8), можно показать, что $\mu(U(\varepsilon))=0$ при $\varepsilon>0$ и $\mu(U(\varepsilon))>0$ при $\varepsilon<0$. Таким образом, соотношение (2.3) справедливо. Аналогично доказывается справедливость соотношения (2.4). Теорема доказана.

Пусть V_2 — множество невырожденных векторов $v_0 \in R^m$. Асимптотическим спектром, соответствующим начальному приближению $u_0 \in \Lambda^{-1}V_2$, будем называть асимптотический спектр $(\lambda_{k_1}, \lambda_{k_i}, \lambda_{k_j}, \lambda_{k_m})$ (отождествляя его с парой (i, j)), соответствующий начальному приближению $v_0=\Lambda(u_0-u^*)$.

Рассмотрим спектры вида $(i) = (i, i)$. Пусть $P(\alpha, t) = (1 - t\lambda_{k_1}^{-1})(1-t\alpha^{-1}) \times (1 - t\lambda_{k_i}^{-1})(1 - t\lambda_{k_m}^{-1})$, где $\lambda_{k_{i-1}} \leqslant \alpha \leqslant \lambda_{k_{i+1}}$. Положим $\omega_1(\alpha)=\max\limits_{j\in\overline{1,m}} |P(\alpha, \lambda_{k_j})|$,

а p — один из индексов, при котором достигается максимум. Определим отрезок $[\xi_1, \xi_2]$ следующим образом:

$$[\xi_1, \xi_2] = \begin{cases} [\lambda_{k_1}, \alpha], & \alpha \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant \lambda_{k_p}, \\ [\lambda_{k_i}, \lambda_{k_m}], & \lambda_{k_p} \leqslant \alpha \leqslant \lambda_{k_i}, \\ [\lambda_{k_1}, \lambda_{k_i}], & \lambda_{k_i} \leqslant \alpha \leqslant \lambda_{k_p}, \\ [\alpha, \lambda_{k_m}], & \lambda_{k_p} \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant \alpha, \end{cases}$$

и положим $\omega_2(\alpha) = \max\limits_{t\in[\xi_1,\xi_2]} |P(\alpha, t)|$. Пусть $V(i)$ — множество $u_0 \in \Lambda^{-1}V_2$, для которых (i) — асимптотический спектр.

Теорема 2*. *Если существует* α $(\lambda_{k_{i-1}} < \alpha < \lambda_{k_{i+1}})$ *такое, что* $\omega_2(\alpha) > 0{,}5\omega_1(\alpha)$, *то* $\mu(V(i))>0$, *следовательно,* (i) *— асимптотический спектр. Если же для любого* $\alpha\,(\lambda_{k_{i-1}} \leqslant \alpha \leqslant \lambda_{k_{i+1}})$ $\omega_2(\alpha) < 0{,}5\omega_1(\alpha)$, *то* $V(i)=\varnothing$.

Для доказательства теоремы 2* используются соотношения (3.5), (3.6) и теорема 2.

Приложение

1. Процесс, состоящий из двух последовательных итераций двухшагового метода, является асимптотически линейным. Действительно, предполагая, что $z_1 \neq 0$, в силу основной теоремы имеем $y_{2k} \to y$, $y_{2k+1} \to T_2 y$ при $k \to \infty$. Следовательно, $Q_4(A, y_{2k}) \to Q_4(A, y)$, $Q_4(A, y_{2k+1}) \to Q_4(A, T_2 y)$. Учитывая, что $Q_4(A, y) = Q_4(A, T_2 y)$, получаем $Q_4(A, y_k) \to Q_4(A, y)$.

Таким образом, к двухшаговому методу применимы процессы ускорения линейных итерационных методов [9], [11].

2. Так как каждый предельный вектор последовательности нормированных невязок $\{y_k, k=0, 1, \ldots\}$ s-шагового метода, в силу свойства 5в, принадлежат $F(A)$, а $F(A) \subseteq R^n \setminus R_{2s}^n$, то, в силу свойства 1, для достаточно больших номеров k ускоряющее воздействие на процесс будет оказывать итерация $2s$-шагового метода. Отметим, что для $s=1$ в принципе такой же способ ускорения был предложен (однако из других соображений) в [2, с. 361].

3. При многовариантном расчете, как указывается в [2, с. 13], можно уменьшить среднее число операций $\bar{Q}(\varepsilon)$ для одного варианта, если хранить некоторые величины, а не вычислять их заново для каждого варианта. Используя асимптотические свойства, продемонстриру-

ем такую возможность при решении нескольких уравнений $Au=f$ с различными правыми частями f двухшаговым методом.

Рассмотрим сначала уравнение $Au=0$. Пусть $u_0, u_1, \ldots$ — последовательные приближения при решении его двухшаговым методом. Так как множество вырожденных векторов U_2 имеет лебеговую меру нуль (лемма 3), то при практических вычислениях можно считать, что $u_0 \notin U_2$. Тогда, в силу п. 1 приложения, при $k \to \infty$

$$Q_4(A, y_k) \to Q_4(A, y) = P_2(A, y) P_2(A, T_2 y) \equiv \\ \equiv (I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2)(I + \gamma_1' A + \gamma_2' A^2), \tag{П.1}$$

причем из доказательства леммы 4 следует, что

$$|Q_4(\lambda_i, y)| \leqslant \rho_2(u_0), \; j=1, \ldots, n, \tag{П.2}$$

где $\rho_2(u_0)$ определено в (1.13).

Для отыскания решения $u^*(f)$ уравнения $Au=f$ применим следующий стационарный итерационный процесс:

$$\begin{gathered} u_{k+0,5}(f) = u_k(f) + \gamma_1 z_k(f) + \gamma_2 A z_k(f), \\ u_{k+1}(f) = u_{k+0,5}(f) + \gamma_1' z_{k+0,5}(f) + \gamma_2' A z_{k+0,5}(f), \end{gathered} \tag{П.3}$$

где $z_k(f) = Au_k(f) - f$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ определены в (П.1). Используя (П.2), нетрудно показать, что для $k=0, 1, \ldots$

$$F(u_{k+1}(f)) - F(u^*(f)) \leqslant \rho_2^2(u_0)[F(u_k(f)) - F(u^*(f))], \tag{П.4}$$

следовательно, итерационный процесс (П.3) сходится к $u^*(f)$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\rho_2^2(u_0)$.

Пусть $\pi_2(t) = 1 + \tilde{\alpha}_1 t + \tilde{\alpha}_2 t^2$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на спектре $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Так как, в силу замечания 4, $\rho_2(u_0) < \alpha_2^2$, то из (П.4) следует, что две итерации процесса

$$u_{k+1}(f) = u_k(f) + \tilde{\alpha}_1 z_k(f) + \tilde{\alpha}_2 A z_k(f),$$

вообще говоря, менее эффективны чем итерация метода (П.3).

Отметим некоторые преимущества метода (П.3) перед двухшаговым методом.

а) Величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ заданы, а не вычисляются на каждой итерации метода.

б) Знание $\rho_2(u_0)$ позволяет достаточно точно определить априори количество итераций, необходимых для уменьшения начальной погрешности в ε раз.

Отметим, что можно строить стационарный итерационный процесс, аналогичный (П.3), и для s-шагового метода, однако обоснование его сходимости приводит к гипотезе Дж. Форсайта.

Авторы выражают благодарность В. Л. Макарову за обсуждение работы.

Литература

1. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика.— УМН, 1948, т. 3, вып. 6, с. 89—185.
2. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

4. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
5. *Jorsythe G. E.* On the asymptotic directions of the s-dimensional optimum gradient method.— Numer Math., 1968, v. 11, № 1, p. 57—76.
6. *Akaike H.* On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method.— Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1959, v. 11, p. 11—16.
7. *Жук П. Ф.* Некоторые итерационные методы вычисления собственных значений: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Киев: КГУ, 1978, 131 с.
8. *Емелин И. В.* О быстроте сходимости метода наискорейшего спуска.— УМН, 1977, т. 32, вып. 1, с. 163—164.
9. *Потапова А. Ф.* Об ускорении сходимости метода скорейшего спуска.— ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 3, с. 749—752.
10. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А.* Методы вычислений. Киев: Вища школа, 1977.
11. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
12. *Заболоцкая А. Ф.* Асимптотическое поведение s-шагового метода скорейшего спуска в гильбертовом пространстве.— ЖВМ и МФ, 1979, т. 19, № 1, с. 228—238.
13. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
15. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975.
16. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. Киев: Вища школа, 1978.
17. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
18. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
19. *Ковригин А. Б.* Оценка быстроты сходимости K-шагового градиентного метода.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1970, вып. 13, с. 34—36.
20. *Бирман М. Ш.* Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска.— УМН, 1950, т. 5, вып. 3, с. 152—155.

Херсон

Поступила в редакцию
28.V.1981