МОДУЛЬНЕ НАВЧАННЯ

Фізика

1
МОДУЛЬ

МЕХАНІКА

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon\, dt$$

Фізика

Модуль 1
МЕХАНІКА

За загальною редакцією професора
А. П. Поліщука

Четверте видання, доповнене

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих технічних навчальних закладів

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 531(075.8)
ББК В 30я 7
Ф 503

Автори:

**А. Г. Бовтрук, Ю. Т. Герасименко,
Б. Ф. Лахін, С. М. Мєняйлов, А. П. Поліщук**

Рецензенти:

Г. В. Клімушева, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Інститут фізики НАН України)

Є. В. Коршак, канд. пед. наук, проф.
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Б.А.Сусь, д-р пед. наук, проф.
(Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/ІІ-1153 від 23.02.2010)*

Фізика. Модуль 1. Механіка: навч. посіб. / [А. Г. Бовтрук,
Ф 503 Ю. Т. Герасименко, Б. Ф. Лахін та ін.]; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. — 4-е вид., допов. — К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. — 256 с.
ISBN 978–966–598–241–9
ISBN 978–966–598–654–6 (модуль 1)

Пропонований посібник є одним з найперших видань нового типу, підготовка яких стала необхідною у зв'язку з приєднанням України до Болонського процесу та переходом до кредитно-модульної системи навчання. Він відкриває започатковану та апробовану на кафедрі загальної фізики НАУ серію «Модульне навчання. Фізика», що складається із семи модулів.

У модулі 1 «Механіка» систематизовано програмний матеріал з основ класичної механіки та спеціальної теорії відносності. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Питання для самоперевірки й ключові слова допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

Для студентів усіх спеціальностей та всіх форм навчання вищих технічних навчальних закладів.

УДК 531 (075.8)
ББК В 30я7

ISBN 978–966–598–241–8
ISBN 978–966–598–654–6 (модуль 1)

Навчальне видання

БОВТРУК Алла Георгіївна
ГЕРАСИМЕНКО Юрій Тихонович
ЛАХІН Борис Федорович
МЄНЯЙЛОВ Сергій Миколайович
ПОЛІЩУК Аркадій Петрович

ФІЗИКА

Модуль 1

МЕХАНІКА

Навчальний посібник

За загальною редакцією
*професора **А. П. Поліщука***

Четверте видання, доповнене

Редактор *Н. Щур*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Коректор *О. Крусь*
Верстка *О. Іваненко*

Навчальний елемент 1

КІНЕМАТИКА

Вивчивши НЕ-1, студент знатиме основні кінематичні характеристики руху (лінійні й кутові) та їхні означення, зможе знаходити ці характеристики за різних способів опису руху (векторного, траєкторного та координатного). Ознайомившись із прикладами розв'язування прямої та оберненої задач кінематики, студент навчиться аналізувати і математично описувати рух тіл.

1.1. Механічний рух. Система відліку

Кінематика — розділ механіки, який вивчає рух тіл, незалежно від причин, що викликали цей рух. Сам термін походить від грецького слова «кінета», що означає рух.

Механічним рухом називають зміну положення тіла в просторі відносно інших тіл. З цього означення випливає, що механічний рух є відносним. Будь-яке тіло може бути нерухомим відносно одних тіл і рухатись відносно інших. Разом з тим рух є абсолютним, оскільки завжди можна вказати таке тіло, відносно якого дане «нерухоме» тіло рухається, тобто абсолютно нерухомих тіл у природі не існує. Отже, починаючи досліджувати рух будь-якого тіла, необхідно визначити, відносно якого іншого тіла він буде розглядатись. Тіло, відносно якого розглядають рух, називають *тілом відліку*. Для математичного опису руху з тілом відліку необхідно пов'язати систему координат. Як відомо, існує декілька різних систем координат (наприклад, полярна, циліндрична, сферична), але найпоширенішою є *прямокутна декартова система координат*.

Слід звернути увагу, що існують два види декартових систем: *права* та *ліва*, які розрізняють за допомогою *правила гвинта*. Якщо обертати ручку гвинта від додатного кінця осі OX (вісь абсцис) до додатного кінця осі OY (вісь ординат), то у правій системі координат гвинт буде поступально рухатись у додатному напрямі осі OZ (вісь аплікат), а в лівій системі — у від'ємному напрямі осі OZ. У фізиці здебільшого застосовується права система (рис. 1.1).

Переміщення тіл відбувається з плином часу, тому для опису руху необхідно мати також годинник. Тіло відліку, а також пов'язана з ним система координат і годинник становлять *систему відліку*.

Важливо зазначити, що у класичній механіці загальновизнаною є концепція простору і часу, розроблена Ньютоном. Відповідно до цієї концепції простір і час розглядаються як не пов'язані ні між собою, ні з рухом тіл. Іншими словами, у класичній механіці простір і час вважаються абсолютними і незалежними один від одного. Тому хід годинників (тобто плин часу) не залежить від системи відліку й усюди є однаковим.

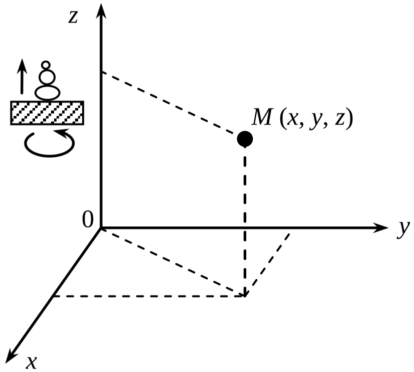


Рис. 1.1

1.2. Способи опису руху матеріальної точки. Основна (пряма) задача кінематики

Розглянемо спочатку рух найпростішого об'єкта — матеріальної точки. *Матеріальною точкою* називають тіло певної маси, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати.

Визначимо деякі поняття, що використовуватимуться під час опису руху.

Траєкторія — геометричне місце кінців радіуса-вектора під час руху точки, або лінія, уздовж якої рухається матеріальна точка (рис. 1.2).

Шлях (ΔS, або S) — довжина траєкторії, або відстань між заданими точками *1* і *2*, відрахована вздовж траєкторії (рис. 1.3). Шлях — величина скалярна і в системі СІ вимірюється в метрах (м).

Вектор переміщення $\Delta \vec{r}$ — найкоротша відстань між початковою і кінцевою точками траєкторії (рис. 1.4).

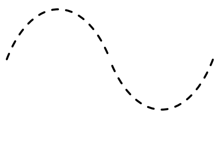


Рис. 1.2

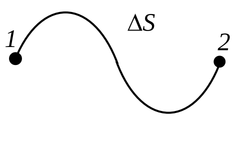


Рис. 1.3

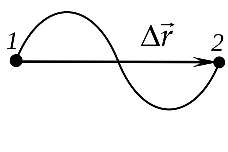


Рис. 1.4

Переміщення — величина векторна, має напрям від початкової до кінцевої точки траєкторії. У системі СІ вимірюється в метрах.

У декартовій системі координат положення матеріальної точки *M* може задаватися не тільки трьома координатами (x, y, z), а й за допомогою радіуса-вектора. *Радіусом-вектором* $\vec{r}$ точки називають вектор, проведений з початку координат у дану точку (рис. 1.5).

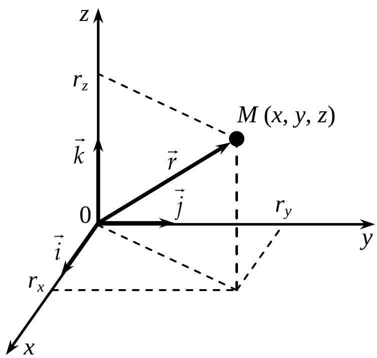


Рис. 1.5

Радіус-вектор можна записати через його проекції r_x, r_y, r_z на відповідні координатні осі:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} \tag{1.1}$$

і за модулем він дорівнює:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}\,, \tag{1.2}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні безрозмірні вектори (орти), які задають масштаб довжини і напрями відповідних осей координат

$$\vec{i} = \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|}, \quad \vec{j} = \frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.$$

Очевидно, що модулі ортів дорівнюють одиниці:

$$|\,\vec{i}\,| = |\,\vec{j}\,| = |\,\vec{k}\,| = 1.$$

Оскільки $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, формули (1.1) і (1.2) можна записати ще й так:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ ; \tag{1.3}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{1.4}$$

У фізиці модуль (абсолютно числове значення) будь-якого вектора позначають $|\vec{a}|$ або просто a. Підкреслимо, що модуль вектора завжди додатний, тому якщо при вирішенні задач з'являється величина $-a$, то це означає, що $a < 0$, тобто вектор цієї величини спрямований у протилежному напрямі.

Звісно, під час руху матеріальної точки її радіус-вектор, шлях та координати з часом змінюються. Відповідно до цього в кінематиці використовуються *три способи опису руху*:

— *векторний*, коли відоме рівняння залежності радіуса-вектора матеріальної точки від часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.5}$$

Радіус-вектор $\vec{r}$ визначається відносно деякої нерухомої точки, яку вважають початком відліку, тобто векторний опис руху не потребує системи координат, а лише наявність тіла відліку. Під час руху матеріальної точки її радіус-вектор неперервно змінюється, а його кінець описує траєкторію;

— *траєкторний*, коли відоме рівняння руху точки вздовж траєкторії

$$S = S(t). \tag{1.6}$$

Деяку точку траєкторії вважають початком відліку, а будь-яку іншу точку характеризує шлях S уздовж траєкторії від початку відліку;

— *координатний*, коли відомі рівняння руху точки в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.7}$$

Рівняння (1.5), (1.6), (1.7) називаються *кінематичними рівняннями руху*.

Основна (*пряма*) *задача кінематики* полягає в тому, щоб за кінематичними рівняннями руху матеріальної точки знайти кінематичні характеристики її руху в будь-який момент часу.

1.3. Кінематичні характеристики поступального руху матеріальної точки

До головних кінематичних характеристик поступального руху належать *переміщення, швидкість і прискорення*.

1.3.1. Переміщення

Нехай у момент часу t матеріальна точка перебувала в положенні *1*, а через деякий проміжок часу Δt — у положенні *2* (рис. 1.6, *а*).

Проведемо радіуси-вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ в точки *1* і *2*. Тоді *вектор переміщення* визначається як

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{1.8}$$

тобто вектор переміщення дорівнює *приросту* радіуса-вектора.

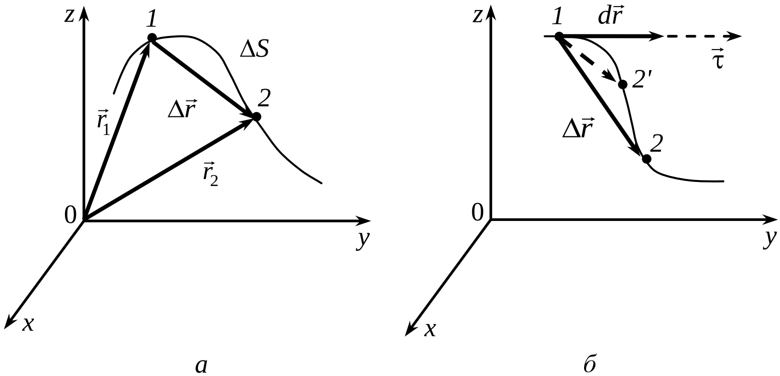


Рис. 1.6

Зауважимо, що *приростом* змінної величини називають *різницю між другим і першим значеннями змінної величини*. Очевидно, що приріст сталої величини дорівнює нулю.

З урахуванням виразу (1.3) вектор $\Delta\vec{r}$ можна записати через приріст координат матеріальної точки (Δx, Δy, Δz) за час Δt:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\ , \tag{1.9}$$

а його модуль як
$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\ . \tag{1.10}$$

Звертаємо увагу, що через $\Delta r = \Delta|\vec{r}|$ позначають приріст модуля вектора $\vec{r}$, тому модуль приросту вектора $\vec{r}$ позначають символом $|\Delta\vec{r}|$, ці величини збігаються для прямолінійного руху, але в загальному випадку вони різні. Зокрема під час руху по колу $\vec{r}$ змінюється лише за напрямом, тому приріст модуля вектора $\vec{r}$ дорівнює нулю $\Delta|\vec{r}| = \Delta r = 0$, але $|\Delta\vec{r}| \neq 0$.

Як видно з рис. 1.6, *а*, вектор переміщення збігається з хордою, яка стягує відповідну ділянку траєкторії. Тому в усіх випадках, крім прямолінійного руху, модуль вектора переміщення менший, ніж шлях, пройдений за той самий проміжок часу:

$$|\Delta\vec{r}\,| < \Delta S. \qquad (1.11)$$

Будемо тепер зменшувати проміжок часу Δt до достатньо малого значення, яке називають елементарним і позначають через dt. При цьому відбудеться досить мале переміщення, яке називають елементарним переміщенням $d\vec{r}$ (рис. 1.6, *б*), і матеріальна точка пройде елементарний шлях dS. Зі зменшенням Δt значення $|\Delta\vec{r}\,|$ все більше наближатиметься до ΔS, і при $\Delta t \to 0$ можна вважати, що

$$|\,d\vec{r}\,| = dS. \qquad (1.12)$$

За напрямом $d\vec{r}$ напрямлений по дотичній до траєкторії за напрямом руху матеріальної точки. Позначимо орт дотичної до траєкторії через $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}$, тоді з урахуванням (1.12) елементарне переміщення можна записати у вигляді:

$$d\vec{r} = dS \cdot \vec{\tau}. \qquad (1.12a)$$

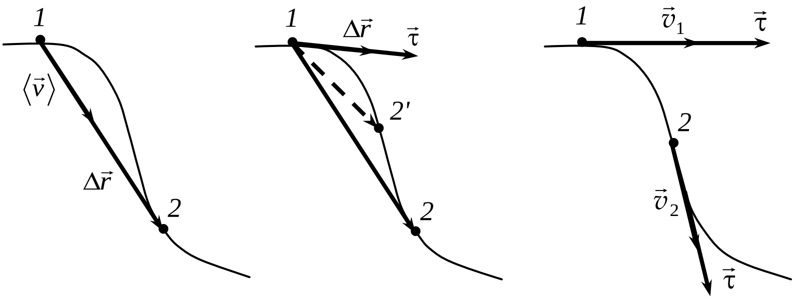
1.3.2. Швидкість

Розрізняють швидкість середню і миттєву. *Середньою швидкістю переміщення* $\langle\vec{v}\rangle$ за проміжок часу Δt називають векторну величину, яка дорівнює відношенню вектора переміщення до цього проміжку часу:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.13)$$

Вектор $\langle\vec{v}\rangle$ збігається за напрямом з $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.7, *а*).

Будемо нескінченно зменшувати проміжок часу, спрямовуючи його до нуля ($\Delta t \to 0$). Починаючи з деяких значень Δt, відношення $\Delta\vec{r}/\Delta t$ перестає змінюватись. Отже, існує певна межа, до якої прямує відношення $\Delta\vec{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Ця межа і визначає швидкість руху в даній точці траєкторії в певний момент часу, тобто *миттєву швидкість* (при цьому точки *1* і *2* на рис. 1.7, *а* будуть нескінченно наближатись одна до одної).



а *б* *в*

Рис. 1.7

Математично це записується так:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{v}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.14)$$

Отже, миттєва швидкість — це межа, до якої прямує відношення приросту радіуса-вектора $\Delta\vec{r}$ до відповідного проміжку часу Δt за умови, що $\Delta t \to 0$. У математиці межа відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу Δx за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називають похідною функції за даним аргументом:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}. \qquad (1.15)$$

У нашому випадку функцією є радіус-вектор, його приріст — $\Delta\vec{r}$; аргументом є час, приріст якого — Δt. Отже,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad (1.16)$$

тобто *миттєва швидкість* $\vec{v}$ (або просто *швидкість*) — векторна величина, що дорівнює похідній радіуса-вектора за часом.

Оскільки при $\Delta t \to 0$ напрям хорди $\Delta\vec{r}$ збігається з напрямом дотичної прямої $\vec{\tau}$ (рис. 1.7, *б*), то вектор швидкості $\vec{v}$ напрямлений по дотичній до траєкторії (рис. 1.7, *в*). Модуль вектора швидкості дорівнює:

$$|\vec{v}| = v = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{|d\vec{r}|}{dt}, \tag{1.17}$$

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}. \tag{1.18}$$

У системі СІ швидкість вимірюється в метрах за секунду (м/с).

Рух, при якому з часом швидкість не змінюється (v = const), називають *рівномірним*, а рух, при якому $v \neq \text{const}$, називають *нерівномірним*, або *змінним*.

Знайдемо вираз для швидкості в тому випадку, коли рівняння руху задано в траєкторному вигляді $S = S(t)$.

Оскільки при $\Delta t \to 0$ за формулою (1.12) маємо $|d\vec{r}| = dS$, миттєву швидкість можна знайти так:

$$v = \frac{dS}{dt}, \tag{1.19}$$

або у векторному вигляді з урахуванням виразу (1.12*а*):

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}. \tag{1.19а}$$

На практиці дуже часто використовують так звану шляхову швидкість, яку також називають середньою швидкістю змінного руху.

Середньою шляховою швидкістю $\langle v \rangle$ називають скалярну величину, яка визначається відношенням усього пройденого шляху до всього затраченого часу:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1.20}$$

Розглянемо випадок, коли рівняння руху задані в координатній формі. Похідні від цих виразів за часом дадуть проекції вектора швидкості на відповідні координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.21}$$

Тоді вектор швидкості запишеться як

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}\,, \tag{1.22}$$

а його модуль як

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{1.23}$$

1.3.3. Прискорення

Прискоренням називають фізичну величину, що характеризує зміну швидкості за одиницю часу. Розрізняють прискорення середнє й миттєве.

Середнє прискорення $\langle \vec{a} \rangle$ — векторна величина, яка визначається відношенням зміни швидкості $\Delta\vec{v}$ до проміжку часу Δt, за який ця зміна відбулася:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.24}$$

Напрям вектора $\langle \vec{a} \rangle$ збігається з напрямом $\Delta\vec{v}$.

Миттєве прискорення (чи просто *прискорення*) $\vec{a}$ або прискорення в даній точці траєкторії в певний момент часу — це межа, до якої прямує середнє прискорення при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.25}$$

Використовуючи поняття похідної, прискорення можна записати так:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.26}$$

Прискорення — векторна величина, що дорівнює похідній вектора швидкості за часом. З урахуванням формули (1.16) прискорення можна подати як другу похідну радіуса-вектора за часом:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.27}$$

Прискорення в системі СІ вимірюють у метрах за секунду в квадраті (м/с^2).

У загальному випадку вектор $\vec{a}$ спрямований під кутом до вектора $\vec{v}$ у бік угнутості траєкторії.

На рис. 1.8 вектор $\vec{a}_1$ відповідає прискореному руху, а вектор $\vec{a}_2$ — сповільненому руху.

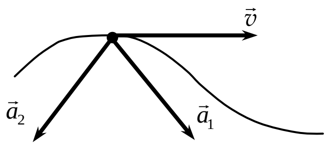


Рис. 1.8

Оскільки зміна швидкості відбувається і за модулем, і за напрямом, розрізняють дві складові прискорення:

$\vec{a}_\tau$ — *тангенціальне прискорення* (або дотичне), яке характеризує зміну швидкості за модулем і спрямоване по дотичній до траєкторії;

$\vec{a}_n$ — *нормальне прискорення* (або доцентрове), яке характеризує зміну швидкості за напрямом і спрямоване по нормалі до траєкторії.

Повне прискорення дорівнює векторній сумі цих двох прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,. \tag{1.28}$$

Для знаходження складових прискорення підставимо вираз для швидкості (1.19 *а*) у вираз (1.26) і зробимо відповідне диференціювання:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\vec{\tau}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)\vec{\tau} + \frac{dS}{dt}\,\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Кожна точка траєкторії має своє значення шляху S і свій дотичний орт $\vec{\tau}$, тому орт є деякою функцією шляху $\vec{\tau} = \vec{\tau}(S)$. У свою чергу, шлях залежить від часу $S = S(t)$, тому залежність орта від часу можна розглядати як складну функцію $\vec{\tau}(t) = \vec{\tau}(S(t))$, похідна якої береться за правилом складної функції

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt}\,.$$

Ураховуючи, що $dS/dt = v$, дістаємо

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\frac{dS}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}v,$$

ЗМІСТ