МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный авиационный университет

Т. И. Довгодько, Л. А. Ольховик

МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИКА

АЛГЕБРА

Учебное пособие

Киев 2016

УДК 511.1+512.1(075.8)
ББК В1я7
Д 58

Рецензенты: *Е. В. Рыльцев* – д-р физ.-мат. наук, проф. (Межрегиональная академия управления персоналом);
Л. Н. Корочкина – канд. физ.-мат. наук, доц. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко);
Н. Н. Кузьмина – канд. физ.-мат. наук, доц. (Киевский национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова)

Утверждено учёным советом Национального авиационного университета (протокол № 13 от 24.12.2015 г.).

Викладений у посібнику теоретичний матеріал складається із чотирьох розділів, адаптований відповідно до етапів оволодіння іноземцями російською мовою як іноземною і супроводжується великою кількістю практичних прикладів різної міри складності. Наприкінці кожного розділу наведені питання і вправи для самостійної роботи.

Для іноземних студентів підготовчого відділення факультету по роботі з іноземними студентами.

Довгодько Т. И.

Д 58 Математика: Арифметика. Алгебра: учеб. пособие / Т. И. Довгодько, Л. А. Ольховик. – К. : НАУ, 2016. – 96 с.

ISBN 978-966-598-971-4

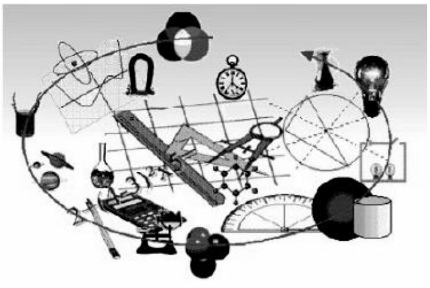
Изложенный в пособии теоретический материал состоит из четырёх разделов, адаптирован в соответствии с этапами овладения иностранцами русским языком как иностранным и сопровождается большим количеством практических примеров разной степени сложности. В конце каждого раздела приведены вопросы и упражнения для самостоятельной работы.

Для иностранных студентов подготовительного отделения факультета по работе с иностранными студентами.

УДК 511.1+512.1(075.8)
ББК В1я7

ISBN 978-966-598-971-4

ОГЛАВЛЕНИЕ



ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика: Арифметика. Алгебра» предназначено для иностранных студентов подготовительных отделений высших учебных заведений Украины, выбравших в качестве языка обучения русский язык. Цель пособия – помочь иностранным слушателям сформировать готовность к изучению высшей математики в университетах Украины.

По мнению авторов, регулярная работа с данным пособием поможет иностранным студентам освоить математическую терминологию на неродном для них языке, ускорит процесс преодоления «языкового барьера», даст возможность повторить и систематизировать имеющиеся математические знания и умения, ликвидировать пробелы в них (если таковые имеются), овладеть навыками самостоятельной работы с учебной литературой.

Пособие подготовлено в соответствие с учебной программой и состоит из следующих разделов: «Числа и числовые множества», «Алгебраические выражения. Тождественные преобразования», «Алгебраические уравнения. Системы уравнений», «Функции. Основные свойства. Графики функций»».

Во всех разделах теоретический и практический материал адаптирован и изложен на доступном для понимания уровне в соответствии с этапами пропедевтического обучения и с учётом учебной программы по русскому языку для подготовительных факультетов. Теоретический материал, изложенный в пособии, сопровождён достаточным количеством подробно разобранных практических примеров разных уровней сложности. Это, по мнению авторов, предоставляет возможность использовать пособие для работы в группах с различным базовым уровнем математической подготовки; поможет иностранным студентам с более высоким уровнем знаний закрепить и углубить их, а недостаточно подготовленным получить и закрепить новую для них необходимую информацию. Для облегчения восприятия теоретического материала на неродном языке основные понятия, термины и определения, выделены жирным шрифтом и/или курсивом. В конце каждого подраздела приведён перечень использованных новых лексических единиц. Авторы рекомендуют иностранным слушателям все новые слова и словосочетания выписать в тематический словарь, сопроводить переводом на родной язык и выучить, что безусловно будет способствовать лучшему восприятию последующего изучаемого материала.

Контрольные вопросы и упражнения, приведённые в конце каждой главы, должны обеспечить контроль за усвоением иностранными слушателями изложенной теории и практики. Закрепить практические умения решать задачи и упражнения поможет практикум, содержащий значительно большее количество упражнений и задач, который в комплекте с данным пособием представляет собой учебно-методический комплекс по математике для подготовительного отделения.

Данное учебное пособие может быть использовано как для работы в аудитории под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы иностранных студентов в процессе выполнения домашних заданий и при подготовке к контрольным работам.

Раздел 1
ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

1.1. Целые числа

1.1.1. Цифры. Натуральные числа. Целые числа

▲ **Цифра – это знак числа.**

Есть десять цифр. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это *цифры*. Этими цифрами можно записать любое число. 2, 0, 5, 18, 101, 3840 – это *числа*. Числа есть *однозначные* (один знак, одна цифра); *двузначные* (два знака, две цифры); *трёхзначные* (три знака, три цифры); *многозначные* (много знаков, много цифр).

Пример

2, 8, 7, 5… – это однозначные числа.
12, 30, 21, 56… – это двузначные числа.
102, 203, 451, 978… – это трёхзначные числа.
1201, 26432, 2015… – это многозначные числа.

■ Числа читают так:

0	нуль,	5	пять,
1	один,	6	шесть,
2	два,	7	семь,
3	три,	8	восемь,
4	четыре,	9	девять,

10	десять		20	два-	*-дцать,*
11	один-		30	три-	
12	две-		40	сорок	
13	три-	*-надцать,*	50	пять-	
14	четыр-		60	шесть-	*-десят,*
15	пят-		70	семь-	
16	шест-		80	восемь-	
			90	дев’яносто,	
100	ст**о**		500	пять-	
200	двести		600	шесть-	
300	три-	*-ст**а**,*	700	семь-	*-сот,*
400	четыре-		800	восемь-	
			900	девять-	
1 000	одна *тысяч**а**,*		1 000 000	один *миллион,*	
2 000	две		2 000 000	два	
3 000	три	*тысяч**и**,*	3 000 000	три	*миллион**а**,*
4 000	четыре		4 000 000	четыре	
5 000	пять	*тысяч,*	5 000 000	пять	*миллион**ов**.*
…	…		…	…	

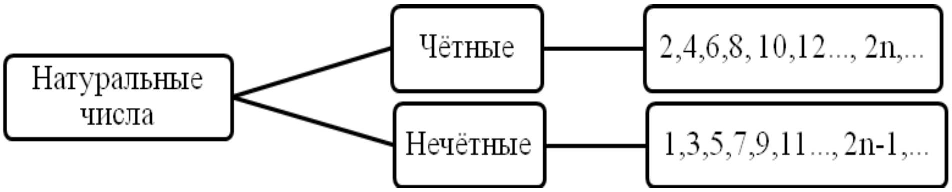
▲ **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11…**– это **натуральные числа.**

Натуральные числа образуют числовое множество. Оно бесконечно (содержит бесконечно много элементов). Множество натуральных чисел обозначают буквой N (читают "эн"). $N = \{1; 2; 3; 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11…\}$ – **множество натуральных чисел**.

Число 5 – это *элемент* множества N, или $5 \in N$.
Число 28– это *элемент* множества N**,** или $28 \in N$**.**

Пишут	Читают
$25 \in N$	Двадцать пять принадлежит «эн»
$0 \notin N$	Нуль не принадлежит «эн»

Натуральные числа есть **чётные** ($2n$, $n \in N$**)** и **нечётные** ($2n$-1, $n \in N$).



$\left.\begin{array}{l}5 \text{ и } -5 \\ 6 \text{ и } -6 \\ 10 \text{ и } -10\end{array}\right\}$ это ***противоположные*** числа

▲ ***Целые числа*** *– это натуральные числа, противоположные им числа и нуль*.

Целые числа образуют бесконечное числовое множество. Его обозначают буквой Z (читают "зэт"). Z = {…-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4, 5, …} – **множество целых чисел**.

Пишут	Читают
$-20 \in Z$	Минус двадцать принадлежит «зэт»
$\sqrt{2} \in Z$	Квадратный корень из числа два не принадлежит «зэт»

1, 2, 3, 4, … – **целые положительные** числа (целые числа, больше чем нуль).
-1, -2, -3, … – **целые отрицательные** числа (целые числа, меньше чем нуль).

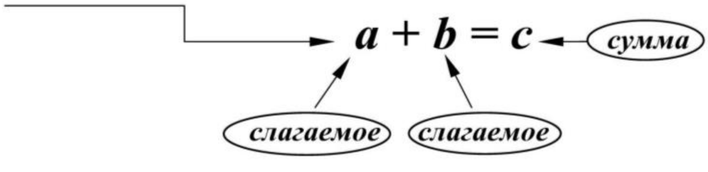
‼ *Слова и словосочетания*

цифра (*ы*)
однозначный (*ая,ое,ые*)
многозначный (*ая, ое,ые*)
натуральный (*ая,ое,ые*)
множество (*а*)
множество натуральных чисел
множество целых чисел
принадлежать (*inf*)+(*кому?,чему?*)
элемент (*ы*) + (*чего?*)
элемент (*ы*) числового множества

чётный (*ая,ое,ые*)
чётное (*ые*) число (*а*)
нечётный (*ая,ое,ые*)
нечётное (*ые*) число (*а*)
противоположный (*ая,ое,ые*)
противоположное (*ые*) число (*а*)
положительный (*ая,ое,ые*)
положительное (*ые*) число (*а*)
отрицательный (*ая,ое,ые*)
отрицательное (*ые*) число (*а*)

1.1.2. Арифметические действия

Арифметика – это раздел математики, в котором изучают числа и действия над ними.
▲ **Сложение, вычитание, умножение и деление** – это **арифметические действия.**
1) СЛОЖЕНИЕ – это арифметическое действие**.**



a, b, c **– это компоненты** действия сложения.

■ Читают: *«а» плюс «b» равно «с» или «а» плюс «b» будет «с».*
■ Знак " = " читают: *равно + (чему?)* или *будет + (что?)*

2) ВЫЧИТАНИЕ – это арифметическое действие**.**

$$\underbrace{a}_{\text{уменьшаемое}} - \underbrace{b}_{\text{вычитаемое}} = \underbrace{c}_{\text{разность}}$$

■ Читают: *«а» минус «b» равно «с» или «а» минус «b» будет «с».*

3) УМНОЖЕНИЕ – это арифметическое действие**.**

$$\underbrace{a}_{\text{(со)множитель}} \cdot \underbrace{b}_{\text{(со)множитель}} = \underbrace{c}_{\text{произведение}}$$

■ Читают: *«а» умножить на «b» равно «с» или«а» умножить на «b» будет «с».*

4) ДЕЛЕНИЕ – это арифметическое действие**.**

$$\underbrace{a}_{\text{делимое}} : \underbrace{b}_{\text{делитель}} = \underbrace{c}_{\text{частное}}$$

■ Читают: *«а» разделить на «b»равно «с» или «а» разделить на «b» будет «с».*

Пишут	Читают
19 + 12 = 31	Девятнадцать плюс двенадцать будет тридцать один
102 – 100 = 2	Сто два минус сто равно двум
0 · 8 = 0	Нуль умножить на восемь будет нуль
43 ÷ 43 = 1	Сорок три разделить на сорок три равно единице

▲***Числовое выражение** – это математическая запись, в которой есть числа, знаки арифметических действий и скобки.*

Скобки есть: **( )** – ***круглые*, [ ]** – ***квадратные*, { }** – ***фигурные***.

Примеры

25 + 3 · 4 – 9 ÷ 1 – это числовое выражение без скобок.

(153 + 2) ÷ 5 - 10 – это числовое выражение со скобками.

■ Читают так:

открыть круглые скобки, сто пятьдесят три плюс два, *закрыть скобки,* разделить на пять минус десять.

▲ ***Значение выражения** – это число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении.*

Например**,** $\underbrace{18+4-1233}_{\text{числовое выражение}} = \underbrace{-1211}_{\text{значение выражения}}$.

▲ ***Порядок действий:***

***сначала** выполняют **умножение** и **деление**, а затем – сложение и вычитание.*

*Если **есть скобки**, то **сначала** выполняют **действия в скобках**.*

Примеры

Найти значение числового выражения:

Скобок нет — а) 80 – 5 · 7 + 18 : 3 = 80 – 35 +6 = 51;

Скобки есть — б) (80 – 5) · 7 + 18 : 3 = 75· 7 + 6 = 525 + 6 = 531.

Основные законы арифметических действий

Закон	Сложение	Умножение	Пример
Коммутативный (переместительный)	$a + b = b + a$	$ab = ba$	$2 + 3 = 3 + 2$ $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
Ассоциативный (сочетательный)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$	$(5 + 6) + 1 = 5 + (6 + 1)$ $(10 \cdot 2) \cdot 4 = 10 \cdot (2 \cdot 4)$
Дистрибутивный (распределительный)	$a(b + c) = ab + ac$		$5\cdot(3 + 4)=5\cdot3 + 5\cdot4$

!! *Слова и словосочетания*

арифметическое *(ие)* действие *(я)*
сложение
вычитание
умножение
деление
(что?) плюс *(что?)*
(что?) минус *(что?)*
(что?) умножить на *(что?)*
(что?) разделить на *(что?)*
сумма (*ы*)
разность (*и*)
произведение (*я*)
частное(*ые*)

слагаемое (*ые*)
уменьшаемое (*ые*)
(со)множитель (*и*)
делимое (*ые*)
вычитаемое (*ые*)
делитель (*и*)
числовое *(ые)* выражение *(я)*
значение выражения
порядок действий
скобка(*и*)
круглая*(ые)* скобка(*и*)
квадратная*(ые)* скобка(*и*)
фигурная*(ые).* скобка(*и*)
законы арифметических действий

1.1.3. Разложение чисел на простые множители

▲ ***Простое число*** *– это такое натуральное число m, которое имеет только два делителя: 1 и m.*

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67… - это простые числа.

▲ ***Составное число*** *– это такое натуральное число k, которое имеет больше чем два делителя.*

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32,… – это составные числа.

!! Число 1 – ни простое, ни составное !!

▲ ***Разложить составное число на простые множители*** *– это значит записать его как произведение простых чисел.*

Пример 1

Разложить число 564 на простые множители.
Решение.

$$\begin{array}{|l|l}
564 & 2 \\
282 & 2 \\
141 & 3 \\
47 & 47 \\
1 &
\end{array}$$

$$\underset{\text{составное число}}{564} = \underbrace{2\cdot2\cdot3\cdot47}_{\text{простые множители}}$$

Ответ: $564 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 47$.

Пример 2

Разложить число 360 на простые множители.

Решение.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Ответ: 360 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5.

Пример 3

Разложить число 1875 на простые множители.

Решение.

1875	5
375	5
75	5
15	5
3	3
1	

Ответ: 1875 = 3 · 5 · 5 · 5 · 5.

Рассмотрим выражение 3·5·5·5·5 из примера 3. Его можно записать иначе:

$3\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 3\cdot5^4$. Здесь 5^4 – это **степень.**

▲ ***Степень*** *– это произведение равных сомножителей.*

$$\boxed{a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a...a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in N, n \neq 1)}$$

Здесь a^n − **степень**, a − **основание степени**, n − **показатель степени**.

■ Читают**:** *а в степени «эн».*

Пишут	Читают
a^n	*а* в степени «эн»
a^2	*а* в квадрате
a^3	*а* в кубе
5^2	пять в квадрате
7^3	семь в кубе
3^5	три в степени пять

▲ ***Основная теорема арифметики***

Любое натуральное число, больше единицы, можно единственным образом представить как произведение простых чисел $\Rightarrow$

$\boxed{m = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot ...\cdot p_n^{k_n}}$, где $p_1, p_2, ..., p_n$ – **простые** числа, $k_1, k_2, ..., k_n$ – **натуральные** числа.

Так, для числа 360 из примера 1: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$.
Для числа 565 из примера 2: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 47$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$.
Для числа 1875 из примера 3: $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

1.1.4. Наибольший общий делитель

Число 18 имеет делители: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Число 24 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
1, 2, 3, 6 – это ***общие делители*** чисел 18 и 24.
6 – ***наибольший общий делитель*** чисел 18 и 24.Записывают: НОД (18; 24) = 6.
■ Читают: *наибольший общий делитель чисел 18 и 24 равен 6.*

▲ ***Правило.*** *Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, нужно разложить эти числа на простые множители и найти произведение* ***общих*** *простых* ***множителей****, причем, взять каждый из них* ***с наименьшим показателем****.*

Пример 1
Найти НОД (96, 120, 144).
Решение.
Разложим каждое число на простые множители

96	2	120	2	144	2
48	2	60	2	72	2
24	2	30	2	36	2
12	2	15	3	18	2
6	2	5	5	9	3
3	3	1		3	3
1				1	

$96 = 2^5 \cdot 3$,
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$144 = 2^4 \cdot 3^2$.
НОД (96, 120, 144) = $2^3\ 3 = 24$

Ответ: НОД (96, 120, 144) = 24.

Пример 2
Найти НОД (270, 300, 315).
Решение.

270	2	300	2	315	3
135	3	150	2	105	3
45	3	75	3	35	5
15	3	25	5	7	7
5	5	5	5	1	
1		1			

$270 = 2\ \ 3^2\ \ 5$,
$300 = 2^2\ \ 3\ \ 5^2$,
$315 = 3^2\ \ 5\ \ 7$.
НОД (270, 300, 315) = $2\ 3 \cdot 5 = 30$

Ответ: НОД (270, 300, 315) = 30.

▲ *Если наибольший общий делитель чисел равен единице, то эти числа* ***взаимно простые.***

$$\boxed{\text{НОД}(a,b)=1 \Leftrightarrow a,b - \textbf{\textit{взаимно простые числа}}}$$

Пример
НОД (5, 6) = 1 $\Rightarrow$ 5 и 6 – взаимно простые числа.
НОД (12, 13) = 1 $\Rightarrow$ 12 и 13 – взаимно простые числа.

1.1.5. Наименьшее общее кратное

▲ *Число* A *называется* ***кратным*** числу B*, если число* A *можно разделить на число* B *без остатка.*

$$\boxed{\text{A} = \text{B} \cdot n \ \ (n \in N) \Leftrightarrow \ \text{A кратно B}}$$

Примеры
а).Число 25 кратно числу 1, числу 5 и числу 25.
б). Число 8 не кратно числу 3. Оно кратно числам 1, 2 , 4 и 8.

Числа 16, 32, **48,** 64, 80, **96**, 112, 128, **144**, … – кратны числу 16.
Числа 24, **48**, 72, **96**, 120, **144**, 168, 192, … – кратны числу 24.

48, 96, 144, … – ***общие кратные*** для чисел 16 и 24.
48 – ***наименьшее общее кратное*** чисел 16 и 24. Записывают: НОК (16; 24) = 48.
■ Читают: ***наименьшее общее кратное чисел*** *16 и 24*.

▲ ***Правило.*** *Чтобы найти наименьшее общее кратное чисел* $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, *нужно разложить эти числа на простые множители и найти произведение* ***всех*** *простых* ***множителей****, причём взять каждый из них* ***с наибольшим показателем***.

Пример 1

Найти НОК (24, 56).

Решение.

24	2	56	2
12	2	28	2
6	2	14	2
3	3	7	7
1		1	

$24 = 2^3 \cdot 3$,

$56 = 2^3 \cdot 7$

НОК (24, 56) = $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$

Ответ:. НОК (24, 56) = 168

Пример 2

Найти НОК (126, 270, 630).

Решение.

126	2	270	2	630	2
63	3	135	3	315	3
21	3	45	3	105	3
7	7	15	3	35	5
1		5	5	7	7
		1		1	

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$,

$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$,

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

НОК (126, 270, 630) = $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890$.

Ответ: НОК (126, 270, 630) = 1890.

Связь между НОК и НОД:

$$\boxed{\text{НОК}(m,n) = \frac{mn}{\text{НОД}(m,n)}} \quad \textit{или} \quad \boxed{\text{НОК}(m,n)\cdot\text{НОД}(m,n) = mn}$$

Пример

НОД(24, 56) = 8, НОК(24, 56) = 168.

$$\text{НОК}(24,56) = \frac{24\cdot 56}{\text{НОД}(24,56)} = \frac{24\cdot 56}{8} = 168.$$

Если числа m и n взаимно простые, т.е. $\text{НОД}\left(m,n\right)=1$, тогда НОК= $\left(m,n\right) = m\cdot n$, и наоборот

$$\boxed{\text{НОД}\left(m,n\right)=1 \Leftrightarrow \text{НОК}\left(m,n\right)=m\cdot n}$$

Пример

Числа 5 и 6 взаимно простые, потому что $\text{НОД}(5,6)=1$.

Тогда $\text{НОК}(5,6)=5\cdot 6=30$.

‼ *Слова и словосочетания*

простое *(ые)* число (а)	основная теорема арифметики
составное *(ые)* число (а)	правило (*а*)
разложить на множители	наибольший общий делитель
степень (*и*)	число А кратно числу В
показатель степени	наименьшее общее кратное
теорема (*ы*)	взаимно простые числа

1.1.6. Признаки делимости чисел

А) Признак делимости на 2, 5, 10.

На 2 делятся числа, у которых последняя цифра делится на 2.

Примеры

258 делится на 2, так как последняя цифра 8 делится на 2;

1237 не делится на 2, так как последняя цифра 7 не делится на 2.

На 5 делятся числа, у которых последняя цифра 0 или 5.

Примеры

7530 делится на 5 (последняя цифра 0);
4835 делится на 5 (последняя цифра 5);
10234 не делится на 5 (последняя цифра 4).

На 10 делятся числа, у которых последняя цифра 0.

Примеры

1220 делится на 10 (последняя цифра 0);
2382 не делится на 10 (последняя цифра 2).

Б) Признак делимости на 3 и 9.

На 3 (9) делятся числа, у которых сумма цифр делится на 3 (9).

Примеры

231 делится на 3 (сумма цифр 2+3+1=6 делится на 3);
56718 делится на 3 и на 9 (сумма цифр 5+6+1+8=27 делится на 3 и на 9);
2461 не делится на 3 (сумма цифр 2+4+6+1=13 не делится на 3 и не делится на 9).

В) Признак делимости суммы.

Сумма слагаемых делится на натуральное число n,
если каждое из слагаемых делится на n

Примеры

6 + 12 + 18 + 36 делится на 3 (каждое слагаемое делится на 3);
12+15+200 не делится на 2 (15 не делится на 2).

Г) Признак делимости произведения.

Произведение делится на натуральное число n,
если хотя бы один из множителей делится на n.

Примеры

$13 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 17$ делится на 5 (множитель 25 делится на 5);
$12 \cdot 18 \cdot 19$ не делится на 5 (ни один из множителей не делится на 5).

1.2. Рациональные числа

1.2.1. Обыкновенные дроби. Смешанные числа

▲ **Обыкновенная дробь – это число вида $\frac{m}{n}$,** где m, n – натуральные числа ($m, n \in \mathbb{N}$).

m – **числитель дроби;**
n – **знаменатель дроби**.

Например, $\frac{7}{9}$ – это обыкновенная дробь, где 7 – числитель, 9 – знаменатель.

$\frac{5}{8}, \frac{6}{7}, \frac{20}{21}$ – обыкновенные дроби.

■ Дроби читают так:

а) <u>последняя цифра числителя 1</u> (!! но **<u>не 11</u>** !!!), тогда $\boxed{\frac{...1}{n} \Rightarrow \frac{...\text{одна}}{\text{какая?}}}$.

Пример

Пишут	Читают	Пишут	Читают	Пишут	Читают
$\frac{1}{1}$	**одна** перв**ая**	$\frac{21}{6}$	двадцать **одна** шест**ая**	$\frac{1}{10}$	**одна** десят**ая**
$\frac{1}{2}$	**одна** втор**ая**	$\frac{31}{7}$	тридцать **одна** седьм**ая**	$\frac{1}{12}$	**одна** двенадцат**ая**
$\frac{1}{3}$	**одна** трет**ья**	$\frac{41}{100}$	сорок **одна** сот**ая**	$\frac{201}{15}$	двести **одна** пятнадцат**ая**

б) последняя цифра числителя **не** 1 (!! но **не 11 !!**), тогда $\boxed{\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\text{сколько?}}{\text{каких?}}}$

Пример

Пишут	Читают	Пишут	Читают	Пишут	Читают
$\frac{2}{1}$	**две** перв**ых**	$\frac{52}{6}$	пятьдесят **две** шест**ых**	$\frac{102}{8}$	сто **две** восьм**ых**
$\frac{11}{2}$	одинадцать втор**ых**	$\frac{35}{7}$	тридцать пять седьм**ых**	$\frac{12}{19}$	двенадцать девятнадцат**ых**

Некоторые дроби имеют специальное название:

$$\frac{1}{2}\text{ - половина; } \frac{1}{3}\text{ - треть; } \frac{1}{4}\text{ - четверть.}$$

▲ **Если числитель дроби меньше, чем знаменатель** $(m < n)$**, то дробь правильная.**

Например, $\frac{5}{9}$ – это правильная дробь, потому что 5 < 9 (< – знак «меньше»).

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{10}{11}$ – это правильные дроби.

▲ **Если числитель дроби больше или равен знаменателю** $(m \geq n)$**, то дробь неправильная**.

Например, $\frac{7}{3}$ – это неправильная дробь, потому что 7 > 3 (> – знак «больше»).

$\frac{21}{2}, \frac{4}{3}, \frac{32}{5}, \frac{101}{11}$ – это неправильные дроби.

▲ *Число вида* $\boxed{\underset{\text{целая часть}}{M} + \underset{\text{правильная дробь}}{\frac{m}{n}} = M\frac{m}{n}}$ – *это* ***смешанное число****.*

Смешанное число имеет целую часть (M) и дробь $\left(\frac{m}{n}\right)$.

Например, $2\frac{1}{3}, 5\frac{4}{7}, 12\frac{2}{9}$ – это смешанные числа.

■ Смешанные числа читают так:

если $M = 1$, то $\boxed{1\frac{m}{n} \Rightarrow \text{одна целая и } \frac{m}{n}}$, если $M \neq 1$, то $\boxed{M\frac{m}{n} \Rightarrow \underset{\text{сколько?}}{M} \text{ целых и } \frac{m}{n}.}$

Пишут	Читают	Пишут	Читают
$1\frac{1}{3}$	одна цел**ая** одна треть**я**	$2\frac{5}{6}$	две цел**ых** пять шест**ых**
$1\frac{2}{9}$	одна цел**ая** две девят**ых**	$3\frac{1}{8}$	три цел**ых** одна восьм**ая**
$1\frac{11}{12}$	одна цел**ая** одиннадцать двенадцат**ых**	$5\frac{11}{30}$	пять цел**ых** одиннадцать тридцат**ых**

▲ ***Неправильную дробь*** *можно записать* ***в виде смешанного числа (обратить неправильную дробь в смешанное число).***

Примеры. Обратить дробь в смешанное число:

1) $\underset{\text{дробь}}{\frac{36}{7}}=\frac{35+1}{7}=\frac{35}{7}+\frac{1}{7}=5+\frac{1}{7}=\underset{\text{смешанное число}}{5\frac{1}{7}}$; 2) $\underset{\text{дробь}}{\frac{23}{5}}=\frac{20+3}{5}=\frac{20}{5}+\frac{3}{5}=4+\frac{3}{5}=\underset{\text{смешанное число}}{4\frac{3}{5}}$

▲ ***Смешанное число*** *можно записать* ***в виде неправильной дроби (обратить смешанное число в неправильную дробь)***.

Примеры. Обратить смешанное число в неправильную дробь:

1) $2\frac{3}{5}=\frac{2\cdot5+3}{5}=\frac{13}{5}$**;** 2) $3\frac{4}{9}=\frac{3\cdot9+4}{9}=\frac{31}{9}$**;** 3) $12\frac{5}{7}=\frac{12\cdot7+5}{7}=\frac{89}{7}$**.**

1.2.2. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

▲ *Две дроби* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *называются* ***равными****, если* $ad=bc$.

Например, $\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$, так как $3\cdot32=8\cdot12$.

▲ ***Основное свойство дроби:***

если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то величина дроби не изменится.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a:m}{b:m},\ (m\in N).}$$

Примеры. $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}=\frac{14}{21}$; $\frac{18}{46}=\frac{18\div2}{46\div2}=\frac{9}{32}$**.**

▲ ***Сократить дробь*** *– значит разделить числитель и знаменатель дроби на одно и то же число, не равное нулю***.**

Пример. $\frac{24}{48}=\frac{24\div24}{48\div24}=\frac{1}{2}$. Мы *сократили дробь на* 24.

▲ *Если числитель и знаменатель – взаимно простые числа, то дробь называется* ***несократимой***.

Например**,** $\frac{17}{23},\frac{25}{16},\frac{3}{4}$ – это несократимые дроби.

1.2.3. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

▲ ***Наименьший общий знаменатель*** *двух или нескольких дробей – это наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей.*

Пример 1. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{9}{24}$ и $\frac{13}{30}$.

Решение. Числа 24 и 30 – знаменатели данных дробей. Найдем наименьшее общее кратное этих чисел. НОК (24, 30) = 120.

Число 120 – *наименьший общий знаменатель* дробей $\frac{9}{24}$ и $\frac{13}{30}$.

Тогда: $\frac{9}{24}=\frac{9\cdot 5}{24\cdot 5}=\frac{45}{120}$ и $\frac{13}{30}=\frac{13\cdot 4}{30\cdot 4}=\frac{52}{120}$.

Числа 5 и 4 – *дополнительные множители.*

Пример 2. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{4}{3}, \frac{2}{9}$ и $\frac{1}{6}$.

Решение. НОК(3, 9, 6) = 18. Тогда: $\frac{4}{3}=\frac{4\cdot 6}{3\cdot 6}=\frac{24}{18}$, $\frac{2}{9}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{4}{18}$ и $\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{3}{18}$.

1.2.4. Действия над обыкновенными дробями

1. Сложение и вычитание:

а) если знаменатели равные $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}}$

Например, $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{5}{8}$.

б) если знаменатели разные $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}}$

Пример

$\frac{2}{3}+\frac{13}{5}=\frac{2\cdot 5+13\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{49}{15}$.

На практике дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, который равен НОК (b,d).

Например, 1) $\frac{12}{5}-\frac{4}{15}=\frac{12\cdot 3-4}{15}=\frac{32}{15}$

(наименьший общий знаменатель дробей равен 15, так как НОК(5, 15)=15).

2) $\frac{1}{15}-\frac{2}{9}+\frac{4}{21}=\frac{1\cdot 21}{15\cdot 21}-\frac{2\cdot 35}{9\cdot 35}+\frac{4\cdot 15}{21\cdot 15}=\frac{21}{315}-\frac{70}{315}+\frac{60}{315}=\frac{21-70+60}{315}=\frac{11}{315}$

(наименьший общий знаменатель дробей равен 315, так как НОК(15,9,21)=315).

3. Умножение дробей: $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$

Например, $\frac{25}{33}\cdot\frac{9}{5}=\frac{25\cdot 9}{33\cdot 5}=\frac{5\cdot 3}{11\cdot 1}=\frac{15}{11}$ (сначала сократить 25 и 5 на 5, 9 и 33 на 3).

4. Деление дробей: $\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$

Например, $\frac{15}{16}\div\frac{25}{8}=\frac{15}{16}\cdot\frac{8}{25}=\frac{15\cdot 8}{16\cdot 25}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$.

Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ называются **взаимно обратными.**

Например, $\frac{12}{13}$ и $\frac{13}{12}$ – взаимно обратные дроби.

1.2.5. Десятичные дроби

$\frac{1}{10}, \frac{2}{100}, \frac{17}{1000}, \frac{53}{10000}$ и т.д. – это десятичные дроби.

▲ ***Десятичная дробь*** *– это обыкновенная дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т.д. (знаменатель равен* 10^n, где $n \in N$).

Десятичные дроби пишут и читают так:

$\frac{11}{10} = 1{,}1$ – одна цел**ая**, одна десят**ая**;

$\frac{12}{10} = 1{,}2$ – одна цел**ая**, две десят**ых**;

$\frac{123}{100} = 1{,}23$ – одна цел**ая**, двадцать три сот**ых**;

$\frac{3}{10} = 0{,}3$ – ноль цел**ых**, три десят**ых**;

$\frac{1}{100} = 0{,}01$ – ноль целых, одна сотая;

$\frac{5}{1000} = 0{,}005$ – ноль цел**ых**, пять тысячн**ых**.

Любую обыкновенную дробь (не десятичную) можно записать в виде десятичной.

▲***Правило.*** *Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно разделить числитель этой дроби на её знаменатель.*

При этом можно получить ***конечную*** или ***бесконечную*** десятичную дробь.

Пример. Обратить дробь $\frac{7}{25}$ в десятичную.

$$\begin{array}{r|l} -7{,}0 & 25 \\ \underline{50} & 0{,}28 \\ -200 & \\ \underline{200} & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{7}{25} = 0{,}28$ – конечная десятичная дробь.

▲***Правило.*** *Несократимая обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержат других простых делителей, кроме 2 и 5, обращается в конечную десятичную дробь.*

$$\boxed{\textit{Если } \frac{m}{n} = \frac{m}{2^k \cdot 5^l} \Rightarrow \frac{m}{n} \textit{ можно обратить в конечную десятичную дробь}}$$

Примеры

1) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$; 2) $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = 0{,}15$; 3) $\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = 0{,}28$.

Пример

Обратить дробь $\frac{11}{15}$ в десятичную.

Решение. Так как знаменатель 15 имеет простые делители 3 и 5, то при делении 11 на 15 получим бесконечную десятичную дробь.

$$\begin{array}{r|l} -11{,}0 & 15 \\ \underline{105} & 0{,}733\ldots \\ -50 & \\ \underline{45} & \\ -50 & \\ \underline{45} & \\ \ldots & \end{array}$$

$\frac{11}{15} = 0,733...$ – бесконечная десятичная дробь.

▲ ***Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется периодической.***

Цифры, что повторяются – это ***период.***

Пример: 2,454545…. – это *периодическая* дробь, 45 – это *период*.

Периодические дроби пишут и читают так:

1,333…= 1,(3) – одна целая, три в периоде;

0,565656…= 0,(56) – ноль целых 56 в периоде;

1,2333…= 1,2(3) – одна целая, 2 до периода, 3 в периоде;

4,214343…= 4,21(43) – четыре целых, 21 до периода, 43 в периоде.

▲***Правило.*** *Чтобы обратить десятичную конечную дробь в обыкновенную, надо записать её со знаменателем и, если можно, сократить.*

Примеры. 1) $5,6 = 5\frac{6}{10} = \frac{56}{10} = \frac{28}{5}$ **;** 2) $0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ **.**

▲ *Периодическую дробь обратить в обыкновенную можно по формуле*:

$$\boxed{a_0, a_1a_2...a_n\left(b_1b_2...b_m\right) = \frac{a_0a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m - a_0a_1a_2...a_n}{\underbrace{9...9}_{m}\underbrace{0...0}_{n}},}$$

где m – количество цифр в периоде,

n – количество цифр после запятой до периода.

<u>С этой формулой надо работать так:</u>

в числителе написать разность всех цифр и цифр до периода. В знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде (m ***). После девяток написать столько нулей, сколько цифр после запятой до периода (*** n ***).***

Примеры

1) $0,(35) = \frac{35}{99}$; 2) $1,2(3) = \frac{123-12}{90} = \frac{111}{90} = \frac{37}{30}$; 3) $2,(73) = \frac{273-2}{99} = \frac{271}{99}$.

Есть бесконечные десятичные дроби, у которых нет периода. Например, бесконечная дробь 2, 2360679…= $\sqrt{5}$ не имеет периода. Это бесконечная ***непериодическая*** дробь.

Десятичные дроби

$$\left\{\begin{array}{c} 0{,}5;\ 2{,}15;\ 1{,}125 - \text{конечные} \\ 0{,}333... = 0{,}(3);\ 4{,}12525... = 4{,}1(25) - \text{бесконечные } \underbrace{\text{периодические}}_{\text{есть период}} \\ \sqrt{2} = 1{,}414213...;\ \pi = 3{,}141592... - \text{бесконечные } \underbrace{\text{непериодические}}_{\text{нет периода}} \end{array}\right\}$$

При решении практических задач по физике, химии бесконечные дроби *округляют с* необходимой *точностью*.

Пример

		$\sqrt{2}=1,14421...$;	$\pi=3,14159...$;	$e=2,71828...$.
Округление с точностью до $\longrightarrow$	целых $\longrightarrow$	$\sqrt{2}\approx 1$	$\pi\approx 3$	$e\approx 3$
	десятых $\longrightarrow$	$\sqrt{2}\approx 1,1$	$\pi\approx 3,1$	$e\approx 2,7$
	сотых $\longrightarrow$	$\sqrt{2}\approx 1,14$	$\pi\approx 3,14$	$e\approx 2,72$
	тысячных $\longrightarrow$	$\sqrt{2}\approx 1,144$	$\pi\approx 3,142$	$e\approx 2,718$

■ Знак "$\approx$" читают: *приближенно равно*.

!!! При решении упражнений по математике округление не выполняют.

Если результатом будет периодическая дробь, то ответ записывают в виде обыкновенной дроби (как $\frac{m}{n}$) !!!

Пример

Вычислить: $0,2+2,333...\cdot\frac{1}{7}-\frac{5}{6}\cdot 0,6$.

Решение.

$$0,2+2,333...\cdot\frac{1}{7}-\frac{5}{6}\cdot 0,6=0,2+\frac{23-2}{9}\cdot\frac{1}{7}-\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{10}=0,2+\frac{21}{9}\cdot\frac{1}{7}-\frac{5}{10}=$$

$$=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{7}+(0,2-0,5)=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1\cdot 10-3\cdot 3}{30}=\frac{1}{30}.$$

Ответ: $\frac{1}{30}$.

1.2.6. Рациональные числа

▲ ***Рациональные числа (множество Q)*** *– это числа, которые можно записать в форме обыкновенной дроби* $\frac{m}{n}$, *где* m *– целое число(* $m\in\mathbf{Z}$ *),* n *– натуральное число (* $n\in\mathbf{N}$ *).*

В форме обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ можно записать целые числа, конечные и бесконечные периодические десятичные дроби.

Например, $-12=\frac{-12}{1}$; $5,6=\frac{56}{10}$; $1,222...=1,(2)=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$.

Поэтому есть другое определение рациональных чисел:

▲ ***Рациональные числа (множество Q)*** *– это целые числа, конечные и бесконечные периодические десятичные дроби.*

Например, $-5\in Q$, $\frac{2}{3}\in Q$, $13,7\in Q$, $1,(6)\in Q$.

‼ *Слова и словосочетания*

обыкновенная (*ые*) дробь (*и*)	несократимая (*ые*) дробь (*и*)
числитель дроби	дополнительный (*ые*) множитель(*и*)
знаменатель дроби	общий знаменатель
знак дроби	десятичная (*ые*) дробь (*и*)
половина	конечная (*ые*) дробь (*и*)
треть	бесконечная (*ые*) дробь (*и*)
четверть	период дроби

(что?) больше, чем (что?)
(что?) меньше, чем (что?)
правильная (*ые*) дробь (*и*)
неправильная (*ые*) дробь (*и*)
смешанное (*ые*) число (а)
основное свойство дроби
сократить дробь на (*сколько?*)
одно (*и*) и то (*те*) же число (а)
периодическая (*ие*) дробь (*и*)
обратить в (*кого? что?*)
непериодическая (*ие*) дробь (*и*)
рациональное (*ые*) число (а)
приближенное (*ые*) значение (*я*)
необходимая точность
округление
(*что?*) приближенно равно (*чему?*)

1.3. Действительные числа

1.3.1. Действительные числа. Числовая прямая

▲ ***Иррациональные числа (множество I)*** *– это числа, которые нельзя записать в виде* $\frac{m}{n}$ ($m \in Z$, $n \in N$).

Можно сказать иначе:

▲ ***Иррациональные числа (множество I)*** *– это бесконечные непериодические десятичные дроби.*

Например, $\sqrt{3} = 1,7320508... \in I$, $\pi = 3,14159... \in I$.

▲ ***Действительные числа (множество R)*** *– это рациональные и иррациональные числа.*

$$\boxed{R = Q \cup I}$$

■ **Знак "$\cup$" читают: *объединение.***

Действительные числа показывают точками на **числовой прямой** (числовой оси).

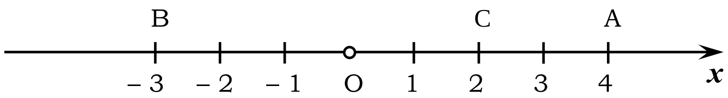


Рис.1. Числовая прямая (числовая ось)

▲***Числовая прямая*** *(числовая ось) – это прямая, на которой выбрано положительное направление, начало отсчёта O и единичный отрезок (масштаб).*

▲ *Между элементами множества **R** и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие:*

каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, каждой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число.

Например, на рис.1 числу 4 соответствует точка *A*, точке *C* соответствует число 2, числу – 3 соответствует точка *B*.

Точки числовой прямой – это элементы множества ***R***.

Множество ***R*** всех действительных чисел – это числовая прямая.

1.3.2. Арифметические действия над действительными числами

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (если делитель не равен нулю)

Действия над действительными числами имеют те же свойства, что и действия над рациональными числами (см. п. 1.2).

Примеры

1) $(+2)+\left(+\dfrac{1}{2}\right)=+2\dfrac{1}{2};$

2) $(-6)+(-2{,}5)=-8{,}5;$

ñëî æåí èå (âû ÷èòàí èå) ÷èñåë ñ î äèí àêî âû ì è çí àêàì è

3) $(-7{,}4)+(+3)=-4{,}4;$

4) $(+15)+(-2{,}5)=12{,}5;$

ñëî æåí èå ÷èñåë ñ ðàçí û ì è çí àêàì è

5) $(-12)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=+6;$

6) $(-20)\div(-0{,}1)=+200;$

7) $(+10)\cdot(+1{,}2)=+12;$

8) $\left(+\dfrac{1}{3}\right)\div\left(+\dfrac{1}{9}\right)=+3;$

умножение (деление) чисел с одинаковыми знаками

9) $(-15)\cdot(+1{,}2)=+18;$

10) $(+4{,}5)\div(-3)=+1{,}5.$

умножение (деление) чисел с разными знаками

На множестве действительных чисел выполняются **основные законы алгебры:**

1. ***Переместительный (коммутативный)*** закон $a+b=b+a$ $ab=ba$	5. $a+0=a$
2. ***Сочетательный (ассоциативный)*** закон $(a+b)+c=a+(b+c)$ $(ab)c=a(bc)$	6. $a\cdot 0=0$
3. ***Распределительный (дистрибутивный)*** закон. $a(b+c)=ab+ac$	7. $a\cdot 1=a$;
4. $a+(-a)=0$	8. $a\cdot\dfrac{1}{a}=1,\ a\neq 0$

1.3.3. Модуль числа

▲ ***Модуль (абсолютная величина) числа a*** *– это число* ***a****, если* $\boldsymbol{a\geq 0}$*, и число* ***– a****, если* $\boldsymbol{a<0}$.

$$\boxed{|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geq 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}}$$

Примеры

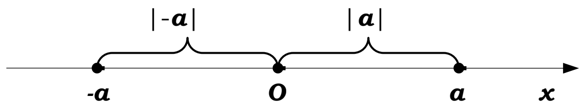
1) $|-5{,}2|=-(-5{,}2)=5{,}2$; 2) $|\pi-3|=\pi-3$, т. к. $\pi-3>0$, ($\pi\approx 3{,}14$);

3) $\left|\sqrt{10}-20\right|=-\left(\sqrt{10}-20\right)=20-\sqrt{10}$.

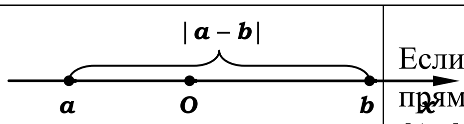
Свойства модуля	Формулировка	Примеры
1. $\lvert a\rvert \ge 0$	Модуль любого числа – ***неотрицательное*** число	$\lvert -10\rvert = 10 \ge 0$
2. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Модули противоположных чисел равны	$\lvert -8\rvert = \lvert 8\rvert = 8$
3. $\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	***Модуль произведения*** двух чисел равен ***произведению модулей*** этих чисел	$\lvert(-3)\cdot(-4)\rvert = \lvert -3\rvert \cdot \lvert -4\rvert = 12$
4. $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	***Модуль частного*** двух чисел равен ***частному модулей*** этих чисел	$\left\lvert \frac{-1}{10}\right\rvert = \frac{\lvert -1\rvert}{\lvert 10\rvert} = \frac{1}{10}$
5. $\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	***Модуль суммы*** чисел ***не больше суммы модулей*** этих чисел	$\underbrace{\lvert 5+(-6)\rvert}_{-1} \le \underbrace{\lvert 5\rvert + \lvert -6\rvert}_{11}$ **;** $\underbrace{\lvert 9+3\rvert}_{11} \le \underbrace{\lvert 9\rvert + \lvert 3\rvert}_{11}$
6. $\lvert a-b\rvert \ge \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	***Модуль разности*** чисел ***не меньше разности модулей*** этих чисел	$\underbrace{\lvert 10-15\rvert}_{5} \ge \underbrace{\lvert 10\rvert - \lvert 15\rvert}_{-5}$
7. $\underbrace{\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n}_{\Downarrow}$ $\lvert a^2\rvert = a^2$	***Модуль числа в степени*** n равен ***модулю этого числа в степени*** n**.** ***Модуль квадрата* числа** равен ***квадрату*** этого числа	$\underbrace{\lvert 3^3\rvert}_{27} = \underbrace{\lvert 3\rvert^3}_{27}$ **;** $\lvert(-3)^2\rvert = (-3)^2 = 9$

Геометрическая интерпретация модуля

***Модуль числа а – это расстояние на числовой прямой от точки а до точки* О**



Модуль разности двух чисел a ***и*** b ***– это расстояние между двумя точками*** a ***и*** b ***на числовой прямой.***

	Если a и b – две точки координатной прямой, то расстояние между ними $l(a;b) = \lvert a-b\rvert$.

Пример. $l(-3;7) = \lvert -3-7\rvert = \lvert -10\rvert = -(-10) = 10$.

‼ *Слова и словосочетания*

иррациональн<u>ое</u> (*ые*) числ<u>о</u> (а)	модуль
действительн<u>ое</u> (*ые*) числ<u>о</u> (а)	абсолютная величина
числовая прямая	геометрическая интерпретация
взаимно однозначное соответствие	расстояние между (*чем?*) и (*чем?*)
(*что?*) соответствует (*чему?*)	основн<u>ой</u> (*ые*) закон (*ы*)

1.4. Отношения. Пропорции. Проценты

1.4.1. Отношения

▲ ***Отношение числа*** a ***к числу*** b *– это частное от деления* a *на* b $(a \neq 0, b \neq 0)$

Отношение записывают так: $a \div b = m$ или $\dfrac{a}{b} = m.$

■ Читают:

отношение чисел $\underset{\text{что?}}{a}$ **и** $\underset{\text{что?}}{b}$ **равно** $\underset{\text{чему?}}{m}$	

или

отношение $\underset{\text{чего?}}{a}$ **к** $\underset{\text{чему?}}{b}$ **равно** $\underset{\text{чему?}}{m}$.	

Примеры

Пишут	Читают
$12 \div 3 = 4$	Отношение $\underbrace{\text{двенадцати}}_{\text{чего?}}$ к $\underset{\text{чему?}}{\text{трём}}$ равно $\underbrace{\text{четырём}}_{\text{чему?}}$
$100 \div 50 = 2$	Отношение чисел сто и пятьдесят равно $\underset{\text{чему?}}{\text{двум}}$
$\dfrac{x}{y} = z$	Отношение x к y равно z

▲ ***Отношение показывает*** *во сколько раз одно число больше, чем другое или, какую часть одно число составляет от другого.*

Если $\dfrac{a}{b} = n$ и $a > b$, тогда читают так: $\boxed{a \text{ больше, чем } b \text{ в } n \text{ раз.}}$

Если $\dfrac{a}{b} = n$ и $a < b$, тогда читают так: $\boxed{a \text{ составляет } n\text{-ую часть от } b.}$

Примеры

1) $10 \div 2 = 5 \quad \Rightarrow$ 10 больше, чем 2 в 5 раз;

2) $2 \div 10 = \dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow$ 2 составляет $\underset{\text{какую?}}{\dfrac{1}{5}}$ часть от $\underset{\text{чего?}}{10}$.

Отношение дробей можно записать как отношение целых чисел:

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = ad \div bc.}$$

Примеры

Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел:

1) $2\dfrac{1}{2} \div \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{2} \div \dfrac{3}{4} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$, значит $2\dfrac{1}{2} \div \dfrac{3}{4} = 10 \div 3.$

2) $\dfrac{5}{6} \div 1\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{7}{4} = \underset{\substack{\text{4 и 6} \\ \text{сократить} \\ \text{на 2}}}{\dfrac{5 \cdot 4}{6 \cdot 7}} = \dfrac{5 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \dfrac{10}{21}$, тогда $\dfrac{5}{6} \div 1\dfrac{3}{4} = 10 \div 21.$

1.4.2. Пропорции

▲ ***Пропорция*** *– это равенство двух отношений.*

$$\underbrace{\overset{\text{отношение}}{a \div b} = \overset{\text{отношение}}{c \div d}}_{\text{это пропорция}} \qquad \text{или} \qquad \underbrace{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}_{\text{это пропорция}} .$$

Числа a, b, c, d – **члены** пропорции.

Числа b и c – **средние члены** пропорции.

Числа a и d – **крайние члены** пропорции.

■ Читают: $\underset{\text{что?}}{a}$ *относится к* $\underset{\text{чему?}}{b}$ *так, как* $\underset{\text{что?}}{c}$ *относится к* $\underset{\text{чему?}}{d}$.

Примеры

Пишут	**Читают**
$2 \div 3 = 4 \div 6$	Два относится к трём так, как четыре относится к шести
$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$	Пять относиться к шести так, как пятнадцать относиться к восемнадцати

▲ ***Основное свойство пропорции****:*

произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc}$$

▲***В пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно*** $\Rightarrow$ если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ и $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

▲ ***Решить пропорцию*** *– значит найти неизвестный член пропорции.*

Пусть x – *неизвестный член пропорции*, тогда:

1) чтобы найти неизвестный крайний член пропорции нужно произведение её средних членов разделить на известный крайний член .

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow xd = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{d} \to \text{Пример}: \frac{x}{4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 1 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow xa = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a} \to \text{Пример}: \frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow 2x = 3 \cdot 6 \Rightarrow x = 9.$$

2) чтобы найти неизвестный средний член пропорции нужно произведение её крайних членов разделить на известный средний член .

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Rightarrow xc = ad \Rightarrow x = \frac{ad}{c} \to \text{Пример}: \frac{2}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = 2 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow xb = ad \Rightarrow x = \frac{ad}{b} \to \text{Пример}: \frac{3}{5} = \frac{x}{10} \Rightarrow 5x = 3 \cdot 10 \Rightarrow x = 6.$$

Пример. Решить пропорцию $\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}x : 1{,}3.$

Решение.

$$\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}x : 1{,}3 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot 1{,}3 = 2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{10} = \frac{7}{3} \cdot \frac{13}{4}x \Rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{10} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{35}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{35}$.

1.4.3. Проценты

▲ ***Процент числа – это одна сотая часть этого числа.***

% – это знак процент<u>а</u> (*ов*).

■

Пишут	Читают
1 %	один процент
2 %	два
3 %	три $\}$ процент**<u>а</u>**
4 %	четыре
5 %	пять процент**<u>ов</u>**
P %	«пэ» процент**<u>ов</u>**

▲ *Чтобы найти 1 % числа нужно это число разделить на 100 (или умножить на 0,01).*

Примеры. 1) 1 % от числа 25 это $\frac{25}{100}=0,25$; 2) 1 % от числа 3 это $\frac{3}{100}=0,03$.

▲ *Чтобы записать проценты как дробь или натуральное число, нужно число процентов разделить на 100 %.*

Примеры. 1) $25\,\%=\frac{25\,\%}{100\,\%}=0,25$; 2) $120\,\%=\frac{120\,\%}{100\,\%}=1,2$; 3) $500\,\%=\frac{500\,\%}{100\,\%}=5$.

▲ *Чтобы записать число в процентах, нужно умножить его на 100%.*

Примеры. 1) $0,23=0,23\cdot 100\,\%=23\,\%$; 2) $38=38\cdot 100\,\%=3800\,\%$;

3) $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 100\,\%=75\,\%$.

Основные задачи на проценты

Задача 1. Найти *p* % от данного числа А.

Решение.

$$\begin{matrix} \text{A}\to 100\,\% \\ x\to p\,\% \end{matrix}\Rightarrow \frac{\text{A}}{x}=\frac{100\,\%}{p\,\%}\Rightarrow \text{A}\cdot p=100\cdot x\Rightarrow x=\frac{\text{A}\cdot p}{100}.$$

$$\boxed{p\,\%\text{ от числа А}\Rightarrow \frac{\text{A}\cdot p}{100}}$$

▲ *Чтобы найти p % от числа* А *нужно число* А *разделить на 100 (найти 1 % этого числа) и результат умножить на p.*

Примеры

1) Найти 24 % от числа 600.

Решение. $\frac{600\cdot 24}{100}=144.$

2) Найти 40 % от числа 1200.

Решение. $\frac{1200\cdot 40}{100}=480.$

Задача 2. Найти число, если *p* % его равны *b*.

Решение. $\begin{matrix} x\to 100\,\% \\ b\to p\,\% \end{matrix}\Rightarrow \frac{x}{b}=\frac{100\,\%}{p\,\%}\Rightarrow x\cdot p=100\cdot b\Rightarrow x=\frac{b\cdot 100}{p}.$

Значит, если *p* % числа *x* равны *b, то* $\boxed{x=\frac{b\cdot 100}{p}}$

Примеры. 1) Найти число, если 15 % этого числа равны 60.

Решение. $\begin{matrix} x\to 100\,\% \\ 60\to 15\,\% \end{matrix}\Rightarrow 15x=100\cdot 60\Rightarrow x=\frac{60\cdot 100}{15}=400.$

2) Найти число, если 3 % его равны 225.

Решение. $x = \frac{3 \cdot 100}{225} = \frac{4}{3}$.

Задача 3. Найти процентное отношение числа А к числу В (или, *сколько процентов число* А *составляет от числа* В).

Решение. Отношение чисел А и В равно $\frac{\text{A}}{\text{B}}$

Процентное отношение чисел А и В равно $\boxed{\frac{\text{A}}{\text{B}} \cdot 100\%}$.

▲ *Чтобы найти, сколько процентов составляет первое число от второго, нужно разделить первое число на второе и результат умножить на* 100%.

Примеры

1) Найти процентное отношение 3,2 к 1,28.

Решение. Процентное отношение чисел 3,2 к 1,28 равно $\frac{3,2}{1,28} \cdot 100\,\% = 250\,\%$.

2) Сколько процентов число 18 составляет от числа 25?

Решение. $\frac{18}{25} \cdot 100\,\% = 72\,\%$.

Кроме решения трёх основных задач на проценты, иногда нужно находить ***сложные проценты***.

Пример

На счёт банка внесена сумма А гривен. Сколько денег будет на счёте через m лет, если банк платит p % годовых?

Решение. Через один год на счете будет сумма $\text{A}_1 = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

– через два года – $\text{A}_2 = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{p}{100}\text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

– через три года – $\text{A}_3 = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$ и т.д.;

– через m лет на счёте будет сумма – $\text{A}_m = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m$.

$\boxed{\text{A}_m = \text{A}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^m}$ – **формула сложных процентов**.

‼ *Слова и словосочетания*

отношение чисел (*что?*) и (*что?*)	основное свойство пропорции
отношение (*чего?*) к (*чему?*)	неизвестный член пропорции
во сколько раз больше	решить пропорцию
какую часть составляет	процент (*ы*)
пропорция	задачи на проценты
средн<u>ий</u> (*ие*) член (*ы*) пропорции	процентное отношение
крайн<u>ий</u> (*ие*) член(*ы*) пропорции	сложные проценты
(*что?*) относится к (*чему?*) так как	формула сложных процентов

1.5. Множества. Операции над множествами

Понятие множества – одно из основных понятий математики. Оно не определяется. Синонимы слова множество – совокупность, класс, система, набор.

Если a – элемент множества A ($a \in A$), то говорят:

$\boxed{a \text{ принадлежит множеству } A}$.

Если a – не есть элементом множества. A ($a \notin A$), то говорят:

$\boxed{a \text{ не принадлежит множеству } A}$

Числовые множества бывают **конечные** и **бесконечные**.

Примеры

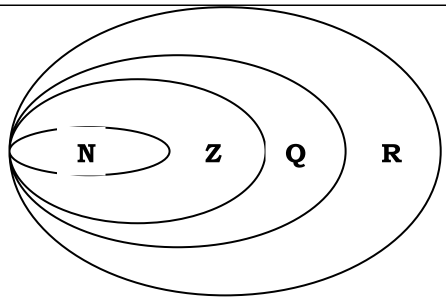
1) Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$ – ***бесконечное*** множество**.** В нём содержится бесконечно много элементов;

2) Множество натуральных одноцифровых чисел $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – ***конечное*** множество. В нём есть девять элементов.

▲ ***Пустое множество (знак*** $\varnothing$***)*** *– это множество, в котором нет ни одного элемента.*

Если множество A есть часть множества B, тогда множество A – ***подмножество*** множества B ($A \subset B$). Любое множество есть подмножество самого себя, т.е. $A \subset A$. *Пустое множество* $\varnothing$ есть подмножество любого множества.

Мы изучили множества натуральных чисел ***N***, целых чисел ***Z***, рациональных чисел ***Q***, иррациональных чисел ***I***, действительных чисел ***R***.



Множество ***N*** есть часть множества ***Z***

N *– подмножество* ***Z****.*

Обозначают: $N \subset Z$.

Читают: ***«эн» есть подмножество «зэт».***

Z *содержит в себе* ***N****.*

Обозначают: $Z \supset N$ **.**

Читают: *«зэт» содержит «эн»* .

Примеры

$N \subset Z \subset Q \subset R$; $R \supset Q \supset Z \supset N$; $N \subset R$.

Операции над множествами

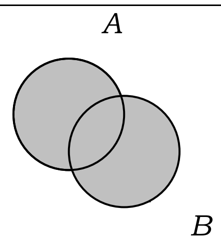
Над множествами можно выполнять операции: *объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств*.

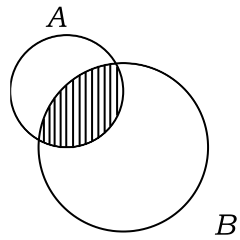
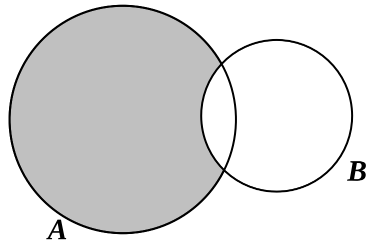
▲ ***Объединение множеств A и B*** ($A \cup B$) – *это множество, которое состоит из всех элементов множества A и множества B*

$\boxed{A \cup B = B \cup A}$

Пример

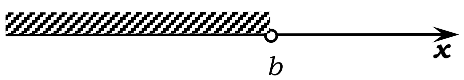
Пусть $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$.



▲ ***Пересечение множеств А и В*** $(A \cap B)$ – *это множество, которое состоит из элементов, общих для множества А и множества* В $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ **Пример** Пусть $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, тогда $A \cap B = \{2\}$.	
▲ ***Разность множеств А и В*** $(A \setminus B)$ *– это множество, которое состоит из элементов множества А, отличных от элементов множества В.* $\boxed{A \setminus B \neq B \setminus A}$ **Пример** Пусть $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, тогда $A \setminus B = \{1,3,5\}$,. $B \setminus A = \{4,6,8\}$.	

Числовые промежутки

В математической практике часто используются числовые множества, которые называются ч*исловыми промежутками*

Вид промежутка	**Геометрическое изображение**	**Обозначение**	**Запись с помощью неравенств**
Интервал от a до b		$(a;b)$	$a < x < b$
Отрезок от a до b		$[a;b]$	$a \le x \le b$
Полуинтервал от a до b, включая b		$(a;b]$	$a < x \le b$
Полуинтервал от a до b, включая a		$[a;b)$	$a \le x < b$
Луч от a до $+\infty$		$[a;+\infty)$	$x \ge a$
Луч от $-\infty$ до b		$(-\infty;b]$	$x \le b$
Открытый луч от a до $+\infty$		$(a;+\infty)$	$x > a$
Открытый луч от $-\infty$ до b		$(-\infty;b)$	$x < b$

■ Знак "$+\infty$" читают: *плюс бесконечность*.
Знак "$-\infty$" читают: *минус бесконечность*.

‼ *Слова и словосочетания*

конечное (*ые*) множество (*а*)
бесконечное (*ые*) множество (*а*)
подмножество (*а*)
пустое множество
совокупность (*и*)
класс (*ы*)
система (*ы*)
набор (*ы*)
(*что?*) содержит (*что?*)
объединение множеств

пересечение множеств
разность множеств
числовой (*ые*) промежуток (*ки*)
интервал (*ы*)
отрезок (*ы*)
полуинтервал (*ы*)
луч (*и*)
открытый луч (*и*)
плюс бесконечность
минус бесконечность

Вопросы и упражнения

1. Сколько цифр вы знаете? Назовите их.

2. Какие числа вы знаете?

3. Целые числа – это какие числа?

4. Читайте числа:

а) 1, 11, 10; 2, 12, 20; 3, 13, 30; 4, 14, 40;
5, 15, 50; 6, 16, 60; 7, 17, 70; 8, 18, 80;
9, 19, 90; 10, 20, 100;

б) 41, 12, 45, 19, 66, 37, 27, 63, 59, 95, 102, 122, 312, 419, 588, 256,798, 304, 514, 844, 389, 519, 918, 810, 829, 1 025, 1 312, 1 001, 2 140, 3 547, 5 119, 7 902, 9 080, 10 001, 53 248.

5. Сколько арифметических действий вы знаете? Назовите их.

1) $a+b=c$. Какое это действие? Назовите его элементы.
2) $a-b=c$.Какое это действие? Назовите его элементы.
3) $a \div b=c$. Какое это действие? Назовите его элементы.
4) $a \cdot b=c$. Какое это действие? Назовите его элементы.

6. Читайте и выполняйте действия:

а) 360 : 6 – 20 : 4 + 68 : 17 + 20 · 7;
б) (360 : 6 – 20) : 4 + (68 : 17 + 20) · 7;
в) 220 – 125 : 5 + 160 : 8 – 121 : 11;
г) 220 – 125 : (5 + 160 : 8) – 121 : 11.

7. Какое число называется простым?

8. Какое число называется составным?

9. Что значит "разложить число на простые множители"?

10. Сформулируйте основную теорему арифметики.

11. Как найти НОД? Сформулируйте правило.

12. Как найти НОК? Сформулируйте правило.

13. Найдите НОК (54; 90; 162), НОК (84; 72; 140).

14. Найдите НОД (936; 1128), НОД (90; 360; 375).

15. Что называется обыкновенной дробью?

16. Какая дробь называется правильной?; неправильной?

17. Читайте дроби:

а) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{19}$; $\frac{11}{20}$; $\frac{54}{15}$; $\frac{101}{22}$; $\frac{111}{45}$; б) $1\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{5}$; $3\frac{4}{11}$; $10\frac{11}{13}$; $14\frac{5}{6}$;

в) 0,2; 1,8; 19,12; 21,01; 0,103; 1,881; 5,0005; г) 0,(5); 1,1(12); 2,10(45).

18. Сформулируйте основное свойство дроби.

19. Что значит: сократить дробь?

20. Какие действия с дробями вы знаете?

21. Выполнить действия:

а) $\left(24\frac{4}{9}:8-15:7\frac{1}{5}\right)\cdot 7-1\frac{1}{4}$;

б) $\left(1\frac{1}{2}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+213$;

в) $\left(25\frac{3}{5}+14\frac{3}{8}\right):39\cdot 1\frac{4}{41}:\left(7\frac{1}{8}+3\frac{1}{7}-8\frac{29}{56}\right)$;

г) $\dfrac{6-\left(37\frac{1}{5}:18-5:3\frac{4}{7}\right)\cdot 3}{6\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{29}{30}+\frac{14}{45}+\frac{47}{54}\right)-13}$.

д) $\dfrac{\left(1,75:\frac{2}{3}-1,75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0,0325\right):400}:\left(6,79:0,7+0,3\right)$;

е) $\dfrac{3+4,2:0,1}{\left(1:0,3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0,3125}$.

22. Какие виды десятичных дробей вы знаете?
23. Какие числа называются рациональными?
24. Какие числа называются иррациональными?
25. Какие числа называются действительными?
26. Чему равен модуль числа?
27. Дайте определение отношению двух чисел.
28. Что показывает отношение?
29. Найти отношения чисел:

а) 72 к 216; б) 216 к 72; в) 4,36 к 0,4; г) 1 к 0,08; д) $5\frac{1}{4}$ к $12\frac{16}{17}$.

30. Записать как отношения целых чисел:

а) $\frac{7}{8}:\frac{5}{9}$; б) $4:\frac{8}{5}$; в) $3,6:0,42$; г) $1\frac{1}{4}:2,5$.

31. Дайте определение пропорции.
32. Что значит: решить пропорцию?
33. Решить пропорции:

а) $4,5:3x=4:28$; б) $180:8x=75:30$; в) $3\frac{1}{2}:0,4=x:1\frac{1}{7}$; г) $1:1\frac{1}{3}=\frac{2}{3}:2x$.

34. Какие виды задач на проценты вы знаете?
35. Найти:

а) 12 % от 160; б) 32 % от 12,5; в) 6,25 % от 64; г) 125 % от 8,88.

36. Найти число, если:

а) 8 % его равны 24; б) 3,5 % его равны 21; в) 2,5% его равны 0,15.

37. Найти процентное отношение чисел:

а) 2,5 к 50; б) 5 к 7; в) 3,2 к 1,28; г) 5 к 2; д) $0,45$ к $\frac{7}{8}$.

38. Какие числовые множества вы знаете?
39. Какие операции над множествами вы знаете?
40. Прочитайте знаки: $\in, \notin, \subset, \cup, \cap, \setminus, \varnothing, \infty$.
41. Дайте определения для $A\cup B$, $A\bigcap B$, $A\setminus B$
42. Какие числовые промежутки вы знаете?
43. Прочитайте и изобразите на числовой прямой промежутки: $(-2;5)$, $\left[-1;6\right]$, $\left(-\infty;0,5\right)$, $\left[2;10\right)$, $\left(-3;\frac{3}{2}\right]$, $\left[2;15\right)$.

Раздел 2
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Целые рациональные выражения

2.1.1. Степень с целым показателем

В п. 1.1. дано определение степени натурального числа с натуральным показателем. Обобщим это определение для любого действительного основания степени.

▲ **Степень числа с натуральным показателем** n **– это произведение** n **равных сомножителей.**

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\ \text{сомножителей}} \quad (a \in R, n \in N, n \geq 2)}$$

n **– показатель степени,**

a **– основание степени,**

a^n **– степень.**

■ Читают*: a в степени эн (что?),*

или *a в энной (в какой?) степени.*

■ Если $n = 2 \Rightarrow a^2$, то читают: *a <u>в квадрате</u>.*

■ Если $n = 3 \Rightarrow a^3$, то читают: *a <u>в кубе</u>.*

▲ ***Возведение числа в степень*** *– это нахождение значения степени числа.*

Примеры. Возвести в степень числа:

1) $\underbrace{(-0{,}5)^2}_{\text{степень}} = -0{,}5 \cdot (-0{,}5) = \underbrace{0{,}25}_{\text{значение степени}}$; 2) $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^4}_{\text{степень}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{16}}_{\text{значение степени}}$.

▲ $\boxed{a^1 = a.}$

Примеры. $12^1 = 12$; $\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{6}$; $(2{,}3)^1 = 2{,}3$.

▲ ***Степень с нулевым показателем***

$$\boxed{a^0 = 1, \quad \text{где } a \neq 0.}$$

Примеры. $(3{,}5)^0 = 1$, $(-7)^0 = 1$ $(-7)^0 = 1$, $\left(\frac{10}{17}\right)^0 = 1$.

$\boxed{\text{Выражение } 0^0 \textbf{ не имеет смысла}.}$

▲ ***Степень с отрицательным целым показателем***

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}, \text{ где } a \neq 0, n \in N.$$

Примеры. $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$; $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$.

▲ ***Степень дроби с отрицательным целым показателем***

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}, \text{ где } a\neq 0, b\neq 0, n\in N.$$

Примеры. 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3}=\frac{125}{8}$**;** 2) $(2,3)^{-2}=\left(\frac{23}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{10}{23}\right)^{2}=\frac{100}{529}$;

3) $\left(-1\frac{5}{6}\right)^{-3}=\left(-\frac{11}{6}\right)^{-3}=\left(-\frac{6}{11}\right)^{3}=-\frac{216}{1331}$.

Некоторые свойства степени

1. Чётная степень любого действительного числа есть число неотрицательное.

$$\boxed{n\in N, a\in R\Rightarrow a^{2n}\geq 0}$$

Примеры. 1) $(-2)^4=16\geq 0$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}\geq 0$; 3) $(-1)^{10}=1\geq 0$.

2. Нечётная степень неотрицательного числа есть число неотрицательное.

$$\boxed{n\in N, a>0\Rightarrow a^{2n+1}\geq 0}$$

Примеры. 1) $3^3=27\geq 0$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=\frac{32}{243}\geq 0$; 3) $(1,5)^3=3,375\geq 0$.

3. Нечётная степень отрицательного числа есть число отрицательное.

$$\boxed{n\in N, a<0 \Rightarrow a^{2n+1}<0}$$

Примеры. 1) $(-0,3)^3=-0,027<0$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}=-\frac{1}{32}<0$; 3) $(-1)^9=-1<0$.

Обратите внимание, что

$$\boxed{(-a)^{2n}=a^{2n}},$$

$$\boxed{(-a)^{2n}\neq -a^{2n}}.$$

Действия над степенями

Действия	Правило выполнения	Примеры
Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $m,n\in Z$	$2^3\cdot 2^4=2^7=128$
Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^m\div a^n=a^{m-n}$, $a\neq 0, m,n\in Z$	$5^3\div 5^4=5^{-1}=\frac{1}{5}$
Возведение степени в степень	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$, $m,n\in Z$	$(4^2)^3=4^6=4096$
Возведение произведения в степень	$(ab)^m=a^m\cdot b^m$, $m\in Z$	$(2\cdot 3)^3=2^3\cdot 3^3=8\cdot 27=216$
Возведение частного в степень	$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, $b\neq 0, m\in Z$	$\left(\frac{1}{7}\right)^3=\frac{1^3}{7^3}=\frac{1}{343}$

Пример. Найти значение выражения:

$$\frac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}\cdot\frac{13^6\cdot 8^4}{26^5}.$$

Решение.

$$\frac{14^{10}}{2^8\cdot 7^9}\cdot\frac{13^6\cdot 8^4}{26^5}=\frac{(2\cdot 7)^{10}}{2^8\cdot 7^9}\cdot\frac{13^6\cdot\left(2^3\right)^4}{(13\cdot 2)^5}=\frac{2^{10}\cdot 7^{10}\cdot 13^6\cdot 2^{12}}{2^8\cdot 7^9\cdot 13^5\cdot 2^5}=\frac{2^{10}\cdot 2^{12}}{2^8\cdot 2^5}\cdot\frac{7^{10}}{7^9}\cdot\frac{13^6}{13^5}=$$

$$=\frac{2^{10+12}}{2^{8+5}}\cdot 7^{10-9}\cdot 13^{6-5}=\frac{2^{22}}{2^{13}}\cdot 7^1\cdot 13^1=2^{22-13}\cdot 7\cdot 13=2^9\cdot 91=512\cdot 91=46592.$$

Ответ: 46592.

Стандартный вид положительного действительного числа

Любое положительное число a можно записать в виде $a_0\cdot 10^n$, где $1\le a_0<10$, n – целое число ($n\in Z$).

▲ $\boxed{a=a_0\cdot 10^n\ (1\le a_0<10,\ n\in Z) \text{ – это } \textbf{стандартный вид} \text{ числа } a,}$

*где n – **порядок** числа a.*

Примеры. Записать число в стандартном виде и указать его порядок:

1) $a=532\Rightarrow a=5{,}32\cdot 10^2$, порядок 2;

2) $m=0{,}0256\Rightarrow m=2{,}56\cdot 10^{-2}$, порядок -2;

3) $b=4503\Rightarrow b=4{,}503\cdot 10^3$, порядок 3.

‼ *Слова и словосочетания*

степен<u>ь</u> (*и*)	чётная степень
основание степени	нечётная степень
показатель степени	деление степеней
(*что?*) в степени (*что?*)	умножение степеней
(*что?*) (в какой?) степени	возводить (*inf*) в степень
(*что?*) в квадрате	возведение в степень
(*что?*) в кубе	порядок числа
некотор<u>ое</u> (*ые*) свойств<u>о</u> (*а*)	стандартный вид числа

2.1.2.Одночлены и многочлены

▲ ***Одночлен*** *– это произведение чисел и целых неотрицательных степеней переменных.*

$\frac{2}{7}ab^2;\ -3m;\ p^3q;\ 14ab\cdot\frac{2}{3}a^2b^3;\ c\cdot(-12)d^4$ – это одночлены.

Числа и степени переменных с натуральными показателями также есть одночленами. Например, $2;\ a;\ 0;\ v;\ -1$ – одночлены.

Рассмотрим одночлен $2x^3a^2(-3)\left(x^3\right)^2$. Его можно упростить. Для этого используем тождественные преобразования (переместительный и сочетательный закон умножения и правила действий со степенями):

$$2x^3a^2(-3)\left(x^3\right)^2=2\cdot(-3)a^2x^{3\cdot 2}=-6a^2x^6.$$

Такой вид одночлена называется ***стандартным***.

Привести одночлен к стандартному виду – это значит записать его в виде произведения числового множителя, который стоит на первом месте и степеней различных переменных.

Пример. Привести к стандартному виду одночлен $-3a^2b\cdot\frac{1}{3}\left(b^2\right)^3c\cdot(-5)$.

Решение. $-3a^2b\cdot\frac{1}{3}\left(b^2\right)^3c\cdot(-5)=-3\cdot\frac{1}{3}\cdot(-5)a^2b^{1+2\cdot3}c=5a^2b^7c.$

▲ ***Числовой коэффициент одночлена*** – *это числовой множитель одночлена стандартного вида.*

Например, $\underbrace{2,56}_{\text{числовой коэффициент}}\cdot x^2y^3z$ – это одночлен стандартного вида,

где 2,56 – числовой коэффициент, x, y и z – переменные.

Дальше мы будем рассматривать одночлены стандартного вида.

▲ ***Степень одночлена*** – *это сумма показателей степеней всех его переменных.*

Например, $-0,7x^2y$ – это одночлен третьей степени (2+1=3).

Одночлен	*Степень одночлена*	*Числовой коэффициент*
$-abc^3$	$1+1+3=5$ одночлен пятой степени	-1
$\frac{5mn}{3}$	$1+1=2$ одночлен второй степени	$\frac{5}{3}$
24	одночлен нулевой степени	24

▲ ***Подобные одночлены*** – *это одночлены, которые отличаются только числовыми коэффициентами или ничем не отличаются.*

Например, $\underbrace{2a^2b,\ 30a^2b,}_{\text{отличаются только коэффициентами}}\ \underbrace{-8\frac{1}{3}a^2b,\ -8\frac{1}{3}a^2b}_{\text{ничем не отличаются}}$ – это подобные одночлены.

▲ ***Привести подобные (одно)члены*** – *это значит найти алгебраическую сумму подобных одночленов.*

Пример. $-0,7x^2y+x^2y+\left(-5x^2y\right)+1\frac{1}{4}x^2y=-3,45x^2y.$

▲ ***Многочлен (полином)*** – *это алгебраическая сумма одночленов.*

Например,

$\overbrace{\underset{\text{одночлен}}{3ab}+\underbrace{\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)}_{\text{одночлен}}+\underset{\text{одночлен}}{11abc}}^{\text{сумма одночленов}}$ – это многочлен.

$2xy-5xz+12yz-4$ – это многочлен.

▲ Многочлен, у которого два одночлена – это **двучлен (бином)**.

▲ Многочлен, у которого три одночлена – это **трёхчлен**.

Например, $\underbrace{a^2+3ab}_{\text{два одночлена}}$ **–** двучлен**;** $\underbrace{3x-2y+z}_{\text{три одночлена}}$ **–** трёхчлен

▲ ***Степень многочлена*** – *это наибольшая степень его одночленов.*

Например**,** $\underset{\textit{степень}\,3}{2x^3}-\underbrace{5x^2y^3z}_{\textit{степень}\,6}+\underbrace{\frac{1}{7}x^2y^2z}_{\textit{степень}\,5}$ – это многочлен степени 6 (шестой степени);

$\underset{\text{степень 4}}{m^2n^2} - \underset{\text{степень 2}}{2mn} + \underset{\text{степень 0}}{231}$ – это многочлен степени 4 (четвёртой степени).

▲ $ax+b$ $(a,b-$ числа, $a \neq 0$, x – переменная) – многочлен первой степени или ***линейный двучлен***.

Например, многочлен $-4x-3$ – это линейный двучлен.

▲ ax^2+bx+c $(a,b,c-$ числа, $a \neq 0$, x – переменная) – это многочлен второй степени или ***квадратный трёхчлен***.

Например, многочлен $2x^2+3x-1$ – это квадратный трёхчлен.

▲ ax^3+bx^2+cx+d $(a,b,c,d-$ числа, $a \neq 0$, x – переменная) – это многочлен третьей степени.

Например, многочлен $x^3-2x^2-13x+4$ – это многочлен третьей степени.

▲ $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_kx^{n-k} + ... + a_n$ $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ – числа, x – переменная) – это **многочлен n-й степени** (относительно x).

$P_n(x)$ читают: "пэ эн от икс";

a_0x^n – старший член многочлена;

a_0 – коэффициент при старшем члене;

a_n – свободный член многочлена.

!!! *Степень старшего члена многочлена =* ***степень многочлена****!!!*

▲ ***Корень многочлена*** $P_n(x)$ *– это такое значение x, при котором многочлен превращается в нуль.*

Например**,** $x = 1$ – корень многочлена $P_5(x) = x^5 + x^3 + x - 3$, потому что $P_5(1) = 1^5 + 1^3 + 1 - 3 = 0$.

Действия над многочленами

1. Сложение и вычитание многочленов

Чтобы найти сумму или разность многочленов, надо раскрыть скобки и привести подобные.

!!! если перед скобками знак «+»$\Rightarrow$знаки не изменяются !!!

!!!если перед скобками знак «-»$\Rightarrow$знаки изменяются на противоположные !!!

Примеры. 1) $\left(x^3+2y\right)+\left(5y-2x^3+z\right) = x^3+2y+5y-2x^3+z = -x^3+7y+z$;

2) $-\left(5a^2-3b\right)-\left(4ab+3a^2-8b\right) = -5a^2+3b-4ab-3a^2+8b = -8a^2-4ab+11b$.

2. Умножение многочленов

Чтобы найти произведение двух многочленов, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена, затем привести подобные.

Примеры. 1) $\left(2z^2+1\right)\left(z^2-2\right) = 2z^4-4z^2+z^2-2 = 2z^4-3z^2-2$;

2) $\left(8a^2-3ab\right)\left(-ab+3a^2\right) = -8a^3b+24a^4+3a^2b^2-9a^3b = -17a^3b+3a^2b^2+24a^4$.

3. Деление многочленов на одночлен

Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные частные сложить.

Примеры

1) $\left(0,4x^3-2,6x^2+15x\right) \div 2x = 0,4x^3 \div 2x - 2,6x^2 \div 2x + 15x \div 2x = 0,2x^2-1,3x+7,5$;

2) $\dfrac{12a^2b^3+3a^4b^2-0,6ab}{3ab} = \dfrac{12a^2b^3}{3ab}+\dfrac{3a^4b^2}{3ab}+\dfrac{-0,6ab}{3ab} = 4ab^2+a^3b-0,2$.

4. Деление многочленов на многочлен

Пример. Разделить $\left(3x^4-5x^3+2x^2+4x-4\right)\div\left(x-1\right)$

Решение.

Способ 1. Используем **алгоритм Евклида**[*]:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^4-5x^3+2x^2+4x-4 & x-1 \\
\underline{3x^4-3x^3\qquad\qquad\qquad\quad} & \overline{3x^3-2x^2+4.} \\
-2x^3+2x^2+4x-4 & \\
\underline{-2x^3+2x^2\qquad\quad} & \\
-\;4x-4 & \\
\underline{4x-4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Çí à÷èò, $\left(3x^4-5x^3+2x^2+4x-4\right)\div\left(x-1\right)=3x^3-2x^2+4.$

Способ 2. Используем **метод неопределённых коэффициентов**

$3x^4-5x^3+2x^2+4x-4=\left(x-1\right)\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)=$

$=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx-Ax^3-Bx^2-Cx-D=$

$=Ax^4+\left(B-A\right)x^3+\left(C-D\right)x^2+\left(D-C\right)x-D.$

Сравним коэффициенты при равных степенях икс:

$3x^4\leftrightarrow Ax^4\Rightarrow A=3,$

$-5x^3\leftrightarrow\left(B-A\right)x^3\Rightarrow B-A=-5\Rightarrow B=A-5=3-5=-2,$

$2x^2\leftrightarrow\left(C-B\right)x^2\Rightarrow C-B=2\Rightarrow C=B+2=-2+2=0,$

$4x\leftrightarrow\left(D-C\right)x\Rightarrow D-C=4\Rightarrow D=C+4=0+4=4,$

$-4\leftrightarrow D\Rightarrow D=-4.$

Значит, $3x^4-5x^3+2x^2+4x-4=\left(x-1\right)\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)=$

$=\left(x-1\right)\left(3x^3-2x^2+0\cdot x-4\right).$

Ответ: $\left(3x^4-5x^3+2x^2+4x-4\right)\div\left(x+1\right)=3x^3-2x^2+4.$

2.1.3. Многочлены одной переменной

Теорема Безу

▲ ***Теорема Безу***[**]***.*** *При делении многочлена* $P_n\left(x\right)$ *на линейный двучлен* $\left(x-c\right)$ *остаток* $R=P_n\left(c\right)$.

□ *Доказательство.* По алгоритму Евклида $P_n\left(x\right)=\left(x-c\right)Q_{n-1}\left(x\right)+R$, где $Q_{n-1}\left(x\right)$ – многочлен $\left(n-1\right)$-й степени, R – **остаток.** Подставим значение $x=c$ и получим $P_n\left(c\right)=R$, что и нужно было доказать. □

▲ ***Следствие.*** *Если* $P_n\left(x\right)=\left(x-c\right)Q_{n-1}\left(x\right)$, $R=Ð_i\,(ñ)=0$, *то* $x=c$ *есть корень многочлена* $P_n\left(x\right)$.

□ *Доказательство.* Остаток от деления $P_n\left(x\right)$ на $x-ñ$ по теореме Безу равен $P_n\left(c\right)$. Если $x=c$ – корень многочлена $P_n\left(x\right)$, то остаток $R=P_n\left(c\right)=0$. Наоборот, если $R=0$, то $P_n\left(c\right)=0$, т.е. $x=c$ есть корень многочлена $P_n\left(x\right)$.

[*] Евклид (III ст. до н. э.) – выдающийся греческий математик.

[**] Е. Безу (1730–1783) – французский математик, член Парижской академии наук.

Схема Горнера[*]

По алгоритму Евклида $P_n(x)=(x-c)Q_{n-1}(x)+R$. По теореме Безу $R=P_n(c)$. Чтобы найти многочлен $Q_{n-1}(x)$ используем **метод неопределенных коэффициентов**:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-c)\left(A_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\ldots+A_{n-2}x+A_{n-1}\right)+R.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$A_0x^n+(A_1-cA_0)x^{n-1}+(A_2-cA_1)x^{n-2}+\ldots+(A_k-cA_{k-1})x^{n-k}+\ldots+R-cA_{n-1}.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

α_0x^n	A_0x^n	$\Rightarrow\alpha_0=A_0$	$\Rightarrow A_0=\alpha_0$
α_1x^{n-1}	$(A_1-cA_0)x^{n-1}$	$\Rightarrow\alpha_1=A_1-cA_0$	$\Rightarrow A_1=cA_0+\alpha_1$
α_2x^{n-2}	$(A_2-cA_1)x^{n-2}$	$\Rightarrow\alpha_2=A_2-cA_1$	$\Rightarrow A_2=cA_1+\alpha_2$
$\alpha_{n-k}x^{n-k}$	$(A_k-cA_{k-1})x^{n-k}$	$\Rightarrow\alpha_{n-k}=A_k-cA_{k-1}$	$\Rightarrow A_k=cA_{k-1}+\alpha_k$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
α_nx^0	$(R-cA_{n-1})x^0$	$\Rightarrow\alpha_n=R-cA_{n-1}$	$\Rightarrow R=cA_{n-1}+\alpha_n$

Итак, разделить многочлен $P_n(x)$ на $x-c$ можно по схеме, которая называется *схемой Горнера*:

	α_0	α_1	α_2	$\ldots$	α_{n-1}	α_n
c	$A_0=\alpha_0$	$A_1=cA_0+\alpha_1$	$A_2=cA_1+\alpha_2$	$\ldots$	$A_{n-1}=cA_{n-2}+\alpha_{n-1}$	$R=cA_{n-1}+\alpha_n$

Пример 1. Разделить по схеме Горнера многочлен x^3-2x^2+x на $x+2$.

Решение. Составим схему Горнера, при этом делитель запишем так: $x+2=x-(-2)$

	1	-2	1	0
-2	1	$-2\cdot1+(-2)=-4$	$-2\cdot(-4)+1=9$	-18

Частное равно x^3-4x+9, остаток $R=-18$.

Ответ: $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x+2}=x^2-4x+9+\dfrac{-18}{x+2}$.

Пример 2. Разделить по схеме Горнера многочлен $5x^4+5x^3+x^2-11$ на $x-1$.

Решение. Составим схему Горнера:

	5	5	1	-11
1	5	$1\cdot5+5=10$	$1\cdot10+1=11$	$1\cdot11+(-11)=0$

Частное равно $5x^3+10x^2+x-11$, остаток $R=0$.

Ответ: $\dfrac{5x^4+5x^3+x^2-11}{x-1}=5x^3+10x^2+x-11.$

[*] В. Горнер – английский математик. Свой метод опубликовал в 1819 г.

2.1.4. Формулы сокращенного умножения

Формула	Формулировка	Примеры
Квадрат суммы $\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$	Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа, плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа	1. $(4x+3)^2=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 3+$ $+3^2=16x^2+24x+9;$ 2. $9m^2+6m+1=(3m)^2+$ $+2\cdot 3m\cdot 1+1^2=(3m+1)^2$
Квадрат разности $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$	Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа	1. $\left(x-2y^3\right)^2=x^2-2x(2y)+$ $+(2y)^2=x^2-4xy+4y^2;$ 2. $4-4a+a^2=2^2-2\cdot 2a+a^2=$ $=(2-a)^2$
Разность квадратов $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$	Разность квадратов двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность	$(2x+0,4)(2x-0,4)=(2x)^2-$ $-(0,4)^2=4x^2-0,16$
Куб суммы $\boxed{(a+b)^3==a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$	Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа, плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа	$\left(a^2+2b^3\right)^3=\left(a^2\right)^3+3(a^2)^2\cdot 2b^3+$ $+3a^2\left(2b^3\right)^2+\left(2b^3\right)^3=$ $=a^6+6a^4b^3+12a^2b^6+8b^9$
Куб разности $\boxed{(a-b)^3==a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$	Куб разности двух чисел равен кубу первого числа, минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго числа	$(m-2n)^3=m^3-3m^2(2n)+$ $+3m(2n)^2-(2n)^3=$ $=m^3-6m^2n+12mn^2-8n^3$
Сумма кубов $\boxed{a^3+b^3==(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}$	Сумма кубов двух чисел равна произведению их суммы на неполный квадрат разности этих чисел	1. $(3a+1)\left(9a^2+3a+1\right)=$ $=(3a)^3+1^3=27a^3+1;$ 2. $1000+27x^3=10^3+(3x)^3=$ $=(10+3x)\left(100-30x+9x^2\right)$
Разность кубов $\boxed{a^3-b^3==(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$	Разность кубов двух чисел равна произведению их разности на неполный квадрат суммы этих чисел	1. $(y-2)\left(y^2+2y+4\right)=y^3-8;$ 2. $1-m^3=(1-m)\left(1+m+m^2\right)$

!!! Неполный квадрат суммы = трёхчлен вида a^2+ab+b^2 **!!!**

!!! Неполный квадрат разности = трёхчлен вида a^2-ab+b^2 **!!!**

!! *Слова и словосочетания*

одночлен (*ы*)	свободный член
степень одночлена	корень многочлена
подобные одночлены	алгоритм Евклида
привести подобные (одно)члены	квадрат суммы
алгебраическая сумма	квадрат разности
числовой коэффициент	разность квадратов
переменная (*ые*)	разность кубов
многочлен (*ы*)	куб разности
степень многочлена	сумма кубов
старший член многочлена	куб суммы
теорема Безу	следствие
остаток	схема Горнера

2.1.5. Разложение многочленов на множители

▲ ***Разложить многочлен на множители*** *– значит записать его как произведение нескольких сомножителей – одночленов и (или) многочленов.*

Основные способы разложения многочлена на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки (вынести общий множитель за скобки).

Примеры. Разложить на множители многочлены:

$a)\, x^3+3x^2-5x^4;$

$\acute{a})\, 6m^4n-9m^3n^2+3m^2n^3$

Решение.

$$a)\, x^3+3x^2-5x^4=\underbrace{x^2}_{\text{общий множитель}}\cdot\left(x+3-5x^2\right)=x^2\left(-5x^2+x+3\right);$$

$$б)\, 6m^4n-9m^3n^2+3m^2n^3=\underbrace{3m^2n}_{\text{общий множитель}}\cdot\left(2m^2-3mn+n^2\right).$$

2. Способ группировки.

Примеры. Разложить на множители многочлены:

$a)\, 2x-xy+2y-y^2;$

$\acute{a})\, m^2-mn-2m+2n$

Решение.

$$a)\, 2x-xy+2y-y^2=\underbrace{\left(2x-xy\right)}_{\text{группа}}+\underbrace{\left(2y-y^2\right)}_{\text{группа}}=x\left(2-y\right)+y\left(2-y\right)=\underbrace{\left(2-y\right)}_{\text{общий множитель}}\left(x+y\right);$$

$$б)\, m^2-mn-2m+2n=\left(m^2-2m\right)-\left(mn-2n\right)=m\left(m-2\right)-n\left(m-2\right)=\left(m-2\right)\left(m-n\right).$$

3. Применение формул сокращенного умножения.

Примеры. Разложить на множители многочлены:

$a)\, 27x^3-1;\ б)\, x^6-64.$

Решение.

$$a)\, 27x^3-1=\underbrace{(3x)^3-1^3}_{\text{разность кубов}}=\left(3x-1\right)\left(9x^2+3x+1\right);$$

$$б)\, x^6-64=\underbrace{\left(x^3\right)^2-\left(2^3\right)^2}_{\text{разность квадратов}}=\underbrace{\left(x^3-2^3\right)}_{\text{разность кубов}}\underbrace{\left(x^3+2^3\right)}_{\text{разность кубов}}=\left(x-2\right)\left(x^2+x+4\right)\left(x+2\right)\left(x^2-x+4\right).$$

!! *Слова и словосочетания*

разложить многочлен на множители	общий множитель
способ (*ы*)	применение формул
вынести (*inf*) за скобки	группировать
вынесение за скобки	способ группировки

2.2. Алгебраические дроби

2.2.1. Свойства алгебраических дробей

Одночлены и многочлены – это ***целые алгебраические выражения***.

!!! Целое алгебраическое выражение = целое рациональное выражение!!!

Например, $2a^3b$, a^2-a+3, $\dfrac{ab-c}{2}$ – это целые алгебраические (или рациональные) выражения.

▲ ***Алгебраическая (рациональная) дробь*** *– это выражение вида* $\dfrac{P}{Q}$*, где* P *и* Q *целые алгебраические выражения, причём выражение* Q *обязательно содержит переменную.*

Например,

$\dfrac{2a^2+1}{a-d}, \dfrac{mn}{p}, \dfrac{2}{r^2-1}, \dfrac{x}{y+5}$ – это алгебраические (рациональные) дроби.

▲ ***Область определения дроби*** *или, иначе* ***о**бласть **д**опустимых **з**начений дроби (ОДЗ)* *– это множество значений переменных, при которых дробь имеет смысл (т.е. знаменатель дроби не равен нулю).*

Пример. Дробь $\dfrac{x-1}{x+1}$ имеет смысл, если $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$.

Значит ОДЗ: $x \in R\backslash\{-1\}$ или $x \in (\infty;-1)\bigcup(-1;+\infty)$.

!!! Если знаменатель дроби равен нулю, то дробь не имеет смысла!!!

Например, дробь $\dfrac{2x+3}{x^2-1}$ не имеет смысла, если $x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm1$.

▲ ***Основное свойство дроби:*** $\underbrace{\dfrac{P}{Q}=\dfrac{P\cdot R}{Q\cdot R}=\dfrac{P\div R}{Q\div R}, \text{ где } Q\neq 0, R\neq 0}$.

$$\Updownarrow$$

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на одно и то же число или выражение не равное нулю, то величина дроби не изменится.

Примеры

$$1)\ \frac{5xy}{3+x}=\frac{5xy\cdot 3z^2}{(3+x)\cdot 3z^2}=\frac{15xyz^2}{3(3+x)z^2};\quad 2)\ \frac{x+y}{x-y}=\frac{\frac{x+y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{1}{\frac{x-y}{x+y}}.$$

▲ ***Сократить дробь*** *– значит разделить числитель и знаменатель дроби на их общий множитель не равный нулю.*

Примеры. $1)\ \dfrac{25a^2}{5a^3b}=\dfrac{5}{ab};\ 2)\ \dfrac{7(a-b)}{14(a-b)^2}=\dfrac{1}{2(a-b)};\ 3)\ \dfrac{12m^2n(m+2n^3)}{16mn^2(m+2n^3)}=\dfrac{3m}{4n}.$

▲ ***Правило.*** **Чтобы сократить алгебраическую дробь нужно числитель и знаменатель разложить на множители.**

Примеры. Сократить дроби: 1) $\frac{15x^2y-6xy}{10x^3y^2-4x^2y^3}$; 2) $\frac{a+b+an+bn}{ac+bc+ad+bd}$; 3) $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}$.

Решение. 1) $\frac{15x^2y-6xy}{10x^3y^2-4x^2y^3}=\frac{3xy(5x-2y)}{2x^2y^3(5x-2y)}=\frac{3}{2xy^2}$;

2) $\frac{a+b+an+bn}{ac+bc+ad+bd}=\frac{(a+b)+n(a+b)}{(ac+bc)+(ad+bd)}=\frac{(a+b)(1+n)}{(a+b)(c+d)}=\frac{1+n}{c+d}$;

3) $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}=\frac{a^3-2^3}{a^2+2a+4}=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a^2+2a+4}=a-2.$

▲ ***Дробь равна нулю,*** *если ее числитель равен нулю*

$$\boxed{\frac{P}{Q}=0 \Leftrightarrow P=0, Q\neq 0}$$

Например, дробь $\frac{5x-3}{2x-1}$ равна нулю, если $5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$ и $2x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{1}{2}$.

▲ ***Величина дроби не изменится***, *если*:

– изменить знаки числителя и знаменателя на противоположные $\boxed{\frac{P}{Q}=\frac{-P}{-Q}}$;

– изменить знак у числителя (знаменателя) и перед дробью $\boxed{\frac{P}{Q}=-\frac{-P}{Q}=-\frac{P}{-Q}}$.

Например, $\frac{2a-3}{a+1}=\frac{-(2a+3)}{-(-a-1)}$, $\quad \frac{x-3}{x+3}=-\frac{-(-x+3)}{x+3}=-\frac{x-3}{-(-x-3)}$.

2.2.2. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю

▲ ***Общий знаменатель*** *нескольких рациональных дробей – это рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой из дробей.*

Например, общим знаменателем дробей $\frac{a}{2b}$ и $\frac{c}{3d}$ есть выражение $6bd$**,** так как оно делится и на $2b$, и на $3d$.

▲ ***Наименьший общий знаменатель*** *алгебраических дробей* $\frac{P_1}{Q_1}$ *и* $\frac{P_2}{Q_2}$ *– это наименьшее общее кратное их знаменателей.*

Пример. Найти наименьший общий знаменатель дробей

$$\frac{3}{4x^2-4y^2}, \frac{2b}{5x^2+10xy+5y^2} \text{ и } \frac{4x}{10x^2-20xy+10y^2}$$

Решение.

$4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)=2^2(x-y)(x+y)$,

$5x^2+10xy+5y^2=5(x^2+2xy+y^2)=5(x+y)^2$,

$10x^2-20xy+10y^2=10(x^2-2xy+y^2)=2\cdot 5\cdot (x-y)^2$.

$\text{НОК}(4x^2-4y^2;5x^2+10xy+5y^2;10x^2-20xy+10y^2)=2^2\cdot 5(x+y)^2(x-y)^2$.

Ответ: наименьший общий знаменатель равен $20(x+y)^2(x-y)^2$.

2.2.3. Действия с рациональными дробями

Пусть $\frac{P_1}{Q_1}$ и $\frac{P_2}{Q_2}$.– рациональные дроби. Арифметические действия с рациональными дробями выполняют так:

Сложение (вычитание):

а) знаменатели равные $\frac{P_1}{Q} \pm \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 \pm P_2}{Q}, \left(Q \neq 0\right)$.

Например, $\frac{2a^2}{3c} + \frac{a^2-3}{3c} = \frac{2a^2+a^2-3}{3c} = \frac{3a^2-3}{3c} = \frac{3\left(a^2-1\right)}{3c} = \frac{a^2-1}{c}$.

б) знаменатели разные $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2+P_2Q_1}{Q_1Q_2}$, $\left(Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0\right)$

Например, $\frac{m}{2n} - \frac{n}{m} = \underbrace{\frac{m^2-2n^2}{2mn}}_{\text{общий знаменатель}}$.

Умножение: $\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$, $\left(Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0\right)$.

Например, $\frac{12x^3y}{5z^2} \cdot \frac{15xz}{4y^3} = \frac{12 \cdot 15x^4yz}{5 \cdot 4y^3z^2} = \frac{9x^4}{y^2z}$.

Деление: $\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_2}{P_2} = \frac{P_1Q_2}{Q_1P_2}$, $\left(Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0, P_2 \neq 0\right)$.

Например, $\frac{10xy^2}{3z} \div \frac{6y^3}{5xz^3} = \frac{10xy^2}{3z} \cdot \frac{5xz^3}{6y^3} = \frac{10 \cdot 5x^2y^2z^3}{3 \cdot 6zy^3} = \frac{25x^2z^2}{9y}$.

2.2.4. Преобразование рациональных выражений

Пример 1. Упростить выражение: $\left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{6}{2-2a^2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$.

Решение.

$$\left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{6}{2-2a^2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3} = \left(\frac{a+1}{2(a-1)} + \frac{6}{2(a^2-1)} - \frac{a+3}{2(a+1)}\right) \cdot \frac{4(a^2-1)}{3} =$$

$$= \frac{(a+1)(a+1)+6-(a+3)(a-1)}{2(a^2-1)} \cdot \frac{4(a^2-1)}{3} = \frac{a^2+2a+1+6-a^2+a-3a+3}{2(a^2-1)} \cdot \frac{4(a^2-1)}{3} =$$

$$= \frac{10}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Выполнить действия: $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right) : \frac{b}{a-b}$.

Решение.

$$\left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right) : \frac{b}{a-b} =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{a(a+b)}\right)\right) : \frac{b}{a-b} =$$

$$=\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}\right):\frac{b}{a-b}=\left(\frac{a^2}{(a-b)(a+b)}-\frac{a}{a+b}\right):\frac{b}{a-b}=$$

$$=\frac{a^2-a(a-b)}{(a-b)(a+b)}:\frac{b}{a-b}=\frac{a^2-a^2+ab}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a-b}{b}=\frac{ab}{b(a+b)}=\frac{a}{a+b}.$$

‼ *Слова и словосочетания*

алгебраическ<u>ое</u> (*ие*) цел<u>ое</u> (*ые*)	область допустимых значений
алгебраическая дробь	смысл
область определения	преобразование

2.3. Иррациональные выражения

2.3.1. Корень n-й степени. Определения

▲ ***Алгебраический корень степени n из действительного числа a*** *– это такое действительное число* b*, «энная» степень которого равна* a.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a,\text{ где } a\in R, b\in R, n\in N, n\neq 1.}$$

$\sqrt{}$ - знак корня; a – подкоренное выражение;

n – показатель корня; b – значение корня.

Корень еще называют ***радикалом***.

!!! *Извлечь корень = найти значение корня!!!*

Из определения корня следует, что $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n=a}$.

Например, $(\sqrt[6]{7})^6=7, \left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5, (\sqrt[7]{m+2n})^7=m+2n.$

■ Корни читают так:

Пишут	Читают
$\sqrt[n]{a}$	корень степени «*эн*» из a = корень «*энной*» степени из a
$\sqrt[8]{5}$	корень степени *восемь* из числа *пять* = корень *восьмой* степени из *пяти*
$\sqrt{a}$	корень *квадратный* из a
$\sqrt[3]{a}$	корень *кубический* из a

Примеры алгебраических корней:

1) $\sqrt{9}=\pm 3,$ потому что $\left(\pm 3\right)^2=9;$ 2) $\sqrt[3]{64}=4,$ потому что $4^3=64;$

3) $\sqrt[4]{10000}=\pm 10,$ потому что $\left(\pm 10\right)^2=10000;$ 4) $\sqrt[5]{-32}=-2,$ потому что $(-2)^5=-32.$

Из примеров видно, что у алгебраического корня чётной степени есть два значения (положительное и отрицательное). Это затрудняет работу с корнями. Чтобы обеспечить однозначность, вводится понятие арифметического корня.

▲ ***Арифметический корень степени*** n ***из неотрицательного числа*** a *– это такое неотрицательное число* b*, «энная» степень которого равна* a.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a,\text{ где } a\geq 0, b\geq 0, n\in N, n\neq 1.}$$

Примеры арифметических корней:

1) $\sqrt{9}=3;$ 2) $\sqrt[3]{64}=4;$ 3) $\sqrt[4]{10000}=10;$ 4) $\sqrt[6]{1}=1.$

Если $a<0 \Rightarrow \sqrt[2n]{a}$ **не существует** (ни алгебраический, ни арифметический). Если $a<0 \Rightarrow \sqrt[2n+1]{a}$ – существует только алгебраический корень. $\sqrt[2n+1]{a}$ существует при любых значениях a.

Например,

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{-4}\\ \sqrt[4]{-16}\end{matrix}\right\}\text{– не существуют;}\quad \left.\begin{matrix}\sqrt[3]{-27}=-3\\ \sqrt[7]{-1}=-1\end{matrix}\right\}\text{– алгебраические корни.}$$

!!! Значение арифметического корня всегда неотрицательно!!!

Дальше мы будем рассматривать только арифметические корни, тогда

$$\boxed{\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|, n\in N.}$$

Например,

$$1)\sqrt[4]{(-16)^4}=|-16|=16;\ 2)\sqrt[6]{a^6}=|a|=\begin{cases}a, \text{ если } a\geq 0,\\ -a, \text{ если } a<0\end{cases};$$

$$3)\sqrt{\left(5-\sqrt{31}\right)^2}=\underbrace{\left|5-\sqrt{31}\right|}_{<0}=-\left(5-\sqrt{31}\right)=-5+\sqrt{31}.$$

2.3.2. Свойства арифметического корня n-й степени

Формулы ($a\geq 0, b\geq 0$)	**Примеры**
1. Корень из произведения $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	1. $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$; 2. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[3]{3^3}=3.$
2. Извлечение корня из частного $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b\neq 0$	1. $\sqrt{\dfrac{121}{64}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{64}}=\dfrac{11}{8}$; 2. $\sqrt[3]{81}\div\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{81\div 3}=\sqrt[3]{27}=3$.
3. Основное свойство корней $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ *Показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить (или разделить) на одно и то же число*	1. $\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\cdot 2]{3^2}=\sqrt[6]{9}$; 2. $\sqrt[6]{36}=\sqrt[6]{6^2}=\sqrt[6\div 2]{6^{2\div 2}}=\sqrt[3]{6}$.
4. Извлечение корня из корня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$	1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3\cdot 4]{2}=\sqrt[12]{2}$; 2. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt[2\cdot 2\cdot 2]{a}=\sqrt[8]{a}.$
5. Возведение корня в степень $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$	1. $(\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$; 2. $\sqrt[5]{25}=\sqrt[5]{5^2}=\left(\sqrt[5]{5}\right)^2$.
6. Если $a_1>a_2$, то $\sqrt[n]{a_1}>\sqrt[n]{a_2}$ *Большему подкоренному положительному выражению соответствует и большее значение корня*	$\sqrt[3]{15}>\sqrt{6}$, потому что $\sqrt[3]{15}=\sqrt[3\cdot 2]{15^2}=\sqrt[6]{225}, \sqrt{6}=\sqrt[2\cdot 3]{6^3}=\sqrt[6]{216}.$
7. Вынесение множителя из под знака корня $\sqrt[n]{ba^n}=a\sqrt[n]{b}$	1. $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$; 2. $\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{64\cdot 3}=\sqrt[3]{4^3\cdot 3}=4\sqrt[3]{3}.$
8. Внесение множителя под знак корня $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$	1. $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{45}$; 2. $-5\sqrt{4}=-\sqrt{5^2\cdot 4}=-\sqrt{25\cdot 4}=-\sqrt{100}.$

▲ ***Подобные корни*** *– это корни, у которых показатели и подкоренные выражения одинаковы.*

!! Подобные корни отличаются только коэффициентами или ничем не отличаются!!

Например, $\sqrt[3]{5}, -12\sqrt[3]{5}, 126\sqrt[3]{5}$ – это подобные корни (отличаются только коэффициентами). $2\sqrt[4]{3}$ и $2\sqrt[4]{3}$ также подобны, так как они ничем не отличаются.

Пример 1. Доказать подобие корней $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{16}$**.**

Решение. $\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=3\sqrt[3]{2}\\ \sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=2\sqrt[3]{2}\end{array}\right]\Rightarrow$ видно, что корни отличаются только коэффициентами, значит они подобны.

Пример 2. Какие из корней подобны $2\sqrt{5}, \sqrt[6]{125}, \sqrt{75}$?

Решение. $\left.\begin{array}{l}\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5};\\ \sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 5}=5\sqrt{5}\end{array}\right]\Rightarrow$ все данные корни подобны.

2.3.3. Преобразование иррациональных выражений

▲ ***Иррациональное выражение*** *– это выражение, которое содержит корни (радикалы)***.**

Например, $2\sqrt{x}-3, \sqrt[4]{2}+1, -3\sqrt[5]{4}\cdot\left(2-\sqrt[5]{4}\right)$ – это иррациональные выражения.

Порядок действий над иррациональными выражениями такой же, что и над рациональными. При работе с иррациональными выражениями часто используют ***формулы сокращённого умножения***:

$$1. \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;$$
$$2. \left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b;$$
$$3. a\sqrt{a}\pm b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3\pm\left(\sqrt{b}\right)^3=\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\left(a\mp\sqrt{ab}+\sqrt{b}\right).$$

Примеры. Упростить: 1) $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\div\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$;

2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$; 3) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$.

Решение. 1) $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\div\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)=\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\div\dfrac{1+(\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}}=$

$$=\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\div\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}=\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1+x}.$$

2) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\cdot 3\sqrt{2}}=\sqrt{3^2+2\cdot 3\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}=3+\sqrt{2}$.

3) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2=\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2+2\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}+\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2=$

$$=6-\sqrt{11}+2\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)\left(6+\sqrt{11}\right)}+6+\sqrt{11}=12+2\sqrt{6^2-(\sqrt{11})^2}=12+2\sqrt{25}=22.$$

Если дробь содержит (имеет) корень в знаменателе, то говорят об *иррациональности в знаменателе* дроби.

Например, дроби $\dfrac{a}{12-\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$ содержат *иррациональность в знаменателе*.

▲ ***Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби*** – *это значит так преобразовать дробь, чтобы знаменатель не содержал корней.*

!! Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби = освободить знаменатель дроби от корней!!

Чтобы освободить знаменатель дроби от корней используют формулы сокращённого умножения и формулу

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}=\sqrt[n]{a^n}=a}$$

Примеры. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}$.

Решение. 1) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{a\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\dfrac{a\cdot\sqrt[3]{b^2}}{b}$;

2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{x+5}$.

2.3.4. Степень с дробным (рациональным) показателем

▲ ***Степень числа** $a>0$ **с дробным (рациональным) показателем** $\dfrac{m}{n}$,— это число* $\sqrt[n]{a^m}$,

где m – целое число, n – натуральное число $(n\geq 2)$

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},m\in Z,n\in N}.$$

Например,

$2^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8},\ 5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5},\ 16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{\left(2^4\right)^3}=\sqrt[4]{2^{4\cdot 3}}=2^3=8.$

!! Если $a=0\Rightarrow a^{\frac{m}{n}}=0^{\frac{m}{n}}=0$**,** где $\dfrac{m}{n}>0$ **!!**

!! Если $a<0$**, то степень** $a^{\frac{m}{n}}$ **не имеет смысла !!**

Над степенями с рациональным показателем можно выполнять те же ***действия***, что и над степенями с натуральным показателем $(a>0,b>0)$:

Действие	Правило	Пример
1. Умножение степеней с одинаковыми основаниями	$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}}$	$2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$
2. Деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}}$	$16^{\frac{2}{3}} \div 16^{\frac{1}{6}} = 16^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 16^{\frac{4-1}{6}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$
3. Возведение степени в степень	$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$	$\left(27^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 27^{\frac{1}{2}\frac{4}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
4. Возведение произведения в степень	$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$	$\left(2a^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} a^{2\cdot\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}a^2 = \sqrt{8}a^2$
5. Возведение частного в степень	$(a \div b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \div b^{\frac{m}{n}}$	$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}{4^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$
6. Возведение в отрицательную степень	$\underbrace{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}};}$ $\Downarrow$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$	1. $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}$. 2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Примеры. Вычислить:

1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; 4) $(64^{\frac{4}{3}} \cdot 0,25^{0,5} \cdot 1000^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{-1,75})^{\frac{4}{3}}$.

Решение.

$$1)\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3+3\cdot 2}{4} = \frac{9}{4} = 2,25;$$

$$2)\left(\frac{1}{8}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(8^{-1}\cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = (8\cdot 125)^{-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(2^3\cdot 5^3\right)^{\frac{1}{3}} = (2\cdot 5)^{3\cdot\frac{1}{3}} = 10^1 = 10;$$

$$3)\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \div \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \div \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2-2} =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4} = \frac{81}{256};$$

$$4)(64^{\frac{4}{3}} \cdot 0,25^{0,5} \cdot 1000^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{-1,75})^{\frac{4}{3}} = [(2^6)^{\frac{4}{3}} \cdot (2^{-2})^{0,5} \cdot (10^3)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^4)^{-1,75}]^{\frac{4}{3}} =$$

$$= (2^{6\cdot\frac{4}{3}} \cdot 2^{-2\cdot 0,5} \cdot 10^{3\cdot\frac{1}{4}} \cdot 2^{4\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)})^{\frac{4}{3}} = (2^{8-1-7})^{\frac{4}{3}} \cdot (10^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} = 2^{0\cdot\frac{4}{3}} \cdot 10^{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}} = 2^0 \cdot 10^1 = 10.$$

При работе со степенями с рациональным показателем также используют ***формулы сокращённого умножения:***

1. $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=a-b$	3. $a^{\frac{3}{2}}\pm b^{\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3\pm\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a\mp a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)$
2. $\left(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}\mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a\pm b$	4. $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$

Пример. Упростить выражение $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

‼ *Слова и словосочетания*

иррациональное выражение	арифметический корень
показатель корня	радикал
подкоренное выражение	извлечение корня
знак корня	освободить от иррациональности
вынести за знак корня	внести под знак корня

Вопросы и упражнения

1. Что называется степенью с натуральным показателем?
2. Какие свойства степени вы знаете?
3. Какие действия над степенями вы знаете?
4. Что называется стандартным видом числа?
5. Выполнить действия

а) $\left(a^n\right)^3:\left(a^{n+1}\right)^3$; б) $\left(-a^n\right)^4:\left(a^n\right)^3$; в) $m^{-2}:m^5$; г) $c^{x+y}:c^{-x+y}$;

д) $-6(-3)^3$; е) $(-(-3))^2$; ж) $-5^{12}:(-5)^{16}$; з) $7(-1)\cdot3^3-2(-3)^3\cdot5$.

6. Записать числа в стандартном виде: 0,001; 0,000001; 230600; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{125}$.
7. Что называется одночленом, многочленом?
8. Что называют степенью многочлена?
9. Какие одночлены называются подобными?
10. Что значит привести подобные члены?
11. Степень многочлена – это что?
12. Что называется корнем многочлена?
13. Назовите формулы сокращенного умножения.
14. Выполнить действия:

а) $\left(3a^3+7ab+b^3\right)\cdot\left(15a^4b-ab\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}xy^2+\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot\left(\frac{2}{5}xy+y^8\right)$;

в) $\left(x^3+343\right)\div\left(x^2-7x+49\right)$; г) $\left(x^4-x^3-9x^2+4x+2\right)\div\left(x^2+2x-2\right)$.

15. Напишите формулы сокращенного умножения.
16. Какие основные способы разложения многочлена на множители вы знаете?
17. Вычислить:

а) $23\cdot17,8-3\cdot7,2+23\cdot7,2-17,8\cdot3$; б) $\left(36,5^2-27,5^2\right):\left(\dfrac{57^3+33^3}{90}-57\cdot33\right)$.

18. Разложить многочлены на множители:

а) $30a^2b^2+5ac^3-25bc^2-6a^3bc$; б) $4b^2-\left(x^2-b^2-1\right)^2$;

в) $\left(x+y+p\right)^3-x^3-y^3-p^3$; г) $x^2\left(y-z\right)+y^2\left(z-x\right)+z^2\left(x-y\right)$.

19. Сформулируйте и докажите теорему Безу.
20. Сформулируйте и докажите следствие из теоремы Безу.
21. Разделить многочлены по схеме Горнера:

а) $\left(x^4-13x^2+17x-15\right):\left(x-3\right)$; б) $\left(a^4+a^3-3a^2+7a-6\right):\left(a^2+2a-3\right)$.

22. Какая дробь называется алгебраической?
23. Каким числом может быть: а) числитель дроби? б) знаменатель дроби?
24. Когда дробь равна нулю?
25. Дайте определение основного свойства дроби.
26. Что значит "сократить дробь"?
27. Сократить дроби: а) $\dfrac{8x^2-12xy}{15xy-10x^2}$; б) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$; в) $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.
28. Как можно изменять знаки у членов дроби, чтобы ее величина не изменилась?
29. Найдите область определения дробей. При каких значениях a дроби равны нулю?

а) $\dfrac{a-3}{2a-4}$; б) $\dfrac{a+6}{a(a+5)}$; в) $\dfrac{a^2}{(a+4)(a-1)}$; г) $\dfrac{2a-1}{4a^2-1}$?

30. Упростить выражения:

а) $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$; б) $\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x+y}{3x}-x-y\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$;

в). $\left(\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3}$.

31. Что называется арифметическим корнем n-ой степени?
32. Что называется иррациональным выражением?
33. Что называется степенью с рациональным показателем?
34. Назовите свойства арифметических корней.
35. Сократить дроби:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{a^{0.5}-3}{a-9}$; в) $\dfrac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{16x^2}-\sqrt[3]{25y^2}}{\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{5y}}$; д) $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{x+y}$.

36. Вынести множитель за знак корня:

а) $\sqrt[5]{a^{17}b^{12}}$ б) $\sqrt{a^3\left(a-3\right)^2}$, если. $0\le a\le 3$.

37. Внести множитель под знак корня:

а) $a\left(5-a\right)\sqrt{a}$, если $a\ge 5$. б) $\left(4-x\right)\sqrt{\dfrac{x}{x-4}}$, если $x>4$.

38. Упростить выражения:

а) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{x-y}$; б). $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):\left(a-b\right)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

39. Назовите свойства степени с рациональным показателем.
40. Вычислить:

а) $(0,008)^{\frac{1}{3}}\cdot 80^0-(15\frac{5}{8})^{\frac{1}{3}}$; б) $54^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{-1}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}$; в) $\left[4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-1,5}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]\cdot\left[4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right]$.

Раздел 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

3.1. Равенство. Тождество. Уравнение

▲ ***Равенство*** *– это два математических выражения, которые соединены знаком равно* (=).

Например, $2a+3=4a-1$, $5+3=9-1$, А = В – это равенства.

Есть ***числовые равенства*** и ***равенства с переменн<u>ой</u> (-<u>ыми</u>).***

Например,

$5+10=15$ – числовое равенство;

$2(x+3)=y-4$ – равенство с переменными x и y.

Равенство имеет левую и правую части. Например, $\overbrace{\underbrace{2x+3y}_{\text{левая часть}}=\underbrace{8(y-4x)}_{\text{правая часть}}}^{\text{равенство}}$.

Есть равенства ***верные*** (правильные) и ***неверные*** (неправильные).

Например,

$5a-3a=2a$ – верное равенство,

$4+10=16-5$ – неверное (числовое) равенство.

▲ ***Тождество*** *– это всегда верное равенство* (при любых значениях переменной). Верное числовое равенство также есть тождеством.

Например, $a^3\cdot a^2=a^5$; $x+y=y+x$; $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ – это тождества.

Рассмотрим ещё примеры равенств.

Пример 1. Равенство с переменной $2x+5=6$ верно только при $x=0,5$. Значит это не тождество.

Пример 2. Равенство с переменной $\frac{1}{x}=0$ не тождество, потому что оно всегда неверно (при любых значениях x).

▲ ***Уравнение*** *– это равенство с переменной.*

Равенства из примеров 1 и 2 – это уравнения.

В уравнении переменную ещё называют «*неизвестной величиной*» или «*неизвестной*».

!!! **переменная** (величина) = **неизвестная** (величина)!!!

Примеры уравнений с одной неизвестной (переменной) x:

$$2x-5=1; \qquad (1)$$

$$x^2-3x+2=0; \qquad (2)$$

$$2x^2-6x+4=0; \qquad (3)$$

$$x+\sqrt{x+4}=3x-7; \qquad (4)$$

$$\frac{2}{1-x}=\frac{4}{1+x}+\frac{1}{1-x^2}; \qquad (5)$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1 \qquad (6)$$

Уравнения (1) – (6) – это ***алгебраические уравнения*** (их левые и правые части являются алгебраическими выражениями). Алгебраические уравнения есть рациональные и иррациональные.

Уравнения (1) – (3), (5) и (6) – ***рациональные уравнения*** (их левые и правые части не содержат иррациональных выражений).

Уравнение (4) – ***иррациональное уравнение*** (переменная находится под знаком корня).

▲ ***Область определения уравнения*** *– это множество значений переменной, при которых левая и правая части уравнения имеют смысл (существуют).*

!!! Область определения = Область Допустимых Значений = ОДЗ !!!

Например,

область определения уравнений	(1), (2), (3), (6)	– $x\in R$,
область определения уравнения	(4)	– $õ\in[-4;+\infty)$,
область определения уравнения	(5)	– $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

▲ ***Корень (решение) уравнения*** *– это значение переменной, которое обращает уравнение в верное числовое равенство.*

!!! ***корень*** *уравнения =* ***решение*** *уравнения!!!*

Например,

$x=4$ это корень уравнения $2x+3=11$, так как $2\cdot4+3=11$ – верное числовое равенство. Говорят, что $x=4$ ***удовлетворяет уравнению*** $2x+3=11$.

▲ ***Множество решений (корней) уравнения*** *– это все его решения (корни).*

Например,

множество решений уравнения (1):	$x=3$;
множество решений уравнений (2),(3):	$x_1=1, x_2=2$;
множество решений уравнения (4):	$x=5$;
множество решений уравнения (5):	$x=0,5$;
множество решений уравнения (6):	$x\in R$.

Эти значения переменной *удовлетворяют* соответствующим уравнениям.

▲ ***Решить уравнение*** *– значит найти множество его решений или доказать, что решений нет.*

▲ *Два уравнения называются* ***равносильными (эквивалентными) уравнениями****, если их множества решений одинаковы (совпадают).*

!!! равносильные *уравнения =* ***эквивалентные*** *уравнения* ***!!!***

Например, уравнения (2) и (3) равносильны (эквивалентны), потому, что их множества решений одинаковые.

Если два уравнения не имеют решений, то они тоже равносильны.

Например, уравнения $|x-1|=-2$ и $|x|=-3$ равносильны: оба уравнения не имеют решений.

Уравнения $2x=10$ и $(2x-10)(3-x)=0$ неравносильны (неэквивалентны), так как имеют разные корни. Первое имеет корень $x=5$, а у второго уравнения есть два корня: $x_1=5, x_2=3$.

Уравнения $x^2=x$ и $\dfrac{x^2+2}{x}=\dfrac{x^2+3}{x}$ неравносильны (неэквивалентны), так как число $x=0$ является корнем первого уравнения, но не удовлетворяет второму уравнению (при $x=0$ левая и правая части второго уравнения не определены).

!! *Слова и словосочетания*

верное равенство	удовлетворяет уравнению
переменная = неизвестная	эквивалентные уравнения
уравнение	равносильные уравнения
корень уравнения	тождество
множество решений уравнения	ОДЗ уравнений совпадают

3.2. Линейные уравнения. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

3.2.1. Линейные уравнения

▲ ***Линейное уравнение*** *– это уравнение вида* $\boxed{ax+b=0,}$ где $a, b \in R,$ *x – переменная (неизвестная), a – коэффициент при x, b – свободный член.*

Очевидно, что $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b.$

Теперь выполним ***исследование корней линейного уравнения.***

1. Если $a \neq 0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$. Уравнение имеет *<u>один корень</u>*.

2. Если $a=b=0 \Rightarrow 0 \cdot x=0 \Rightarrow x \in R$. Уравнение имеет *<u>бесконечно много корней</u>*.

3. Если $a=0, b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x=-b \Rightarrow x \in \varnothing$. Уравнение *<u>не имеет корней</u>*.

Пример 1. Решить уравнение 15(x + 2) = 6(2x + 7).

Решение. Раскроем скобки, получим:

15x + 30 = 12x + 42,	Проверка:
15x – 12x=42 – 30,	15 (4+2)=6 (2 · 4+7),
3x = 12,	15 · 6 = 6 · 15 – верно.
x = 4.	

Ответ: $x=4.$

Пример 2. Решить уравнение 3(x + 3) + x = 4x + 9.

Решение.

3x + 9 + x = 4x + 9,
3x + x – 4x = 9 – 9,
0 · x = 0,
0 = 0 – верное числовое равенство.

Значит, любое число есть решением этого уравнения.

Ответ: $x \in R.$

Пример 3. Решить уравнение 2(x –6) = 2x + 10.

Решение.

2x – 12 = 2x + 10,
2x –2 x = 10 + 12,
0 · x = 22,
0 = 22 – неверное числовое равенство.

Значит, это уравнение не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Уравнения с неизвестной в знаменателе можно решать так: сначала нужно найти область допустимых значений уравнения (ОДЗ). Потом перенести все члены уравнения в левую часть, привести дроби к наименьшему общему знаменателю и сложить их. Затем приравнять числитель полученной дроби к нулю (так как дробь равна нулю если числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю).

Пример. Решить уравнение $\dfrac{x+5}{x^2-5x}-\dfrac{x-5}{2x^2-10x}=\dfrac{x+25}{2x^2-50}$.

Решение.

$$\frac{x+5}{x(x-5)}-\frac{x-5}{2x(x-5)}-\frac{x+25}{2(x^2-5^2)}=0,$$

$$\frac{2(x+5)^2-(x-5)(x+5)-x(x+25)}{2x(x-5)(x+5)}=0,$$

$$2(x+5)^2-(x-5)(x+5)-x(x+25)=0,$$

$$2x^2+20x+50-x^2+25-x^2-25x=0,$$

$$-5x=-75,$$

$$x=15.$$

ОДЗ

$$2x(x-5)(x+5)\neq 0,$$

$$\Rightarrow x\neq 0, x\neq 5, x\neq -5.$$

Проверка:

$$x=15\Rightarrow$$

$$\frac{15+5}{15^2-15\cdot 5}-\frac{15-5}{2\cdot 15^2-10\cdot 15}=\frac{15+25}{2\cdot 15^2-50},$$

$\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{10}$ – верно.

Ответ: $x=15$.

3.2.2. Уравнения, которые содержат неизвестную под знаком модуля

Для решения алгебраических уравнений с неизвестной под знаком модуля используют определение модуля $\boxed{|a|=\begin{cases} a, \text{ если}\cdot a\geq 0 \\ -a, \text{если}\cdot a<0\end{cases}}$ и метод интервалов.

Метод интервалов

Подмодульное выражение изменяет знак в точке равенства нулю. Числовую ось разделяют на интервалы точками нулей подмодульных выражений уравнения. Затем решают уравнение в каждом интервале. Объединение этих решений и есть решением уравнения.

Пример. Решить уравнение $|x+3|+|x-5|=20$.

Решение.

1. Находим нули (корни) подмодульных выражений
$x+3=0\Rightarrow x=-3$ и $x-5=0\Rightarrow x=5$.
Нули подмодульных выражений делят числовую ось на три интервала:

$$-\infty<x<-3; -3\leq x<5; 5\leq x<+\infty.$$

2. Строим таблицу и решаем уравнение в каждом из интервалов

	$-\infty<x<-3$	$-3\leq x<5$	$5\leq x<+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-(x+3)$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-5\rvert$	$-(x-5)$	$-(x-5)$	$x-5$
$\lvert x+3\rvert+\lvert x-5\rvert=20$	$-(x+3)-(x-5)=20$ $\Rightarrow -x-3-x+5=20$ $\Rightarrow x=-9$	$x+3-(x-5)=20$ $\Rightarrow x+3-x+5=20$ $\Rightarrow 8\neq 20$	$x+3+x-5=20$ $\Rightarrow x+x=20-3+5$ $\Rightarrow x=11$
	$x=-9$	$x\in\varnothing$	$x=11$

Ответ: $x_1=-9, x_2=11$.

3.2.3. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

▲*Общий вид системы линейных уравнений с двумя неизвестными:* $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$

a_1, a_2 *– коэффициенты при x,*

b_1, b_2 *– коэффициенты при y,*

c_1, c_2 *– свободные члены,*

x и y *– переменные* (или *неизвестные).*

▲ ***Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными*** *– это* ***пара чисел*** $(x_0; y_0)$*, которая удовлетворяют каждому уравнению системы.*

Рассмотрим некоторые ***методы решения*** систем линейных уравнений с двумя неизвестными.

1. Метод подстановки (метод последовательного исключения неизвестных).

Из первого уравнения системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ *выразим* x через y: $x = \dfrac{c_1 - b_1y}{a_1}$, $(a_1 \neq 0)$ и *подставим* во второе уравнение. Получим:

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y = c_2 \Rightarrow (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2 \Rightarrow y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

Тогда $x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} 6x + y = 6, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} 6x + y = 6, \\ 4x + 3y = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 6x, \\ 4x + 3(6 - 6x) = 11; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5, \\ y = 6 - 6 \cdot 0,5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5; \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (0,5; 3).

2. Метод алгебраического сложения.

В системе $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ умножим первое уравнение на $a_2 \neq 0$, а второе уравнение на $a_1 \neq 0$, затем вычтем из первого результата второй:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_2a_1x + b_2a_1y = c_2a_1. \end{array} \\ \hline (b_1a_2 - b_2a_1)y = c_1a_2 - c_2a_1. \end{array}$$

Получим: $y = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$

Аналогично, умножим первое уравнение на $b_2 \neq 0$ и вычтем из него второе уравнение, умноженное на $b_1 \neq 0$. Полу чим $x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.

Пример. Решить методом алгебраического сложения

системy уравнений $\begin{cases} 4x - 7y = -12, \\ 6x + 3y = -16. \end{cases}$

Решение.

Умножим все члены первого уравнения на –3, а второго уравнения на 2. Полученные уравнения сложим:

$$\begin{cases} 4x - 7y = -12, \mid \times(-3) \\ 6x + 3y = -18. \mid \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} +\begin{cases} -12x + 21y = 36, \\ 12x + 6y = -36. \end{cases} \\ \hline 27y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ 4x - 7y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ 4x = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ответ: (– 3; 0).

3. Метод Крамера[**] *(метод определителей).*

Коэффициенты при переменных системы уравнений $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$ запишем в таком виде: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ – это ***матрица*** коэффициентов второго порядка.

У матрицы второго порядка есть ***две строки*** и ***два столбца:***

$$\underset{\text{первая строка}}{a_1\ \ b_1}\ ,\ \underset{\text{вторая строка}}{a_2\ \ b_2}\ ;\ \left.\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle \text{первый столбец}\ ,\ \left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right\rangle \text{второй столбец}\,.$$

Числовой характеристикой матрицы есть ***определитель (детерминант)***.
Знак определителя – Δ (читают „*дельта*”).

▲ ***Определитель матрицы*** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *– это число, равное* $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2$.

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.}$$ – ***определитель*** матрицы второго порядка.

▲ ***Правило Крамера***. *Если определитель системы* $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases}$ *не равен нулю* ($\Delta \neq 0$), *то её решением есть пара чисел* $\boxed{\tilde{o}_0 = \dfrac{\Delta_{\tilde{o}}}{\Delta},\ \acute{o}_0 = \dfrac{\Delta_{\acute{o}}}{\Delta},}$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ –***определитель*** *системы,*

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$ – ***определитель*** *переменной* ***x,***

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$ – ***определитель*** *переменной* ***y.***

Пример. Решить методом Крамера систему уравнений $\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9. \end{cases}$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 10 & -11 \end{vmatrix} = 2\cdot(-11) - 10\cdot 11 = -132,\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 15 & 11 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} = 15\cdot(-11) - 9\cdot 11 = -264,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 10\cdot 15 = 18 - 150 = -132,\ x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-264}{-132} = 2,\quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-132}{-132} = 1.$$

Ответ: (2; 1).

3.2.4. Исследование решений системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

▲ *Система линейных уравнений называется* ***совместной****, если она имеет решения. и* ***несовместной****, если она не имеет решений.*

[**]Габриэль Крамер (1704−1752) − швейцарский математик, один из основателей линейной алгебры.

▲ *Совместная система называется* ***определённой****, если она имеет единственное решение, и* ***неопределённой****, если решений больше одного.*

Пусть дана система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$ При решении этой системы возможны такие случаи:

1. Если $\boxed{\Delta \neq 0}$, то есть $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}}$ (коэффициенты системы не пропорциональны), то система имеет ***единственное решение***. Система ***совместна*** и ***определённая***.

2. Если $\boxed{\Delta = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_y \neq 0}$, то есть $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}}$ (коэффициенты системы пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны), то система ***не имеет решений.*** Система ***несовместна***.

3. Если $\boxed{\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0}$, то есть $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}}$ (коэффициенты системы и свободные члены пропорциональны), то система имеет ***бесконечное множество решений.*** Система ***совместна*** и ***неопределённая***.

Пример. При каком значении параметра k система $\begin{cases} (1+2k)x+5y=7, \\ (2+k)x+4y=8. \end{cases}$ несовместна (не имеет решений)?

Решение. Система не имеет решений, если $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$

Найдём определитель системы и приравняем его к нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} 1+2k & 5 \\ 2+k & 4 \end{vmatrix} = (1+2k)\cdot 4-(2+k)\cdot 5 = 3k-6 \quad \Rightarrow 3k-6=0 \Rightarrow k=2$. Далее убедимся, что $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 7\cdot 4-8\cdot 5 = -12 \neq 0,\ \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5\cdot 8-4\cdot 7 = 12 \neq 0.$$

Ответ: $k = 2$.

‼ *Слова и словосочетания*

совместимая система	несовместимая система
определённая система	неопределённая система
пара чисел	единственное решение
последовательное исключение	алгебраическое сложение
выразить *что?* через *что?*	матрица
подставлять, подставить	определитель

3.3. Квадратные уравнения

▲ ***Квадратное уравнение*** *– это уравнение вида*

$$\boxed{ax^2+bx+c=0,\ \text{где}\ a \neq 0, b,\ c \in R.}$$

Здесь *a – первый коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член.*
Например, $2x^2+3x-4=0$ – это квадратное уравнение, где $a=2,\ b=3,\ c=-4$.

3.3.1. Неполные квадратные уравнения

▲ ***Неполное квадратное уравнение*** *– это квадратное уравнение, у которого второй коэффициент или свободный член равен нулю* ($b=0$ или $c=0$).

Например, $2x^2-1=0,\ -5x^2+3x=0,\ 2x^2=0$ – это неполные квадратные уравнения.

Неполное квадратное уравнение	Примеры
1) $b=0$ и $c=0\ (a\neq 0)$ $\Rightarrow \boxed{ax^2=0} \Rightarrow x^2=0$ $\Rightarrow \boxed{x=0}$ – ***один корень***	$-3x^2=0$ *Решение.* $x^2=0 \Rightarrow x=0$ *Ответ:* $x=0$
2) $c=0\ (a\neq 0, b\neq 0)$ $\Rightarrow \boxed{ax^2+bx=0} \Rightarrow x(ax+b)=0$ $\Rightarrow x=0$ или $ax+b=0$ $\Rightarrow \boxed{x_1=0 \text{ или } x_2=-\frac{b}{a}}$ – ***два корня***	$3x^2-4x=0$ *Решение.* $x(3x-4)=0$ $x=0$ или $3x-4=0$ $\Rightarrow x_1=0,\ x_2=\frac{4}{3}$ *Ответ:* $x_1=0,\ x_2=\frac{4}{3}$.
3) $b=0\ (a\neq 0, c\neq 0)$ $\Rightarrow \boxed{ax^2+c=0} \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$ а) если $\boxed{-\frac{c}{a}<0}$ – ***корней нет*** б) если $\boxed{-\frac{c}{a}>0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}$ – ***два корня***	а) $2x^2+6=0$ *Решение.* $2x^2=-6$ $x^2=-3<0 \Rightarrow x\in\varnothing$ *Ответ:* корней нет б) $2x^2-8=0$ *Решение.* $2x^2=8$ $x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$ *Ответ:* $x_1=-2, x_2=2$.

3.3.2. Полные квадратные уравнения

▲ ***Полное квадратное уравнение*** *– это квадратное уравнение, у которого коэффициенты и свободный член не равны нулю.*

$\boxed{\text{если } a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \Rightarrow ax^2+bx+c=0 \text{ – полное квадратное уравнение}}$

Чтобы решить это уравнение умножим обе части уравнения на $4a$. Получим:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0 \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=$$
$$=b^2-4ac \Leftrightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Выражение b^2-4ac называют ***дискриминантом*** и обозначают символом D.

$\boxed{D=b^2-4ac \text{ .– } \textbf{\textit{дискриминант}} \text{ квадратного уравнения.}}$

Значит, $(2ax+b)^2=D \Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{D} \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Мы получили формулу корней (решений) полного квадратного уравнения.

▲ ***Корни полного квадратного уравнения*** $ax^2+bx+c=0$ *находят по* ***формуле***

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

Число решений квадратного уравнения зависит от значения дискриминанта.

Дискриминант	Корни	Примеры
1. $\boxed{D<0}$	$\boxed{x\in\varnothing}$ действительных ***корней нет***	$16x^2-24x+27=0$ *Решение.* $a=16, b=-24, c=27$ $D=b^2-4ac=(-24)^2-4\cdot16\cdot27=-1152$ $D<0\Rightarrow x\in\varnothing$ *Ответ:* корней нет.
2. $\boxed{D=0}$	$\boxed{x_1=x_2=\frac{-b}{2a}}$ ***два равных*** *действительных* ***корня***	$x^2-16x+64=0$ *Решение.* $a=1, b=-16, c=64$ $D=b^2-4ac=(-16)^2-4\cdot1\cdot64=0$ $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-16)}{2\cdot1}=8$ *Ответ:* $x=8$..
3. $\boxed{D>0}$	$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$ ***два разных*** *действительных* ***корня***	$2x^2-7x-30=0$ *Решение.* $a=2, b=-7, c=-30$ $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot2\cdot(-30)=289$ $\sqrt{D}=\sqrt{289}=17$ $x_1=\frac{7+17}{2\cdot2}=6,\ x_2=\frac{7-17}{2\cdot2}=-2,5$ *Ответ:* $x_1=-2,5;\ x_2=6$..

▲ ***Корни квадратного уравнения*** $ax^2+2kx+c=0$ ***с чётным вторым коэффициентом*** $(b=2k-\text{чётное число, где } k\in Z)$ ***удобно вычислять по формуле***

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}}$$

Пример. Решить уравнение $4x^2-4x+1=0$

Решение. $a=4, b=-4=2\cdot\underset{k}{(-2)}, c=1$. Видим, что второй коэффициент чётное число.

Корни найдём так: $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1}}{4}=\frac{2\pm0}{4}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

3.3.3. Приведенные квадратные уравнения

Разделим левую и правую части полного квадратного уравнение $ax^2+bx+c=0$ на первый коэффициент a: $\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Обозначим: $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$. Получим уравнение вида $x^2+px+q=0$. Здесь первый коэффициент равен единице.

▲ ***Приведенное квадратное уравнение*** *– это квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен единице.*

$$\boxed{x^2+px+q=0 - \text{приведенное квадратное уравнение}}$$

Например, $x^2-3x+4=0, x^2+x+5=0$ – приведенные квадратные уравнения.

▲ ***Корни приведенного квадратного уравнения*** $x^2+px+q=0$ ***можно вычислять по формуле***

$\boxed{x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2},}$ где $D=p^2-4q$ ***дискриминант*** приведенного квадратного уравнения**.**

Пример. Найти корни приведенного квадратного уравнения $x^2+5x+6=0$**.**

Решение.

$$p=5, q=6 \Rightarrow D=p^2-4q=25-24=1. \text{Тогда } x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-5\pm1}{2} \Rightarrow x_1=-3, x_2=-2.$$

Ответ: $x_1=-3, x_2=-2$.

3.3.4. Свойства корней квадратного уравнения (теорема Виета)

Пусть $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Найдём сумму и произведение корней: $\underbrace{x_1+x_2}_{\text{сумма корней}}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a},$

$$\underbrace{x_1\cdot x_2}_{\text{произведение корней}}=\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Эти формулы выражают теорему**,** которая называется ***теоремой Виета*.***

▲ Теорема Виета

Если x_1, x_2 ***– корни квадратного уравнения*** $ax^2+bx+c=0$***, тогда***

$$\boxed{\underbrace{x_1+x_2}_{\text{сумма корней}}=-\frac{b}{a}, \quad \underbrace{x_1\cdot x_2}_{\text{произведение корней}}=\frac{c}{a}}$$

Пример. Найти сумму квадратов корней уравнения $2x^2-4x+1=0$.

Решение. По теореме Виета,

$$x_1+x_2=\frac{-(-4)}{2}=2, \quad x_1\cdot x_2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1{}^2+x_2{}^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=2^2-2\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Ответ: 3.

▲ ***Если*** x_1, x_2 ***– корни приведеного квадратного уравнения*** $x^2+px+q=0$***, тогда***

$$\boxed{x_1+x_2=-p, \quad x_1\cdot x_2=q}.$$

Эти формулы выражают ***теорему Виета*** *для приведенного квадратного уравнения****:*** ***сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение равно свободному члену.***

---

*Франсуа Виет (1540-1603) – французский математик.

Пример. Найти корни уравнения $x^2+2x-35=0$.

Решение. По теореме Виета, $x_1+x_2=-2,\ x_1\cdot x_2=-35 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-7.$

Ответ: $x_1=5,\ x_2=-7..$

Пример. Сумма квадратов корней уравнения $x^2+px-3=0$ равна 10. Найти p.

Решение. По условию, $x_1{}^2+x_2{}^2=10$. По теореме Виета, $x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=-3.$ Тогда, $x_1{}^2+x_2{}^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=(-p)^2-2\cdot(-3)=p^2+6 \Rightarrow 10=p^2+6 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=\pm 2.$

Так как $D=p^2+12>0$, то корни существуют при всех найденных значениях p.

Ответ: $p=\pm 2.$

3.3.5. Разложение квадратного трёхчлена на множители

▲ Выражение вида $\boxed{ax^2+bx+c}$ *($x-$ переменная, $a,b,c-$ числа) –* это ***квадратный трёхчлен.***

Например, $2x^2-3x+5,\ x^2-5x+6,\ 3x^2+5x-8$ – квадратные трёхчлены.

$D=b^2-4ac$ *–* ***дискриминант*** *квадратного трёхчлена.*

Пусть $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}-$ ***корни*** *квадратного трёхчлена (значения* x*, при которых трёхчлен равен нулю).*

Если $D\geq 0$, то квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители.

$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$ *–* ***формула разложения квадратного трехчлена на множители,*** *где* $x_1,\ x_2-$ *корни квадратного трёхчлена.*

Частный случай: если $D=0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2}$

□ *Доказательство.* Используем формулы Виета, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$**.** Тогда

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right)=$$

$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left(x\left(x-x_1\right)-x_2\left(x-x_1\right)\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).□$$

Примеры. Разложить на множители: 1) $x^2-7x+10$; 2) $2x^2+3x-5$; 3) $2x^2+16x+32.$

Решение. 1) корни квадратного трёхчлена найдём по теореме Виета, $x_1+x_2=7,\ x_1\cdot x_2=10 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=5.$ Тогда, $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$.

2) $D=3^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49$. Найдём корни трёхчлена: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{4} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\dfrac{5}{2}.$

$$\Rightarrow 2x^2+3x-5=2\left(x-1\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(x-1)(2x+5).$$

3) $D=16^2-4\cdot 2\cdot 32=0 \Rightarrow x_1=x_2=-4 \Rightarrow 2x^2+16x+32=2(x+4)^2.$

3.4. Уравнения высших степеней

Рассмотрим некоторые виды уравнений высших степеней и способы их решений.

3.4.1. Биквадратные уравнения

▲ ***Биквадратное уравнение*** *– это уравнение вида* $ax^4+bx^2+c=0,\ a\neq 0.$

Например, $x^4-2x^2+3=0,\ -2x^4+5x^2+2=0$ – это биквадратные уравнения.

Способ решения биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0, a\neq 0$ – *замена переменной***:** $\boxed{\text{пусть } x^2=y\text{, где } y>0}$ $\Rightarrow$ получим квадратное уравнение $ay^2+by+c=0$.

Его корни находим по формулам: $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Число корней биквадратного уравнения **зависит от значений** y **:**

Некоторые случаи	**Примеры**
1. $y_1>0$ и $y_2>0$ $\Rightarrow\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1},\, x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}.}$ **четыре действительных корня**	$2x^4-3x^2+1=0$ *Решение.* Пусть $x^2=y$, тогда $2y^2-3y+1=0\Rightarrow y_1=1, y_2=\dfrac{1}{2}$ а) $y_1=1\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1}\Rightarrow x_{1,2}=\pm1,$ б) $y_2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *Ответ:* $x_{1,2}=\pm1;\, x_{3,4}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $y_1>0$ и $y_2<0$ $\Rightarrow\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}.}$ **два действительных корня**	$x^4+3x^2-4=0$ *Решение.* Пусть $x^2=y$, тогда $y^2+3y-4=0\Rightarrow y_1=1, y_2=-4$ а) $y_1=1\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1}\Rightarrow x_{1,2}=\pm1,$ б) $y_2=-4<0\ \Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x\in\varnothing$ *Ответ:* $x_1=-1;\, x_2=1$.
3. $y_1<0$ и $y_2<0$ $\Rightarrow\boxed{x\in\varnothing}$ **нет действительных корней**	$2x^4+9x^2+4=0$ *Решение.* Пусть $x^2=y$, тогда $2y^2+9y+4=0\Rightarrow y_1=-0{,}5,\ y_2=-4$ а) $y_1=-0{,}5\ \Rightarrow x^2=-0{,}5\Rightarrow x\in\varnothing$ б) $y_2=-4<0\ \Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x\in\varnothing$ *Ответ:* корней нет

3.4.2. Симметричные уравнения

▲ ***Симметричное уравнение*** *– это целое рациональное уравнение вида*

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0}$$

а) если $n = 3 \Rightarrow \boxed{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$ *– симметричное уравнение третьей степени.*

Левую часть уравнения ***разложим на множители*** методом группировки:

$\left(ax^3 + a\right) + \left(bx^2 + bx\right) = 0 \Rightarrow a\left(x^3 + 1\right) + bx\left(x + 1\right) = 0 \Rightarrow \left(x + 1\right)\left(ax^2 - \left(a - b\right)x + a\right) = 0$.

Дальше решаем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ ax^2 - \left(a - b\right)x + a = 0. \end{array}\right.$

б) если $n = 4 \Rightarrow \boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ *– симметричное уравнение четвёртой степени*. Разделим левую и правую части уравнения на $x^2 \neq 0$. Получим:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Сделаем ***замену*** $\boxed{x + \frac{1}{x} = t} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. После замены получим:

$a\left(t^2 - 2\right) + bt + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + \left(c - 2a\right) = 0$. Решаем квадратное уравнение: $\left[\begin{array}{l} t_1 = \alpha, \\ t_2 = \beta. \end{array}\right.$

Потом решаем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = \alpha, \\ x + \dfrac{1}{x} = \beta. \end{array}\right.$

Пример 1

$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0,$

$\left(x^3 + 1\right) - 2x\left(x + 1\right) = 0,$

$\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) - 2x\left(x + 1\right) = 0,$

$\left(x + 1\right)\left(x^2 - 3x + 1\right) = 0,$

1) $x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1;$

2) $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Пример 2

$x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0, \big|\div x^2 \neq 0$

$x^2 + 4x - 7 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0,$

$\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) - 7 = 0,$

пусть $x - \dfrac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + 2,$

$t^2 + 2 + 4t - 7 = 0,$

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow t_1 = -5,\ t_2 = 1.$

1) $x - \dfrac{1}{x} = -5 \Rightarrow x^2 + 5x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{2};$

2) $x - \dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{2},\ x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

3.4.3. Однородные уравнения

▲ ***Однородное уравнение*** *– это уравнение вида* $\boxed{af^2(x) + bf(x)g(x) + cg^2(x) = 0}$.

Разделим левую и правую части уравнения на $f^2(x) \neq 0$ (можно на $g^2(x) \neq 0$):

$$\frac{af^2(x)}{f^2(x)}+\frac{bf(x)g(x)}{f^2(x)}+\frac{cg^2(x)}{f^2(x)}=0 \Rightarrow a+b\frac{g(x)}{f(x)}+c\frac{g^2(x)}{f^2(x)}=0.$$

Далее сделаем ***замену*** $\boxed{\frac{g(x)}{f(x)}=t}$. Получим квадратное уравнение $ct^2+bt+a=0$.

Пример. Решить уравнение $\left(x^2-3x+1\right)^2+3(x-1)\left(x^2-3x+1\right)-4(x-1)^2=0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $(x-1)^2 \neq 0$, получим:

$$\frac{\left(x^2-3x+1\right)^2}{(x-1)^2}+3\cdot\frac{x^2-3x+1}{x-1}-4=0.$$

Сделаем замену $\frac{x^2-3x+1}{x-1}=t$, тогда уравнение примет вид $t^2+3t-4=0$. Найдём его корни $t_1=-4, t_2=1$. Значит: 1) $\frac{x^2-3x+1}{x-1}=-4 \Rightarrow x^2+x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$;

2) $\frac{x^2-3x+1}{x-1}=1 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}; x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}.$.

3.4.4. Уравнение вида $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m}$

Если в уравнении $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ верно равенство $a+b=c+d$, то после объединения множителей $\left(x^2+(a+b)x+ab\right)\left(x^2+(c+d)x+cd\right)=m$ ***сделаем замену*** $x^2+(a+b)x=t$ и получим квадратное уравнение.

Пример. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=8$.

Решение. Заметим, что $1+4=2+3$. Объединим множители так:

$\left((x+1)(x+4)\right)\left((x+2)(x+3)\right)=8$, получим $\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=8$.

Сделаем замену $x^2+5x=t$, получим $(t+4)(t+6)=8 \Rightarrow t^2+10t+16=0$

$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-10\pm 6}{2} \Rightarrow t_1=-2, t_2=-8$. Тогда:

1) $x^2+5x=-2 \Rightarrow x^2+5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$;

2) $x^2+5x=-8 \Rightarrow x^2+5x+8=0 \Rightarrow D=25-32<0 \Rightarrow x\in\varnothing$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

3.4.5. Уравнение вида $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2}$

Если в уравнении $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$ верно равенство $a\cdot b=c\cdot d$, то после объединения множителей $\left(x^2+ab+(a+b)x\right)\left(x^2+cd+(c+d)x\right)=mx^2$ разделим обе части уравнения на $x^2\neq 0$:

$$\frac{x^2+ab+(a+b)x}{x}\cdot\frac{x^2+cd+(c+d)x}{x}=\frac{mx^2}{x^2} \Rightarrow \left(x+\frac{ab}{x}+(a+b)\right)\left(x+\frac{cd}{x}+(c+d)\right)=m.$$

Сделаем замену $x+\dfrac{ab}{x}=t$ и получим квадратное уравнение.

Пример. Решить уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$**.**

Решение. Заметим, что $3\cdot 8=2\cdot 12$. Объединим множители так:

$\big((x+3)(x+8)\big)\big((x+2)(x+12)\big)=4x^2$**,** получим $\left(x^2+24+11x\right)\left(x^2+24+14x\right)=4x^2$**.**

Разделим обе части уравнения на $x^2\neq 0$:

$$\frac{x^2+24+11x}{x}\cdot\frac{x^2+24+14x}{x}=\frac{4x^2}{4x^2}\Rightarrow\left(x+\frac{24}{x}+11\right)\left(x+\frac{24}{x}+14\right)=4.$$

После замены $x+\dfrac{24}{x}=t$ получим: $(t+11)(t+14)=4\Rightarrow t^2+25t+150=0$

$\Rightarrow t_1=-15, t_2=-10$. Тогда:

1) $x+\dfrac{24}{x}=-15\Rightarrow x^2+15x+24=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$ **;**

2) $x+\dfrac{24}{x}=-10\Rightarrow x^2+10x+24=0\Rightarrow x_3=-4, x_4=-6.$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$, $x_3=-4, x_4=-6$.

3.5. Иррациональные уравнения

▲ ***Иррациональное уравнение*** *– это уравнение, в котором неизвестная находится под знаком корня.*

Например, $\sqrt{2x-1}=5$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$ – иррациональные уравнения.

Основной метод решения иррациональных уравнений – это приведение их к рациональным уравнениям. Для этого ***обе части уравнения возводят в одну и ту же степень.***

Следует помнить, что:

1) если возвести обе части иррационального уравнения ***в чётную степень,*** *то получим* ***уравнение-следствие (неравносильное уравнение.)***

При этом могут появиться ***посторонние корни.*** Для их исключения ***необходимо выполнить проверку*** или **найти ОДЗ**;

2) если возвести обе части иррационального уравнения ***в нечётную степень,*** *то получим* ***равносильное (эквивалентное) ему уравнение*** и посторонних корней не будет.

Рассмотрим способы решения иррациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+3}=-1.$

Решение. Так как арифметический корень чётной степени всегда неотрицательный, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2+5x+1}+1-2x=0.$

Решение. Сначала данное уравнение запишем так: $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1.$

Возведём обе части уравнения в квадрат. Получим квадратное уравнение.

$$\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1,$$
$$\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2=(2x-1)^2,$$
$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1,$$
$$3x^2-9x=0\,\big|\div 3,$$
$$x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0,$$
$$x_1=0, x_2=3.$$

Уравнение содержит корни чётной степени, поэтому нужно выполнить проверку полученных решений.

Проверка:

$x_1=0\Rightarrow\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}+1-2\neq 0$

$\Rightarrow x_1=0-$ посторонний корень.

Второй корень $x_2=3$ удовлетворяет условию.

Ответ: $x=3$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$

Решение. Сначала данное уравнение запишем так: $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$

Выполним преобразования:

$$\left(\sqrt{2x-4}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+5}\right)^2,$$
$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5,$$
$$x-10=2\sqrt{x+5},$$
$$(x-10)^2=\left(2\sqrt{x+5}\right)^2,$$
$$x^2-24x+80=0\ \Rightarrow\ x_1=20,\quad x_2=4.$$

Проверка:

а) $x_1=20\Rightarrow\sqrt{2\cdot 20-4}-\sqrt{20+5}=1,$

$6-5=1$ – верно;

б) $x_2=4$

$\Rightarrow\sqrt{2\cdot 4-4}-\sqrt{4+5}=1,$

$2-3=1$ – не верно

$\Rightarrow x_2=4-$ посторонний корень.

Ответ: $x=20$.

Для решения уравнений вида $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=m$ **обе части уравнения надо возвести в куб. При этом удобно применять формулу вида**

$$\boxed{(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)}$$

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4.$

Решение. Обе части уравнения возведём в куб.

$$\left(\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}\right)^3=4^3,$$
$$15+2x+13-2x+3\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}\right)}_{\text{по условию равно 4}}=64,$$
$$\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}=3,$$
$$\left(\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}\right)^3=3^3,$$
$$x^2+x-42=0\Rightarrow x_1=6,\ x_2=-7.$$

Выполним проверку и убедимся, что полученные значения являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1=6,\ x_2=-7.$

Некоторые иррациональные уравнения можно решать **способом замены переменной.**

Пример 5. Решить уравнение $x^2+\left(x^2-9\right)^{0,5}=21$.

Решение.

Данное уравнение запишем иначе,

$\left(x^2-9\right)+\sqrt{x^2-9}=21-9,$

$\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2+\sqrt{x^2-9}=12.$

Сделаем замену:

пусть $y=\sqrt{x^2-9}$, тогда $y^2+y-12=0 \Rightarrow y_1=3,\ y_2=-4.$

1) $\sqrt{x^2-9}=3 \Rightarrow x^2-9=9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2};$

2) $\sqrt{x^2-9}=-4 \Rightarrow$ нет решений

ОДЗ

$x^2-9\geq 0$,

$x\in\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right).$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{5}{2}.$

Решение.

Сделаем замену: пусть $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=t \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=\dfrac{1}{t}$.

Получим $\dfrac{1}{t}+t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2t^2-5t+2=0 \Rightarrow t_1=2, t_2=\dfrac{1}{2}.$

1) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}\right)^3=2^3 \Rightarrow \dfrac{x-1}{12-2x}=8 \Rightarrow x_1=5\dfrac{12}{17};$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x-1}{12-2x}=\dfrac{1}{8} \Rightarrow x_2=2.$

ОДЗ

$\left[\begin{array}{l} x-1\neq 0 \\ 12-2x\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\neq 1, \\ x\neq 6. \end{array}\right.$

Ответ: $x_1=5\dfrac{12}{17};\ x_2=2.$

!! *Слова и словосочетания*

квадратное уравнение	приведенное уравнение
неполное уравнение	дискриминант
формула корней	применять
зависеть	доказательство
теорема	корень трёхчлена
квадратный трёхчлен	замена переменной
биквадратное уравнение	однородное уравнение
следствие	посторонний корень
проверка	иррациональное уравнение

3.6. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными

Для решения систем нелинейных уравнений с двумя переменными используют способ подстановки, способ замены, способ алгебраического сложения и некоторые искусственные приёмы. Рассмотрим их на примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = -1, \\ y^2 - x^4 - y = 4. \end{cases}$

Решение. Используем ***метод подстановки***. Для этого из первого уравнения выразим x^2 через y, получим: $\boxed{x^2 = y - 1}$. Подставим это значение во второе уравнение:

$$y^2 - (y-1)^2 - y = 4 \Rightarrow y^2 - y^2 + 2y - 1 - y = 4 \Rightarrow \boxed{y = 5}.$$

Тогда $x^2 = 5 - 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_{1,2} = \pm 2}$.

Ответ: $(-2;5),(2;5)$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Вынесем за скобки общий множитель в первом уравнении:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ xy + (x+y) = 5. \end{cases}$$

Сделаем ***замену***: $\boxed{xy = u,\ x + y = v}$. Получим систему $\begin{cases} u \cdot v = 6, \\ u + v = 5. \end{cases}$

Отсюда $u_1 = 2, v_1 = 3$ и $u_2 = 3, v_2 = 2$. Тогда: 1) $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 2.$

2) $\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-y)y = 3 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 3 = 0 \to D < 0 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$ решений нет.

Ответ: $(1;2),(2;1)$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + xy + x = 10, \\ y^2 + xy + y = 20. \end{cases}$

Решение. Найдём сумму уравнений данной системы, получим:

$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 30 \Rightarrow (x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$. Значит (по теореме Виета), $x + y = -6$ или $x + y = 5$. Теперь решаем две системы:

1) $\begin{cases} x + y = -6, \\ x^2 + xy + x = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 6, \\ (-y-6)^2 + (-y-6)y - y - 6 = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = -4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + xy + x = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 5, \\ (-y+5)^2 + (-y+5)y - y + 5 = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}; \\ y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

Ответ: $(-2;-4),\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

$\begin{cases} a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = m, \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = n. \end{cases}$ – это система ***однородных уравнений*** второй степени

Для решения такой системы удобно сделать ***замену:*** $\boxed{x = ty}$ (или $\boxed{y = tx}$).

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11, \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$

Решение. Сделаем ***замену*** $\boxed{x=ty}$, потом разделим первое уравнение на второе, получим квадратное уравнение и найдём его корни:

$$\begin{cases} 3(ty)^2+2(ty)y+y^2=11, \\ (ty)^2+2(ty)y+3y^2=17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2y^2+2ty^2+y^2=11, \\ t^2y^2+2ty^2+3y^2=17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left(3t^2+2t+1\right)=11, \\ y^2\left(t^2+2y+3\right)=17; \end{cases} \Big| \div$$

$$\frac{y^2\left(3t^2+2t+1\right)}{y^2\left(t^2+2y+3\right)}=\frac{11}{17} \Rightarrow 17\left(3t^2+2t+1\right)=11\left(t^2+2y+3\right) \Rightarrow 10t^2+3t-4=0.$$

Значит $t_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{169}}{20} \Rightarrow t_1=\dfrac{1}{2}, t_2=-\dfrac{4}{5}$. Теперь не трудно найти y, а потом x:

1) $y^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+3\right)=17 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y_1=-2, y_2=2 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1, x_2=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$

2) $y^2\left(\left(-\frac{4}{5}\right)^2-2\cdot\frac{4}{5}+3\right)=17 \Rightarrow y^2=\frac{25}{3} \Rightarrow y_1=\frac{-5\sqrt{3}}{3}, y_2=\frac{5\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{-4\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $(-1;-2),(1;2),\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{-5\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{-4\sqrt{3}}{3};\frac{5\sqrt{3}}{3}\right).$

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x^2y+xy^2=6. \end{cases}$

Решение. Используем ***искусственный приём***. Умножим первое уравнение на 6, а второе на 7, получим равные свободные члены. Приравняем правые части уравнений и разделим их на $y^3 \neq 0$:

$$\begin{cases} 6x^3-6y^3=42, \\ 7x^2y+7xy^2=42. \end{cases} \Rightarrow 6x^3-6y^3=7x^2y+7xy^2 \,\Big|\div y^3 \Rightarrow \frac{6x^3}{y^3}-6=\frac{7x^2}{y^2}+\frac{7x}{y}.$$

Сделаем замену: $\boxed{\dfrac{x}{y}=t} \Rightarrow 6t^3-7t^2-7t-6=0$ –это симметричное уравнение третьей степени(смотри 3.4.2). Его решение: $t=2$. Значит, $\dfrac{x}{y}=2 \Rightarrow x=2y$. Далее решаем систему:

$$\begin{cases} x=2y, \\ x^3-y^3=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 8y^3-y^3=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$.

!! *Слова и словосочетания*

нелинейное уравнение — искусственный приём

Вопросы и упражнения

1. Что называется уравнением?
2. Что называется корнем уравнения?
3. Что называется областью определения уравнения?
4. Что значит "решить уравнение"?
5. Какие уравнения называются равносильными?
6. Что называется тождеством?
7. Что называется линейным уравнением?
8. Сколько корней может иметь линейное уравнение?
9. Назовите способы решения систем линейных уравнений?

10. Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
11. Какая система линейных уравнений называется: а) совместимой; б) несовместимой; в) определённой; г) неопределённой?
12. Решите уравнения:

а) $|x-4|=3$;
б) $|x-3|=3x+1$;
в) $|x|+|x-1|=x$.
г) $\dfrac{2x+5}{6}+\dfrac{10}{x-3}=\dfrac{2x-3}{6}$;
д) $\dfrac{x^2}{x+5}=\dfrac{25}{x+5}$.

13. При каком значении параметра k система неопределена?

$$\begin{cases}(2k-1)x+ky=6,\\ 7{,}5x+4y=3\end{cases}$$

14. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}12x+16y+1=0,\\ 3x+4y+2=0.\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{4}=11,\\ \dfrac{5x}{12}+\dfrac{y}{3}=19.\end{cases}$ в) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3y-2}{4}=2,\\ \dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{3y+2}{4}=0.\end{cases}$

15. Что называется квадратным уравнением?
16. Какое квадратное уравнение называется: а) приведенным; б) неполным; в) полным?
17. Доказать формулу корней квадратного уравнения.
18. Сколько корней может иметь квадратное уравнение? От чего это зависит?
19. Что называется квадратным трёхчленом? Как его разложить на множители?
20. Что называется биквадратным уравнением? Какой способ его решения?
21. Что называется иррациональным уравнением?
22. Составить квадратное уравнение по его корням: а) x_1 = -7, x_2 = -4; б) $x_{1,2}=\sqrt{2}\pm1$; в) x_1 = -0,3, x_2 = 0,5.
23. Определить знаки корней уравнения с помощью формул Виета:
а) $5x^2 + 17x + 16 = 0$; б) $x^2 + 2x - 1 = 0$.
24. Сократить дробь (использовать формулу разложения квадратного трёхчлена на множители и формулу разности квадратов): а) $\dfrac{2x^2+5x+2}{4-x^2}$; б) $\dfrac{3x^2-7x+2}{8-x^2}$.
25. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{5}{2\tilde{o}+\acute{o}}+\dfrac{4}{2\tilde{o}-3\acute{o}}=5,\\ \dfrac{15}{2\tilde{o}+\acute{o}}+\dfrac{2}{2\tilde{o}-3\acute{o}}=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\tilde{o}^2+\tilde{o}\acute{o}=12,\\ \tilde{o}y-\acute{o}^2=2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\tilde{o}^2-2xy+y^2=1,\\ \tilde{o}+y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+2y=6xy,\\ x+7y=-17xy;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\tilde{o}+\acute{o}-\sqrt{\tilde{o}\acute{o}}=7,\\ \tilde{o}^2+\acute{o}^2+\tilde{o}\acute{o}=133;\end{cases}$ е) $\begin{cases}xy-x=y,\\ \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$

26. Решить уравнения:

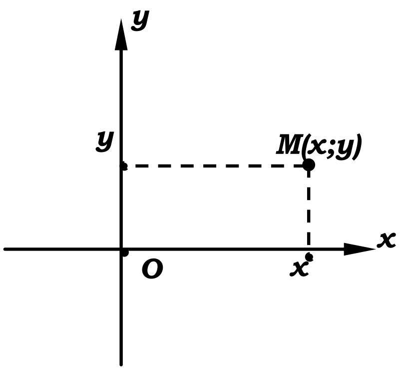
а) $4-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+7)}{x+1}+\dfrac{x-11}{1-x^2}$;
б) $\dfrac{x+1}{4x}-\dfrac{5x-1}{2x-4}=\dfrac{8-x}{3x^2-6x}-\dfrac{x-5}{x-2}$;
в) $x^4-5x^2+4=0$;
г) $4x^4-5x^2+1=0$;
д) $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-2}-9=0$;
е) $x^{0,5}+x^{0,25}=12$;
ж) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;
з) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$;
и) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$;
й) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

Раздел 4
ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

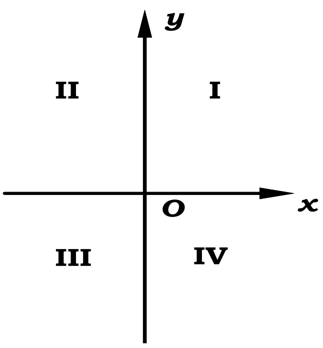
4.1. Определение функции

4.1.1. Декартова* прямоугольная система координат

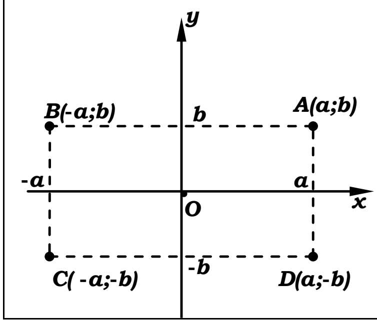
▲ ***Декартова прямоугольная система координат на плоскости***– *это две взаимно препендикулярные оси с общим началом.*

 Прямоугольная система координат	XOY – *координатная плоскость*; точка O – *начало координат*; $\left.\begin{array}{l} Ox \text{ – ось абсцисс;} \\ Oy \text{ – ось ординат} \end{array}\right\}$ оси координат $Ox \perp Oy$ – *ось* Ox *перпендикулярна* оси Oy *;* *ось* Oy *перпендикулярна оси* Ox $\Rightarrow$ Ox *и* Oy *взаимно перпендикулярные оси;* $M(x;y)$ – точка в (на) координатной плоскости ■ Читают: $\boxed{\textit{точка эм с координатами икс и игрек}}$. $\left.\begin{array}{l} x \text{ – абсцисса точки } M; \\ y \text{ – ордината точки } M; \end{array}\right\}$ – координаты точки M

Например, точка $A(2;-3)$ имеет координаты 2 и -3, где 2 – абсцисса, -3 – ордината.

 Четверти координатной плоскости	Координатные оси делят плоскость на четыре части – ***четверти*** (или ***квадранты****)*. I – *перв<u>ая</u>(ый) четверть (квадрант),* II – *втор<u>ая</u>(ой) четверть (квадрант),* III – *трет<u>ья</u>(ий) четверть (квадрант),* IV – *четверт<u>ая</u>(ый) четверть (квадрант).* $x>0, y>0 \Leftrightarrow M(x;y)$ – *точка* I четверти. $x<0, y>0 \Leftrightarrow M(x;y)$ – *точка* II четверти. $x<0, y<0 \Leftrightarrow M(x;y)$ – *точка* III четверти. $x>0, y<0 \Leftrightarrow M(x;y)$ – ***точка* IV четверти.**

Например, точка $A(2;-3)$ лежит в четвёртой четверти.

	Точки $A(a;b)$ и. $B(-a;b)$ ***симметричны относительно оси*** Oy (симметрия относительно оси ординат). Точки $A(a;b)$ и $C(-a;-b)$ ***симметричны относительно точки O*** (симметрия относительно начала координат) Точки $A(a;b)$ и $D(a;-b)$ ***симметричны относительно оси*** Ox (симметрия относительно оси абсцисс).

* Рене Декарт (1596–1650) – французский математик, философ, создатель современных символов алгебры

Например, точки $A(2;-3)$ и $A_1(-2;-3)$ симметричны относительно оси ординат;

точки $A(2;-3)$ и $A_2(-2;3)$ симметричны относительно начала координат;

точки $A(2;-3)$ и $A_3(2;3)$ симметричны относительно оси абсцисс.

▲ ***Декартова прямоугольная система координат в пространстве*** – *это три взаимно перпендикулярные оси с общим началом.*

O – начало координат;

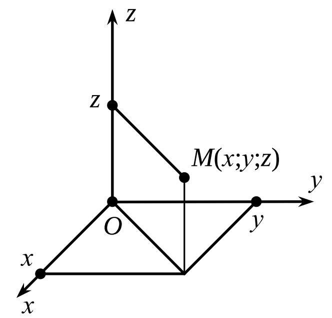
$Ox \perp Oy \perp Oz$ – взаимно перпендикулярные оси

$$\left.\begin{array}{l} Ox - \text{ось абсцисс} \\ Oy - \text{ось ординат} \\ Oz - \text{ось аппликат} \end{array}\right\} \text{оси координат}$$

$M(x;y;z)$ – точка в пространстве,

■ Читают: *точка эм с координатами икс, игрек, зет*

$$\left.\begin{array}{l} x - \text{абсцисса точки } M; \\ y - \text{ордината точки } M; \\ z - \text{аппликата точки } M. \end{array}\right\} - \begin{array}{c}\text{координаты} \\ \text{точки } M.\end{array}$$



Прямоугольная система координат в пространстве

В дальнейшем будем рассматривать систему координат в плоскости.

4.1.2. Понятие функции. Способы задания функций

▲ ***Функция*** – *это соответствие, между элементами множеств D и E, при котором каждому элементу* ***x*** *из множества D ($x \in D$) соответствует только один элемент* ***y*** *из множества E.*

Функцию записывают так: $y = f(x)$.

■ Читают: *игрек равен эф от икс*.

Здесь x – *аргумент* или *независимая переменная,*

y – *функция* или *зависимая переменная.*

Например, $y = \sqrt{x}$ – функция, т.к. каждому значению x соответствует только одно значение y ($x = 4 \Rightarrow y = 2;\ x = 9 \Rightarrow y = 3...$);

$y = -\sqrt{x}$ – также функция ($x = 4 \Rightarrow y = -2;\ x = 9 \Rightarrow y = -3...$);

$y = \pm\sqrt{x}$ – не функция, т.к. каждому значению x соответствует больше, чем одно значение y ($x = 4 \Rightarrow y = \pm 2;\ x = 9 \Rightarrow y = \pm 3...$).

▲ ***Область определения функции (D(f))*** – *это множество значений аргумента x, при которых функция имеет смысл.*

▲ ***Область значений функции (E(f))*** – *это множество значений, которые может принимать (иметь) функция y.*

Пример. Найти область определения и область значений функции $y = \dfrac{1}{x-1}$.

Решение. Функция существует, при любых значениях x, кроме $x = 1$.

Значит, $D(f) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Чтобы найти $E(f)$, выразим x через y: $x = 1 + \dfrac{1}{y}$.

Значение y, не может быть равным нулю ($y \neq 0$). Значит, $E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$ надо:

1) установить область определения $D(f)$;

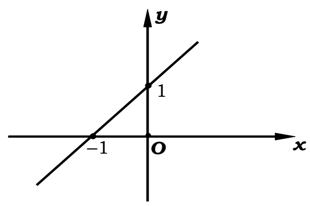
2) задать закон соответствия, по которому для каждого $x \in D(f)$ можно найти число y.

Основные способы задания функции

1) ***аналитический*** *способ* – функцию задают с помощью формулы;
2) ***табличный*** *способ* – функцию задают с помощью таблицы*;*
3) ***графический*** – функцию задают с помощью графика.

▲ ***График функции*** $y = f(x)$ *в прямоугольной системе координат – это изображение на координатной плоскости множества всех точек с координатами* $(x; f(x))$, *где* $x \in D(f)$.

Пример

<table>
<tr><th>Аналитический способ</th><th>Табличный способ</th><th>Графический способ</th></tr>
<tr>
<td>$y = x + 1$
Формула</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>Таблица</td>
<td>
График</td>
</tr>
</table>

Функцию можно задать и другими способами: стрелками, парами чисел, словами, но эти способы в математике почти не используют.

‼ *Слова и словосочетания*

функция	график функции
аргумент	плоскость
независимая переменная	пространство
зависимая переменная	координата
соответствие	абсцисса
соответствовать	ордината
область определения функции	аппликата
область значений функции	задавать
система координат	аналитический способ
квадрант	графический способ
четверть	табличный способ
симметрия	стрелка
относительно	пара чисел

4.2. Свойства функции

4.2.1. Чётные и нечётные функции

▲ *Числовое множество* X *называется* ***симметричным****, если для любого* $x \in X$ *число* $-x \in X$.

Например, множество целых чисел $(2 \in Z, -2 \in Z)$, отрезок $[-a; a]$, интервал $(-a; a)$, интервал $(-\infty; \infty)$ – это множества, симметричные относительно начала координат.

▲ *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***чётной функцией****, если её область определения* $D(f)$ *симметрична относительно начала координат и для любого* $x \in D(f)$ *выполняется равенство* $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

Например, функция $y(x) = x^4$ чётная, потому что:

$x \in D(y)$, $-x \in D(y)$ и $y(-x) = (-x)^4 = x^4 = y(x) \Rightarrow y(-x) = y(x)$.

!! График чётной функции симметричен относительно оси ординат (OY) !!

▲ *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***нечётной функцией****, если ее область определения* $D(f)$ *симметрична относительно начала координат и для любого* $x\in D(f)$ *выполняется равенство* $\boxed{f(-x)=-f(x)}$.

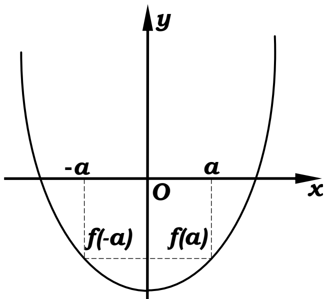
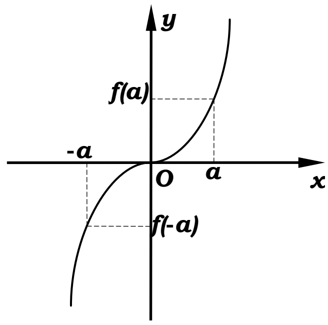
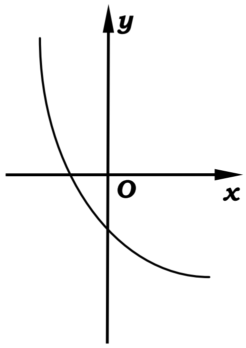
Например, функция $y(x)=x^3$ нечётная, потому что:

$x\in D(y)$, $-x\in D(y)$ и $y(-x)=(-x)^3=-(x^3)=-y(x)\Rightarrow y(-x)=-y(x)$.

!! График нечётной функции симметричен относительно начала координат !!

▲ *Функция, которая не является ни чётной, ни нечётной, называется* ***функцией общего вида****.*

Например, функция $y(x)=2x-1$ – это функция общего вида. Действительно, $x\in D(y)$ и $-x\in D(y)$. Но $y(-x)=2(-x)-1=-2x-1\neq y(x)$ и $y(-x)=2(-x)-1=-(2x+1)\neq -y(x)$.

График чётной функции	График нечётной функции	График функции общего вида
$f(-x)=f(x)$  симметрия относительно оси Оу	$f(-x)=-f(x)$  симметрия относительно точки О	$f(-x)\neq\pm f(x)$  нет симметрии относительно оси Оу и точки О

4.2.2. Периодические функции

▲ Ф*ункция* $y=f(x)$ *называется* ***периодической функцией****, если существует такое число* $\omega>0$, *что выполняется равенство*

$$\boxed{f(x+\omega)=f(x)=f(x-\omega)},$$

где $x\in D(f)$, $(x-\omega)\in D(f)$ и $(x+\omega)\in D(f)$.

Число $\omega>0$ – ***период*** функции $y=f(x)$.

Число $T=\min\omega$ – ***наименьший положительный период*** функции $y=f(x)$.

Пример

$y=\sin x$ – периодическая функция, так как $y=\sin(x+2\pi n)=\sin x$ $(n\in Z)$.

Период – $\omega=2\pi n(n\in Z, n\neq 0)$□, наименьший положительный период – $T=2\pi$.

4.2.3. Точки пересечения графика функции с осями координат. Интервалы знакопостоянства

▲ ***Точка пересечения графика*** *функции* $y=f\left(x\right)$ ***с осью*** Oy *имеет координаты:*

$$\boxed{\left(0;f(0)\right)}.$$

Пример. Определить координаты точки пересечения графика функции $y=x^2-2x-6$ с осью ординат.

Решение. $x=0\Rightarrow y(0)=0^2-2\cdot 0-6=-6.$

Ответ: (0;-6).

▲ ***Нуль функции*** *– это такое действительное значение аргумента, при котором функция равна нулю*

$$\boxed{f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0 \text{ – нуль функции}}$$

Пример. Найти нули функций: 1) $y=x+1$, 2) $y=x^2-6x+8$, 3) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Решение. Чтобы найти нули функции $y=f\left(x\right)$, надо решить уравнение $f\left(x\right)=0$.

1) $y=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$– нуль функции;

2) $y=0\Rightarrow x^2-6x+8\Rightarrow x_1=2,\ x_2=4$– нули функции;

3) $y=0\Rightarrow \dfrac{x-2}{x+2}=0\Rightarrow x=2$– нуль функции.

Ответ: 1) -1; 2) 2 и 4; 3) 2.

▲ ***Точки пересечения графика*** *функции* $y=f\left(x\right)$ ***с осью*** Ox *имеют координаты:*

$\boxed{\left(x_i;0\right)}$, где x_i – <u>нули функции</u> $y=f\left(x\right)$.

Геометрический смысл нулей функции

Нули функции – это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось OX или касается её.

На рис.1 показан график функции $y=f\left(x\right)$. Здесь x_1,x_2,x_3,x_4 – нули функции, так как $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)=f\left(x_4\right)=0$.

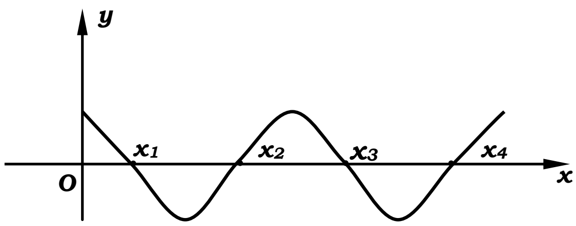


Рис. 1

Можно видеть, что:

$f\left(x\right)<0$ (функция отрицательная) на интервалах $\left(x_1;x_2\right)$ и $\left(x_3;x_4\right)$;

$f\left(x\right)>0$ (функция положительная) на интервале $\left(x_2;x_3\right)$.

То есть, при переходе через нули функция изменяет знак

▲ ***Интервалы знакопостоянства*** – это *интервалы, на которых знак функции не изменяется.*

!! Чтобы определить знак функции для всех точек интервала знакопостоянства, достаточно определить знак функции в одной точке этого интервала !!

Пример. Найти интервалы знакопостоянства функции $f\left(x\right)=x^2-3x-4$.

Решение. Область определения $D\left(f\right)=\left(-\infty;+\infty\right)$.

Нули функции: $x^2-3x-4=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=4$.

Нули разбивают ось Ox на интервалы: $(-\infty;-1)$, $(-1;4)$, $(4;+\infty)$ – это и есть интервалы знакопостоянства. Определим знак функции в каждом интервале. Для этого возьмём произвольные точки из каждого интервала и определим знаки функции в этих точках. Такие же знаки будут и в соответствующих этим точкам интервалах.

1) $x\in(-\infty;-1)$, $f(-2)=(-2)^2-3(-2)-4=6>0 \Rightarrow f(x)>0$ на интервале $(-\infty;-1)$;

2) $x\in(-1;4)$, $f(0)=0^2-3\cdot 0-4=-4<0 \Rightarrow f(x)<0$ на интервале $(-1;4)$

3) $x\in(4;+\infty)$, $f(10)=10^2-3\cdot 10-4=66>0 \Rightarrow f(x)>0$ на интервале $(4;+\infty)$;

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)\Rightarrow f(x)>0$; $x\in(-1;4)\Rightarrow f(x)<0$.

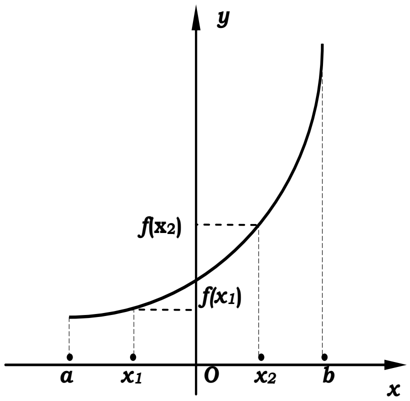
4.2.4. Монотонные функции

Возрастающая функция

▲ *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***возрастающей*** *(□)* ***на промежутке*** $(a;b)$, *если для любых* $x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_2>x_1$ *выполняется неравенство* $f(x_2)>f(x_1)$

$$\boxed{x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)}$$

!! ***большему*** *значению аргумента* ***соответствует большее*** *значение функции!!*

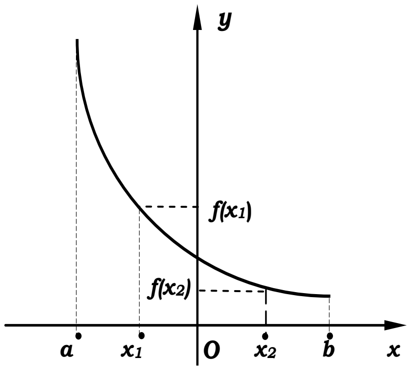


Убывающая функция

▲ *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***убывающей*** *(□)* ***на промежутке*** $(a;b)$, *если для любых* $x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_2>x_1$ *выполняется неравенство* $f(x_2)<f(x_1)$

$$\boxed{x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)}$$

!! ***большему*** *значению аргумента* ***соответствует меньшее*** *значение функции!!*



▲ Функция $y=f(x)$ *называется* ***монотонной на данном числовом промежутке,*** *если она на этом промежутке* ***только возрастает*** *или* ***только убывает***

Пример. Исследовать на монотонность функцию $f(x)=2x+3$.

Решение. Область определения функции $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Пусть $x_1, x_2 \in D(f)$,

$\Rightarrow$ $f(x_1)=2x_1+3$, $f(x_2)=2x_2+3$. Составим разность $f(x_2)-f(x_1)=2(x_2-x_1)$.

Пусть $x_2>x_1$, тогда $x_2-x_1>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$.

Ответ: функция возрастает на всей области определения.

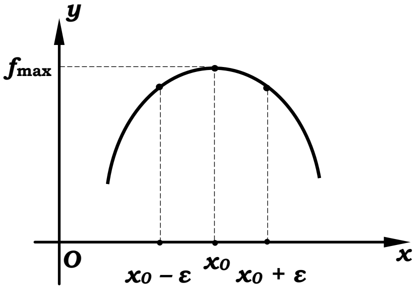
4.2.5. Экстремумы функции

▲ ε *–* ***окрестность*** *точки* x_0 *– это интервал* $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

■ Знак ε читают: *эпсилон.*

Пусть некоторая точка x находится в ε-окрестности точки x_0.

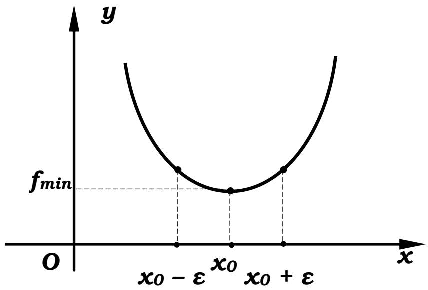
Это можно записать так: $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ или $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$, или $|x-x_0|<\varepsilon$.



▲ *Функция* $f(x)$ *имеет* ***максимум*** *в точке* x_0 *если в некоторой* ε*-окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0), x \neq x_0$.

$\boxed{x_0 \text{ – } \textbf{\textit{точка максимума}}}$

$f_{\max}(x) = f(x_0)$ – значение ***максимума функции***.



▲ *Функция* $f(x)$ *имеет* ***минимум*** *в точке* x_0 *если в некоторой* ε*-окрестности точки* x_0 *выполняется неравенство* $f(x) > f(x_0), x \neq x_0$.

$\boxed{x_0 \text{ – } \textbf{\textit{точка минимума}}}$

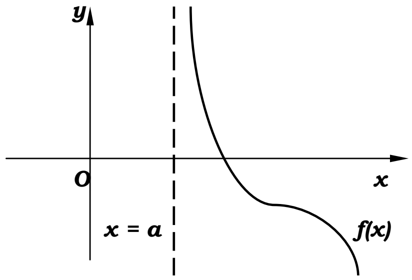
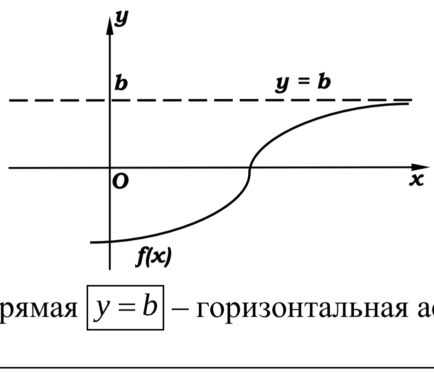
$f_{\min}(x) = f(x_0)$ – значение ***минимума функции***.

▲ ***Точки экстремума функции*** *– это точки минимума и максимума функции, а значения функции в этих точках – это* ***экстремумы функции***.

4.2.6. Асимптоты графика функции

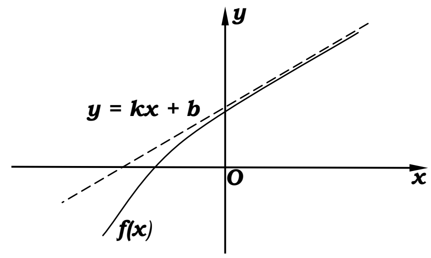
▲ ***Асимптота – это прямая****, к которой как угодно близко приближается график функции, но никогда не пересекает её.*

Есть ***вертикальные*** $(\,|\,)$, ***горизонтальные*** $(-)$ и ***наклонные*** $(\,/\,)$ асимптоты.

 Прямая $\boxed{x = a}$ – вертикальная асимптота	▲ Если $x \to a,\ y \to \pm\infty \Rightarrow$ $\boxed{x = a}$ – ***вертикальная асимптота***. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \iff \underset{\text{вертикальная асимптота}}{x = a}$
 Прямая $\boxed{y = b}$ – горизонтальная асимптота	▲ Если $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), $y \to b$ $\Rightarrow \boxed{y = b}$ – ***горизонтальная асимптота***. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \iff \underset{\text{горизонтальная асимптота}}{y = b}$

■ Знак $\lim$ читают: *предел* или *лимит*.

▲ *Если существуют такие числа* k *и* b, *что* $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$, *тогда прямая* $\boxed{y=kx+b}$ – ***наклонная асимптота*** *графика функции* $y=f(x)$.



$\boxed{y=kx+b}$ – наклонная асимптота

‼ *Слова и словосочетания*

симметричное множество
симметрия относительно + (чего?)
чётная функция
нечётная функция
функция общего вида
периодическая функция
период функции
возрастающая функция
убывающая функция
монотонная функция
ε-окрестность точки
геометрический смысл
точка максимума
максимум функции
точка минимума
минимум функции
экстремум
точка экстремума
точка пересечения
нуль функции
интервалы знакопостоянства
вертикальная асимптота
горизонтальная асимптота
наклонная асимптота

4.3. Обратная функция

Пусть задана функция $y=f(x)$.

Её область определения– $D(f)$. Область значений – $E(f)$.

▲ *Если каждому* $y\in E(f)$ *соответствует одно значение* x *такое, что* $f(x)=y$, *то это соответствие есть функция* $x=\varphi(y)$, *которая называется* ***обратной*** *для функции* $y=f(x)$.

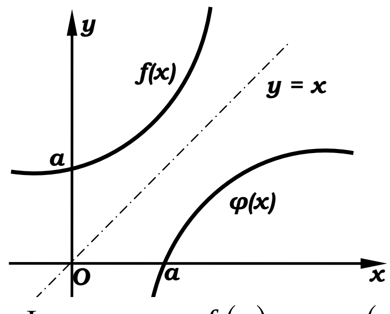
У всякой функции $f(x)$, монотонной на $D(f)$, существует обратная функция $\varphi(x)$.

$\boxed{f(x)\,\text{обратна}\,\varphi(x)\ \text{и}\ \varphi(x)\,\text{обратна}\,f(x)\ \Leftrightarrow\ f(x)\,\text{и}\,\varphi(x)\ – \textit{взамно обратные функции}}$

Если $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ – взаимно обратные функции тогда:

область определения функции $f(x)$ есть областью значений функции $\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{D(f)=E(\varphi)}$;

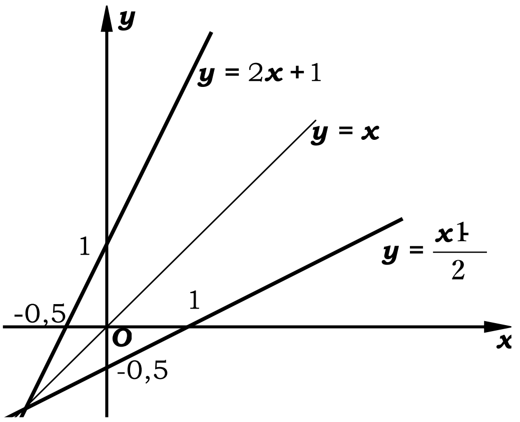
область значений функции $f(x)$ есть областью определения функции $\varphi(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(f)=D(\varphi)}$



Функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ взаимно обратные

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой y = x.

Чтобы найти формулу функции, обратной для функции $y=f(x)$ надо: 1) выразить x через y ($x=\varphi(y)$); 2) заменить обозначения x на y и y на x ($y=\varphi(x)$).



Пример

Найти функцию, обратную для $y=\dfrac{x-1}{2}$.

Решение. Выразим x через y: $x=2y+1$.

Заменим x на y, y на x: $y=2x+1$.

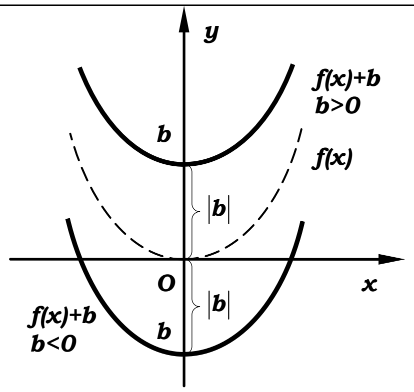
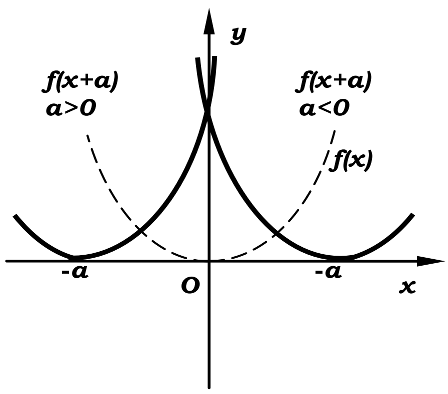
Ответ: $y=\dfrac{x-1}{2}$ и $y=2x+1$ – взаимно обратные функции.

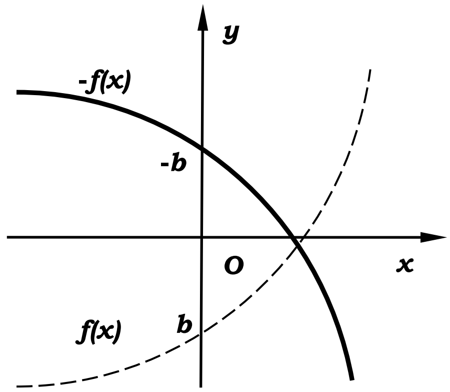
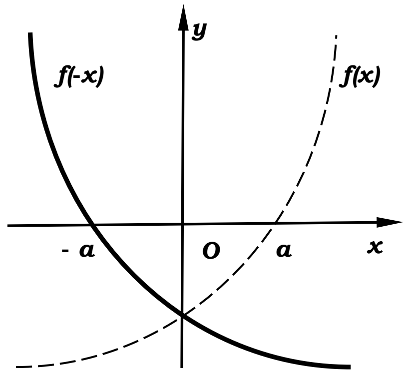
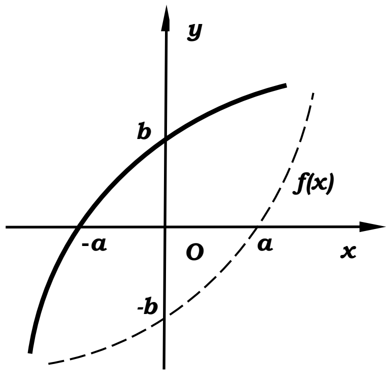
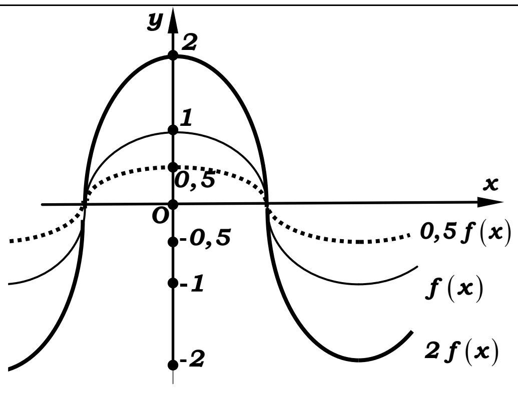
‼ *Слова и словосочетания*

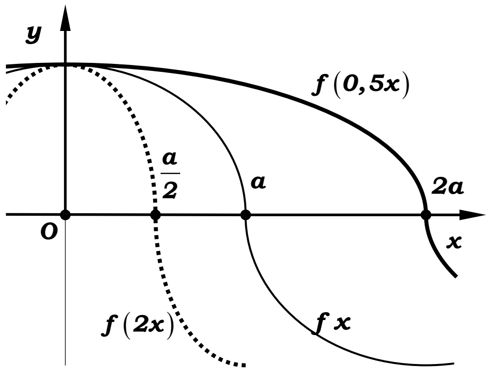
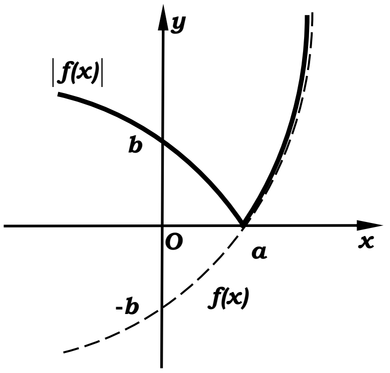
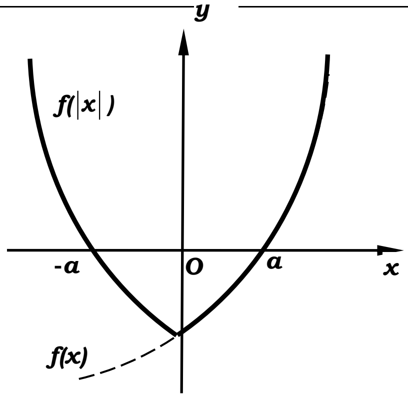
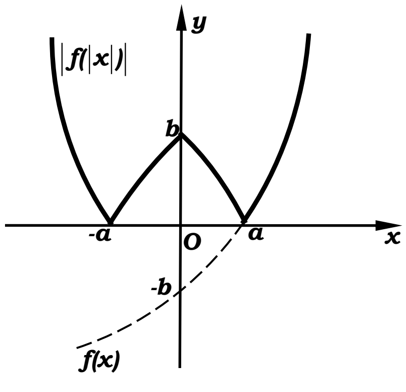
обратная функция   взаимно обратные функции

4.4. Геометрические преобразования графиков функций

Если есть график функции $y=f\left(x\right)$, то с помощью некоторых преобразований можно построить график более сложных функций.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1. $\boxed{f\left(x\right)\ \textbf{\textit{преобразовать в}}\ f\left(x\right)+b}$
⇕
параллельный перенос (сдвиг) графика функции $f\left(x\right)$ по оси ординат (Oy) на $\left|b\right|$ единиц:
если $b>0$ – вверх $\left(\uparrow\right)$;
если $b<0$ - вниз $\left(\downarrow\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>2. $\boxed{f\left(x\right)\ \textbf{\textit{преобразовать в}}\ f\left(x+a\right)}$
⇕
параллельный перенос (сдвиг) графика функции $f\left(x\right)$ по оси абсцисс (Ox) на $\left|a\right|$ единиц:
если $a>0$ – влево $\left(\leftarrow\right)$;
если $a<0$ - вправо $\left(\rightarrow\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">3. $f\left(x\right)$ преобразовать в $f\left(x+a\right)+b$
Сделать два предыдущих преобразования в любой последовательности.</td>
</tr>
</table>

4. $\boxed{f(x)\ \textit{\textbf{преобразовать в}}\ -f(x)}$ $\Updownarrow$ график функции $f(x)$ ***симметрично отобразить относительно оси абсцисс (Ox)***.	
5. $\boxed{f(x)\ \textit{\textbf{преобразовать в}}\ f(-x)}$ $\Updownarrow$ график функции $f(x)$ ***симметрично отобразить относительно оси ординат*** (***Oy***).	
6. $\boxed{f(x)\ \textit{\textbf{преобразовать в}}\ -f(-x)}$ $\Updownarrow$ график функции $f(x)$ ***симметрично отобразить относительно начала координат*** (точки O).	
7. $\boxed{f(x)\ \textit{\textbf{преобразовать в}}\ m\cdot f(x)}$ $\Updownarrow$ график функции $f(x)$ ***вдоль оси*** Oy ***растянуть*** в m раз при $m>1$ и ***сжать*** **в** $\dfrac{1}{m}$ **раз при** $0<m<1$	

	**8.** $\boxed{f\left(x\right) \textit{ преобразовать в } f\left(kx\right)}$ $\Updownarrow$ график функции $f\left(x\right)$ ***вдоль оси*** Ox ***сжать в*** k ***раз*** при $k>1$ и ***растянуть в*** $\dfrac{1}{k}$ при $0<k<1$
	**9.** $\boxed{f\left(x\right) \textit{ преобразовать в } \left\|f\left(x\right)\right\|}$ Из определения модуля следует: $\left\|f(x)\right\| = \begin{cases} f(x), & \text{åñëè } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{åñëè } f(x) < 0. \end{cases} \Rightarrow$ ***часть графика*** $f\left(x\right)$***, где*** $y \geq 0$***,*** ***не изменять,*** ***часть графика, где*** $y<0$***,*** ***симметрично отобразить относительно оси*** Ox.
	**10.** $\boxed{f\left(x\right) \textit{ преобразовать в } f\left(\left\|x\right\|\right)}$ Из определения модуля следует: $f\left(\left\|x\right\|\right) = \begin{cases} f(x), & \text{åñëè } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{åñëè } x < 0. \end{cases} \Rightarrow$ ***часть графика*** $f\left(x\right)$***, где*** $x \geq 0$***, не изменять и симметрично отобразить относительно оси*** Oy***,*** ***остальную часть графика, где*** $x<0$***, удалить***
	**11.** $\boxed{f\left(x\right) \textit{ преобразовать в } \left\|f\left(\left\|x\right\|\right)\right\|}$ $\Updownarrow$ выполнить два предыдущих преобразования (9, 10) в любой последовательности. $\left\|f\left(\left\|x\right\|\right)\right\| \geq 0$ и $y = \left\|f\left(\left\|x\right\|\right)\right\|$ – чётная и неотрицательная функция $\Rightarrow$ её график симметричен относительно оси ординат (Oy) и находится в верхней полуплоскости.

‼ *Слова и словосочетания*

геометрическ<u>ий</u> (*ая,ое,ие*)	вдоль + (*чего?*)
преобразовани<u>е</u> (*я*)	последовательност<u>ь</u> (*и*)
параллельный перенос	сжатие
сдвиг (*и*)	растяжение
симметрично отобразить	предыдущ<u>ий</u> (*ая,ее,ие*)

4.5. Линейная функция

4.5.1. Прямая пропорциональность

▲ ***Прямая пропорциональность*** *– это функция вида* $\boxed{y = kx}$, *где* $k \neq 0$.

Число k – *коэффициент пропорциональности.*

Например, функция $y = -2x$ – это прямая пропорциональность, -2 – коэффициент пропорциональности.

Свойства функции $\boxed{y = kx}, k \neq 0$

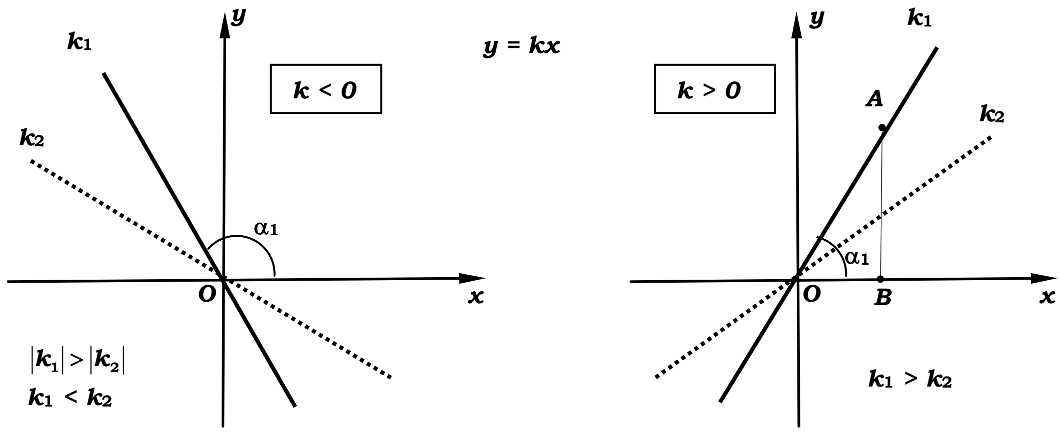
1. Область определения: $D(f) = (-\infty; +\infty)$,
2. Область значений: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
3. $y(-x) = -kx = -(kx) = -y(x) \Rightarrow$ нечётная функция $\Rightarrow$ её график симметричен относительно начала координат.
4. Нули функции: $y = 0 \Rightarrow kx = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow$ нуль функции. График функции пересекает оси координат в точке $O(0;0)$.
5. Интервалы знакопостоянства:

   если $\underline{k > 0} \Rightarrow y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$

   если $\underline{k < 0} \Rightarrow y < 0$ при $x > 0$; $y > 0$ при $x < 0$
6. Монотонность функции:

   если $\underline{k > 0} \Rightarrow$ функция *возрастает* (□) на всей области определения;

   если $\underline{k < 0} \Rightarrow$ функция *убывает* (□) на всей области определения.
7. Функция не имеет экстремума.
8. ***График*** функции – ***прямая*** линия.



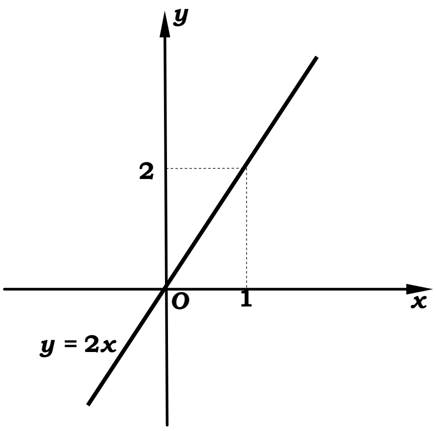
α – *угол между положительным направлением оси Ox (оси абсцисс)* и *графиком функции* $y = kx$

Из треугольника $OAB \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{kx}{x} = k \Rightarrow tg\alpha = k$.

■ Знак $tg\alpha$ читают: *тангенс альфа.*

▲ *Число* $\boxed{k = tg\alpha}$ *– это* ***угловой коэффициент*** *прямой* $y = kx$.

Угловой коэффициент равен тангенсу угла α *между прямой* $y = kx$ *и положительным направлением оси* Ox.



Пример

Построить график функции $y = 2x$.

Решение. Чтобы построить прямую, достаточно найти две ее точки и провести через них прямую.

Заполним таблицу и построим график:

x	0	1
y	0	2

4.5.2. Линейная функция

▲ ***Линейная функция*** *– это функция вида* $\boxed{y = kx + b}$, $k \neq 0, b \neq 0$.

Например, функция $y = 3x - 4$ – это линейная функция, где $k = 2, b = -4$.

Свойства функции $\boxed{y = kx + b}$ $k \neq 0, b \neq 0$

1. Область определения: $D(f) = R$ – множество действительных чисел.
2. Область значений: $E(f) = R$.
3. $y(-x) \neq \pm y(x)$ $\Rightarrow$ функция общего вида.
4. Нули функции: $y = 0 \Rightarrow kx + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{b}{k}} \Rightarrow$ нуль функции. Точки пересечения

графика с осями координат: $(0; b)$ и $\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$.

5. Интервалы знакопостоянства:

   если $\underline{k > 0}$ $\Rightarrow$ $y > 0$ при $x > -\dfrac{b}{k}$; $y < 0$ при $x < -\dfrac{b}{k}$;

   если $\underline{k < 0}$ $\Rightarrow$ $y < 0$ при $x > -\dfrac{b}{k}$; $y > 0$ при $x < -\dfrac{b}{k}$.

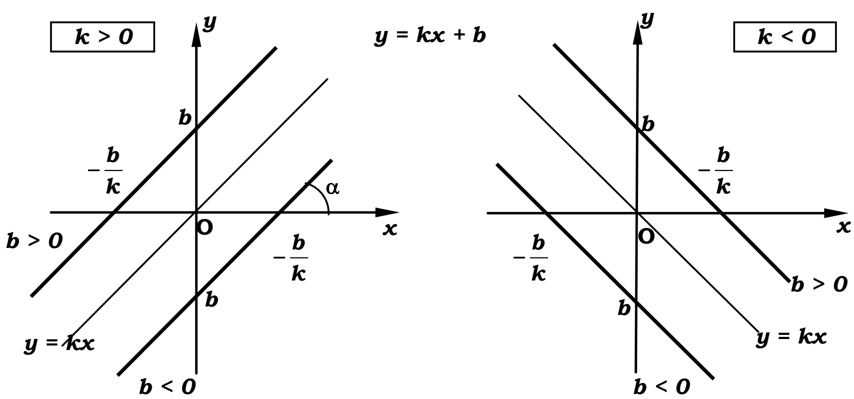
6. Монотонность функции:

   если $\underline{k > 0}$ $\Rightarrow$ функция *возрастает* ( ) на всей области определения;

   если $\underline{k < 0}$ $\Rightarrow$ функция *убывает* ( ) на всей области определения.

7. Функция не имеет экстремума.
8. ***График*** функции $\boxed{y = kx + b}$ – ***прямая*** линия,

где $\boxed{k = tg\alpha \text{ – } \textit{\textbf{угловой коэффициент}} \text{ прямой}}$



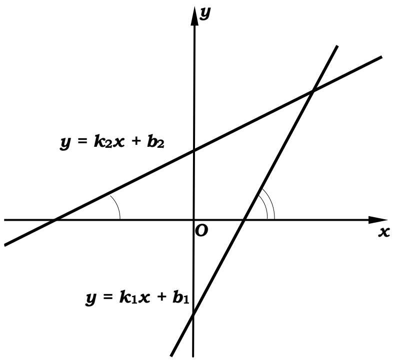
Обычно график линейной функции $y = kx + b$ строят по двум точкам ($(0;b)$ и $\left(-\frac{b}{k};0\right)$) или параллельным переносом графика $y = kx$ вдоль оси Oy на $|b|$ единиц.

Пусть заданы две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

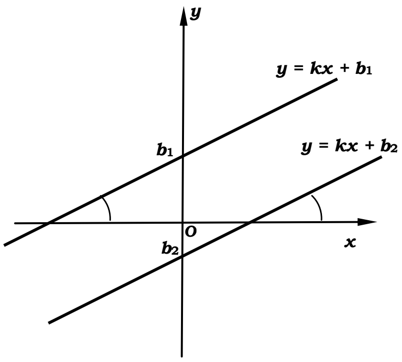
Если $\boxed{k_1 \neq k_2}$ $\Leftrightarrow$ прямые ***пересекаются*** (рис. 2, *а*).

Если $\boxed{k_1 = k_2 = k}$ и $\boxed{b_1 \neq b_2}$ $\Leftrightarrow$ прямые ***параллельны*** $(||)$ (рис. 2, *б*).

Если $\boxed{k_1 = k_2 = k}$ и $\boxed{b_1 = b_2}$ $\Leftrightarrow$ прямые ***совпадают***.



а



б

Рис. 2

Мы рассмотрели функцию $y = kx + b$ и её свойства при условии, что $k \neq 0, b \neq 0$. Возможны и другие случаи.

Если $b = 0, k \neq 0$, тогда $y = kx$ – это ***прямая пропорциональность***.

Если $b \neq 0, k = 0$, тогда $\boxed{y = b}$ – это ***постоянная функция***. График постоянной функции – горизонтальная прямая (прямая параллельна оси Ox), которая пересекает ось Oy в точке $(0;b)$ (рис. 3).

Если $b = k = 0$, тогда $\boxed{y = 0}$ – постоянная функция. Её график – прямая, которая совпадает с осью Ox (рис. 3).

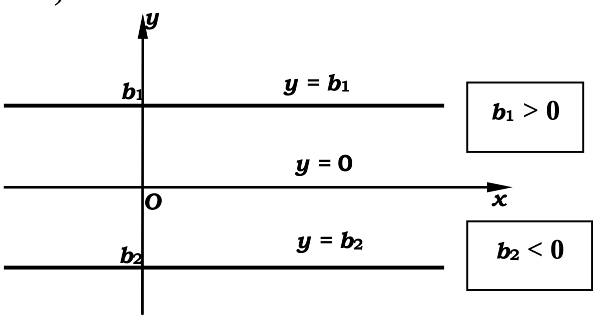


Рис. 3

‼ *Слова и словосочетания*

линейная функция	проводить (*inf*), провести
прямая	строить (*inf*), построить
прямая пропорциональность	постоянная функция
угол между (*чем?*) и (*чем?*)	горизонтальная прямая
треугольник (*и*)	прямые совпадают
угловой коэффициент	прямые параллельны
достаточно	прямые пересекаются

4.6. Дробно-линейная функция

4.6.1. Обратная пропорциональность

▲ ***Обратная пропорциональность*** *– это функция вида* $\boxed{y=\frac{k}{x}}$, $k\neq 0$.

$k\neq 0$ - *коэффициент обратной пропорциональности.*

Например, $y=-\frac{3}{x}$ – это обратная пропорциональность, где $k=-3$ – её коэффициент.

Свойства функции $\boxed{y=\frac{k}{x}}$, $k\neq 0$

1. Область определения: $x\neq 0 \Rightarrow D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Множество значений: $y\neq 0 \Rightarrow E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3. $y(-x)=\frac{k}{-x}=-\left(\frac{k}{x}\right)=-y(x) \Rightarrow$ ***нечётная*** функция $\Rightarrow$ её график симметричен относительно начала координат.

4. Нули функции: ***нулей нет*** (не существует таких значений x при которых $y=0$). График функции не имеет точек пересечения с осями координат ($y\neq 0, x\neq 0$).

5. Интервалы знакопостоянства:
 если $\underline{k>0}$ $\Rightarrow$ $y>0$ при $x>0$; $y<0$ при $x<0$
 если $\underline{k<0}$ $\Rightarrow$ $y<0$ при $x>0$; $y>0$ при $x<0$

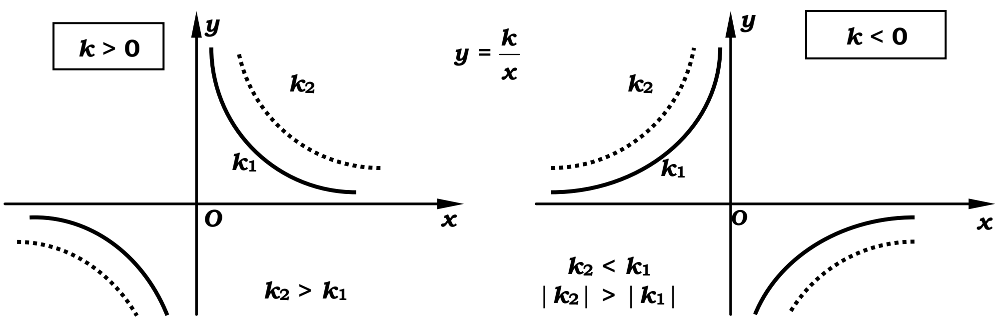
6. Монотонность:
 если $\underline{k>0} \Rightarrow$ функция *убывает* (□) на каждом из интервалов $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$;
 если $\underline{k<0}$ $\Rightarrow$ функция *возрастает* (□) на каждом из интервалов $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

7. Функция не имеет экстремумов.

8. График функции имеет две асимптоты:
 если $x\to\pm\infty \Rightarrow y\to 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ – ***горизонтальная*** асимптота;
 если $x\to 0 \Rightarrow y\to\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=0}$ – ***вертикальная*** асимптота.

9. График функции $\boxed{y=\frac{k}{x}}$ – ***гипербола*** *(кривая линия)*. Она имеет две части – ***ветви***.

Ветви гиперболы симметричны относительно начала координат:
 если $\underline{k>0}$ $\Rightarrow$ ветви гиперболы лежат в I и III четвертях;
 если $\underline{k<0}$ $\Rightarrow$ ветви гиперболы лежат во II и IV четвертях.



▲ ***Вершина гиперболы*** *– это точка пересечения асимптот.*

Вершина гиперболы $y=\frac{k}{x}$ лежит в точке с координатами $(0;0)$.

4.6.2. Дробно-линейная функция

▲ ***Дробно-линейная функция*** *– это функция вида* $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, где $c\neq 0,\ ad\neq bc$.

Выполним преобразования:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\cdot\left(\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}\cdot\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Пусть $k=\dfrac{bc-ad}{c^2},\ \dfrac{a}{c}=\alpha,\ \dfrac{d}{c}=\beta.$ Тогда, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{k}{x+\alpha}+\beta$.

Значит, график дробно-линейной функции $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ можно получить *с помощью параллельного переноса* графика функции $\boxed{y=\dfrac{k}{x}}$ на α единиц вдоль оси Ox *и* β единиц вдоль оси Oy (*сдвиг на вектор* $\vec{e}\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$).

График дробно линейной функции $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ *– **гипербола.***

Характеристические элементы гиперболы $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$ *– вертикальная асимптота*; $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$ *– горизонтальная асимптота;*
$O'\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ *– вершина**
$\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$ *и* $\left(-\dfrac{b}{c};0\right)$ *– точки пересечения с координатными осями*

Докажем, что $x=-\dfrac{d}{c}$ – вертикальная асимптота; $y=\dfrac{a}{c}$ – горизонтальная асимптота.

Доказательство.

Находим $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty$, тогда $x=-\dfrac{d}{c}$ – вертикальная асимптота.

Находим $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}=\dfrac{a}{c}$, тогда $y=\dfrac{a}{c}$ – горизонтальная асимптота.□

Чтобы построить график функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, *достаточно:*

1) определить и построить асимптоты графика;

2) найти и построить точки пересечения с координатными осями. Затем построить симметричные им точки относительно вершины гиперболы.

---

* ■ Читают O': *о штрих*.

Пример 1. Построить график функции $y=\dfrac{2-x}{x+2}$.

Решение. 1). Найдём асимптоты графика функции: $y=\dfrac{2-x}{x+2}=-1+\dfrac{4}{x+2}$.

$x=-2$ – вертикальная асимптота, $y=-1$ – горизонтальная асимптота.

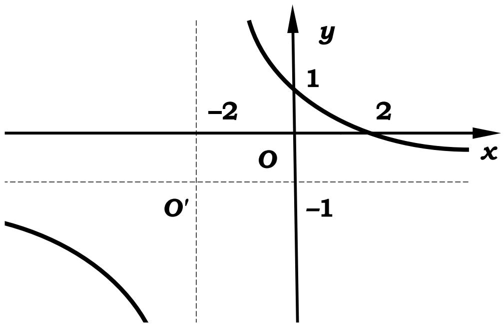
$(-2;-1)$ – координаты вершины гиперболы.

2). Определим точки пересечения графика функции с координатными осями:

$x=0\Rightarrow y=\dfrac{2-0}{0+2}=1\Rightarrow\ (0;1)$ – координаты точки пересечения с Oy;

$y=0\Rightarrow\dfrac{2-x}{x+2}=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2;0)$ – координаты точки пересечения с Ox.

3). Построим график:

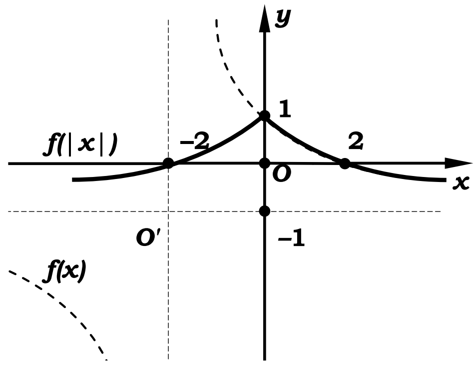


Пример 2. Построить график функции $y=\dfrac{2-|x|}{|x|+2}$.

Решение. 1). Построим гиперболу $y=\dfrac{2-x}{x+2}$ (смотри пример 1).

2). Так как $y(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$, тогда $ó\left(|x|\right)=\dfrac{2-|x|}{|x|+2}$. Выполним преобразование графика функции $y(x)$ в график $y\left(|x|\right)$ (п.4.4.). Часть графика $y=\dfrac{2-x}{x+2}$, где $x\geq 0$, оставим без изменений и симметрично отобразим относительно оси Oy.Остальную часть графика, где $x<0$, удалим.

3). Построим график с учётом, что $y=-1$ – горизонтальная асимптота:



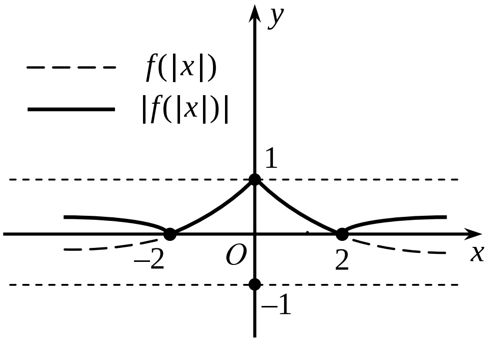
Пример 3. Построить график функции $y=\left|\dfrac{2-|x|}{|x|+2}\right|$.

Решение. 1). Сначала построим график функции $y=\dfrac{2-|x|}{|x|+2}$ (смотри пример 2).

2). Выполним преобразование графика функции $y(|x|)$ в график $|y(|x|)|$ (п.4.4.).

Часть графика $y(|x|)$, где $y \ge 0$, оставим без изменений, а часть графика, где $y < 0$, симметрично отобразим относительно оси Ox.

3). Построим график с учётом, что $y = -1$ – горизонтальная асимптота.



‼ *Слова и словосочетания*

дробно-линейная функция	вершина гиперболы
обратная пропорциональность	ветвь (*и*) гиперболы
коэффициент обратной пропорциональности	характеристический (*ие*) элемент (*ы*)

4.7. Квадратичная функция

▲ ***Квадратичная функция*** *– это функция вида* $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, где $a, b, c \in R,\ a \ne 0$.

Другое её название – ***квадратный трёхчлен***.

График квадратичной функции – ***парабола*** (кривая линия).

Например, $y = 2x^2 - x + 3$ – это квадратичная функция, где $a = 2, b = -1, c = 3$.

Частные случаи квадратичной функции:
$b = c = 0 \Rightarrow y = ax^2$; $b = 0, c \ne 0 \Rightarrow y = ax^2 + c$; $b \ne 0, c = 0 \Rightarrow y = ax^2 + bx$.

4.7.1. Функция вида $\boxed{y = ax^2}$

Функция вида $y = ax^2$ – это *простейшая квадратичная функция*.

Например, $y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = 2x^2$ – простейшие квадратичные функции.

Свойства функции $\boxed{y = ax^2}$

1. Область определения: $D(f) = R$ – множество действительных чисел.

2. Область значений: если $\underline{a > 0}$ $\Rightarrow$ $E(f) = [0; +\infty)$; если $\underline{a < 0}$ $\Rightarrow$ $E(f) = (-\infty; 0]$.

3. $y(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = y(x) \Rightarrow$ функция ***чётная*** $\Rightarrow$ её график симметричен относительно оси Oy.

4. Нули функции: $y = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ – нуль функции. Точка пересечения графика с осями координат имеет координаты $(0; 0)$.

5. Интервалы знакопостоянства:
если $\underline{a > 0}$ $\Rightarrow$ $y > 0$ на всей области определения, кроме $x = 0$;
если $\underline{a < 0}$ $\Rightarrow$ $y < 0$ на всей области определения, кроме $x = 0$.

6. Монотонность функции. Исследуем поведение функции на интервале $(0;+\infty)$. Пусть $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ и $x_2 > x_1$. Тогда,

$$y(x_2)-y(x_1)=ax_2^2-ax_1^2=a\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{(x_1+x_2)}_{>0}\Rightarrow\begin{cases}\text{если } a>0\Rightarrow y(x_2)-y(x_1)>0;\\ \text{если } a<0\Rightarrow y(x_2)-y(x_1)<0.\end{cases}\Rightarrow$$

$a>0$	Функция возрастает (□) на интервале $(0;+\infty)$
$a<0$	Функция убывает (□) на интервале $(0;+\infty)$

Аналогично исследуем интервал $(-\infty;0)$

$a>0$	Функция убывает (□) на интервале $(-\infty;0)$
$a<0$	Функция возрастает (□) на интервале $(-\infty;0)$

7. Экстремумы функции:

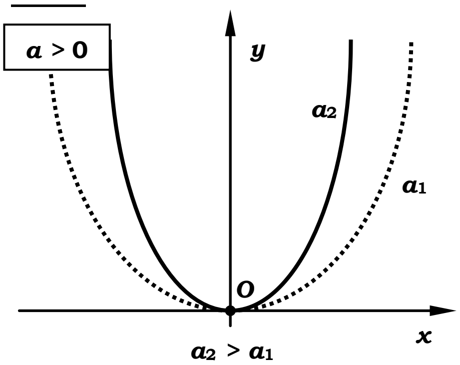
$a>0\Rightarrow y_{\min}=y(0)=0-$ минимум функции;

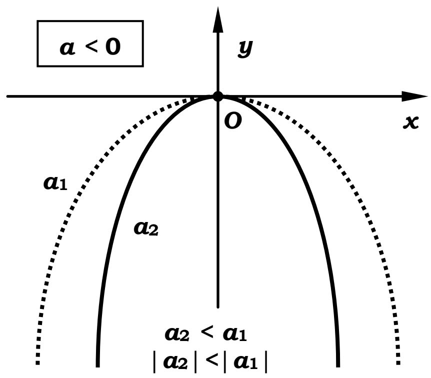
$a<0\Rightarrow y_{\max}=y(0)=0-$ максимум функции.

8. График – парабола. Точка (0;0) – ***вершина*** *параболы.* Части параболы, симметричные относительно оси Оy – ***ветви*** *параболы:*

если $a>0$ $\Rightarrow$ ветви направлены вверх;

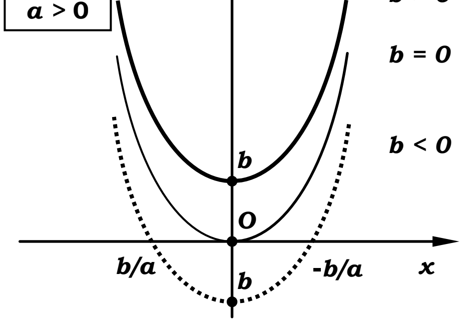
если $a<0$ $\Rightarrow$ ветви направлены вниз.

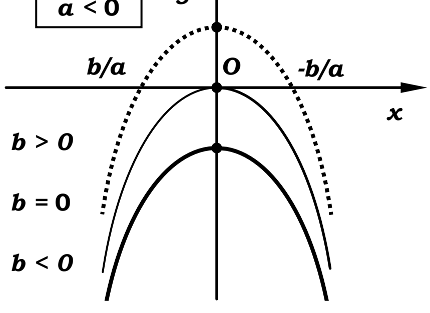




4.7.2. Функция вида $\boxed{y=ax^2+b}$

График функции $y=ax^2+b$ можно получить параллельным переносом графика функции $y=ax^2$ вдоль оси Оy на $|b|$ единиц (вверх, если $b>0$; вниз, если $b<0$). ***Вершина*** параболы находится в точке $(0;b)$. ***Нули*** функции: $y=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm\dfrac{b}{a}$.



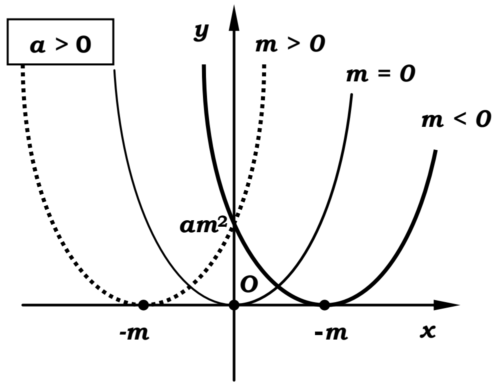


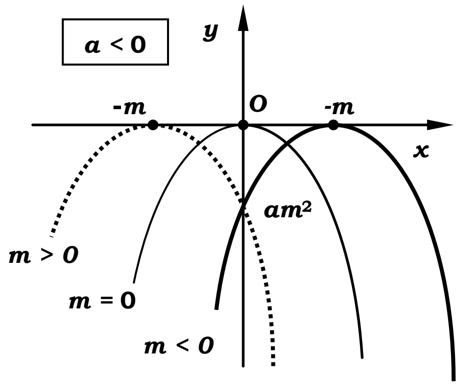
4.7.3. Функция вида $\boxed{y = a(x+m)^2}$

График функции $y = a(x+m)^2$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = ax^2$ вдоль оси Ox на $|m|$ единиц (влево, если $m > 0$; вправо, если $m < 0$).

Вершина параболы находится в точке $(-m;0)$. ***Нуль*** функции: $y = 0 \Rightarrow x = -m$.

Если $x = 0 \Rightarrow y = am^2$. Значит, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;am^2)$.





4.7.4. Функция вида $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

Преобразуем функцию (выделим полный квадрат в квадратном трёхчлене):

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Обозначим $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $m = \dfrac{b^2-4ac}{4a} = \dfrac{D}{4a}$. Тогда, $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 - m$.

Отсюда хорошо видно, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного сдвига на вектор $\vec{e}(x_0;-m)$ (на $|x_0|$ единиц вдоль оси Ox и на $|m|$ единиц по оси Oy. При этом вершина $(0;0)$ параболы $y = ax^2$ переместиться в точку с координатами $(x_0;y_0)$, где $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$; $y_0 = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Значит, график функции $y = ax^2 + bx + c$ – это ***парабола***, её ***вершина*** имеет координаты $\boxed{\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)}$, прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$ **–** ***ось симметрии*** этой параболы.

<u>*Построить график квадратичной функции*</u> $y = ax^2 + bx + c$ <u>*можно по такому плану*</u>:

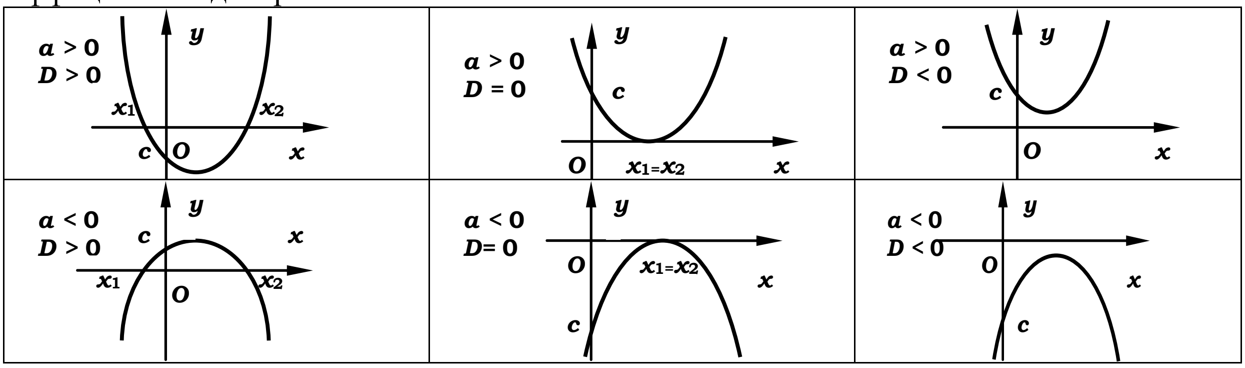
1. Определить направление веток параболы:
если $a > 0 \Rightarrow$ ветви вверх; если $a < 0 \Rightarrow$ ветви вниз.
2. Определить точку пересечения параболы с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y(0) = c$.
3. Определить точки пересечения параболы с осью Ox:
$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = b^2 - 4ac < 0$, то парабола не пересекает ось Ox.

Если $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ – одна общая точка с осью Ox.

4. Найти координаты вершины: $\boxed{\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{D}{4a}\right)}$ или $\boxed{\left(-\dfrac{b}{2a}; y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)}$

Положение параболы на координатной плоскости зависит от значений старшего коэффициента и дискриминанта:



Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. 1) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ ветви параболы направлены вверх.

2) Точка пересечения с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y(0) = 3 \Rightarrow (0;3)$.

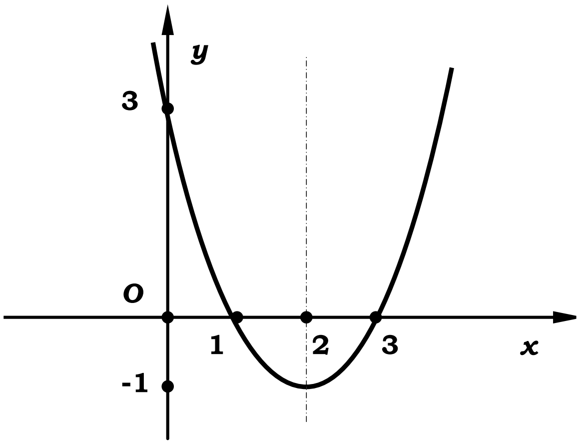
3) Точки персечения с осью Ox: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$,

$\Rightarrow (1;0),(3;0)$.

4) Координаты вершины: $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2;\ y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow (2;-1)$.

Прямая $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ – ось симметрии параболы.

5) Строим график:



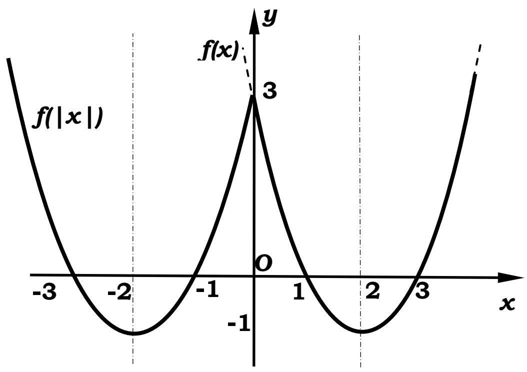
Пример 2. Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Решение. 1) Строим график функции $y(x) = x^2 - 4x + 3$ (смотри предыдущий пример);

2) Выполним преобразование графика $y(x)$ в график $y|x|$ (п. 4.4).

Часть графика $y(x) = x^2 - 4x + 3$, где $x \geq 0$, оставим без изменений и симметрично отобразим относительно оси Oy. Остальную часть графика, где $x < 0$, удалим. При этом получим дополнительно еще два нуля функции $x = -3, x = -1$ и второй минимум $(-2;-1)$.

3) Строим график:



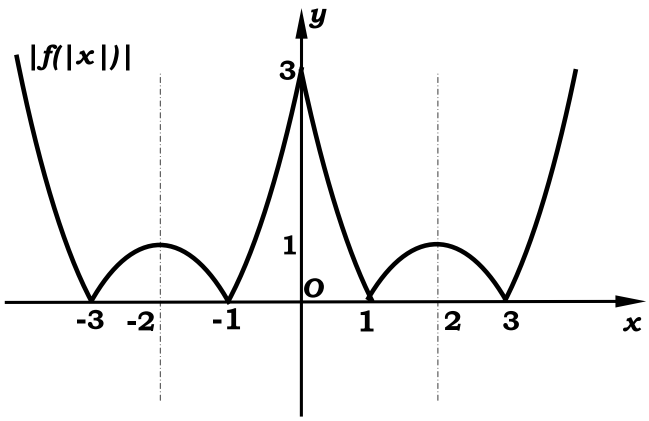
Пример 3. Построить график функции $y=\left|x^2-4|x|+3\right|$.

Решение. 1) Строим график функции $y|x|=x^2-4|x|+3$ (смотри предыдущий пример).

2) Выполняем преобразование графика функции $y|x|$ в график $\left|y|x|\right|$.

Часть графика $y|x|$, где $y\geq 0$, оставим без изменений, а часть этого графика, где $y<0$, симметрично отобразим относительно оси Ox.

3) Строим график:



4.8. Степенная функция

▲ ***Степенная функция*** *– это функция вида* $\boxed{y=x^r}$*, где* $r\in R,\ r\neq 0$.

Например, $y=x^3,\ y=x^{\frac{2}{3}},\ y=x^{-3}$ – это степенные функции.

Рассмотрим некоторые степенные функции, которые часто встречаются на практике.

Степенная функция $\boxed{y=x^n}$*, где* $n\in N$

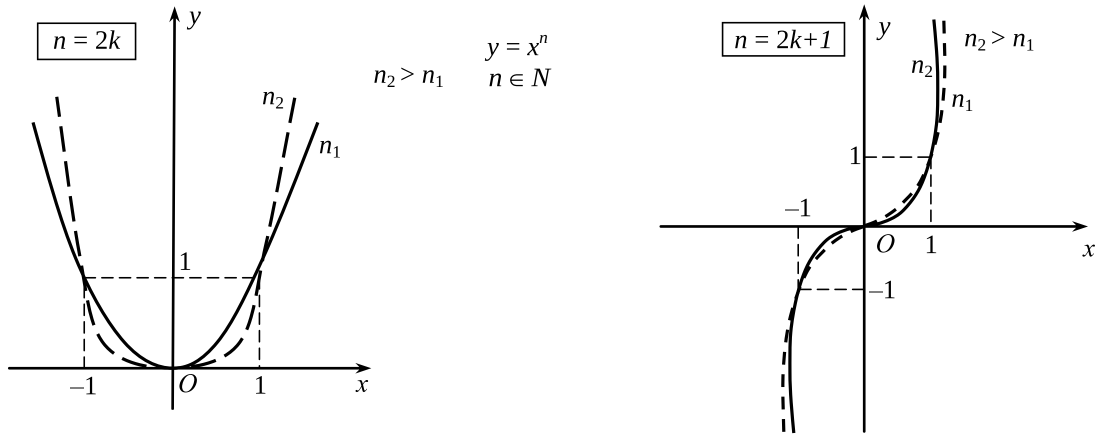
Если $n=1\Rightarrow y=x$ – график *прямая* линия**.**

Если $n=2\Rightarrow y=x^2$ – график *парабола***.**

Если $n=3\Rightarrow y=x^3$ – график *кубическая парабола (парабола третьей степени)*.

Если $n=4\Rightarrow y=x^4$ – график парабола четвёртой степени

!! График функции $y=x^n$, где $n\in N, n>1$ – ***парабола*** n***- ой степени***!!



Парабола чётной степени При любом чётном показателе ($\underline{n = 2k}$, $k \in N$) график проходит через точки $(-1;1)$, $(0;0)$ и $(1;1)$	**Парабола нечётной степени** При любом нечётном показателе ($\underline{n = 2k+1}$, $k \in N$) график проходит через точки $(-1;-1)$, $(0;0)$ и $(1;1)$

Основные свойства функции $\boxed{y = x^n}$, $n \in N, n > 1$

1. Область определения: $D(f) = R$.

2. Область значений функции:

Чётный показатель $\rightarrow$	$\underline{n = 2k}, k \in N$	$\Rightarrow E(f) = (0;+\infty)$
Нечётный показатель $\rightarrow$	$\underline{n = 2k+1}, k \in N$	$\Rightarrow E(f) = (-\infty;+\infty)$

3. Если $\underline{n = 2k}$ $\Rightarrow y(-x) = (-x)^{2k} = x^{2k} = y(x) \Rightarrow$ функция ***чётная***;

если $\underline{n = 2k+1} \Rightarrow y(-x) = (-x)^{2k+1} = -(x^{2k+1}) = -y(x) \Rightarrow$ функция ***нечётная.***

4. Нули функции: $y = 0 \Rightarrow x^n = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = 0}$ – нуль функции. График функции проходит через точку $(0;0)$.

5. Интервалы знакопостоянства:

$n = 2k,\ k \in N$	если $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ $\Rightarrow y > 0$
$n = 2k+1,\ k \in N$	если $x > 0 \Rightarrow y > 0$; если $x < 0 \Rightarrow y < 0$

6. Монотонность:

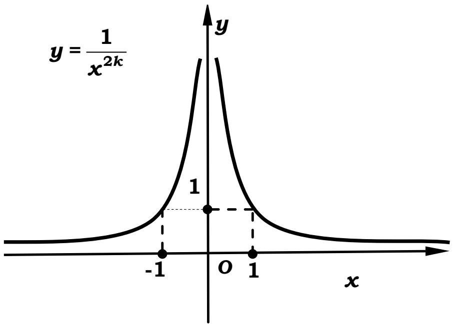
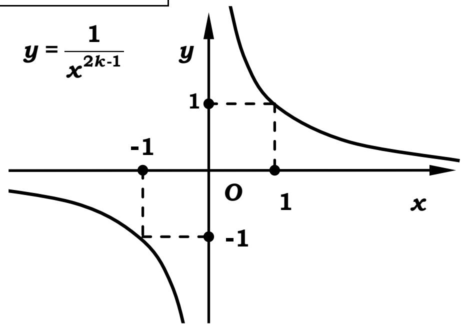
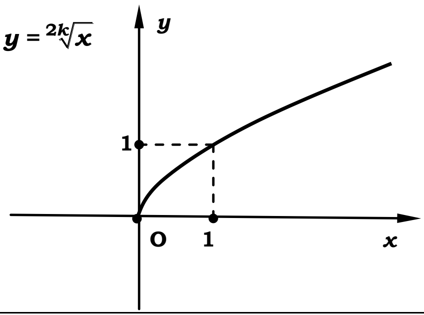
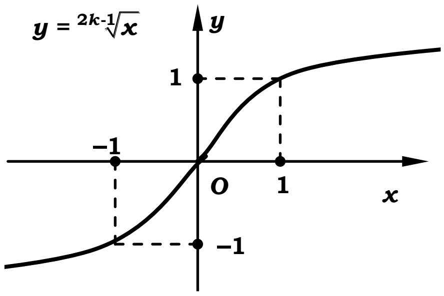
$n = 2k,\ k \in N$	функция ***убывает*** ( ) на интервале $x \in (-\infty;0)$ функция ***возрастает*** ( ) на интервале $x \in (0;+\infty)$
$n = 2k+1,\ k \in N$	функция ***возрастает*** ( ) на всей области определения

7. Экстремум:

если $n = 2k \Rightarrow y_{\min} = y(0) = 0$ – минимум функции;

если $n = 2k+1 \Rightarrow$ функция не имеет экстремумов.

Следующие степенные функции представим кратко в виде эскизов графиков.

<table>
<tr><td>$n=2k$</td><td>$n=2k+1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция вида $\boxed{y=x^{-n},\, n\in N}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функция вида $\boxed{y=\sqrt[n]{x},\, n\in N}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

‼ *Слова и словосочетания*

квадратичная функция	выделить полный квадрат
частный (*ые*) случай (*и*)	ветвь (*и*) параболы
парабола	степенная функция
вершина параболы	парабола n-ой степени

Вопросы и упражнения

1. Что называется функцией?
2. Что такое область определения функции?
3. Что такое область значений функции?
4. Что называется графиком функции?
5. Какие способы задания функции существуют?
6. Какая функция называется чётной?
7. Какая функция называется нечётной?
8. Какая функция называется периодической?
9. Какая функция называется возрастающей?
10. Какая функция называется убывающей?
11. Исследовать на монотонность функции:

   а) $f(x) = x^2 + x$; б) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$, если $x\in(2;+\infty)$.
12. Что такое ε – окрестность точки?
13. Какие точки экстремума вы знаете?
14. Как найти точки пересечения графика функции с осями координат?
15. Что такое нуль функции?
16. Что такое интервалы знакопостоянства?

17. Найти интервалы знакопостоянства функции $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x-28}{x+5}$.
18. Какие асимптоты существуют?
19. Какая прямая называется вертикальной асимптотой графика функции?
20. Какая прямая называется горизонтальной асимптотой графика функции?
21. Какое условие является достаточным для существования обратной функции.
22. Какое правило нахождения обратной функции?
23. Найти функцию обратную функции $y=7x-3$.
24. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
25. Что называется угловым коэффициентом прямой?
26. При каком условии две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ пересекаются?
27. При каком условии две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельные?
28. Построить графики функций:

    а) $y=|x-1|$; б) $y=|x|-2$; в) $y=||x|-2|$.
29. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
30. Графиком какой функции есть гипербола?
31. Назвать характеристические элементы гиперболы $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
32. Построить графики функций:

    1) $y=\dfrac{x+3}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{|x|+2}{|x|-1}$; 3) $y=\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$; 4) $y=\left|\dfrac{|x|+2}{|x|-1}\right|$;, 5) $y=\left|\dfrac{x+3}{x+1}\right|$.
33. Как называется график квадратичной функции?
34. Перечислить характеристические элементы параболы $y=ax^2+bx+c$.
35. Назвать план построения графика функции $y=ax^2+bx+c$.
36. Построить графики функций:

    1) $y=x^2-2x-3$;, 2) $y=-x^2-4|x|+3$;, 3) $y=|-x^2-x+2|$, 4) $y=|-x^2-4|x|+3|$.
37. Какая функция называется степенной?
38. Построить графики функций:

    1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=2+\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{-x}$; 4) $y=\sqrt{x-1}$; 5) $y=\sqrt{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$;
    7) $y=(x-2)^3-3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1990. – 416 с.
2. *Нелін Є. П.* Математика. Експрес-підготовка. ЗНО-2012 / Є. П. Нелін. – 4-е вид., перероб. і доп. – К. : Літера ЛТД, 2012. – 240 с.
3. *Нелін Є. П.* Алгебра й початки аналізу: Дворівневий підруч. Для 10 кл. загально освіт. навч. закладів / Є. П. Нелін. – Х. : Світ дитинства, 2005. – 432 с.
4. *Ушаков Р. П.* Повторювальний курс математики: посібник для учнів серед.закладів освіти / Р. П. Ушаков; за ред. М. Й. Ядренка. – 2-е вид., випр. і доп. – К. : Техніка, 2003. – 591 с.
5. *Гуминская Н. А.* Математика: учеб. пособ. для студентов-иностранцев / Н. А. Гуминская. – К. : ИПЦ «Киевский университет», 2007. – 429 с.
6. *Дорохин Д. П.* Сборник задач и упражнений по математике: учеб. пособие для иностр. уч. подгот. отд-ий вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Д. П. Дорохин, З. Е. Плаксенко, Г. Ф. Бажора. – М. : Высш. шк., 1986. – 248 с.
7. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М. : Физматгиз, 1962, 420 с.
8. *Система* тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. – М. : Просвещение, 1991. – 208 с.
9. *Бровченко О. М.* Алгебра й початки аналізу в таблицях і схемах / О. М. Бровченко. – К. : Логос, 1998. – 120 с.
10. *Сборник* конкурсных задач по математике для поступающих во втузы: учебное пособие / под ред. М. И. Сканави. – 4-е изд. – М. : Высш. шк., 1980. – 541 с.

Навчальне видання

ДОВГОДЬКО Тетяна Іванівна
ОЛЬХОВИК Лариса Олексіївна

МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИКА

АЛГЕБРА

Навчальний посібник

(Російською мовою)

В авторській редакції

Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Комп’ютерна верстка *Н. С. Ахроменко*

Підп. до друку 16.02.2016. Формат 60х84/8. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 11,07. Обл.-вид. арк. 12,0.
Тираж 100 пр. Замовлення № 18-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002