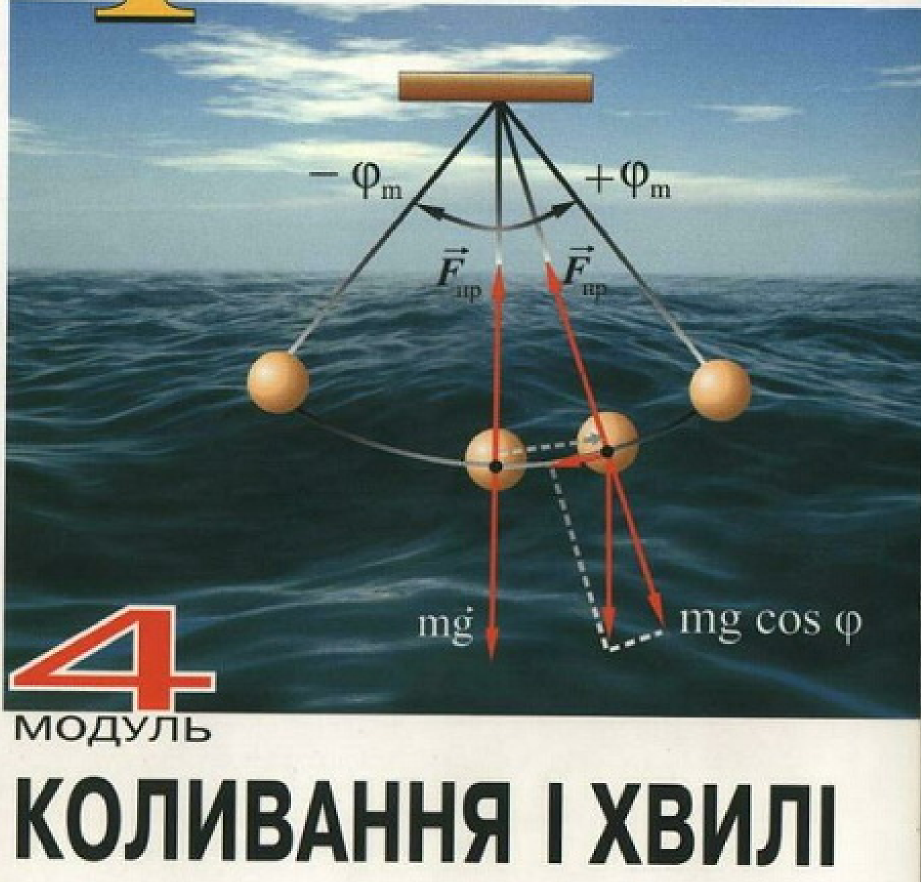
МОДУЛЬНЕ НАВЧАННЯ

# Фізика




4
МОДУЛЬ

## КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

# Фізика

## Модуль 4
# КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

*2-ге видання, стереотипне*

*За загальною редакцією професора*
***А. П. Поліщука***

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
*як навчальний посібник для студентів*
*вищих навчальних закладів*

Київ
Видавництво Національного авіаційного
університету
«НАУ-друк»
2009

УДК 531(075.8)
ББК В 3я 73-1
Ф 509



*Автори:*

**Б. Ф. Лахін, К. К. Мартинчук, В. І. Оглобля**
**А. П. Поліщук, П. І. Чернега**

*Рецензенти:*

**М. М. Новіков**, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

**Г. С. Тимчик**, д-р техн. наук, проф.
(Національний технічний університет України «КПІ»)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України*
(*Лист № 1.4/18-Г-668 від 07.08.2006*)

Ф 509 **Фізика**. Модуль 4. Коливання і хвилі: навч. посіб. / [Лахін Б. Ф., Мартинчук К. К. , Оглобля В. І. та ін.]; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. — 2-ге вид., стер. — К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. — 232 с.
ISBN 978–966–598–603–4
ISBN 978–966–598–604–1 (модуль 4)

Пропонований посібник є одним з найперших видань нового типу, підготовка яких стала необхідною у зв’язку з приєднанням України до Болонського процесу та переходом до кредитно-модульної системи навчання. Він відкриває започатковану та апробовану на кафедрі загальної фізики НАУ серію «Модульне навчання. Фізика», що складається із 7 модулів.

Модуль 4 «Коливання і хвилі» систематизовано подає програмний матеріал з основ теорії коливань і хвильових процесів. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Питання для самоперевірки й ключові слова допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

Для студентів усіх спеціальностей та всіх форм навчання технічних вузів.

**УДК 531 (075.8)**
**ББК В 3я 73-1**

**ISBN 978–966–598–603–4**
**ISBN 978–966–598–604–1 (модуль 4)**

## *Навчальний елемент 1*
# МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

### *1.1. Загальні відомості про коливання*

*Коливаннями* називають процеси, що повторюються в часі. Залежно від фізичної природи процесу, який повторюється, розрізняють коливання механічні, електричні, електромеханічні, звукові тощо. Виявляється, що всі ці процеси математично можна описати однаковими диференціальними рівняннями. Розглянемо найбільш поширені в природі та техніці коливання: механічні й електричні. Механічні коливання характеризуються періодичною зміною положення тіла відносно точки рівноваги, а під час електричних коливань періодично змінюється величина заряду, напруги, струму. Періодичними називають такі коливальні процеси, коли значення фізичної величини повторюється через однакові (або приблизно однакові) проміжки часу. *Найменший проміжок часу, протягом якого система повертається в початкове положення, називають періодом коливання*.

Залежно від характеру дії на коливальну систему розрізняють вільні (власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання і параметричні коливання.

*Вільними, або власними, називають коливання, що відбуваються в системі, залишеній самою по собі після виведення її з положення рівноваги*. Такі коливання відбуваються, наприклад, у системі, що складається з кульки, закріпленої на пружині.

*Вимушеними називають коливання, під час яких коливальна система зазнає дії з боку зовнішньої періодичної сили.* Прикладом таких коливань є коливання моста, що виникають унаслідок поштовхів коліс потяга під час проходження по стиках залізничних рейок, вібрація крил літака тощо. Такі процеси є небезпечними у разі появи коливань з великою амплітудою.

*Автоколивання*, як і вимушені коливання, *супроводжуються дією зовнішніх сил на коливальну систему*, але момент часу дії цих сил задано самою системою, тобто система сама керує зовнішньою дією. Прикладом автоколивальної системи є годинник, в якому маятник одержує поштовхи за рахунок енергії піднятої гирі або закрученої пружини, причому ці поштовхи відбуваються в момент проходження маятника через середнє положення.

Під час *параметричних коливань* за рахунок зовнішньої дії відбувається періодична зміна якого-небудь параметра системи, наприклад, довжини нитки, до якої причеплено кульку, що здійснює коливання.

Найпростішими є *гармонічні коливання*, тобто коливання, що описують *за законом синуса або косинуса*. Цей вид коливань є важливим, тому що, по-перше, він найбільш поширений у природі і техніці, а по-друге, періодичні процеси іншої форми (не гармонічні) можна подати як результат накладання кількох гармонічних коливань.

## 1.2. Малі коливання

Поширеним типом руху є так звані малі коливання, що виконує коливальна система поблизу свого положення стійкої рівноваги. Розглянемо механічну систему, положення якої задається за допомогою однієї величини, наприклад координати $x$. У такому разі система має один степінь вільності, а потенціальна енергія є функцією однієї змінної $x : U = U(x)$. У положенні стійкої рівноваги функція $U(x)$ має мінімум. Умовимося координату $x$ і потенціальну енергію відлічувати від положення рівноваги. Тоді $U(0) = 0$. Оскільки ми розглядаємо малі коливання, то функцію $U(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора, обмежившись малими степенями

$$U(x) \approx U(0) + \dot{U}(0)x + \ddot{U}(0)x^2 / 2$$

(у математиці для зручності похідну часто записують у вигляді $dU / dx \equiv \dot{U}$). Функція $U(x)$ для $x = 0$ має мінімум. Це означає, що перша похідна дорівнює нулю $\dot{U}(0) = 0$, а друга більша від нуля. За таких умов $U(0) = 0$, тоді

$$U(x) = \ddot{U}(0)x^2 / 2 = kx^2 / 2, \qquad (1.1)$$

де введено позначення $\ddot{U}(0) = k \ (k > 0)$.

Вираз (1.1) ідентичний виразові для потенціальної енергії деформованої пружини. Узявши похідну від $U(x)$, знайдемо силу, що діє на систему:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) тотожна формулі для пружної сили деформованої пружини. Тому сили вигляду (1.2) незалежно від їхньої природи називають *квазіпружними*. Легко зрозуміти, що сила (1.2) завжди напрямлена до положення рівноваги. Про це свідчить знак «мінус», який показує, що напрям сили є протилежним до напряму зміщення. Модуль цієї сили пропорційний величині відхилення системи від положення рівноваги. Силу, що характеризується такими властивостями, часто називають *відновлювальною силою*.

Як приклад малих коливань розглянемо систему, складену з кульки масою $m$, закріпленої на пружині (масою пружини нехтуємо) (рис. 1.1).

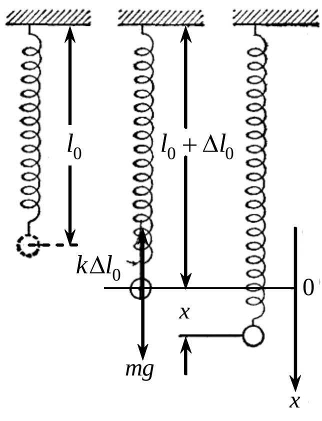



Рис. 1.1

У положенні рівноваги силу $mg$ врівноважено силою пружності $k\Delta l_0$ ($k$ — коефіцієнт жорсткості пружини): $mg = k\Delta l_0$, де $\Delta l_0$ — видовження пружини під дією сили тяжіння. Будемо характеризувати зміщення тіла з положення рівноваги координатою $x$, причому координатну вісь $x$ спрямуємо вертикально вниз, а нуль осі сумістимо з положенням рівноваги кульки. Якщо змістити кульку в положення з координатою $x$, то видовження пружини становитиме $\Delta l_0 + x$. Тоді результуюча сила дорівнюватиме $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Урахувавши, що $mg = k\Delta l_0$, дістанемо вираз (1.2). Таким чином, у розглянутому прикладі результуюча сили тяжіння і пружної сили має характер квазіпружної сили.

Будемо вважати, що після зміщення кульки систему залишено саму по собі. Під дією квазіпружної сили кулька буде рухатися зі зростаючою швидкістю до положення рівноваги. При цьому потенціальна енергія системи зменшуватиметься, а кінетична енергія збільшуватиметься. У положенні рівноваги швидкість кульки досягне максимального значення, а отже, максимальною буде і кінетична енергія. Далі, рухаючись за інерцією, рух кульки уповільнюватиметься і припиниться, коли вся кінетична енергія перетвориться в потенціальну, тобто коли зміщення кульки дорівнюватиме $-x$. Потім такий самий процес відбуватиметься під час руху кульки у зворотному напрямі. Якщо сили опору в системі відсутні, то рух кульки буде відбуватися в межах від $x$ до $-x$ нескінченно довго.

Відповідно до другого закону Ньютона рівняння руху кульки має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \qquad (1.3)$$

де $\omega_0^2=k/m$ — *циклічна (колова) частота власних незгасаючих коливань (власна частота)*. Оскільки $k/m>0$, то $\omega_0$ — *дійсна величина, що визначається самими лише параметрами коливальної системи*. Отже, за відсутності сил опору рух кульки описують диференціальним рівнянням (1.3), яке називають *рівнянням гармонічного осцилятора*.

У будь-якій реальній коливальній системі неодмінно присутні сили опору, дія яких зумовлює зменшення енергії системи. Якщо зменшення енергії системи не компенсується за рахунок роботи зовнішніх сил, коливання будуть згасати. У найпоширеніших випадках сила опору пропорційна до швидкості:

$$F_{\text{îï}}=-rv=-r\frac{dx}{dt},$$

де $r$ — *коефіцієнт опору*, а знак «мінус» вказує, що сила опору і швидкість мають протилежні напрями.

За наявності сил опору другий закон Ньютона дає:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-rv=-kx-r\frac{dx}{dt}\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (1.4)$$

де $\beta=r/2m$ — *коефіцієнт згасання*.

Здобуте рівняння (1.4) є диференціальним рівнянням, що описує згасаючі коливання.

Нагадаємо, що коливання, описувані рівняннями (1.3) і (1.4), є вільними, тобто система, що була виведена з положення рівноваги або отримала поштовх, здійснює коливання сама по собі, без впливу зовнішніх сил. Тепер нехай наша коливальна система зазнає дії зовнішньої сили, що змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \cos\omega t.$ У цьому разі рівняння другого закону Ньютона набирає вигляду:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx + F_0\cos\omega t \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t, \qquad (1.5)$$

де $f_0 = F_0 / m.$ Диференціальне рівняння (1.5) описує вимушені коливання. Зауважимо, що в цьому рівнянні $\omega_0 \neq \omega.$

Запишемо рівняння (1.5) у компактному вигляді

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t. \qquad (1.6)$$

Отже, для вивчення коливань нам необхідно розв'язувати диференціальні рівняння вигляду (1.6), або в загальному випадку

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \qquad (1.7)$$

де $a$ і $b$ — константи, $f(t)$ — деяка функція від часу. Рівняння типу (1.7) називають *лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами*. Для рівняння (1.3) $a = 0;$ $b = \omega_0^2,$ для (1.4) $a = 2\beta;$ $b = \omega_0^2.$ В обох цих випадках функція $f(t) \equiv 0.$ У разі вимушених коливань (1.6) $f(t) = f_0\cos\omega t.$

## 1.3. Комплексні числа

Розв'язування рівняння (1.7) значно полегшується, якщо використовувати комплексні числа. Комплексним числом $\tilde{z}$ називають число вигляду

$$\tilde{z} = x + iy, \qquad (1.8)$$

де $x$ і $y$ — дійсні числа; $i$ — уявна одиниця, визначена умовою $i^2 = -1.$ Число $x$ називають *дійсною частиною* комплексного числа

$\tilde{z}$ і позначають $x = \mathrm{Re}\,\tilde{z}$. Число $y$ називають *уявною частиною* $\tilde{z}$ і позначають $y = \mathrm{Im}\,z$. Число

$$\tilde{z}^* = x - iy \tag{1.9}$$

називають *комплексно-спряженим* з числом $\tilde{z}$.

Дійсному числу $x$ відповідає точка на осі $x$. Комплексному числу $\tilde{z}$ відповідає точка на площині, яка має координати $x$, $y$ (рис. 1.2). Отже, комплексне число можна задати у вигляді $\tilde{z} = x + iy$ за допомогою декартових координат $x$ і $y$ відповідної точки. Те саме комплексне число можна також записати за допомогою полярних координат $\rho$ і $\varphi$. Між зазначеними системами координат існують співвідношення

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \varphi = \mathrm{arctg}(y/x), \tag{1.10}$$

де число $\varphi$ називають *аргументом* комплексного числа $\tilde{z}$.

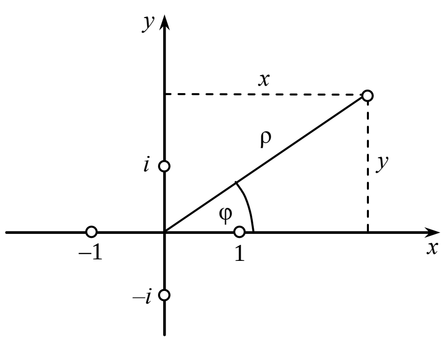



Рис. 1.2

Відстань від початку координат до точки, що відповідає числу $\tilde{z}$, називають *модулем* комплексного числа:

$$|\tilde{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Урахувавши співвідношення (1.10), можна записати комплексне число в тригонометричній формі:

$$\tilde{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексні числа $\tilde{z}_1 = x_1 + iy_1$ і $\tilde{z}_2 = x_2 + iy_2$ вважають рівними між собою, якщо окремо рівні між собою їхні дійсні та уявні частини:

$$\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2, \text{ якщо } x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2.$$

Модулі двох рівних комплексних чисел однакові, а аргументи можуть відрізнятися лише доданком, кратним $2\pi$:

$$\rho_1 = \rho_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2\pi.$$

Із виразів (1.8) і (1.9) випливає, що, коли $\tilde{z} = \tilde{z}^*$, уявна частина цього числа дорівнює нулю, тобто число $\tilde{z}$ виявляється виключно дійсним. Тому ця умова є умовою дійсності числа $\tilde{z}$.

У математиці відома формула Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.11}$$

Якщо в цій формулі замінити $\varphi$ на $-\varphi$ і врахувати, що косинус — функція парна ($\cos(-\varphi) = \cos\varphi$), а синус — непарна ($\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$), дістанемо співвідношення

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{1.12}$$

Додавши два вирази (1.11) і (1.12) та розв’язавши здобуте співвідношення відносно косинуса, дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{1.13}$$

Якщо відняти (1.12) від (1.11), дістанемо

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.14}$$

За допомогою формули (1.11) комплексне число можна записати в показниковій формі:

$$\tilde{z} = \rho e^{i\varphi}. \tag{1.15}$$

Комплексно-спряжене число в показниковій формі має вигляд

$$\tilde{z}^* = \rho e^{-i\varphi}. \tag{1.16}$$

У разі додавання комплексних чисел додаються окремо їхні дійсні та уявні частини:

$$\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Добуток комплексних чисел зручно шукати, коли ці числа подано в показниковій формі:

$$\tilde{z} = \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Аналогічно відбувається ділення комплексних чисел:

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Узявши до уваги формули (1.15) і (1.16), дістанемо

$$|\tilde{z}|^2 = \tilde{z} \cdot \tilde{z}^* = \rho^2,$$

тобто квадрат модуля комплексного числа дорівнює добутку цього числа на його комплексно-спряжене.

## 1.4. Лінійні диференціальні рівняння

Як було з'ясовано в підрозд. 1.2 під час розгляду коливальних процесів, у загальному випадку необхідно розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку вигляду $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$. Константи $a$, $b$ можуть бути й нулями. Якщо функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю $\left(f(t) \equiv 0\right)$, то зазначене рівняння називають *однорідним*, якщо ні, то рівняння називають *неоднорідним*. Однорідне рівняння другого порядку (тобто зі старшою другою похідною) має вигляд

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{1.17}$$

Розв'язок будь-якого диференціального рівняння другого порядку містить дві довільні сталі — $C_1$ і $C_2$. Розглянемо найпростіший випадок $\ddot{x} = 0$. Перше інтегрування цього рівняння дає $\dot{x} = \tilde{N}_1$. Наступне приводить до функції $x = C_1 t + C_2$. Легко переконатися, що для довільних значень сталих $C_1$ і $C_2$ функція $x = C_1 t + C_2$ задовольняє рівняння $\ddot{x} = 0$. Якщо сталим приписати певні значення, наприклад

$C_1 = 2$, $C_2 = 7$, то матимемо *частинний* розв'язок $x = 2t + 7$. Множину всіх без винятку частинних розв'язків називають *загальним* розв'язком диференціального рівняння. Загальний розв'язок рівняння $\ddot{x} = 0$ має вигляд $x = C_1 t + C_2$.

У теорії лінійних диференціальних рівнянь доведено, що якщо $x_1$ і $x_2$ — лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (1.17), то загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \tag{1.18}$$

де $C_1$ і $C_2$ — довільні сталі (функції $x_1$ і $x_2$ називають лінійно незалежними, якщо співвідношення $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \equiv 0$ виконується тільки в тому разі, коли $\alpha_1$ і $\alpha_2$ дорівнюють нулю).

Щоб знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння (1.17), використовують підстановку $x(t) = e^{\lambda t}$, де $\lambda$ — стала величина. Диференціювання змінної $x(t)$ дає $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Підставлення цих значень у рівняння (1.17) дає так зване *характеристичне рівняння*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{1.19}$$

Корені рівняння (1.19) являють собою ті значення $\lambda$, для яких функція $x(t) = e^{\lambda t}$ задовольняє рівняння (1.17).

Якщо корені рівняння (1.19) різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то функції $e^{\lambda_1 t}$ і $e^{\lambda_2 t}$ будуть лінійно незалежними. Отже, загальний розв'язок (1.17) можна записати у вигляді

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{1.20}$$

Коли $\lambda_1 = \lambda_2$, загальний розв'язок (1.17) набирає вигляду

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}. \tag{1.21}$$

У теорії диференціальних рівнянь є теорема, відповідно до якої загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.7) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1.17) і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x_{\text{çàã.íåîäíîð}} = x_{\text{çàã.îäíîð}} + x_{\text{÷àñò.íåîäíîð}}. \tag{1.22}$$

Тепер розглянемо таку ситуацію. Припустимо, що коефіцієнти $a$ і $b$ — дійсні, а функція у правій частині рівняння (1.7) уявна. Зобразимо цю функцію у вигляді $f(t)+i\varphi(t)$. Тоді неоднорідне рівняння (1.7) матиме вигляд

$$\ddot{z}+a\dot{z}+bz=f(t)+i\varphi(t) \tag{1.23}$$

(позначили невідому функцію через $z$). Очевидно, що для такого випадку розв'язок буде комплексним $z(t)=x(t)+iy(t)$. Підставивши цей розв'язок у рівняння (1.23), дістанемо:

$$\ddot{x}+i\ddot{y}+a\dot{x}+ai\dot{y}+bx+biy=f+i\varphi. \tag{1.24}$$

У рівних комплексних чисел мають бути рівними окремо дійсні та уявні частини. Отже, рівняння (1.24) розпадається на два незалежні рівняння

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t), \qquad \ddot{y}+a\dot{y}+by=\varphi(t), \tag{1.25}$$

перше з яких збігається з рівнянням (1.7). Цю властивість рівняння (1.24) часто використовують, щоб знайти розв'язок рівняння (1.7), оскільки такий підхід іноді значно полегшує розрахунки. Нехай у рівнянні (1.7) права частина дійсна. Додавши до неї довільну уявну функцію, зведемо рівняння до вигляду (1.25). Знайшовши комплексний розв'язок, візьмемо його дійсну частину. Вона і буде розв'язком початкового рівняння (1.7).

## 1.5. Вільні незгасаючі механічні коливання

У підрозд. 1.2 ми встановили, що вільні незгасаючі механічні коливання описуються диференціальним рівнянням (1.3). Перепишемо його у вигляді

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0, \tag{1.26}$$

де $\omega_0^2=k/m$ — власна частота, яка є дійсною величиною. Якщо коливальна система описується рівнянням вигляду (1.26), то можна однозначно стверджувати, що ця коливальна система є гармонічним осцилятором. Отже, коливальна система у вигляді кульки на пружині є гармонічним осцилятором. Будемо шукати розв'язок (1.26) у вигляді $x=e^{\lambda t}$, який підставимо в рівняння (1.26) і дістанемо характеристичне рівняння вигляду $\lambda^2+\omega_0^2=0$. Це рівняння має уявні корені

# ЗМІСТ