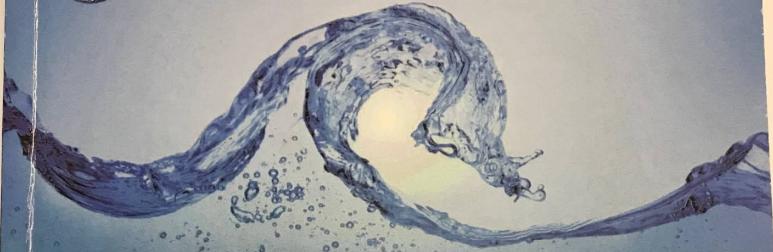


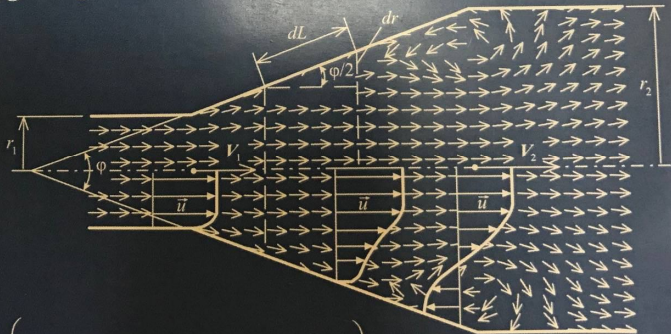


Р. О. МАКАРЕНКО, О. Д. КОВАЛЬ, О. І. ХЛИСТУН



ГІДРОГАЗОМЕХАНІКА

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum h$$



$$h_{\text{диф}} = \left[\frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right] \frac{V_1^2}{2g} \quad n = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Р. О. Макаренко, О. Д. Коваль,
О. І. Хлистун

ГІДРОГАЗОМЕХАНІКА

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом підготовки
«Енергомашинобудування»*

Київ 2016

УДК 331. 108.43 : 620.19(075.8)
ББК Ж 607ц.я7
М 15

Рецензенти:

- В. В. Бабенко* — д-р техн. наук, проф.
(Інститут Гідромеханіки НАН України);
С. Г. Кобзар — канд. техн. наук, провід. наук. співроб.
(Інститут технічної теплофізики НАН України);
М. В. Якимчук — канд. техн. наук, доц.
(Національний університет харчових технологій)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України (лист № 1/11-3168 від 06.03.2012)*

Макаренко Р. О.

М 15

Гідрогазомеханіка: навч. посібник / Р. О. Макаренко,
О. Д. Коваль, О. І. Хлистун. — К. : НАУ, 2016. — 220 с.
ISBN 978-966-598-978-3

Наведено основні закони і рівняння гідростатики, кінематики і динаміки рідини, дані про режими течії та втрати напору під час руху рідини і газу в трубах. Викладено основи теорії примежового шару та особливості течії стисливого газу.

Для студентів вищих навчальних закладів України, які навчаються за напрямом підготовки «Енергомашинобудування».

УДК 331. 108.43 : 620.19(075.8)
ББК Ж 607ц.я7

© Макаренко Р. О., Коваль О. Д.,
Хлистун О. І., 2016
© НАУ, 2016

ISBN 978-966-598-978-3

1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИН І ГАЗІВ ТА СИЛИ, ЯКІ В НИХ ДІЮТЬ

1.1. Рідина. Властивості та основні характеристики

Речовину можна класифікувати, наприклад, за формами фізичного існування або за фазовим станом – тверде тіло, рідина, газ, плазма.

Рідиною називають суцільне середовище, що має здатність легко змінювати свою форму під дією навіть незначних сил. Завдяки силам міжмолекулярного зчеплення, і, отже, нездатності сприймати в стані спокою навіть малі дотичні напруження, рідина легко змінює свою форму, заповнюючи собою посудини, тобто набуваючи форми тієї посудини, у яку її налили. Здатність рідини необмежено деформуватися під дією навіть незначних сил називають текучістю. Це одна з основних властивостей рідин.

Розглянемо коротко ті властивості рідини, які є істотними під час розгляду задач гідромеханіки [1; 2].

Питомою вагою γ називають вага рідини в одиниці об'єму, $\left[\frac{\text{Н}}{\text{М}^3} \right]$:

$$\gamma = \frac{G}{W}, \quad (1.1)$$

де W – об'єм рідини; G – вага, розглянутого об'єму рідини.

За другим законом Ньютона

$$G = mg, \quad (1.2)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Підставляючи рівняння (1.1) у вираз (1.2), отримуємо вираз для питомої ваги

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{mg}{W} = \rho g.$$

Питомою масою (густиною) – ρ називають масу рідини в одиниці об'єму $\left[\frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right]$:

$$\rho = \frac{m}{W}, \quad (1.3)$$

де m – маса рідини; W – об'єм цієї маси.

Відносною густиною називають відношення густини даної речовини до густини рідини, яку обрано еталоном густини. Як еталон зазвичай обирають дистильовану воду, і тоді відносна густина, залишаючись безрозмірною, чисельно дорівнює звичайній густині. Отже, вираз для відносної густини має вигляд

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{\rho g}{\rho_e g} = \frac{\gamma}{\gamma_e},$$

де ρ_e – густина еталонної рідини, γ_e – питома вага еталонної рідини.

За винятком води, бронзи і чавуну зі зменшенням температури густина рідин збільшується. Наприклад, густина води має максимальне значення за температури 4°C (1000 кг/м³) і зменшується зі зміною температури як з підвищенням, так і з її зниженням.

Середні значення ρ і γ для деяких рідин (за температури $t=20$ °C) наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Середні значення густини та питомої ваги деяких рідин

Рідина	ρ , кг/м ³	γ , Н/м ³
Вода прісна	998	9790
Вода морська	1002...1029	10010...10090
Бензин	739...751	7250...7370
Олива мінеральна	877...892	8000...8750
Нафта	850...950	8340...9320
Ртуть	13547	132900

Стисливість рідини характеризується коефіцієнтом об'ємного стиснення β_p і є мірою зміни об'єму W та густини речовини під дією нормальних напружень (стискання або розтягування).

Коефіцієнт об'ємного стиснення може бути визначений через відносну зміну об'єму:

$$\beta_p = -\frac{1}{W} \frac{dW}{dp}, \text{ або } (\beta_p = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}),$$

де dp – зміна тиску.

Знак мінус вказує на те, що зі зростанням тиску зменшується об'єм. Припускаючи, що $\Delta W = W_0 - W_1$, а $\beta_p = \text{const}$, отримаємо формулу, за допомогою якої можна розрахувати об'єм або густину після зміни тиску:

$$\beta_p W_1 \Delta p = W_1 - W_0 = \Delta W, \text{ або } W_0 = W_1 - \beta_p W_1 \Delta p,$$

де W_0 – початковий об'єм, W_1 – кінцевий об'єм.

Після перетворень отримаємо

$$W_0 = W_1(1 - \beta_p \Delta p), \text{ або } \rho = \rho_1(1 - \beta_p \Delta p).$$

Пружність – властивість рідин відновлювати свій об'єм після припинення дії зовнішніх сил. Пружність характеризується модулем об'ємної пружності E_0 , величина якого обернена коефіцієнту об'ємного стискання

$$E_0 = \frac{1}{\beta_p}.$$

Середні значення коефіцієнтів об'ємного стискання β_p та модуля об'ємної пружності E_0 для деяких рідин наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Середні значення коефіцієнтів об'ємного стиснення та модуля об'ємної пружності

Рідина	β_p , 1/кПа	E_0 , МПа
Вода	0,0000051	1960
Гас	0,0000059	1690
Нафта	0,0000074	1350
Ртуть	0,000000313	32000

Наприклад, із підвищенням тиску на 0,1 МПа об'єм води зменшується всього на 1/20000. Отже, для перепадів тиску, які

зазвичай спостерігаються на практиці, для виконання розрахунків можна покласти, що густина рідин постійна, а рідини є нестисливими.

Вивчаючи явище гідравлічного удару в трубах, варто брати до уваги, що стисливість і пружність рідини є визначальними, тобто нехтувати цими властивостями не можна.

Температурне розширення характеризується коефіцієнтом температурного розширення β_T , який являє собою відносну зміну об'єму рідини у разі зміни температури на 1 °С, тобто

$$\beta_T = \frac{1}{W} \frac{dW}{dT}.$$

Припускаючи, що $\Delta W = W_0 - W_1$, а $\beta_T = \text{const}$, отримаємо формулу, за допомогою якої можна розрахувати об'єм та густину у разі зміни температури

$$W_0 = W_1(1 + \beta_T \Delta T);$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{1 + \beta_T \Delta T}.$$

Таблиця 1.3

Значення коефіцієнтів температурного розширення для води

Тиск, p , МПа	Температура, Т °С				
	1...10	10...20	40...50	60...70	90...100
0,1	0,000014	0,000150	0,000422	0,000556	0,000719
10	0,000043	0,000165	0,000422	0,000548	0,000704
20	0,000072	0,000183	0,000426	0,000539	0,000691
50	0,000149	0,000236	0,000429	0,000523	0,000661
90	0,000229	0,000289	0,000437	0,000514	0,000621

Для мінеральних оливо в діапазоні температур 10-20 °С, за тиску 0,1 МПа коефіцієнт температурного розширення дорівнює приблизно 0,0008 1/°С.

На поверхні розділу рідина–газ діють **сили поверхневого натягу**, які прагнуть надати об'єму рідини сферичної форми та

викликають деякий додатковий тиск. Цей тиск помітно позначається лише для малих об'ємів рідини.

Для сферичних об'ємів (крапель) цей тиск визначаються за формулою

$$p = \frac{2\sigma}{r},$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу рідини; r – радіус сфери.

Коефіцієнт σ для різних рідин за температури 20 °С має такі значення: вода $\sigma = 0,073$ Н/м, гас $\sigma = 0,027$ Н/м, ртуть $\sigma = 0,46$ Н/м. Із підвищенням температури поверхневий натяг зменшується.

Капілярний ефект [8].

У трубках малого діаметра поверхневий натяг зумовлює піднімання (або опускання) рідини відносно нормального рівня. Це явище називається капілярним ефектом.

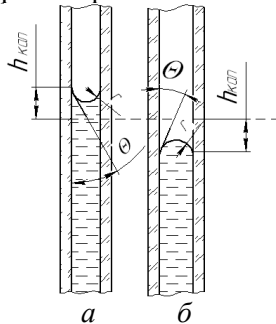


Рис. 1.1. Форми поверхонь рідини для двох випадків: змащування (а) поверхні і не змащування (б)

За повного змащування висоту капілярного підняття $h_{\text{кап}}$ можна визначити за формулою

$$h_{\text{кап}} = \frac{2\sigma \cos \Theta}{\rho g r},$$

де Θ – кут між поверхнею та рідиною.

Сили поверхневого натягу роблять поверхні схожими на пружну плівку, але різниця полягає в тому, що в цьому випадку пружні сили не залежать від площі поверхні. Якщо ці сили більші за сили взаємодії між молекулами рідини, то ця рідина змащує

поверхню і кут біля поверхні, між твердою стінкою і рідиною Θ менший ніж 90° . В іншому випадку, коли $\Theta > 90^\circ$ (за повного змачування $\Theta = 0$, без змачування $\Theta = 180^\circ$ (рис.1.1).

Висота капілярного підняття (м) води в капілярній трубці за температури $t=20^\circ\text{C}$ можна визначити за формулою

$$h_{\text{кап}} = 0,03 / d ,$$

де d – діаметр трубки, мм.

Висота опускання (м) для ртуті $h_{\text{кап}} = 0,01015 / d .$

1.2. В'язкість рідини

В'язкість – це властивість рідини чинити опір відносному руху (зрушенню) шарів рідини. Розглянемо рух шару рідини уздовж поверхні (рис.1.2).

У випадку, коли стінка чинить гальмівний вплив, шари рідини рухаються з різними швидкостями, значення яких зростають у міру віддалення від стінки.

Розглянемо два шари рідини, що рухаються на відстані dr один від одного.

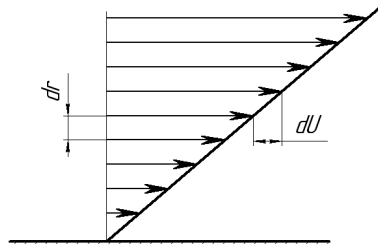


Рис 1.2. Схема течії рідини

Унаслідок різниці швидкостей один шар рухається швидше від другого на величину dU . Величину dU/dr називають швидкістю деформації, або **градієнтом швидкості**:

$$\dot{\gamma} = \frac{dU}{dr} .$$

За відносної течії виникають дотичні напруження τ на межі шарів аналогічно явищу зсуву у твердих тілах, Ці дотичні напруження пропорційні градієнту швидкості деформації, тобто

$$\tau = \mu \frac{dU}{dr} = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.4)$$

де μ – коефіцієнт пропорційності, який називають **коефіцієнтом динамічної в'язкості (динамічною в'язкістю)**.

Для тривимірних потоків в'язкість є **коефіцієнтом** пропорційності між тензором напруження і тензором швидкостей деформації.

Одиниця вимірювання коефіцієнта динамічної в'язкості μ у системі СГС – Пуаз (на честь Ж.Л. Пуазейля), а в системі СІ – Паскаль-секунда

$$1\text{П} = 1 \frac{\text{Г}}{\text{см} \cdot \text{с}} = 0,1\text{Па} \cdot \text{с}.$$

Іноді для виконання розрахунків використовують **коефіцієнт кінематичної в'язкості (кінематичну в'язкість)**, що являє собою відношення динамічного коефіцієнта в'язкості до густини рідини:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Одиниця вимірювання коефіцієнта кінематичної в'язкості в системі СГС – Стокс (на честь Дж.Г.Стокса). У системі СІ – $\text{м}^2/\text{с}$.

$$1\text{Ст} = 1 \frac{\text{П}}{\text{г}/\text{см}^3} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}} = 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}.$$

У деяких довідниках ще можна знайти **сантістокс (сСт)** – одиницю в 100 разів меншу за 1Ст, тобто $\text{сСт} = 1 \text{мм}^2/\text{с}$.

В'язкість рідини істотно залежить від температури. Із підвищенням температури в'язкість зменшується. Значення в'язкості деяких рідин наведено у табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Величини в'язкості для деяких рідин

Рідина	t, °C	Динамічна в'язкість		Кінематична в'язкість	
		?, П	?, Па·с	v, Ст	v, м ² /с
Вода	20	0,0101	101·10 ⁻⁵	0,0101	101·10 ⁻⁸
Бензин	15	0,0065	65·10 ⁻⁵	0,0093	93·10 ⁻⁸
Гас	15	0,0217	217·10 ⁻⁵	0,027	270·10 ⁻⁸
Ртуть	20	0,0155	155·10 ⁻⁵	0,00114	11,4·10 ⁻⁸

Залежність динамічного коефіцієнта в'язкості від температури, наприклад для води, можна визначити за формулою

$$\mu = \mu_0 / (1 + 0,0337 T + 0,00022 T^2),$$

де μ_0 – динамічний коефіцієнт в'язкості за температури T_0 , °C.

Іноді в'язкість виражають у градусах Енглера (Е). **Градус Енглера** – це відношення часу витікання з приладу 20см³ досліджуваної рідини до часу витікання такого самого об'єму води за температури 20 °C.

Кінематичну в'язкість через градуси Енглера розраховують за формулою Уббелоді (м²/с):

$$v = \left(0,0731 E^o - \frac{0,0631}{E^o} \right) 10^{-4}.$$

Умовна в'язкість – відношення часу 200 см³ досліджуваної в'язкої рідини до часу 200 см³ води за температури 20 °C. Умовну в'язкість виражають в одиницях, що чисельно збігаються з градусами Енглера.

В'язкість рідин залежить від температури, тому для характеристики цієї залежності використовують індекс в'язкості (ІВ) – емпіричне число, яке змінює в'язкість рідини в межах діапазону температур. Високий ІВ означає відносно невелику зміну в'язкості залежно від температури. Індекс в'язкості більшості мінеральних олив становить 0...110.

Ньютонівськими називаються рідини, що підлягають закону Ньютона $\tau = \mu \dot{\gamma}$, тобто під час руху таких рідин, дотичні напруження, що виникають, прямо пропорційні швидкості

деформації $\dot{\gamma}$ у всьому діапазоні її зміни. У випадку, коли коефіцієнт пропорційності є величиною, залежною від умов течії, рідина називається неньютонівською.

В'язкість неньютонівських рідин залежить не тільки від температури, але й від швидкості деформації.

Для неньютонівських рідин коефіцієнт в'язкості може залежати від багатьох факторів, зокрема від часу, протягом якого діє напруження, та від величини цього напруження. У повсякденній практиці (зокрема, у машинобудуванні) доводиться досить часто використовувати неньютонівські рідини.

Неньютонівські рідини можна поділити на три групи. До першої належать в'язкі рідини, які часто називають *узагальненими ньютонівськими рідинами*, у яких швидкість кутової деформації або швидкість зсуву залежить тільки від прикладених дотичних напружень τ : псевдопластичні, дилатантні та в'язкопластичні середовища (рис.1.3).

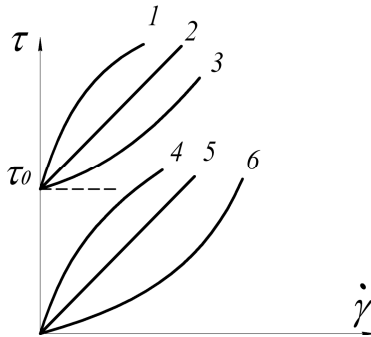


Рис. 1.3. Класифікація рідин за Доджем: 1,3—нелінійно в'язкопластичні рідини; 2—в'язкопластична рідина; 4—псевдопластична рідина; 5—ньютонівська рідина; 6—дилатантна рідина

Друга група – це середовища, реологічні характеристики яких залежать від часу (рис.1.3). Наприклад, для рідин, які називаються тиксотропними та реопектичними, швидкість зсуву визначається не

лише значенням дотичного напруження, а і часом його дії. Третя група – в'язкопружні рідини. Завдяки своїй течії такі рідини можуть тією чи іншою мірою виявляти як пружні, так і в'язкі властивості. Рідинам цієї групи властива висока еластичність (каучук).

У випадку течії неньютонівських рідин вся підведена ззовні енергія повністю дисипує в тепло. Однак можна навести багато прикладів рідин, які мають не лише в'язкі властивості, але і пружні, тобто такі рідини, які внаслідок дії на них зовнішніх напружень накопичують частину енергії і повертають її зі зняттям цих напружень. Такі середовища відомі під назвою в'язкопружних. Однією з найважливіших характеристик таких рідин є час релаксації, тобто час, протягом якого відбувається повне розсіювання накопиченої енергії. Якщо час дії t зовнішніх сил $t < t_0$, рідина поводить себе як ідеально пружне тіло. Якщо $t > t_0$, то течія, яка розвивається в такій рідині, перекидає пружну деформацію і таке середовище можна розглядати як просту рідину.

Для вирішення практичних завдань часто обмежуються дослідженням та описом одновимірної течії рідини. У цьому разі залежність між τ і $\dot{\gamma}$ більш проста.

Деякі з таких залежностей наведено у табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Рівняння реологічного стану деяких рідин

Рідина, її реологічне рівняння стану	Параметри, що входять у реологічний закон
Ньютона, $\tau = \mu \dot{\gamma}$	μ – динамічна в'язкість
Оствальда де Віля, $\tau = k \dot{\gamma}^n$	k – консистенція; n – індекс течії;
Бінгама, $\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot{\gamma}$	ϕ_0 – початкове
Балклі–Гершеля, $\tau = \tau_0 + (\mu \dot{\gamma})^n$	напруження зсуву;
Кесона, $\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu \dot{\gamma}}$	μ_0 – пластична в'язкість

Прандтля–Ейрінга , $\tau = A \arcsin \dot{\gamma} / C_1$	C_1 – стала Прандтля – Ейрінга
Рейнера–Філіпова, $\tau = \mu_\infty \dot{\gamma} + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau / \tau_\infty)^2} \dot{\gamma}$	μ_∞ – в'язкість для нескінченно великих напружень $\dot{\phi}_\infty$
Максвелла, $\tau = \mu\gamma - \frac{d\tau}{dt} \frac{\mu}{E}$	E – стала Максвелла
Вайсенберга, $\tau = \mu_0 \gamma (\cos \frac{\tau}{E\sqrt{2}})^{-1}$	μ_0 – початкова в'язкість

Досить багато рідин які виявляють властивості як ідеально пружних тіл, так і пластичних та в'язких середовищ. Інколи виникає необхідність моделювати поведінку неньютонівських рідин. Таке моделювання проводять за допомогою механічних моделей, основними елементами якого є п'ять елементарних механічних моделей: абсолютно тверде тіло, пружне тіло, в'язка рідина, пластично-деформоване тіло та пластично-текуче тіло.

1.3. Прилади для вимірювання в'язкості рідин. Віскозиметри

Найбільш характерні типи віскозиметрів які за течією рідини визначають значення в'язкості, наведені в табл.1.6.

Таблиця 1.6

Віскозиметри та їх застосування

Віскозиметр	Рух рідини в приладах	Досліджувані рідини
Капілярний	Прямолінійна течія у капілярі	Ньютонівські, неньютонівські, лінійні, в'язко пружні
Ротаційний дисковий	Обертання	Ньютонівські

Ротаційний коаксіальний циліндричний Конічний дисковий	Вільні коливання Обертання	Ньютонівські, неньютонівські Ньютонівські, неньютонівські, лінійні, в'язко пружні
Конус – циліндр (конус – конус)	Змушене обертання	Ньютонівські, неньютонівські, лінійні, в'язко пружні
Падаюча кулька Паралельно-плоский еластомер	Прямолінійний рух Стискання	Ньютонівські Ньютонівські, неньютонівські, лінійні, в'язко пружні

Найпростішими з цих віскозиметрів є капілярні, серед яких можна виділити: постійного тиску, постійної витрати, зі змінним режимом течії, вантажні.

Віскозиметр постійного тиску дозволяє вимірювати в'язкість в інтервалі швидкостей деформації $10^{-3} \dots 10^4$ 1/с і напруження зсуву – $10^2 \dots 10^6$ Па.

Схеми капілярних віскозиметрів, де течія рідини зумовлюється дією сил ваги, показані на рис. 1.4 і рис. 1.5.

Вимірювання в'язкості рідини за допомогою капілярного віскозиметра ґрунтується на визначенні часу витікання через капіляр певного об'єму рідини з робочого простору, зазвичай обмеженого кільцевими мітками. Коефіцієнт в'язкості прямо пропорційний часу витікання рідини через капіляр, довжина якого зазвичай становить 100 мм.

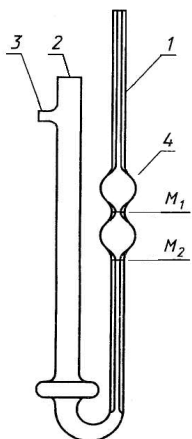


Рис.1.4. Віскозиметр ВПЖ-4

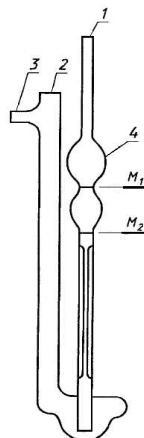


Рис.1.5. Віскозиметр ВПЖ-2

Оскільки опір середовища по капіляру залежить не лише від його в'язкості, у формули, які використовують для розрахунку в'язкості, вводять поправки, які враховують можливі похибки, що зумовлені, наприклад, зміною кінетичної енергії струменя, накопиченням пружної енергії, розігріванням системи.

Розрахункова формула для такого віскозиметра має вигляд

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{g}{980,7} \cdot t \cdot const \text{ (см}^2\text{/с)},$$

де ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, (см²/с); g – прискорення сили тяжіння, см/с²; t – час проходження меніска між мітками; $const$ – постійна приладу.

Капілярні віскозиметри з постійною витратою можуть бути виконані з механічним і гідравлічним приводами. У них зазвичай задається постійної швидкості руху рідини. Набір змінних капілярів діаметром 0,25...2,50 мм і довжиною 12...100 мм на віскозиметрах дозволяє вимірювати в'язкість за швидкостей зсуву $0,71 \cdot 10^{-2} \dots 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

Капілярні віскозиметри з гідравлічним приводом широке застосування набули для визначення в'язкості змащень. Зазвичай вони працюють у діапазоні виміру в'язкості $2,5 \dots 10^4 \text{ Па/с}$ за

швидкостей зсуву до 10 с^{-1} . Напруження зсуву змінюється в них у межах $2 \cdot 10^2 \dots 6,5 \cdot 10^4$ Па. Використовується набір капілярів з діаметрами, що змінюються в діапазоні $0,45 \dots 3,18$ мм. Довжина такого капіляра відповідає сорока діаметрам.

Капілярні віскозиметри зі змінним режимом течії. Змінне навантаження в таких віскозиметрах створюється за допомогою пружини і забезпечує видавлювання рідини через капіляр.

Вантажні капілярні віскозиметри. У приладах цього типу за допомогою гирі масою M створюється постійне навантаження на зразок, поміщений у резервуар приладу.

Ротаційні віскозиметри. Принцип їх дії ґрунтується на вимірюванні крутного моменту у зазорі між двома поверхнями (рис.1.6). Залежно від форми обертової і нерухої поверхонь віскозиметри можна поділити на такі типи: диск–диск, конус–конус, циліндр–циліндр, півсфера–півсфера, конус–площина і т.інш. Вимірюваний матеріал у циліндричному вимірювальному пристрої міститься в кільцевому зазорі, який утворюється між двома коаксіальними циліндрами – зовнішнім нерухомим циліндром радіусом R і внутрішнім рухомим з радіусом r (рис.1.6). Внутрішній циліндр радіусом r і довжиною L обертається з постійною швидкістю і з'єднаний через вимірювальний вал з циліндричною гвинтовою пружиною, відхилення якої є мірою для обертаючого моменту M , що діє на внутрішній циліндр.

Залежність дотичного напруження τ від швидкості зсуву $\dot{\gamma}$ у випадку коаксіальної циліндричної системи має вигляд

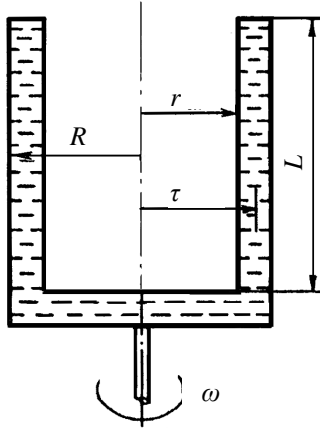


Рис. 1.6. Схема течії рідини в зазорі між коаксіальними циліндрами

$$\tau_r = \frac{M}{2\pi L r^2}; \quad \dot{\gamma}_r = \frac{2\omega R^2}{R^2 - r^2}; \quad \mu = \frac{\tau_r}{\dot{\gamma}_r}.$$

У конусно-пластинчастому пристрої вимірюваний матеріал поміщують у клинчастий зазор, що утворюється між нерухомою пластиною і конусом, що обертається з постійною швидкістю ω і має радіус R . Кут конусності системи конус – пластина відносно малий і становить $\varphi=0,3^\circ$.

Потокові віскозиметри використовують для безперервного контролю в'язкості нафти, нафтопродуктів, водно-нафтових емульсій, бурових розчинів і рідин, застосовуваних для гідророзриву.

Приклад 1.1. Визначити зміну густини води у випадку її стискання від атмосферного тиску до 60 ат, беручи коефіцієнт стискання рівним $\beta_p = 5 \cdot 10^{10} \text{ Па}^{-1}$.

Розв'язання. У разі стисканні рідини об'єм зміниться на $\Delta W = \beta_p W_1 \Delta p$, звідки

$$\beta_p \Delta p = \frac{\Delta W}{W_1},$$

де $\Delta p = p_1 - p_2 = 10^5 - 6 \cdot 10^6 = -5,9 \cdot 10^6$ Па – зміна тиску.

Вважаючи, що маса рідини незмінна та припускаючи, що густина за формулою (1.3) дорівнює $\rho = \frac{m}{W}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{W_1}{W_2} = \frac{W_1}{\left(1 + \frac{\Delta W}{W_1}\right) W_1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta W}{W_1}} = \frac{1}{1 + \beta_p \Delta p} = \\ &= \frac{1}{1 - 5 \cdot 10^{-10} \cdot 5,9 \cdot 10^6} = 1,002958. \end{aligned}$$

Приклад 1.2. Визначити густину води під час її нагрівання від 20 °С до 60 °С.

Розв'язання. Із табл. 1.3 визначаємо коефіцієнт температурного розширення води:

$$\beta_T = 0,000376 \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

При нагріванні води її об'єм змінюється на

$$\frac{\Delta W}{W} = \beta_T \Delta t.$$

Вважаючи масу рідини сталою і те, що густина за формулою (1.3) дорівнює $\rho = \frac{m}{W}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{60}}{\rho_{20}} &= \frac{W_{20}}{W_{60}} = \frac{W_{20}}{W_{20} \left(1 + \frac{\Delta W}{W_{20}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta W}{W_{20}}} = \frac{1}{1 + \beta_T \Delta t} = \\ &= \frac{1}{1 + 0,000376 \cdot 40} = 0,985. \end{aligned}$$

Поклавши, що за температури 20 °С густина становить 998,23 кг/м³, тоді за температури 60 °С густина буде становити

$$\rho_{60} = \rho_{20} \cdot 0,98518 = 998,23 \cdot 0,985 = 983,256 \text{ кг/м}^3.$$

За довідником за температури 60 °С густина дорівнює 983,24 кг/м³.

Приклад 1.3. Визначити висоту підняття води у скляній капілярній трубці діаметром 1 мм за температури 20 °С.

Розв'язання. Висота підйому води у капілярі

$$h_{\text{кап}} = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Поверхневий натяг води за температури 20°С $\sigma_{20} = 0,073$ Н/м, густина $\rho_{20} = 998$ кг/м³, тоді

$$h_{\text{кап}} = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-2}}{998 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \approx 0,029\text{м} = 29\text{мм}.$$

Приклад 1.4. Динамічний коефіцієнт в'язкості змащувальної рідини за паспортом становить 20 П. Визначити кінематичний коефіцієнт в'язкості, якщо густина дорівнює 2000 кгс/м³.

Розв'язання. Переводимо одиниці в систему СІ. Переводимо в'язкість 20 П=0,1 20=2 Па с.

$$\text{Густина рідини в системі СІ } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{2000 \cdot 9,81}{9,81} = 2000 \text{ кгс/м}^3.$$

Розраховуємо кінематичний коефіцієнт в'язкості

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{2}{2000} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}.$$

2. ГІДРОСТАТИКА

2.1. Сили, що діють на рідину в стані спокою

Гідростатикою називається розділ гідравліки, метою якого є вивчення розподілу тиску в рідині та визначення сил, що діють з боку рідини на поверхні, які обмежують ці рідини. Завдяки цьому можна розраховувати сили, що діють на дно та стінки посудини будь-якої форми, на тіла, що занурені в рідину і визначити умови плавання.

На всі фізичні тіла, що мають масу, у тому числі й рідини, діють сили, які можна поділити на *зовнішні*, які діють з боку зовнішнього простору (сила ваги, відцентрова, магнітна) і *внутрішні*, що діють між молекулами, чи всередині атомів. Внутрішні сили, як правило, цілком зрівноважені, тому не входять у розрахункові формули, а отже, надалі будемо розглядати лише зовнішні сили.

У свою чергу зовнішні сили можна поділити на *масові і поверхневі*.

Масові сили діють на всі частинки рідкого тіла і пропорційні його масі (сили тяжіння, сили інерції), тобто сили, що діють на рідину, що перебуває у відносному спокої.

У випадку однорідної рідини ($\rho = \text{const}$) масові сили пропорційні також об'єму рідини, і отже масові сили можна називати *об'ємними силами*.

Поверхневі сили діють на поверхні тіла і пропорційні площі його поверхні. До них належать сили, що діють на рідке тіло з боку сусідніх об'ємів рідини або дотичних з цією рідиною твердих або газоподібних тіл.

На рідину в стані спокою діють лише поверхневі сили, що нормальні до поверхні. Дотичні напруження в рідині виникають тільки у випадку її руху.

2.2. Гідростатичний тиск і його властивості

Гідростатичний тиск характеризує силу, що діє на одиницю поверхні об'єму рідини по нормалі до цієї поверхні і завжди напрямлений всередину цього об'єму.

Розглянемо деякий об'єм рідини у формі паралелепіпеда, який перебуває у стані спокою (рис.2.1).

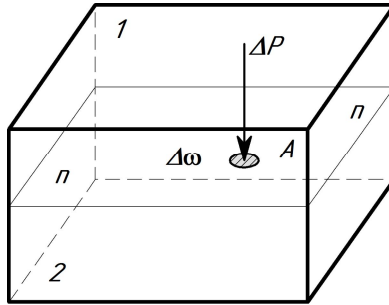


Рис.2.1. Схема сил

Оберемо всередині нього довільну точку A та проведемо через неї площину $n-n$, що розітне об'єм рідини на дві частини 1 і 2.

Умовно замінюємо рідину силами таким чином, щоб тіло залишалось у рівновазі. Через площину $n-n$ на частину 2 з боку частини 1 буде діяти зрівноважувальна сила P – **сила гідростатичного тиску**. Сила P є нормальною силою. Виділимо біля точки A на поверхні $n-n$ елементарну площину $\Delta\omega$, на яку буде припадати частина сили P , яку позначимо через ΔP .

Подумки зменшуючи розміри площини $\Delta\omega$, отримуємо тиск p у деякій точці рідини, що перебуває у стані спокою, тобто **гідростатичний тиск**

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega} \quad \text{або} \quad p = dP/d\omega.$$

Отже, **гідростатичний тиск** є відношенням стискальної сили P до елементарної площини ω при зменшенні її розмірів до 0.

Гідростатичний тиск має такі властивості:

1. Гідростатичний тиск діє нормально до площини дії і є стискальним, тобто він напрямлений усередину досліджуваного об'єму рідини.

2. Гідростатичний тиск p у будь-якій точці однаковий в усіх напрямках (тобто не залежить від кута нахилу площини дії).

Наведемо спрощене доведення цього положення. Для цього виділимо всередині рідини, яка перебуває у стані спокою, довільну точку A та виділимо біля цієї точки елементарний об'єм рідини у вигляді прямої призми (рис.2.2), в основі якої лежить прямокутний трикутник ABD .

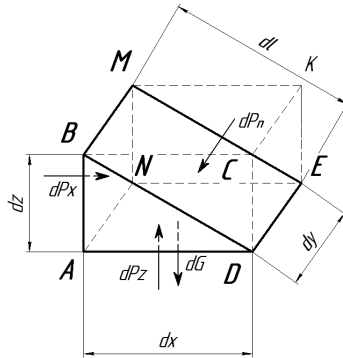


Рис. 2.2. Схема сил, що діють на прямокутну призму

Замінімо дію рідини на призму силами гідростатичного тиску dP_x , dP_z , dP_n , під дією яких призма перебуває в рівновазі.

Сила dG – об'ємна зовнішня сила, якою можна знехтувати через її малість та для спрощення доведення.

Оскільки призма перебуває в рівновазі, то трикутник сил є замкненим і подібним до трикутника ABD .

Тоді із закону подібності

$$\frac{dP_x}{AB} = \frac{dP_n}{BD} = \frac{dP_z}{AD}, \quad \text{або} \quad \frac{dP_x}{dz} = \frac{dP_n}{dl} = \frac{dP_z}{dx}.$$

Поділимо всі частини цього рівняння на довжину призми dy :

$$\frac{dP_x}{dz dy} = \frac{dP_n}{dl dy} = \frac{dP_z}{dx dy}.$$

У знаменнику кожного з цих виразів – площа відповідної грані призми. Якщо розміри dz , dy , dl , dx прагнуть до 0, то відповідно до виразу для визначення гідростатичного тиску можна записати:

$$\frac{dP_x}{d\omega_x} = \frac{dP_n}{d\omega_n} = \frac{dP_z}{d\omega_z}, \quad \text{або} \quad p_x = p_n = p_z = p.$$

Таким чином, тиск діє у всіх напрямках однаково. На поверхню площею ω діє рівнодійна тиску $P=p\omega$, але рівнодійна сил тиску на поверхні площ ω_1 і ω_2 буде різною, якщо $p = \text{const}$, тому що $\omega_1 \neq \omega_2$ (рис.2.3):

$$P_1 = p \cdot \omega_1, \quad P_2 = p \cdot \omega_2.$$

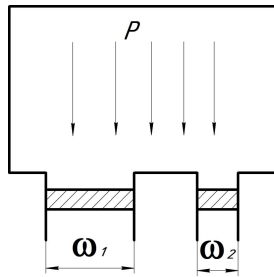


Рис. 2.3. До визначення рівнодійної сили тиску на поверхню

Цей принцип покладено в основу дії гідравлічних домкратів (рис.2.4). Замкнений об'єм, у якому перебуває робоча рідина, з'єднано із двома циліндрами різного діаметра, у яких містяться поршні 1 і 2 із площами ω_1 і ω_2 . Якщо $\omega_1 \ll \omega_2$, то прикладена до поршня 1 сила $P_1 = p\omega_1$ буде значно меншою за силу $P_2 = p\omega_2$, прикладену до поршня 2. Таким чином можна передавати зусилля за допомогою рідини від гідронасоса до гідродвигуна.

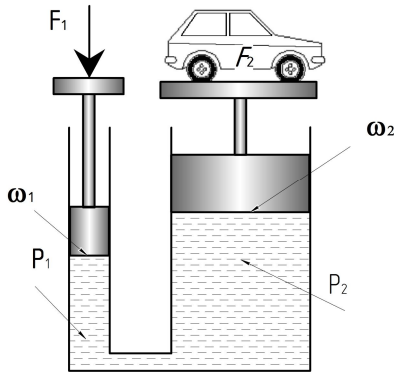


Рис. 2.4. Ілюстрація зусиль передач тиску за допомогою рідини

Користуючись поняттям сили тиску, отримаємо залежність між діючими в рідині силами і відповідними їм площами поверхонь

$$p = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_2}{\omega_2} \quad \text{або} \quad p = \frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2}.$$

2.3. Основне диференціальне рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера)

Припустимо, що рідина з густиною ρ перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил, проекції прискорень яких на відповідні координатні осі X, Y, Z становлять:

$$X = \frac{F_x}{m}, \quad Y = \frac{F_y}{m}, \quad Z = \frac{F_z}{m}.$$

Виділимо біля довільної точки A нескінченно малий об'єм рідини у вигляді прямокутного паралелепіпеда, грані якого паралельні координатним площинам.

Подумки відкинемо навколишній виділений об'єм рідини, замінивши його дією сил, що підтримують тіло у рівновазі. Це стискальні сили, нормальні до кожної із плоских граней. До граней, які паралельні площині Oz , будуть прикладені сили dP_{x1} і dP_{x2} , які напрямлені зустрічно уздовж осі Ox (рис. 2.5).

Поклавши, що рідке тіло перебуває в рівновазі, умову рівноваги всіх діючих у напрямку осі Ox сил запишемо так

$$dF_x + dP_{x1} - dP_{x2} = 0, \quad (2.1)$$

де dF_x – проекція на ось Ox елементарної масової сили

$$dF_x = dm X,$$

де dm – елементарна маса, яку можна виразити через добуток густини на елементарний об'єм $dW = dx dy dz$.

Таким чином, елементарна маса дорівнює

$$Dm = \rho dx dy dz.$$

Сили гідростатичного тиску на грані паралелепіпеда dP_{x1} та dP_{x2} можна обчислити як добуток тиску на площу, тобто

$$dP_{x1} = p_1 d\omega_1 = p_1 dy dz, \quad dP_{x2} = p_2 d\omega_2 = p_2 dy dz,$$

де p_1 і p_2 – тиск у точках 1 й 2.

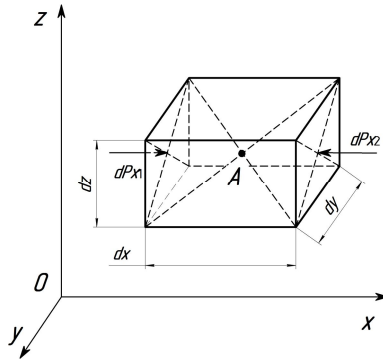


Рис.2.5. Схема для виведення рівняння Ейлера

Покладемо, що тиск у точці A , тобто в центрі паралелепіпеда, дорівнює p . Із курсу вищої математики відомо, що

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

а зміна тиску dp , яка припадає на одиницю довжини в напрямку координатної осі Ox , можна подати у вигляді частинної похідної $\frac{\partial p}{\partial x}$, тобто

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx; \quad p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx.$$

Підставляючи отримані вирази в рівняння рівноваги (2.1) отримаємо

$$\rho X dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) dy dz = 0. \quad (2.2)$$

Припускаємо, що $dy \neq 0$ і $dz \neq 0$. Розділимо обидві частини рівняння (2.2) на $dy dz$, тобто віднесемо до одиниці площі, і після перетворень отримаємо умову рівноваги сил у напрямку координатної осі Ox :

$$\rho X dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0.$$

Виконавши аналогічні перетворення для двох інших координатних осей, дістанемо систему диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \rho X dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx &= 0 \\ \rho X dy - \frac{\partial p}{\partial y} dy &= 0 \\ \rho X dz - \frac{\partial p}{\partial z} dz &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

З огляду на те, що $\rho \neq 0$ і $dx \neq 0$, розділимо обидві частини рівнянь (2.3) на ρdx , ρdy та ρdz :

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (2.4)$$

Система диференціальних рівнянь рівноваги рідкого тіла (2.4) була отримана у 1755р. Л.Ейлером і носить його ім'я. Вона дозволяє розв'язувати багато задач, що пов'язані з рівновагою рідини.

Складемо всі три рівняння:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.5)$$

Ліва частина рівняння (2.5) являє собою повний диференціал dp . Таким чином, маємо рівняння вигляду

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.6)$$

Інтегруючи рівняння (2.6) і вважаючи, що щільність ρ постійна, отримаємо вираз для гідростатичного тиску у будь-якій точці рідини

$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Таким чином, знаючи проекції зовнішніх сил X, Y, Z , можна визначити тиск у будь-якій точці рідини.

Якщо вздовж будь-якої поверхні тиск незмінний, тобто $p = \text{const}$, або $dp = 0$, то така площина називається **поверхнею рівного тиску або поверхнею рівня**.

2.4. Основне рівняння гідростатики

Проаналізуємо сили, що діють на рідину, у стані спокою.

Якщо рідина перебуває в рівновазі під дією власної ваги, то проекції прискорень, викликаних силою ваги для обраних координатних осей $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$, де g – прискорення вільного падіння (рис.2.6). Щоб отримати основне рівняння гідростатики,

використаємо вираз для визначення гідростатичного тиску в будь-якій точці площини:

$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz) . \quad (2.7)$$

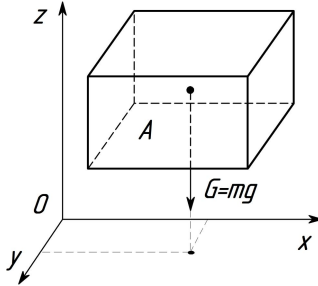


Рис.2.6. Схема сил

Тоді підставляючи вираз (2.7) у рівняння (2.4) дістанемо

$$p = \rho \int (-g) dz .$$

Після інтегрування

$$p = -\rho gz + C ,$$

або

$$p + \rho gz = C ,$$

де C – стала інтегрування.

Для визначення сталої інтегрування розглянемо довільний об'єм рідини з густиною ρ , що перебуває в рівновазі під дією сили ваги. Припустимо, що на поверхні рідини діє тиск p_0 , відстань до площини порівняння xOy дорівнює Z_0 (рис.2.7).

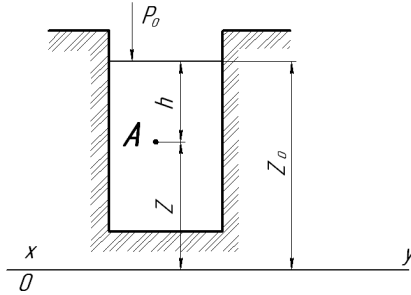


Рис.2.7. Схема для доведення основного рівняння гідростатики

Оберемо довільну точку A всередині рідини, яка міститься на глибині h . Запишемо залежність для визначення тиску в точці A та для точок на вільній поверхні:

$$p + \rho g z = C = p_0 + \rho g z_0,$$

або

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z).$$

Зважаючи на те, що $z_0 - z = h$ (див. рис.2.6), маємо, що для нестисливої рідини, що перебуває в рівновазі під дією сили ваги, повний гідростатичний тиск у точці

$$p = p_0 + \rho g h, \quad (2.8)$$

де p – повний тиск; $\rho g h$ – надлишковий тиск; p_0 – тиск на вільній поверхні.

Величину $\rho g h$ або γh ще називають **ваговим тиском**, оскільки ця величина являє собою ту частину повного гідростатичного тиску, що зумовлена вагою рідини. Таким чином, абсолютний тиск у точці дорівнює сумі зовнішнього поверхневого тиску p_0 і вагового тиску $\rho g h$. Формула (2.8) називається *основним законом гідростатики*, або *рівнянням гідростатичного розподілу тиску*.

Найчастіше за тиск p_0 беруть атмосферний тиск $p_0 = p_a$ що за температури 15°C на рівні моря дорівнює 1 атм.

За рівнянням (2.8) тиск зростає прямо пропорційно глибині занурення точки, де він визначається, а розподіл тиску можна

зобразити прямою, що утворює з вертикаллю кут α ($\text{tg}\alpha = \rho g$). Такий розподіл тиску називається статичним. Чим більша густина рідини, тим сильніше лінійне збільшення тиску з глибиною H (для води при $\rho g = 1$ кут $\alpha = 45^\circ$) (рис. 2.8).

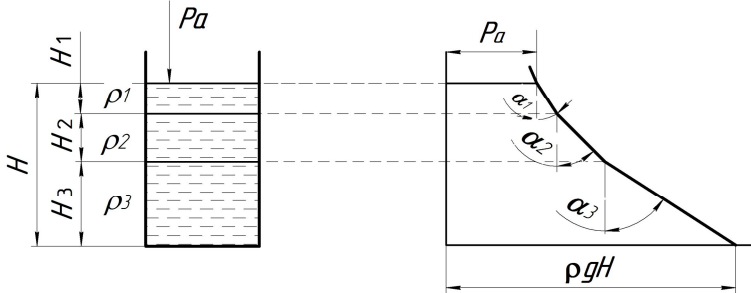


Рис. 2.8. Розподіл тиску по висоті у випадку зміни густини рідини

Оскільки тиск у рідині залежить від глибини занурення, то його можна вимірювати в метрах стовпа рідини,

$$p = \rho g h = \gamma h,$$

звідки напір h (у метрах стовпа рідини) визначається за формулою

$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

Існують дві приблизно рівні між собою позасистемні одиниці вимірювання тиску.

Фізична атмосфера (атм) — одиниця вимірювання тиску, яка точно дорівнює 101 325 Па, або 760 мм.рт.ст.

Технічна атмосфера (скорочено позначається (ат) — позасистемна одиниця вимірювання тиску:

$$1 \text{ ат} = 98\,100 \text{ Па} \sim 735,56 \text{ мм рт.ст.} \sim 10 \text{ м.вод.ст.}$$

$$1 \text{ бар} = 100\,000 \text{ Па} \approx 1 \text{ атмосфера.}$$

$$1 \text{ psi (фунт-сила на дюйм}^2) \approx 0,069 \text{ бар} \approx 0,068 \text{ атм.}$$

Розрізняють чотири види тисків: абсолютний, атмосферний, надлишковий та вакууметричний (рис.2.9).

Для точки B надлишковий тиск є різницею між абсолютним і атмосферним

$$P_{\text{над}} = P_{\text{абс}} - P_{\text{атм}}.$$

Для точки A вакууметричний тиск дорівнює різниці між атмосферним і абсолютним

$$P_{\text{вак}} = P_{\text{атм}} - P_{\text{абс}}.$$

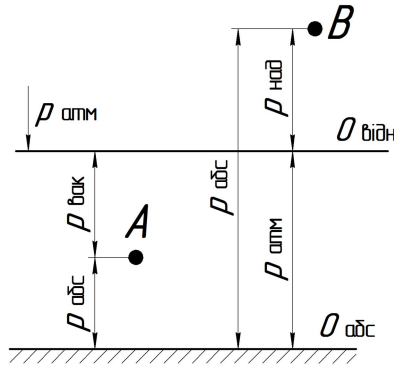


Рис.2.9. Схема тисків

2.5. Особливості вираження основного закону гідростатики для газів

Відповідно до закону Клапейрона – Клаузіуса $p/(\rho g) = RT$ (де R – газова стала), або $p/(RT) = \rho g$. Тоді можна записати

$$dp = -\rho g dz = -\frac{p}{RT} dz. \quad (2.9)$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\ln p = -\frac{z}{RT} + C,$$

де C – стала інтегрування, яка визначається за умов, що при $Z = Z_0$ тиск $p = p_0$. Тоді

$$C = \ln p_0 + \frac{Z_0}{RT}. \quad (2.10)$$

Підставляючи значення C із формул (2.9) у вираз (2.8), маємо

$$\ln p = -\frac{Z}{RT} + \ln p_0 + \frac{Z_0}{RT};$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Z - Z_0}{RT} = -\frac{H}{RT}, \quad (2.11)$$

де $Z - Z_0 = H$.

Якщо використати формулу залежності температури повітря від висоти над рівнем моря, то рівнянню (2.10) можна надати остаточно такого вигляду

$$\frac{p}{p_a} = \left(1 - \frac{H}{44300}\right)^{5.256}.$$

Ця залежність характеризує основний закон гідростатики для газів.

2.6. Тиск, що діє на плоску поверхню

Розглянемо найпростіший випадок – тиск рідини на плоске дно (рис.2.10).

Виділимо в межах площі дна елементарну площину $d\omega$. Сила тиску на цю площадку

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho gh) d\omega.$$

Рівнодійну силу тиску визначаємо інтегралом

$$P = \int dP = (p_0 + \rho gh) \omega.$$

Для інженерних розрахунків сили гідростатичного тиску на пласке дно можна використовувати формулу

$$P = (p_0 + \rho gh) \omega. \quad (2.12)$$

Рівняння (2.12) показує, що незалежно від форми посудини, заповненої рідиною, і форми її дна, сила гідростатичного тиску визначається висотою стовпа рідини й площею дна.

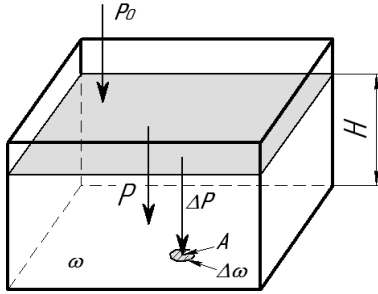


Рис.2. 10. Схема для розрахунку

С.Стевін показав, що тиск на горизонтальну поверхню, яка міститься під стовпчиком рідини, не залежить від того, як цей стовпчик розташований — вертикально чи під кутом до вертикалі (рис. 2.11). Це **парадокс гідростатики**. Паскаль довів, що тиск рівномірно передається у всі інші точки, якщо рідина поміщена у замкненому об'ємі і нікуди не витікає.

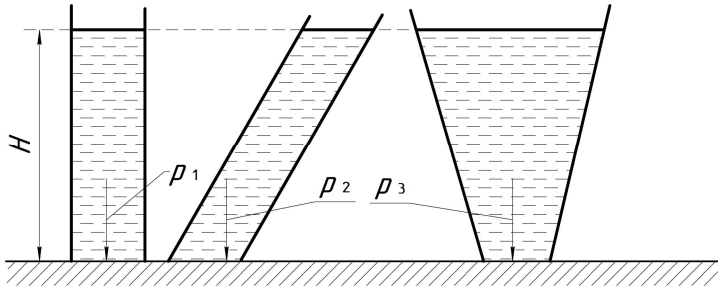


Рис. 2.11. Ілюстрація парадоксу гідростатики
(рівність тисків $p_1 = p_2 = p_3$)

2.7. Визначення тиску, що діє на плоску поверхню

Розглянемо випадок, коли плоска поверхня має нахил до горизонтальної площини під деяким кутом α . Тиск на поверхні рідини (рис. 2.12, а, б) дорівнює p_a . Вважаємо, що площа поверхні довільна, а її елементарна частина дорівнює $d\omega$. У цьому разі сила повного гідростатичного тиску буде становити

$$\vec{P} = \int p \vec{n} dx \quad \text{або} \quad dP = p d\omega,$$

де \vec{n} – вектор-нормаль до поверхні (рис.2.12, а). Згідно з основним рівнянням гідростатики (2.12) величину тиску p можна визначити як

$$p = p_0 + \rho g H = p_0 + \rho g z \sin \alpha, \quad (2.13)$$

На підставі формул (2.12) і (2.13) отримаємо:

$$P = (p_{\text{ат}} + \rho g z \sin \alpha) d\omega.$$

Інтеграл $\int z d\omega$ являє собою статичний момент площі змоченої поверхні ω відносно осі у. Якщо цей момент відомий, то значення P буде:

$$P = (p_{\text{ат}} + \rho g H_c) \omega, \quad (2.14)$$

де H_c – глибина занурення центра ваги вибраної поверхні, а $(p_{\text{ат}} + \rho g H_c)$ – повний статичний тиск у центрі поверхні ω .

Таким чином, сила повного гідростатичного тиску на плоску поверхню, що дорівнює ω , може бути визначена як величина, що дорівнює добутку площі ω на повний гідростатичний тиск, який діє в центрі ваги цієї поверхні.

У зв'язку з тим, що тиск змінюється пропорційно глибині H занурення точки, можна побудувати епюру розподілу тиску по цій поверхні.

На рис. 2.12,б наведено приклад епюри розподілу тиску, де

$$p_{\text{min}} = p_0, \quad \text{або} \quad p_{\text{max}} = (p_0 + \rho g H_{\text{max}}).$$

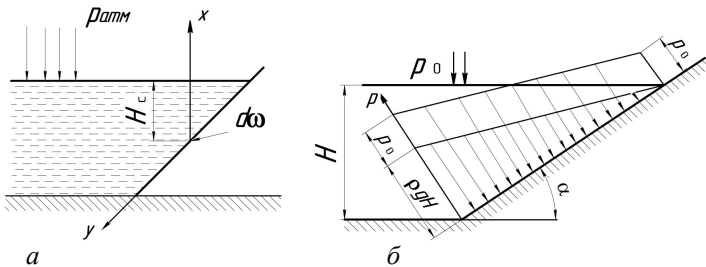


Рис. 2.12. Тиск на похилу поверхню

Визначимо силу гідростатичного тиску на довільну плоску поверхню, яка розташована під довільним кутом до горизонту рис. 2.13.

Для розрахунку використовуємо формулу 2.14.

$$P = (p_0 + \rho g h_{\text{ц}}) \omega,$$

де $h_{\text{ц}}$ – глибина занурення центра ваги Ц змоченої частини площі поверхні; ω – площа змоченої частини поверхні.

Сила надлишкового тиску за атмосферного тиску на вільній поверхні, тобто, якщо $p_0 = p_{\text{ат}}$, становить

$$P_1 = \rho g h_{\text{ц}} \omega.$$

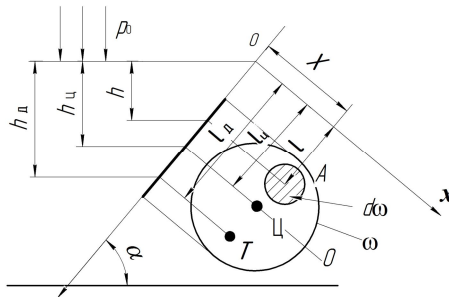


Рис.2.13. Схем для визначення центра тиску

Ця сила буде прикладена в центрі тиску Т, координата якого y_T визначається за формулою

$$y_T = y_{\text{ц}} + \frac{I_0}{\omega y_{\text{ц}}},$$

де $y_{\text{ц}}$ – координата центра ваги змоченої поверхні; I_0 – момент інерції площі змоченої частини поверхні відносно горизонтальної осі, що проходить через центр її ваги Ц.

Момент інерції I_0 деяких поверхонь відносно горизонтальної осі має наступні значення

$$I_0 = \frac{a^4}{12} \text{ – для квадрата зі стороною } a ;$$

$$I_0 = \frac{bH^3}{12} \text{ – для прямокутника } b \times H ;$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{64} \text{ – для кола діаметром } d .$$

Наприклад, необхідно знайти координату центра тиску для плоскої вертикальної стінки, яка має ширину B (рис. 2.14). Рівень води перед стінкою H .

Скористаємось формулою для визначення центра тиску.

Центр ваги міститься на глибині $y_{\text{ц}} = \frac{H}{2}$, тобто у точці перетину діагоналей. Площа стінки $\omega = bH$.

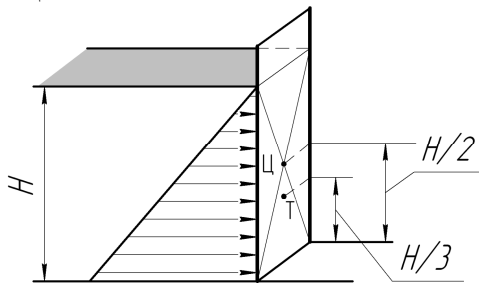


Рис.2.14. Визначення центра тиску

$$\begin{aligned} y_{\text{Т}} = y_{\text{ц}} + \frac{I_0}{\omega y_{\text{ц}}} &= \frac{H}{2} + \frac{bH^3}{12} \frac{1}{bH} \frac{1}{H/2} = \frac{H}{2} + \frac{bH^3}{12} \frac{2}{bH^2} = \\ &= \frac{3H}{6} + \frac{H}{6} = \frac{4H}{6} = \frac{2}{3} H. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо еюра гідростатичної сили тиску на прямокутну стінку має трикутну форму, можна вважати, що сила проходить на $y_{\text{Т}} = \frac{2}{3} H$ від верхівки епюри.

За допомогою графічного методу можна будувати епюри дії рідин з обох боків стінки (рис.2.15).

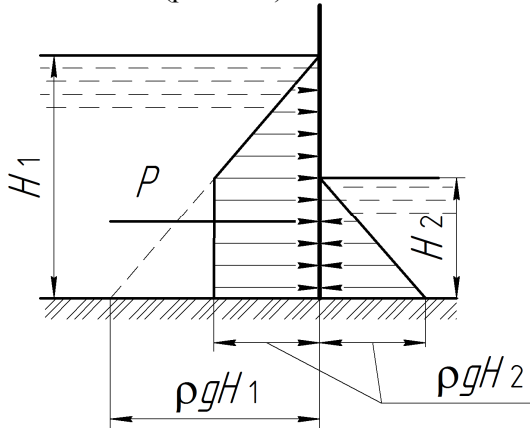


Рис.2.15. Розрахункова схема дії рідин з обох боків стінки

Об'єм епюри чисельно дорівнює величині цієї сили. Сила тиску має проходити крізь центр ваги епюри, який можна знайти графічним методом, або розрахувати за формулами

$$B = \frac{2H_1 + H_2}{3(H_1 + H_2)} H, \quad A = \frac{H_1^3 - H_2^3}{3(H_1^2 - H_2^2)},$$

де A, B – координати центрів ваги епюри, що має форму трапеції (рис.2.16).

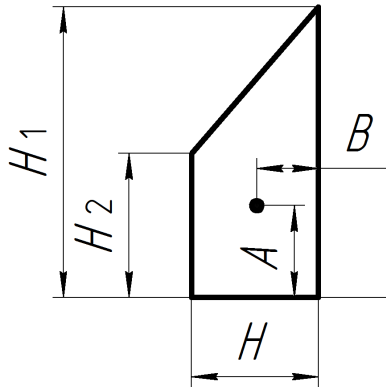


Рис.2.16. Схема для визначення координат центра ваги

2.8. Визначення тиску, що діє на криволінійну поверхню

Розглянемо як розрахувати силу гідростатичного тиску на криволінійну поверхню (рис.2.17). У загальному випадку силу гідростатичного тиску на криволінійну поверхню розраховують за формулою

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

де P_x, P_y, P_z – складові сили надлишкового тиску по відповідних осях.

У випадку циліндричної поверхні (рис.2.17).

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}.$$

де P_x і P_z – горизонтальна і вертикальна складові сили P (рис.2.18).

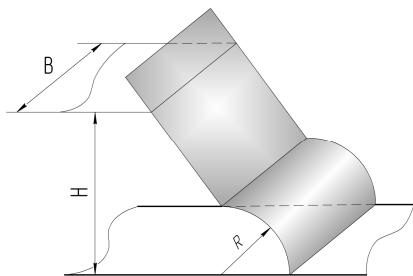


Рис.2.17. Схема криволінійної поверхні

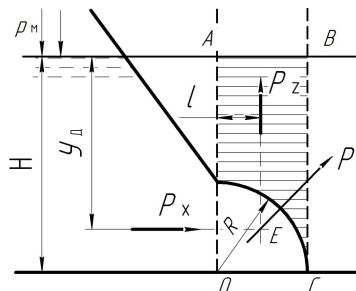


Рис. 2.18. Схема для розрахунку сил

Горизонтальна складова надлишкового тиску P_x дорівнює силі тиску на вертикальну проекцію криволінійної поверхні

$$P_x = (p_m + \rho g h_{ц}) \omega_z,$$

де p_m – манометричний тиск на поверхні рідини;

$h_{\text{ц}} = \left(H - \frac{R}{2} \right)$ – глибина занурення центра ваги вертикальної проєкції криволінійної поверхні – площа вертикальної проєкції;
 $\omega_z = RB$ – площа вертикальної проєкції.

Якщо $p_m = p_0 = p_a$, тоді

$$P_x = \rho g h_{\text{ц}} \omega_z = \rho g \left(H - \frac{R}{2} \right) RB.$$

Вертикальна складова P_z дорівнює вазі рідини в об'ємі тіла тиску.

Тіло тиску це об'єм, що розташований між вертикальними площинами, які проходять через крайні твірні циліндричної поверхні, самою циліндричною поверхнею та вільною поверхнею рідини або її продовженням. У розгляданому випадку для розрахунку об'єму тіла тиску визначимо площу тіла $OABC$ (рис.2.18)

$$F_{OABC} = RH - \frac{\pi R^2}{4}.$$

Вага рідини в об'ємі тіла тиску

$$P_z = \rho g F_{OABC} B = \rho g \left(RH - \frac{\pi R^2}{4} \right) B.$$

Кут нахилу сили P відносно горизонту

$$\text{tg} \varphi = P_z / P_x.$$

2.9. Закон Архімеда

Як зазначалося вище, гідростатика бере свій початок від Архімеда, який встановив важливий закон про силу, що діє на занурене в рідину тіло. Згідно з цим законом кожне занурене в рідину тіло втрачає у своїй вазі стільки, скільки важить рідина в об'ємі цього тіла.

Розглянемо три циліндричні тіла вагою G_1 , G_2 й G_3 і площею перетину ω (рис.2.19).

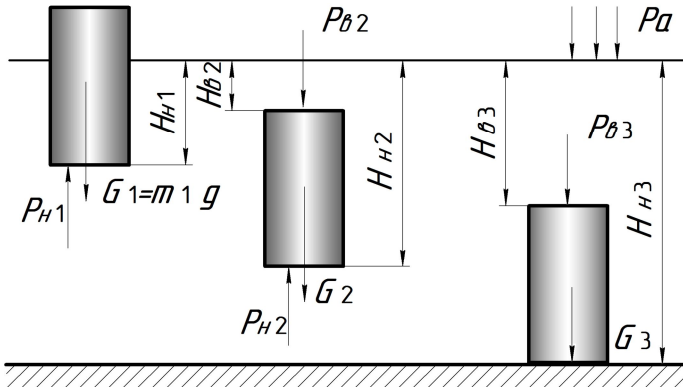


Рис. 2.19. Схема для доведення закону Архімеда

Розглянемо сили, що діють на ці тіла з боку рідини, наприклад, друге тіло. Сили, діючі на бічні поверхні, зрівноважені, а на нижню і верхню площини діють різні сили, рівнодійна яких

$$P_2 = P_{H2} - P_{B2} = (p_a + \rho g H_{H2})\omega - (p_a + \rho g H_{B2})\omega = \quad (2.15)$$

$$= \rho g H_{H2}\omega - \rho g H_{B2}\omega = \rho g\omega(H_{H2} - H_{B2}) = \rho g W,$$

де W – об'єм зануреного в рідину тіла.

Рівняння (2.15) відоме як *закон Архімеда*, згідно з яким *на будь-яке тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витисненої рідини (газу) і напрямлена вертикально вгору*. У випадку $G_1 < P_1$ тіло плаває на поверхні; якщо $G_2 = P_2$, тіло плаває усередині рідини; якщо $G_3 > P_3$, тіло тоне в рідині.

2.10. Прилади для вимірювання тиску у рідині

Для вимірювання атмосферного тиску застосовують барометри, надлишкового - манометри, вакууму вакуумметри.

Залежно від принципу дії, конструкції манометри поділяють на декілька груп.

Манометри рідинні. До таких манометрів належать: п'єзометр, мікроманометр, диференційний манометр (рис.2.20, а,б,в). П'єзометр

— це скляна трубка, встановлена вертикально, яка має міліметрову шкалу (рис.2.20, а). Тиск вимірюється за висотою рідини, яка піднімається по трубці завдяки тому, що $p_x > p_a$. Якщо труба встановлена не вертикально, а під деяким кутом α до горизонту, то це вже мікроманометр, завдяки нахилу трубки шкала ніби «розтягується», і висоту H можна вимірювати більш точноше (рис.2.20, б). Диференціальний манометр вимірює різницю тисків у якихось двох об'ємах рідини (рис. 2.20, в).

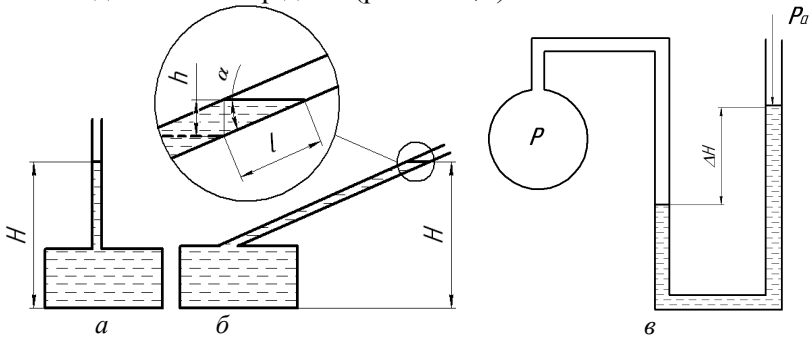


Рис. 2.22. Рідинні манометри: а - п'єзометр, б – мікроманометр, в – диференціальний манометр

Механічні манометри. Серед механічних манометрів найчастіше використовують трубчасті і мембранні манометри. Робочим елементом трубчастого (або пружинного) манометра є трубка Бурдона — загнута у вигляді дуги трубка з поперечним перерізом у вигляді еліпса (рис.2.21, а). Манометри виготовляють з можливістю вимірювання тиску у діапазоні від 0...0,06 МПа до 0...400 МПа, залежно від конструкції, при точності вимірювання від 0,1...4,0 %.

Бокові частини трубки в розрахунках не враховуємо, оскільки сили, що діють на них, будуть зрівноважені. Силу, що діє на внутрішню та зовнішню поверхні, можна розрахувати за формулою

$$P_{\text{зов}} = p\omega_{\text{зов}} = p \frac{2p R_{\text{зов}}}{n} B ;$$

$$P_{\text{вн}} = p\omega_{\text{вн}} = p \frac{2p R_{\text{вн}}}{n} B ,$$

де B – ширина частини трубки, що використовується у розрахунках; n – частина дуги.

Оскільки рівнодійна сил тиску на зовнішню поверхню трубки більша, ніж на внутрішню (площі поверхонь різні), трубка розгинається. Деформація трубки передається на стрілку, яка обертається навколо своєї осі вздовж відповідної шкали, показуючи таким чином величину тиску.

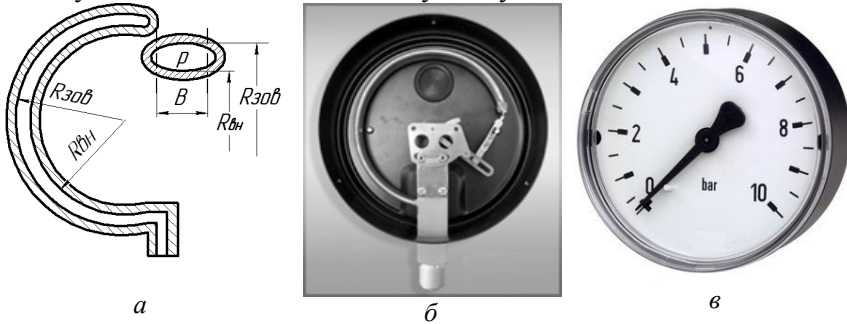
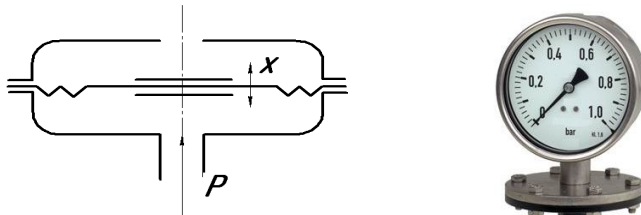


Рис. 2.21. Трубчастий манометр: *а* — трубка Бурдона; *б* — схеми; *в* — фотографія

Робочим елементом мембранного манометра є мембрана, яка деформується під дією тиску p . Деформація мембрани фіксуються відповідним механізмом, сполученим зі стрілкою, що може обертатися навколо своєї осі. Кінець стрілки переміщується вздовж шкали, яка відградує в одиницях тиску.

На рис.2.22 показано схему (*а*) та фотографію (*б*) мембранного манометра.



*a**б*

Рис. 2.22. Мембранний манометр: *a* – схема; *б* – фотографія

Мембранні роздільники середовищ забезпечують передачу тиску робочого середовища до вимірювальних приладів (манометра, перетворювача тиску та ін.) для унеможливлення безпосереднього контакту між ними, небажаного або недопустимого з конструктивних та експлуатаційних міркувань, наприклад, у разі корозійної активності робочого середовища, схильності середовища до кристалізації, підвищеної температури, наявності завислих частинок та ін. У такому манометрі тиск передається через розділову мембрану і спеціальну рідину, що заливається в камеру роздільника.

Діапазони вимірювання тиску від 0...0,16 МПа до 0...4 МПа. Клас точності — 1,6 і 2,5.

Іноді використовують так звані «поршневі манометри», які діють на основі закону рівноваги твердого тіла, яке зміститься під дією рідини. Сила тиску, що вимірюється, прикладена до поршня приладу. Вона зрівноважується зовнішньою силою, величина якої відповідає вимірюваному тиску. У тому разі, коли зрівноважувальною силою є сила ваги, такий прилад називається вагопоршневим.

Існують також електричні манометри, дія яких ґрунтується на принципі пропорційності зміни деяких електричних властивостей матеріалів від зміни тиску. Наприклад, опір деяких сплавів пропорційний тиску навколишнього середовища.

2.11. Відносна рівновага рідини

Відносною рівновагою рідини називається такий стан, за якого кожна її частинка зберігає своє положення відносно твердої стінки рухомої посудини. За відносної рівноваги розглядаються два завдання: визначення характеру розподілу тиску та визначення форми поверхні рівня (рівного тиску) :

$$p = \rho \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Якщо $p = \text{const}$, тоді

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

У загальному випадку будь-який складний рух посудини з рідиною можна подати як суму трьох рухів: поступального по вертикалі, поступального по горизонталі, обертального. Розглянемо випадок обертання циліндричної посудини з рідиною з постійною кутовою швидкістю ω (рис.2.23).

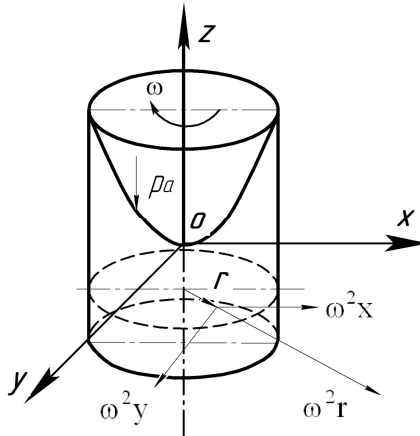


Рис.2.23. Обертання циліндричної посудини

У цьому випадку проекції прискорень масових сил

– тяжіння $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$;

– відцентрових $X = \omega^2 x$, $Y = \omega^2 y$, $Z = 0$.

Рівняння поверхні рівного тиску має вигляд

$$p = \rho \int (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

У всіх точках поверхні рівного тиску мають виконуватись умови $p = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $dp = 0$.

Після інтегрування

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C,$$

$$\text{або } \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2} - g = C.$$

З огляду на те, що $x^2 + y^2 = r^2$, отримаємо $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$,

звідки
$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{const.}$$

Таким чином, під час обертання посудини з рідиною навколо вертикальної осі поверхнями рівного тиску буде сім'я параболоїдів обертання, віссю яких є вісь Oz .

Закон розподілу тиску в рідині можна описати рівнянням

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \rho g(z - z_0),$$

де p_0 – тиск у точках параболоїда поверхні рівня, вертикальна координата вершини якого дорівнює z_0 ; p – тиск у довільній точці рідини r і z .

Положення вільної поверхні рідини, якщо відома швидкість обертання посудини, визначається об'ємом рідини, що міститься у посудині. При цьому

– об'єм параболоїда обертання $W = \frac{\pi r^2 H}{2}$;

– об'єм рідини в обертовій посудині, коли вільна поверхня перетинає дно посудини (рис.2.24), можна визначити за формулою

$$W = \pi(r^2 - r_1^2) \frac{b}{2} = \frac{\pi g}{\omega^2} b^2.$$

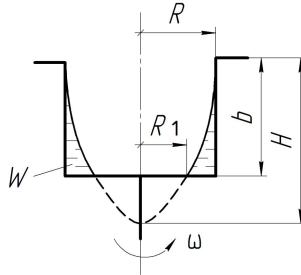


Рис.2.24. Схема для розрахунку об'єму рідини у обертовій посудині

Приклад 2.1. Визначити тиск пари у циліндрі поршневого насоса (рис.2.25), що необхідний для подачі води на висоту $H = 60\text{м}$. Діаметри циліндрів $d_1 = 350\text{ мм}$, $d_2 = 200\text{ мм}$.

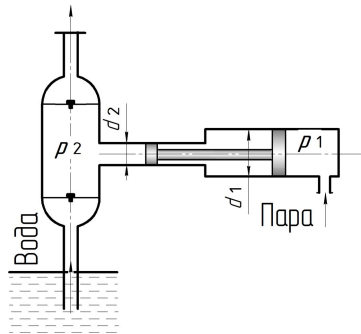


Рис.2.25. Схема перетворювача тиску

Розв'язання. Сила, що передається штоком від поршня парової двигуна

$$P_1 = p_1 \omega_1.$$

Згідно із законом Паскаля гідростатичний тиск у гідронасосі

$$p = \frac{P_1}{\omega_2} = \frac{p_1 \omega_1}{\omega_2}.$$

Тиск у паровому циліндрі

$$p_1 = p_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = p_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2.$$

Гідростатичний тиск у гідравлічному насосі

$$p_2 = \rho g H,$$

звідки $p_1 = \rho g H \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 60 \cdot \left(\frac{200}{350} \right)^2 = 192,2 \text{ кПа}.$

Приклад 2.2. Плоский щит (рис.2.26) перекриває канал, ширина якого $B=2\text{м}$, глибина води перед щитом $H=3\text{м}$. Вага щита 15кН . Коефіцієнт тертя щита по опорах $f = 0,4$. Визначити силу тиску води на плоский щит та силу, яку необхідно прикласти для підняття щита.

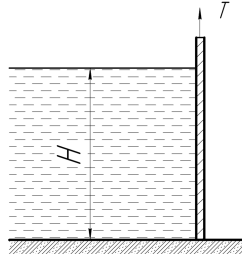


Рис. 2.26. Схема до прикладу 2.2

Розв'язання. Сила тиску води на щит

$$P = \rho g h_{\text{ц}} \omega = \rho g \frac{H}{2} B H = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 88,29 \text{ кН}.$$

Зусилля для підняття щита дорівнює сумі зусиль на подолання сили тиску води, сили тертя та ваги щита

$$T = G + fP = 15 + 0,4 \cdot 88,29 \text{ кН} = 35,331 \text{ кН}.$$

3. КІНЕМАТИКА РІДИН І ГАЗІВ

3.1. Особливості руху рідини і основні рівняння руху

Кінематикою рідини називають розділ гідравліки, який вивчає геометричні властивості руху рідини.

Рух будь-якого твердого тіла можна подати двома складовими: поступальним рухом і обертанням. Швидкість \mathbf{u} в цьому випадку можна подати сумою швидкостей

$$\vec{u}_{\text{тв}} = \vec{u}_{\text{пост}} + \vec{u}_{\text{об}} = \vec{u}_{\text{пост}} + \vec{\omega} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

де $\vec{u}_{\text{пост}}$ — швидкість поступального руху; $\vec{\omega} \cdot \mathbf{r}$ — швидкість обертання твердого тіла; $\vec{\omega}$ — кутова швидкість обертання; \mathbf{r} — радіус обертання.

Рідина є середовищем, що легко деформується. Отже, для неї є характерним наявність деформівної складової руху ($\vec{u}_{\text{деф}}$). Таким чином, для рідини рівняння (3.1) має вигляд [1]

$$\vec{u}_{\text{рід}} = \vec{u}_{\text{тв}} + \vec{u}_{\text{деф}} = \vec{u}_{\text{пост}} + \vec{u}_{\text{обер}} + \vec{u}_{\text{деф}}.$$

Оскільки деформації в рідині вважають безмежними, на практиці використовують поняття швидкості деформації $\dot{\gamma} = \frac{du}{dr}$ (див. розділ 1).

3.2. Види руху, характерні для рідини

Рух рідини може бути стаціонарним або нестаціонарним, рівномірним і нерівномірним, гвинтовим та плавно змінним [1 — 3; 5].

Стаціонарним (сталим) називають рух рідини, незмінний у часі, за якого тиск і швидкість є функціями тільки координат, тобто не залежать від часу. Тиск і швидкість можуть змінюватися під час переміщення частини рідини з одного положення в інше, але у фіксованій, нерухомій відносно русла точці, тиск і швидкість за сталого руха не змінюються в часі, тобто

$$p = f_1(x, y, z), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad u = f_2(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Коли швидкість кожної частинки не змінюється зі зміною її координат, і поле швидкостей залишається незмінним уздовж потоку, стаціонарний рух називають рівномірним.

Нестаціонарним (несталим) називають рух рідини, всі або деякі характеристики якого змінюються в часі, тобто тиск і швидкість залежать як від координат, так і від часу

$$p = f_1(x, y, z, t), \quad u = f_2(x, y, z, t).$$

При нестационарному русі траєкторії різних часток, що проходять через дану точку простору, можуть мати різну форму. Тому для розгляду картини течії, що виникає в даний момент часу, вводиться поняття *лінії течії*.

Лінією течії (рис. 3.1, а) називають криву, в кожній точці якої вектор швидкості в даний момент часу спрямований по дотичній. В умовах стаціонарної течії лінія течії збігається із траєкторією частки і, отже не змінює своєї форми з часом.

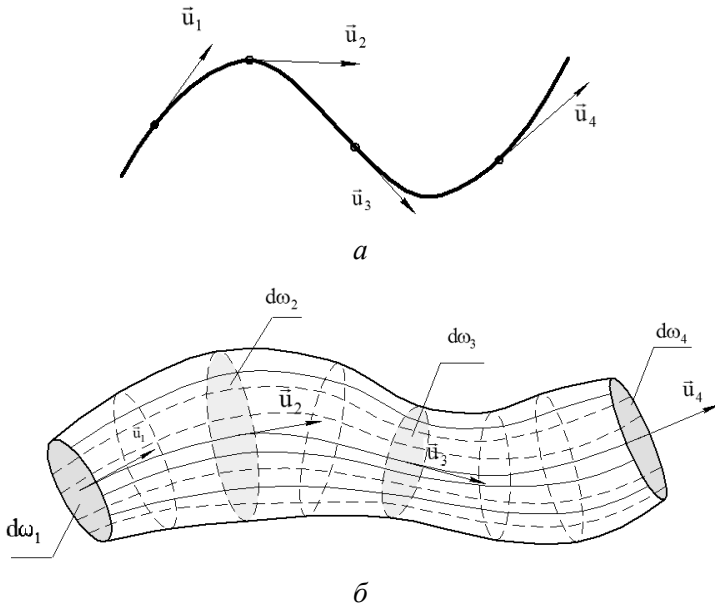


Рис.3.1. Лінія течії (а) та трубка течії (б)

Виділимо у рухомій рідині елементарну площадку $d\omega$ і через всі точки, що знаходяться всередині цієї площадки та на її контурі, проведемо лінії течії. Ми одержимо об'ємний пучок ліній течії, який називають гідравлічною струминкою, а її бокову поверхню — *трубкою течії* (рис.3.1, б).

Якщо площадка $d\omega$ дуже мала струминку називають *елементарною*.

При сталому русі рідини трубка течії має такі властивості:

- форма трубки течії з часом залишається незмінною тому, що лінії течії під час сталого руху не змінюють свою форму;
- швидкості в усіх точках перерізу трубки течії однакові;
- бокова поверхня трубки течії непроникна, тобто рідина не може проходити через бокову поверхню трубки течії.

Потік рідини – це сукупність елементарних струминок. На відміну від трубки течії, в потоці швидкість змінюється за перерізом, приймаючи максимальне значення в центральній частині потоку (рис.3.2).

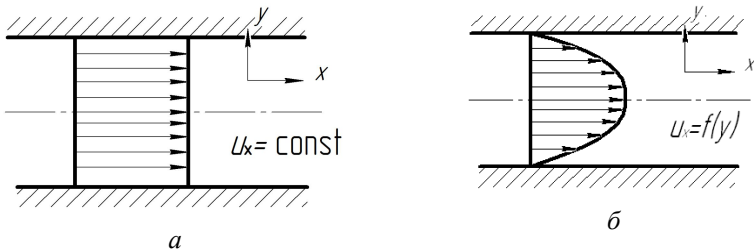


Рис.3.2. Розподіл швидкостей за поперечним перерізом елементарної струминки (а) і потоку (б)

У будь-якій точці на бічній поверхні струминки, вектори швидкості спрямовані по дотичній, тобто складові швидкості, які нормальні поверхні, відсутні. Це означає, що при стаціонарному русі жодна частка рідини не може проникнути усередину струминки або вийти назовні. Таким чином трубка течії є як би непроникною стінкою, а елементарна струминка являє собою самостійний елементарний потік.

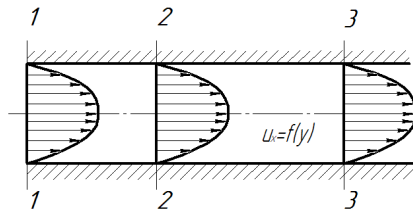
Течія може бути одно-, дво- і тривимірною. Характеристика потоку залежить відповідно від однієї, двох або трьох координат

$$u = u_1(x) \text{ — одновимірний рух;}$$

$$u = u_2(x,y) \text{ — двовимірний рух;}$$

$$u = u_3(x,y,z) \text{ — тривимірний рух.}$$

Течія рідини може бути стабілізованою та нестабілізованою. Стабілізованою називають течію (рис.3.3, а), коли розподіл її характеристик по потоку стаціонарний. Наприклад, у випадку, коли закон розподілу швидкості в усіх перерізах потоку однаковий і не залежить від повздожньої координати. При нестабілізованій течії (рис.3.3, б) ця умова не виконується [1, 9].



a

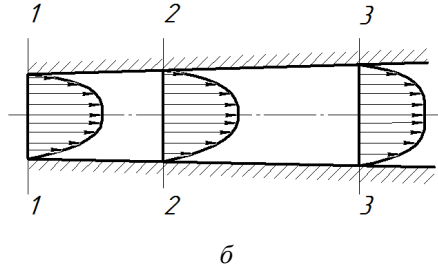


Рис.3.3. До визначення виду руху рідини: *a* — стабілізована течія, епюра швидкостей вздовж потоку не змінюється; *б* — нестабілізована течія, епюра швидкостей вздовж потоку змінює свою форму

Рух рідини може бути потенціальним і вихровим. Вихровий рух рідини характеризується умовою $rot \vec{u} \neq 0$, тобто

$$rot \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \vec{k} \neq 0$$

Рівняння $rot \vec{u} = 0$ є умовою існування потенціалу швидкості, тобто функції $\varphi(x, y, z, t)$. Якщо рух вихровий, такої функції немає. Завдяки функції φ проєкції вектора швидкості визначають так

$$u_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Потік рідини, для якого швидкість визначається через потенціал швидкості φ називається потенціальним. Для такого виду руху справедливе таке співвідношення [9]

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -d\varphi$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]}$$

Поверхні, на яких виконуються умови $d\varphi = 0$, тобто коли у всіх точках потенціал $\varphi(x, y, z, t)$ має одне і те саме значення, називаються еквіпотенціальними поверхнями.

3.3. Методи вивчення руху рідини

Традиційно розглядають два методи вивчення руху рідини – метод Лагранжа та метод Ейлера [4–9].

Основою методу *Лагранжа* або субстанціонального методу є вивчення руху кожної окремої частки рідини. У цьому випадку рух частки буде визначено, якщо точно визначити координати x , y , і z у заданий момент часу t . Це дає можливість побудувати траєкторію руху цієї частки.

Величини x , y , і z називають *змінними Лагранжа*. Їхня зміна за час dt дозволяє одержати значення dx , dy й dz . Шлях дорівнює

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Проекції швидкості на координатні осі –

$u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$, а місцева (локальна) швидкість

$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$. Тобто метод Лагранжа зводиться до визначення траєкторій руху часток рідини.

Беручи до уваги, що для сталого руху лінії течії збігаються із траєкторіями, можна записати

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}.$$

Цей вираз називається *рівнянням лінії течії*.

Метод *Ейлера* засновано на вивченні поля швидкостей, тобто визначення значення й напрямлення швидкостей у всіх точках простору, зайнятого рухомою рідиною.

Змінними Ейлера є значення швидкостей u_x, u_y, u_z , які залежать від координат точок у просторі і часі, тобто

$$u_x = f_2(x, y, z, t), \quad u_y = f_2(x, y, z, t), \quad u_z = f_2(x, y, z, t).$$

Метод Ейлера дозволяє визначити швидкість у будь-який момент часу, але при цьому не дозволяє вивчити рух окремої частки рідини.

3.4. Рівняння суцільності середовища

Рівняння суцільності рідини походить із закону збереження маси та положення механіки суцільних середовищ про те, що в середині рідини, яка рухається, не може відбутися розрив, тобто встановиться порожнеча.

Рівняння нерозривності може бути подано в диференціальній формі для частки рідини елементарної струминки, а також у скінчених величинах для потоку рідини [1-9].

В початковий момент часу t_0 в рідині що рухається і має густину ρ_0 , виділимо елементарний об'єм $dx_0dy_0dz_0$. Припустимо, що у момент часу t , густина стане ρ , а об'єм $dx dy dz$.

Згідно з законом збереження маси [8,9], запишемо

$$\rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \rho dx dy dz .$$

Для всієї рідини отримаємо рівняння, яке називається рівнянням нерозривності в змінних Лагранжа

$$\int \rho_0 dx_0 dy_0 dz_0 = \int \rho dx dy dz .$$

Припустимо, що в початковий момент часу t_0 рідина має густину ρ_0 та об'єм W_0 . В момент часу t , густина стане ρ , а об'єм W , тобто

$$\rho = f(t) , W = f(t) .$$

Закон збереження маси для цього випадку прийме вигляд

$$\rho_0 W_0 = \rho W = const , \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt}(\rho W) = 0 .$$

$$W \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dW}{dt} = 0 .$$

Розділимо на ρW . Отримаємо $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = 0$.

Позначивши відносний об'ємний приріст $\frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$ як

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

отримаємо рівняння нерозривності у змінних Ейлера

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

де \vec{u} – швидкість руху у об'ємі рідини, що розглядається; u_x, u_y, u_z

– проекції вектора швидкості, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – густина.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) є основним рівнянням, яке використовують для опису течії стисливих рідин (газів). Якщо прийняти, що рідина нестислива, тобто $\rho = \text{const}$, або $\partial \rho / \partial t = 0$, отримаємо рівняння нерозривності для крапельної рідини

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \text{ або } \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Уявно виділимо в потоці елементарний об'єм у вигляді прямокутного паралелепіпеда (рис.3.4) [9].

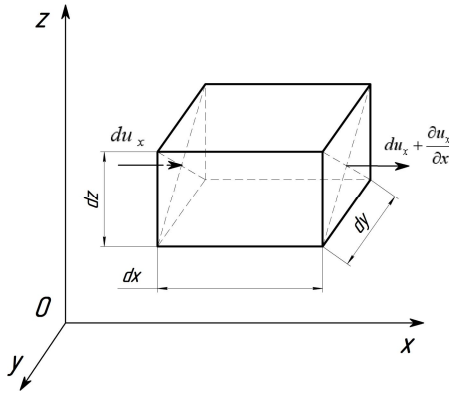


Рис.3.4. Схема до виведення рівняння нерозривності

Розглянемо зміну маси рідини, що протікає, вздовж осі Ox . Приймемо, що швидкість рідини, що витікає через ліву грань – u_x , а швидкість, з якою рідина витікає через праву

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx .$$

За умови $\rho = const$, можна записати, що через ліву грань за час dt пройде маса

$$\rho u_x dy dz dt ,$$

де $dx = u_x dt$ – переміщення, $m = \rho W = \rho dx dy dz$ – маса.

Через праву грань вийде маса рідини

$$\rho(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx)dydzdt .$$

Різниця цих мас становить $-\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt$.

За аналогією зміна маси рідини по осях Oy й Oz , запишеться як

$$-\rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt \text{ й } -\rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt .$$

За законом збереження маси загальна зміна маси, що пройшла через обраний об'єм має дорівнювати нулю, тобто

$$-\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt - \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt - \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt = 0,$$

або
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 . \tag{3.3}$$

Рівняння (3.3) називається **рівнянням суцільності** (нерозривності) в диференціальній формі для довільного руху нестисливої рідини.

Витратою Q рідини через якийсь переріз потоку називається кількість рідини, що протікає через цей переріз за одиницю часу.

Розглянемо елементарну струминку, у якої площа «живого» перерізу $d\omega$. Припустимо, що швидкість руху частинок під час сталого руху дорівнює u . За одну секунду через площу $d\omega$ пройде об'єм рідини dQ

$$Q = \frac{d\omega \cdot L}{t} = u d\omega , \tag{3.4}$$

де L — шлях, який пройде рідина за 1с.

Будемо вважати потік сукупністю елементарних струменів. Витрата Q буде сумою витрат рідини в елементарних струминках, які проходять через переріз ω , тобто

$$Q = \sum_{i=1}^n u_i d\omega = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u(\omega) d\omega.$$

Так, як швидкість у різних струминках може бути різною, а в потоці змінюватися по поперечному перерізу, введемо поняття середньої швидкості, яка визначається на основі співвідношення (3.4)

$$V_{\text{сеп}} = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int u(\omega) d\omega.$$

Середня швидкість $V_{\text{сеп}}$ — деяка фіктивна величина, однакова в усіх точках перерізу (тобто стала по поперечному перерізу потоку), за якої витрати рідини через цей переріз дорівнюють витраті, як і за дійсного розподілу швидкості. В подальшому будемо позначати V

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2 \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Відношення середніх швидкостей у перерізах потоку обернено пропорційно відношенню їх площ. Під час сталого руху зі зменшенням площі перерізу середня швидкість збільшується і навпаки.

3.5. Рівняння руху ідеальної рідин

Гідродинамікою називають розділ гідромеханіки про рух нестисливих рідин під дією зовнішніх сил і механічну взаємодію між рідиною та тілами при їх відносному русі.

Принцип **Д'Аламбера** (названий іменем французького вченого Жана Д'Аламбера) — один з основних принципів, який використовується у гідродинаміці, відповідно до якого, якщо до заданих (активних) сил, що діють на точки рідкої системи, і реакціям накладених зв'язків додати сили інерції, то відбудеться перехід до врівноваженої систем сил. Тобто для кожної i -тої точки системи

$$F_i + N_i + J_i = 0,$$

де F_i — діюча на дану точку активна сила; N_i — реакція накладеного на точку зв'язку; J_i — сила інерції, яка чисельно дорівнює добутку маси m_i точки на її прискорення a_i ($J_i = m_i a_i$) і спрямована протилежно цьому прискоренню.

Уявно виділимо в рідині, що рухається, і має густину ρ елементарний паралелепіпед (рис. 3.5) з ребрами dx, dy, dz .

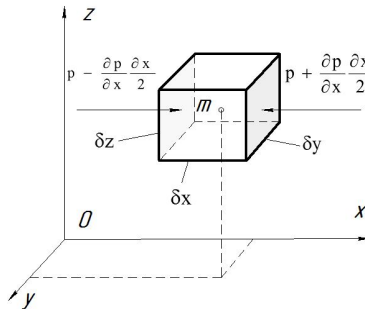


Рис. 3.5. Схема сил до виведення рівняння Ейлера

Цей паралелепіпед перебуває під дією сил

а) **масових** (об'ємних), тобто сил, пропорційних масі паралелепіпеда;

б) **поверхневих** сил тиску навколишньої рідини, які діють на гранях паралелепіпеда й пропорційних їхнім площам.

$$\text{Маса паралелепіпеда } dM = \rho dW = \rho dx dy dz .$$

Припустимо, що прискорення масових сил дорівнюють F . Їх проекції на відповідні осі координат X, Y, Z . Проекція на ось Ox масових сил, що діють на паралелепіпед, буде $dX\rho dx dy dz$.

Припустимо, що тиск у центрі паралелепіпеда рідини, який у випадку руху рідини називають гідродинамічним, буде $p = f(x, y, z, t)$.

Середній гідродинамічний тиск буде дорівнювати на лівій грані паралелепіпеда $p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$, а на правій грані $p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$.

Враховуючи напрямки цих тисків, отримаємо проекцію на ось Ox поверхневих сил, що діють на паралелепіпед (рис.3.5)

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz .$$

Алгебраїчна сума проекцій сил, що діють на паралелепіпед, повинна дорівнювати добутку маси паралелепіпеда на проекцію прискорення руху його центра $\frac{du_x}{dt}$ тобто $\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$.

Таким чином

$$\rho dx dy dz F_x - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}.$$

Після скорочень, приймаючи $dx \neq 0$, $dy \neq 0$, $dz \neq 0$ та $\rho \neq 0$, отримаємо

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}.$$

Аналогічним чином можуть бути отримані залежності між силами й прискореннями в напрямках осей Ox й Oz .

Отже, диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини будуть виражені такою системою

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Диференціальні рівняння (3.5) були виведені дійсним членом Петербурзької Академії наук Леонардом Ейлером в 1755р [1, 8, 9].

У проекціях на дотичну до лінії течії рівняння Ейлера приймає вигляд

$$F_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{du}{dt}, \quad (3.6)$$

де F_s – проекція прискорення масових сил у напрямку дотичної;
 $\frac{du}{dt}$ — дотичне прискорення.

Рівняння Ейлера справедливі як для рідин, так і для газів.

Якщо рідина перебуває в стані спокою, то праві частини рівнянь Ейлера дорівнюють нулю, а самі рівняння приймають вигляд диференціальних рівнянь спокою рідини (3.5).

Компоненти швидкостей є функціями координат простору й часу. Отже вираз для проекції прискорення в розгорнутій формі, наприклад, для осі Ox прийме вигляд

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Розглянемо переміщення вздовж лінії течії на величину ds . В цьому випадку dx , dy та dz є проекціям цього переміщення [9].
 Відповідні проекції швидкості

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Проекції прискорення наприклад, вздовж осі Ox приймуть вид

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z.$$

На основі вищезазначеного рівняння Ейлера (3.5) у розгорнутій формі записується у такому вигляді

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{cases}$$

Відповідно рівняння (1.6) у розгорнутій формі прийме вид

$$F_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{ds}{dt},$$

або

$$F_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Вводимо проекцію вектора $rot \vec{u}$

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z); \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y). \end{aligned} \right\}$$

Рівняння Ейлера в такій формі були виведені І.С.Громеко у 1881р.

Припустимо, що прискорення масових сил X, Y, Z , що є частковими похідними по координатах від функції $\Phi = \Phi(x, y, z)$, що аналогічна функції потенційної енергії

$$X = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}; Y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}; Z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

і, отже,

$$-d\Phi = Xdx + Ydy + Zdz. \quad (3.8)$$

Праву частину рівняння (3.8) можна розглядати як рівняння роботи масових сил, віднесених до одиниці маси. Для нестисливої рідини приймає вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Ці рівняння є рівняннями Ейлера-Громеко у функції компонентів вихору за умови дії на нестисливу рідину об'ємних сил, що мають потенціал.

Для сталого руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0.$$

Тобто рівняння Ейлера-Громеко спрощуються і, отже, рівняння (3.7) для сталого руху рідини можна подати у вигляді [9]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y), \end{aligned} \right\}$$

де Φ – потенціал масових сил.

Помножимо кожне із цих рівнянь послідовно на dx, dy, dz і підсумуємо отримані добутки. Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) &= -2[(u_z \omega_y - u_y \omega_z) dx + \\ &+ (u_x \omega_z - u_z \omega_x) dy + (u_y \omega_x - u_x \omega_y) dz], \end{aligned}$$

або, переписуючи праву частину у вигляді визначника,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) є законом зміни потенціалу масових сил

$\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$ у повному об'ємі рухомої рідини.

Загальний інтеграл рівняння (3.9) для потоків нев'язкої рідини, для яких права частина рівняння обертається в нуль, тобто коли визначник

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0 . \quad (3.11)$$

У цьому випадку, тобто коли визначник (3.11) дорівнює нулю отримаємо на заміну (3.8) вираз

$$\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} . \quad (3.12)$$

Це рівняння, є одним з найважливіших у гідравліці. Воно виведене академіком Петербурзької Академії наук Д.Бернуллі у 1738р.

3.6. Режими руху рідини

У 1883 р англійський фізик Осборн Рейнольдс експериментально визначив, що рух рідини може бути ламінарним або турбулентним.

Дослідна установка Рейнольдса (рис.3.6), включає напірний резервуар, в якому підтримується постійний рівень рідини до якого приєднана скляна трубка 2 з краном 4, за допомогою якого можна регулювати витрату. Для візуалізації режиму руху рідини

встановлено резервуар 1, з якого підфарбована рідина підводиться по трубці 3 до трубки 2.

Об'ємні витрати вимірюються з допомогою бачка 5. Регулюючи відкриття крана 4 швидкість рідини в скляній трубці можна встановити настільки малою, що підфарбована рідина буде рухатись окремою струминкою, не перемішуючись з основною рідиною. Такий режим руху рідини називають *ламінарним* (лат. *lamina* – шар).

При збільшенні відкриття крана 4 швидкість руху рідини в трубці буде зростати, а підфарбована струминка почне викривлятися, приймаючи форму, близьку до синусоїди, а при подальшому збільшенні швидкості зовсім розмивається. Спостерігається порушення паралельноструминності руху і утворення вихорів по всій довжині трубки. Такий режим отримав назву *турбулентного* (лат. *turbulentus* – безладний).

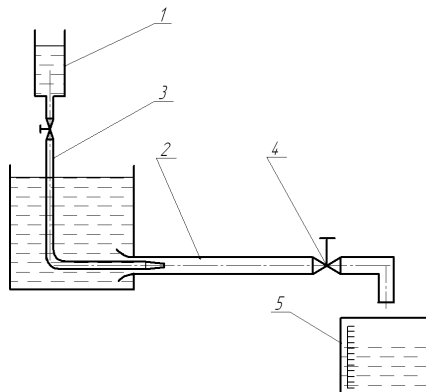


Рис. 3.6. Схема дослідної установки О. Рейнольдса

Дослідним шляхом встановлено, що режим руху рідини залежить від швидкості руху, в'язкості рідини та геометричних розмірів живого перерізу потоку.

Критерієм, що визначає режим руху, є безрозмірний параметр, який носить назву *числа Рейнольдса*.

$$Re = \frac{VL}{\nu},$$

де L – характерний лінійний розмір; V – середня швидкість руху рідини в трубопроводі або і каналі; ν – кінематична в'язкість рідини.

Для круглих трубопроводів характерним лінійним розміром є діаметр, тому число Рейнольдса визначається за формулою

$$Re = \frac{Vd}{\nu}.$$

де d – діаметр трубопроводу.

Число Рейнольдса, при якому відбувається зміна одного режиму на інший, називається *критичним числом Рейнольдса* і позначається $Re_{(кр)}$. Існує верхня та нижня межа критичного числа Рейнольдса. Для труб $Re_{(кр)d} = 2320 \dots 4000$. Якщо $Re < Re_{(кр)}$ – режим ламінарний, при $Re > Re_{(кр)}$ – режим турбулентний.

Для потоків некруглого перерізу як характерний розмір іноді обирають гідравлічний радіус R_r , або приведенний діаметр $D_{пр}$.

Приведений діаметр $D_{пр}$ – це діаметр круга, який має таку ж саме площу, як і переріз некруглого перетину.

Гідравлічний радіус R_r - це відношення площі поперечного перерізу до змоченого периметру

$$R_r = \frac{\omega}{\chi}.$$

Для труби круглого поперечного перерізу отримаємо

$$R_r = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi d^2}{4} \bigg/ \frac{1}{\pi d} = \frac{d}{4}.$$

Якщо використовувати для розрахунків гідравлічний радіус R_r , критичне число Рейнольдса буде меншим в чотири рази, тобто $Re_{(кр)R} = 580$. Інакше кажучи, критичне число Рейнольдса для некруглих потоків лежить у межах $Re_{(кр)} = 580 \dots 1000$.

4. ДИНАМІКА РІДИНИ

4.1. Загальні уявлення про напруження, що діють у рідинах

У рухомій рідині уявно виділимо деякий довільний паралелепіпед, об'єм якого $W = \Delta x \Delta y \Delta z$. Припустимо, що ребра паралельні координатним осям (рис.4.1). Припустимо, що на рідину, яка міститься в цьому об'ємі, діють зовнішні сили [8;9]. Компоненти напружень, що діють по шести гранях цього об'єму всередині тіла можуть бути визначені відповідно величинами

$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}, P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}.$$

Розглянемо, наприклад p_{xy} . Перший індекс x указує, у якій площині діє це напруження, а другий індекс y – у якому напрямку (уздовж якої осі).

Повне напруження на елементарній площині, яка перпендикулярна до осі Ox , у точці O може бути виражене через

нормальне напруження та два взаємно ортогональні компоненти дотичного напруження:

$$p_{xx} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta S_x}, \quad p_{xy} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta S_x}, \quad p_{xz} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta S_x},$$

де $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$ – компоненти вектора сили F , яка діє на елементарну площину; S – площа.

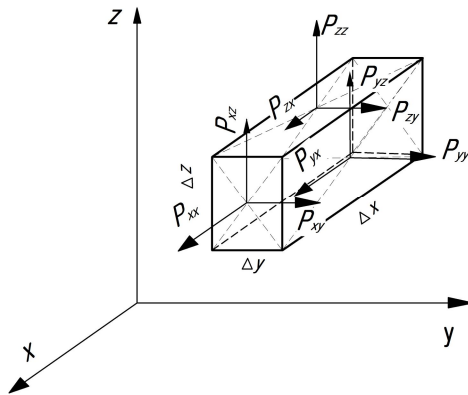


Рис.4.1. Схема напружень

Будемо вважати напруження додатним, якщо додатно напрямлений компонент сили діє на додатно орієнтовану площадку. Так само напруження буде додатним, якщо від'ємно напрямлений компонент сили діє на від'ємно орієнтовану площину.

Для загального опису напруженого стану рідини в будь-якому об'ємі потрібно дев'ять скалярних величин (одне нормальне і два дотичні напруження для кожної площини):

$$\bar{p}_x = \bar{i} p_{xx} + \bar{j} p_{xy} + \bar{k} p_{xz};$$

$$\bar{p}_y = \bar{i} p_{yx} + \bar{j} p_{yy} + \bar{k} p_{yz};$$

$$\bar{p}_z = \bar{i} p_{zx} + \bar{j} p_{zy} + \bar{k} p_{zz}.$$

Ці величини визначають тензор напружень. Пари дотичних напружень, індекси яких відрізняються тільки порядком, рівні між собою, тобто

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}.$$

Загальна сукупність напружень зводиться до шести скалярних компонентів. Тензор напружень є симетричним тензором, отже, матриця напружень містить тільки шість різних складових тензорів напружень і симетрична відносно своєї головної діагоналі

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}.$$

В ідеальній рідині, тобто рідині, позбавленій сил в'язкого тертя, дотичні напруження не виникають (дорівнюють нулю), а відмінними від нуля є тільки нормальні напруження, які до того ж однакові. Матриця напружень для цього випадку набуває вигляду

$$\Pi_{\text{ід}} = \begin{pmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix}.$$

4.2. Рівняння руху в'язкої рідини. Рівняння Нав'є–Стокса

У масі рухомої в'язкої рідини виділимо деякий довільний об'єм W , відмінний від нуля (рис.4.2), і розглянемо умови його рівноваги [8;9].

Згідно з принципом Д'Аламбера, для того, щоб будь-яке тіло перебувало в рівновазі, необхідно щоб для кожного проміжку часу всі

сили, включаючи і сили інерції, прикладені до тіла, взаємно врівноважувались, тобто сума всіх діючих сил має дорівнювати нулю.

У цьому випадку на тіло діють масові сили $\int_W \bar{a} \rho dW$ (\bar{a} – прискорення масових сил); сили інерції $\int_W \bar{\omega} \rho dW$ ($\bar{\omega}$ – прискорення сил інерції $\bar{\omega} = \frac{d\bar{U}}{dt}$), поверхневі сили $\int_S p \bar{n} ds = \int_S \bar{p}_n ds$ (рис.4.2).

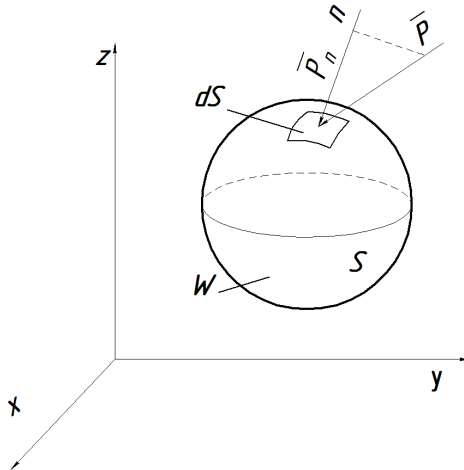


Рис.4.2. Схема діючих сил

Згідно з принципом Д'Аламбера отримаємо

$$\int_W (\bar{a} - \bar{\omega}) \rho dW + \int_S \bar{p}_n ds = 0,$$

де вектор \bar{p}_n можна виразити через його проєкції, помножені на відповідні орти у вигляді

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z). \quad (4.1.)$$

Для перетворення поверхневого інтеграла, що входить у формулу (4.1) в об'ємний використаємо формулу

$$\int_S \bar{a} \cos(n, x) dS = \int_W \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} dW,$$

де \bar{a} – довільний вектор.

У цьому випадку

$$\begin{aligned} \int_S \bar{p}_n dS &= \int_S [\bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z)] dS = \\ &= \int_W \left(\frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{P}_z}{\partial z} \right) dW. \end{aligned}$$

Після перетворень рівняння Д'Аламбера набуває вигляду

$$\int_W \left[(\bar{F} - \bar{\omega}) \rho + \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \right] dW = 0. \quad (4.2)$$

Припустимо, що всі функції і їх похідні є неперервними функціями від своїх незалежних змінних. За цих умов рівняння (4.2), в якому W є довільним об'ємом рідини, може справджуватися лише тоді, коли в кожній точці рідини в будь-який момент руху підінтегральна функція дорівнюватиме нулю.

Таким чином, отримаємо рівняння руху у вигляді

$$\bar{F} - \bar{\omega} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) = 0,$$

яке можна записати у формі $\bar{\omega} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi$.

Розбіжність тензора Π позначимо через вектор $\operatorname{div} \Pi$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \operatorname{div} \Pi.$$

Проекції цього вектора на осі координат

$$(\operatorname{div}\Pi)_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z};$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_y = \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z};$$

$$(\operatorname{div}\Pi)_z = \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

Проекціями вектора \bar{p} є p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} . Позначимо проєкції прискорення масової сили \bar{a} на осі координат через a_x, a_y, a_z і з огляду на те, що проєкціями прискорення є величини $\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}$, знайдемо рівняння руху в такій формі

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= a_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right); \\ \frac{du_y}{dt} &= a_y - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right); \\ \frac{du_z}{dt} &= a_z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Систему рівнянь (4.3) називають рівняннями руху, записаними в напруженнях. *Універсальність цих рівнянь полягає в тому, що вони справедливі для опису течії як ньютонівських, так і неньютонівських рідин.*

4.3. Інтегрування рівнянь Нав'є–Стокса

Розглянемо течію елементарної струминки в'язкої рідини, для опису якої справедливе рівняння

$$\text{grad} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi \right) + v \nabla^2 \bar{u} = \bar{u} \times \text{rot } \bar{u}. \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) в проєкціях на координатні осі можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 \bar{u}_x &= 2 [(\text{rot } \bar{u})_y u_z - (\text{rot } \bar{u})_z u_y]; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 \bar{u}_y &= 2 [(\text{rot } \bar{u})_z u_x - (\text{rot } \bar{u})_x u_z]; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 \bar{u}_z &= 2 [(\text{rot } \bar{u})_x u_y - (\text{rot } \bar{u})_y u_x]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Помножимо рівняння (4.5) відповідно на $u_x dt = dx$; $u_y dt = dy$; $u_z dt = dz$ і складемо їх. Права частина суми рівнянь дорівнюватиме нулю (dx , dy , dz – проєкції елемента $d\bar{r}$ на лінію течії $(\text{rot } \bar{u} \times \bar{u}) dz = 0$ згідно з правилом скалярного добутку двох перпендикулярних векторів), тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) dz + \\ + v (\nabla^2 \bar{u}_x dx + \nabla^2 \bar{u}_y dy + \nabla^2 \bar{u}_z dz) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

У лівій частині рівняння (4.6) – повний диференціал від функції $\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right)$.

$$d \left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v (\nabla^2 \bar{u}_x dx + \nabla^2 \bar{u}_y dy + \nabla^2 \bar{u}_z dz) = 0.$$

Члени рівняння $v \nabla^2 \bar{u}_x dx$, $v \nabla^2 \bar{u}_y dy$, $v \nabla^2 \bar{u}_z dz$ є проєкціями дотичних зусиль, віднесених до одиниці маси

рідини. Їх сума є роботою сил в'язкості, яку витрачено на переміщення одиниці маси рідини на деяку відстань. Цю роботу можна виразити так:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Під час руху в'язкої рідини рівнодійна таких зусиль завжди буде напрямлена проти течії рідини і завжди буде силою тертя, що гальмує рух частинок рідини.

Для елементарної струминки, довжина якої 1, повна робота в'язких сил виражається інтегралом

$$\int_1 dR_b = -\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right) + C.$$

Якщо відомі значення потенціалу сил Φ_0 , тиску p_0 і швидкості u_0 в початковому перерізі, можна визначити сталу інтегрування

$$C = \Phi_0 - \frac{p_0}{\rho} - \frac{u_0^2}{2}.$$

Отже,

$$\int_0^1 dR_b = -\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right) + \left(\Phi_0 - \frac{p_0}{\rho} - \frac{u_0^2}{2}\right). \quad (4.7)$$

Вираз (4.7) називають рівнянням Бернуллі для струминки в'язкої реальної рідини.

Припустимо, що масові сили є силами ваги. При цьому $\Phi = -\rho z$. Тоді для двох перерізів струминки реальної рідини

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} - \int_0^1 dR_B.$$

Поділивши ліву й праву частини на g та позначивши $-\frac{1}{\rho_0} \int_0^1 dR_B = h_T$ остаточно отримаємо вираз рівняння Бернуллі для струмінки реальної рідини у вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{тер}, \quad (4.8)$$

де h_T – питома енергія, що витрачена рідиною на подолання сил тертя на ділянці від перерізу 1–1 до перерізу 2–2 (рис. 4.3).

Зазначимо, що рівняння Бернуллі (4.8) справедливе для сталої течії в'язкої рідини. У випадку несталої течії на підставі рівнянь Нав'є–Стокса рівняння набуває вигляду

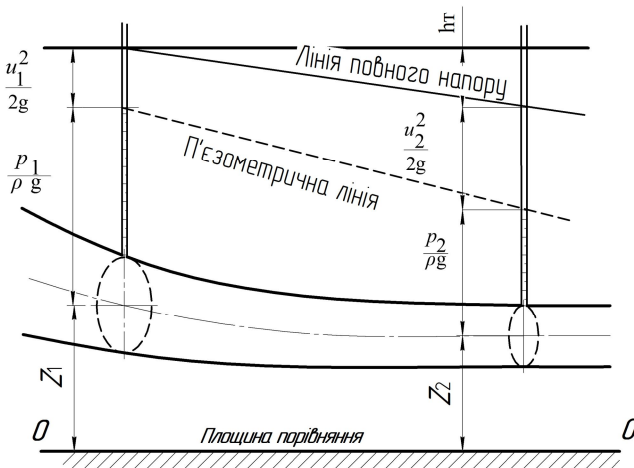


Рис.4.3. Схема течії

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) =$$

$$= \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial U_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + h_{1-2},$$

де $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial U_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + h_{1-2}$ – інерціальний напір, тобто

частина питомої енергії рідини, але не втраченої, а лише тимчасово не виявленої.

Слід зазначити, що інерціальний напір являє собою похідну за часом від питомої кінетичної енергії маси рідини між перерізами 1-1 і 2-2 (рис.4.3).

4.4. Загальний випадок рівняння Бернуллі для газового струменя

Згідно з *першим початком* термодинаміки складемо баланс енергії в нерухомій системі *координат*, тобто розглянемо перетворення енергії в одній і тій самій масі газу, що заповнювала спочатку об'єм 1-1, який через нескінченно малий проміжок часу $d\tau$ перемістився в положення 2-2 (рис. 4.4).

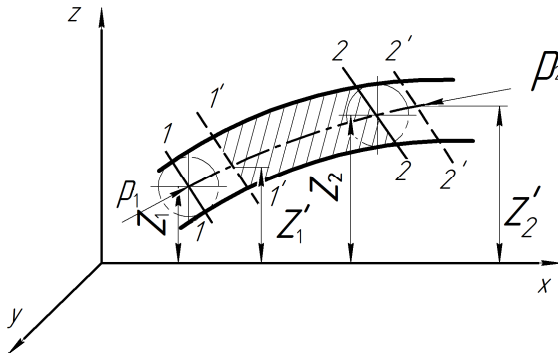


Рис. 4.4. До доведення рівняння балансу енергії

Збільшення будь-якого виду енергії дорівнює різниці кількостей цього виду енергій в перерізах 1-1 і 2-2. Оскільки заштрихований об'єм 1-1 є загальним для цих двох положень, енергія маси газу, що заповнює об'єм між перетинами 1-1 і 2-2, у процесі розрахунків скорочується, і збільшення енергії вимірюється різницею кількості енергії в нескінченно малих об'ємах 2-2 і 1-1. Збільшення кінетичної енергії буде становити

$$dE_k = \frac{dQ}{g} \frac{u_1^2 - u_2^2}{2},$$

де dQ – масова витрата газу через поперечний переріз струминки за час $d\tau$. Приріст потенціальної енергії (енергії положення)

$$dE_{II} = dQ(z_1 - z_2),$$

де z_1, z_2 – висоти розміщення перерізів 2-2 і 1-1.

Збільшення внутрішньої (теплової) енергії

$$dE_T = \frac{dQ}{A} (\omega_1 - \omega_2),$$

де $A = \frac{1}{427}$ – тепловий коефіцієнт механічної роботи;

$\omega = C_v T$ – теплова енергія одиниці ваги газу.

Якщо теплоємність газу в перерізах 1-1 і 2-2 однакова, то приріст внутрішньої енергії

$$dE_T = \frac{C_v dQ}{A} (T_2 - T_1).$$

На поверхню виділеної частини струминки газу діють напрямлені всередину та по нормалі до неї зовнішні сили тиску p . Під час переміщення газу зовнішні сили тиску виконують роботу. Наприклад, перенесення газу з перерізу 1-1 у переріз 1'-1' відбувається немовби під дією поршня площею F_1 з тиском p_1 . Робота поршня за час $d\tau$ становить

$$p_1 F_1 u_1 d\tau = \frac{p_1}{\gamma_1} dQ.$$

Так само можна уявити собі, що тиск p_2 на переріз 2-2 здійснюється поршнем з площею F_2 . За час $d\tau$ газ перемістить поршень у положення 2'-2', виконуючи при цьому негативну роботу

$$-p_2 F_2 u_2 d\tau = \frac{p_2}{\gamma_2} dQ.$$

Сили тиску, що діють на бічну поверхню струминки ніякої роботи не виконують, оскільки вони нормальні до траєкторій руху частинок газу. Енергія, внесена силами тиску, дорівнює різниці між роботою «поршня» 1 та «поршня» 2.

$$dE_d = dQ \left(\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} \right).$$

До газової струминки на ділянці 1–2 може бути за час $d\tau$ підведене тепло в кількості dW , що у механічних одиницях дорівнює dW/A . Далі газова струминка за час $d\tau$ може виконати технічну роботу, наприклад, обертаючи колесо турбіни, встановлене між перерізами 1 і 2. Також варто врахувати роботу, яку витрачає газ за час $d\tau$ на подолання сил тертя $dl_{\text{тер}}$.

Відповідно до закону збереження енергії сума підведених до газу теплової енергії і роботи сил тиску дорівнює сумі технічної роботи і роботи тертя, і підвищення запасів потенціальної, внутрішньої й кінетичної енергії [9]:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{A} + \left(\frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} \right) dQ = dl + dl_{\text{тер}} + \\ + (z_2 - z_1) dQ + \frac{\omega_2 - \omega_1}{A} dQ + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} dQ. \end{aligned} \quad (4.9)$$

РОЗДЛИМО ВСІ ЧЛЕНИ ВИРАЗУ (4.9) НА ВЕЛИЧИНУ dQ , ОТРИМАЄМО РІВНЯННЯ ЕНЕРГІЇ ДЛЯ 1 КГ ГАЗУ

$$\frac{Q_*}{A} + \frac{p_1}{\gamma_1} - \frac{p_2}{\gamma_2} = L + L_{\text{терп}} + z_2 - z_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{A} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g},$$

де $Q_* = dW/dQ$ – ПІДВЕДЕНЕ НА ДІЛЯНЦІ 1–2 ДО 1 КГ ГАЗУ ТЕПЛО;

$L = dl/dQ$ – ТЕХНІЧНА РОБОТА, ЯКУ ВИКОНУЄ 1 КГ ГАЗУ НА ЦЬОЇ САМІЙ ДІЛЯНЦІ; $L_{\text{терп}} = dl_{\text{терп}}/dQ$ – РОБОТА СИЛ ТЕРТЯ, ЩО ВИКОНУЄ 1 КГ ГАЗУ

$$\frac{Q_*}{A} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{A} > 0,$$

ТОДИ

$$-L = L_{\text{терп}} + z_2 - z_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \int_1^2 d \frac{p}{\gamma}.$$

Це є УЗАГАЛЬНЕНИМ РІВНЯННЯМ БЕРНУЛЛІ (рівнянням механічної енергії) **СТРУМИНКИ ГАЗУ, ЯКЕ ВИРАЖАЄ ШВИДКІСТЬ РУХУ У ФУНКЦІЇ ВІД ТИСКУ Й ПИТОМОЇ ВАГИ ГАЗУ З УРАХУВАННЯМ ВИРОБЛЕНОЇ ГАЗОМ ТЕХНІЧНОЇ РОБОТИ L , ЗМІНИ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ $z_2 - z_1$ І РОБОТИ СИЛ ТЕРТЯ $L_{\text{терп}}$. У ГАЗОВІЙ ДИНАМІЦІ ВИКОРИСТОВУЮТЬ СПРОЩЕНУ ФОРМУ РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ, ЯКА ВІДПОВІДАЄ РЕЖИМУ ВІДСУТНОСТІ ТЕХНІЧНОЇ РОБОТИ ($L_{\text{терп}} = 0$), ВІДСУТНОСТІ ГІДРАВЛІЧНИХ ВТРАТ ($dL_{\text{терп}} = 0$), А ЗАПАС ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ($z_2 - z_1$) ПРИ ЦЬОМУ НЕ ЗМІНЮЄТЬСЯ. ДЛЯ ЦЬОГО РЕЖИМУ РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ НАБУВАЄ ВИГЛЯДУ**

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \int_1^2 d \frac{p}{\gamma} = 0.$$

У випадках, коли питома вага газу на ділянці **1–2** елементарної струминки залишається майже незмінною, інтеграл рівняння Бернуллі має вигляд

$$\int_1^2 d \frac{p}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma},$$

а рівняння Бернуллі набуває вигляду

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = 0,$$

або у формі, що використовується в гідравліці ідеальної нестисливої рідини

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g}.$$

Для застосування рівняння Бернуллі для випадку стисливого газу, потрібно заздалегідь знати термодинамічний процес зміни стану газу. Без

цього невідома залежність питомої ваги газу від тиску, тобто не можливо взяти інтеграл, що виражає роботу «прощтовхування» [8].

У випадку невеликих змін тиску вздовж лінії руху рівняння Бернуллі для газів (повітря) можна використовувати у вигляді, **прийнятному для нестисливої рідини:**

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} .$$

Зі значною зміною тиску змінюється і густина ρ (газопроводи високого тиску, повітродувні установки та ін.). Тому в цьому випадку таке рівняння застосовувати не можна, оскільки $\rho \neq \text{const}$. За великих тисків величиною gz можна знехтувати. Тоді

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} .$$

Після диференціювання маємо

$$d \frac{p}{\rho} + d \frac{u^2}{2} = \text{const} .$$

Інтегруючи вздовж елементарної струминки

$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{u^2}{2} = \text{const} ,$$

отримуємо рівняння Бернуллі для стислої рідини.

З енергетичного погляду член $\int dp/\rho$ є потенціальною енергією газу з урахуванням перетворення його внутрішньої енергії. Рівняння Бернуллі можна сформулювати так: *за сталої течії газу вздовж трубки течії сума питомої потенціальної і кінетичної енергії є сталою величиною.*

Для обчислення інтеграла $\int dp/\rho$ потрібно знати характеристики процесу зміни стану газу. Якщо газ переміщується без теплообміну із навколишньою атмосферою, то такий процес у загальному випадку називають адіабатичним. Якщо при цьому

вважати газ нев'язким, то процес матимемо зворотний характер, називатися ізоентропійним і його можна описати рівнянням [8; 9]

$$\frac{p}{\rho^k} = C,$$

де k — показник адіабати процесу (для повітря $k = 1,4$); C — стала.

4.5. Прилади для вимірювання статичного тиску і тиску загальмованого потоку

Розглянемо визначення швидкості за допомогою гідродинамічної трубки (рис.4.5).

Працює така трубка разом з п'єзометром. Трубку розміщують у потоці рідини таким чином, щоб загнутий кінець трубки був напрямлений назустріч течії. Ця трубка вимірює повний напір

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_2^2}{2g}.$$

П'єзометр вимірює тільки гідростатичний напір

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g}.$$

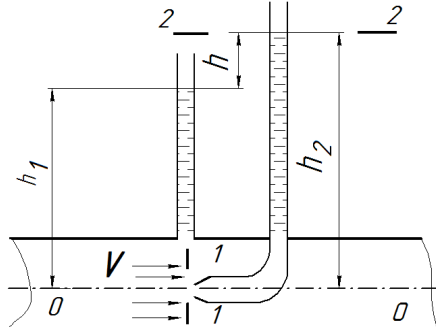


Рис. 4.5. П'єзометр і Трубка Піто

Площину порівняння $O-O$ проводимо через центр отвору в загнутому кінці трубки. Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів $1-1$ перед входом у трубку і $2-2$ на поверхні води в трубці:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}. \quad (4.10)$$

Рівняння Бернуллі записуємо для елементарної струминки, оскільки трубка Піто вимірює місцеву швидкість у точці, в якій її встановлено. Оскільки рідина в трубці Піто нерухома, то втрат напору немає. Рівняння (4.11) набуває вигляду

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

У цьому випадку $z_1 = 0$, $z_2 = h_2$, $V_1 = V$, $V_2 = 0$, $p_2 = p_{\text{атм}} = 0$
(p_2 – манометричний тиск на вільній поверхні в трубці).

Тоді рівняння Бернуллі набуває вигляд

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = h_2 ;$$

$$\frac{V^2}{2g} = h_2 - \frac{p_1}{\rho g} = h ,$$

звідки

$$V = \sqrt{2gh} . \quad (4.11)$$

Для зручності використання трубку Піто об'єднують в одному корпусі з п'єзометром. Таку трубку називають трубкою Піто–Прандтля (рис.4.6). Вона має невеликий діаметр з обтічним кінцем (носком), але і при цьому вона вносить збурення в потік. Тому значення швидкості, визначене за формулою (4.11), треба множити на тарувальний коефіцієнт $\varphi \approx 1,0 \dots 1,04$.

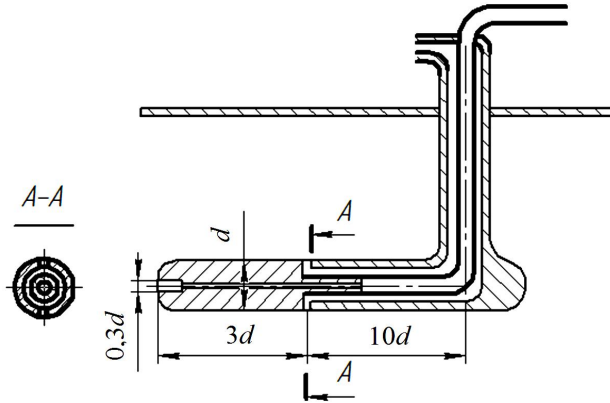


Рис. 4.6. Трубка Піто–Прандтля

У випадку, коли необхідно виміряти статичний тиск у тривимірному потоці, застосовувати трубку Піто–Прандтля недоцільно. Для цього випадку можна застосувати пневмометричний насадок із протіканням (екранований насадок статичного тиску) (рис.4.7) [10].

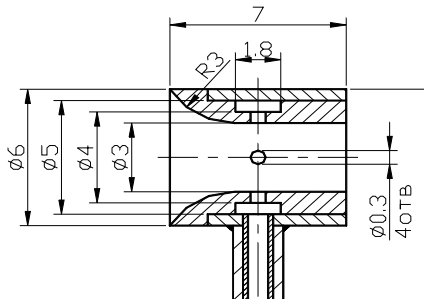


Рис. 4.7. Екранований насадок статичного тиску

5. ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ СТИСЛИВОГО ГАЗУ

Для вивчення властивостей ідеального газу розглянемо основне рівняння кінетичної теорії газу [2; 11]:

$$p = n k T, \quad (5.1)$$

де n – кількість молекул в 1 м^3 газу; k – постійна Больцмана, що дорівнює $1,3806^{-23}$ Дж/К.

Помноживши рівняння (5.1) на питомий об'єм, отримаємо:

$$p W = n W k T = N k T, \quad (5.2)$$

де $n W = N$ – кількість молекул у цьому об'ємі газу; T – абсолютна температура, К; W – об'єм довільної кількості газу, м^3 .

Перепишемо рівняння (7.2) у вигляді

$$\frac{p v}{T} = N k .$$

Оскільки $k = \text{const}$, і для даної маси газу та $N = \text{const}$, тоді добуток питомого об'єму ідеального газу на абсолютний тиск, поділений на абсолютну температуру, є величина стала:

$$\frac{p v}{T} = \text{const} .$$

5.3)

Стала величина в рівнянні (5.3) не залежить від стану газу. Вона залежить від властивостей газу і є індивідуальною для кожного газу. Сталу величину, віднесену до 1 кг газу, позначають літерою R і називають *питомою газовою сталою*.

Рівняння (5.3), записане у вигляді

$$p W = RT$$

5.4)

називається *термічним рівнянням стану ідеального газу* або *характеристичним рівнянням*. Це рівняння однозначно пов'язує між собою параметри газу p , W і T . Рівняння (5.4) вперше отримане Клайпероном і назване його ім'ям. Клайперон отримав це рівняння з рівняння Бойля-Маріотта і Гей-Люссака, тому рівняння (5.4) часто називають об'єднаним законом.

Для довільної кількості ідеального газу рівняння стану має вигляд

$$pW = mRT ,$$

Де m – маса газу, кг.

Із рівняння (5.3) можна отримати рівняння Бойля-Маріотта, Гей-Люссака і Шарля.

Закон Бойля-Маріотта встановлює залежність між питомим об'ємом ідеального газу W і його тиском при постійній температурі T .

Якщо $T = \text{const}$ з рівняння (5.3) маємо:

$$pW = NkT = \text{const} \tag{5.5}$$

або

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{p_2}{p_1}, \tag{5.6}$$

де індекс 1 належить до початкового, а індекс 2 – до кінцевого стану газу.

Рівняння (5.5) виражає експериментальний закон Бойля-Маріотта. Для маси газу за температури $T = \text{const}$ добуток тиску на питомий об'єм є величина стала.

Із співвідношення (5.6) видно, що для маси газу за постійної температури питомі об'єми газу обернено пропорційні його тиску.

Закон Гей-Люссака встановлює залежність питомого об'єму ідеального газу від його температури за постійного тиску.

Якщо $p = \text{const}$, тоді з рівняння (5.3) маємо:

$$\frac{W}{T} = \frac{N}{p} k = \text{const}. \tag{5.7}$$

Співвідношення (5.7) показує, що для маси газу за постійного тиску питомі об'єми ідеального газу змінюються прямо пропорційно зміні абсолютної температури.

Закон Шарля встановлює залежність тиску ідеального газу від його температури за постійного питомого об'єму.

Розглянемо рівняння (5.3) якщо $W = \text{const}$. Маємо:

$$\frac{p}{T} = \frac{N}{W} k = \text{const}$$

Рівняння Клайперона набуває універсальної форми, якщо газу сталу віднести не до 1 кг, а до 1 кмоль газу.

Помноживши обидві частини рівняння Клайперона на молекулярну масу, отримаємо $pW_\mu = \mu RT$ або $pW_\mu = R_\mu T$, звідки

$$R_\mu = \frac{pW_\mu}{T}.$$

Оскільки, згідно із законом Авагадро, 1 кмоль будь-якого газу за певного тиску і температури займає однаковий об'єм, то співвідношення $\frac{pW_\mu}{T}$ має однакове стале значення для всіх газів, тобто

$$R_M = mR = \text{const}.$$

5.8)

Величина R_M називається *універсальною газовою сталою*. Її можна обчислити, якщо для якого-небудь стану ідеального газу відомі p , T і W .

Так, за нормальних фізичних умов, підставляючи в рівняння (5.8) значення p , W_μ і T , знаходимо:

$$R_M = \frac{101325 \cdot 22,414}{273,15} = 8314,2 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

З урахуванням отриманої величини R_M рівняння стану для 1 кмоль ідеального газу має вигляд

$$pV_M = 8314,2T .$$

5.9)

Рівняння стану для довільної кількості молей:

$$pV = nR_M T ,$$

де $W = nW_M$ – повний об'єм газу; n – кількість молей газу.

Рівняння (5.9) є найбільш загальним для ідеальних газів і називається рівнянням Клайперона-Менделєєва. Воно пов'язує три закони ідеальних газів (Бойля-Маріотта, Гей-Люссака і Авагадро) і включає універсальну газову сталу, яка не залежить від природи газу.

Знаючи універсальну газову сталу, можна визначити питому газову сталу R :

$$R = \frac{R_M}{M} = \frac{8314,20}{M} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} .$$

Універсальна газова стала R_M за фізичним змістом є робота розширення 1 кмоль ідеального газу в процесі, що відбувається за постійного тиску і зміни температури на 1°C .

Невід'ємною властивістю матерії є рух. *Мірою руху матерії є енергія.* Тому збільшення або зменшення енергії системи означає зміну в ній руху як кількісно, та і якісно. Отже, енергія як міра руху завжди виявляється в якісно своєрідному вигляді, відповідному формі руху, а кількісно вона відображає єдність усіх форм руху, їх

взаємну перетворюваність і незруйновність руху як властивості матерії.

Із цього положення випливає закон еквівалентності перетворень енергії та закон збереження і перетворення енергії.

Принцип еквівалентності можна сформулювати таким чином. Якщо різні види енергії узяті в таких кількостях, що вони зумовляють одну і ту саму зміну стану закритої системи, то вони еквівалентні. Кількісні співвідношення між різними видами енергії називають *еквівалентами*.

Загальний закон збереження і перетворення енергії трансформується в термодинаміці в перший принцип або перший закон термодинаміки.

Оскільки об'єктом досліджень термодинаміки є макротіла, то повна енергія системи

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} + U ,$$

де $E_{\text{к}}$ – кінетична енергія системи; $E_{\text{п}}$ – потенціальна енергія системи в зовнішніх силових полях; U – внутрішня енергія.

Кінематична енергія системи, що має масу m і швидкість V , дорівнюватиме $E_{\text{к}} = \frac{mV^2}{2}$.

Зміна потенціальної енергії системи дорівнює роботі, що здійснюється над системою під час переміщення її з одного місця силового поля в інше.

Внутрішня енергія U – це енергія, що міститься в системі; вона є сумою всіх видів енергій взаємодії частинок, що входять до системи [2; 11; 12].

Внутрішня енергія складається з кінетичної енергії поступального, обертального і коливального рухів молекул, потенціальної енергії взаємодії молекул, енергії внутріатомних і внутріядерних рухів частинок, з яких складаються атоми тощо. Не поділяючи внутрішню енергію системи на ці складові, можна говорити про те, що *внутрішня енергія є функцією внутрішніх параметрів системи: температури, тиску, складу системи*. Вона однозначно визначає стан системи, тобто є функцією системи; унаслідок цього зміна внутрішньої енергії не залежить від процесу зміни стану системи, а визначається лише значеннями енергії в кінцевому і початковому її (системи) станах (рис. 5.1):

$$\Delta U = U_2 - U_1.$$

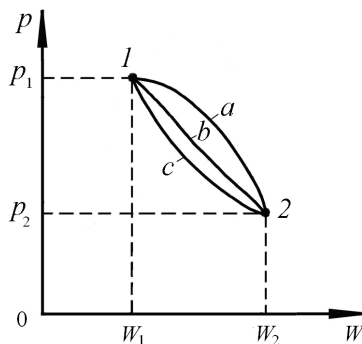


Рис. 5.1. Різні зміни стану газу в процесі 1–2

Оскільки стан однорідної системи визначається двома незалежними змінними, то, вибравши змінні T і W , отримаємо:

$$U = U(T, W),$$

тобто внутрішня енергія є однозначною функцією термічних параметрів T і W .

Внутрішня енергія системи – величина адитивна і для складної системи визначається сумою внутрішніх енергій її частин: $U = \sum U_i$. Її величина завжди відома з точністю до деякої адитивної сталої, визначення якої втрачає сенс з огляду на зміну внутрішньої енергії.

Якщо термодинамічна система перебуває в стані рівноваги і відсутнє зовнішнє поле сил, то повна енергія системи збігається з внутрішньою: $E = U$. (Цей випадок здебільшого розглядається під час вивчення основ термодинаміки).

Внутрішня енергія системи є сумою всіх видів енергії руху і взаємодії частинок, складових системи:

$$U = U_{\text{к}} + U_{\text{п}} + U_0,$$

де $U_{\text{к}}$ – внутрішня кінетична енергія теплового руху молекул; $U_{\text{п}}$ – внутрішня потенціальна енергія взаємодії молекул; U_0 – нульова енергія (внутрішня енергія за температури абсолютного нуля).

Повна внутрішня енергія термодинамічної системи складається не тільки з енергії її молекул, а включає також внутрімолекулярну і внутріатомну енергії, які зумовлені взаємодією атомів і електронів один з одним і з ядрами атомів. За температури абсолютного нуля ці складові внутрішньої енергії на відміну від енергії теплового руху молекул не дорівнюють нулю. Тому $U_0 \neq 0$.

Проте слід зазначити, що під час вивчення термодинамічних процесів у більшості випадків розглядаються не абсолютні значення внутрішньої енергії системи, а її відносні зміни, що відбуваються в різних процесах. Ураховуючи це, U_0 можна розглядати як нульовий рівень, від якого відлічуватимуться всі зміни енергії при аналізі різних процесів її перетворення, і умовно можна вважати $U_0 = 0$. У цьому випадку $U = U_{\text{к}} + U_{\text{п}}$.

Кінетична енергія теплового руху молекул визначається температурою газу. Внутрішня потенціальна енергія взаємодії молекул залежить від відстані між молекулами і від їх взаємного розміщення. Оскільки відстань між молекулами визначається об'ємом, який займає газ, то в загальному випадку внутрішня енергія залежатиме від температури T і об'єму W , тобто $U = f(W, T)$.

У ідеальному газі молекули не взаємодіють між собою і потенціальна енергія дорівнює нулю. Тому внутрішня енергія

ідеального газу складається лише з кінетичної енергії руху молекул і визначається температурою газу: $U = f(T)$.

Внутрішня енергія є адитивним (екстенсивним) параметром, оскільки її величина залежить від маси системи. Надалі внутрішню енергію газу масою 1 кг і внутрішню енергію довільної маси газу позначатимемо відповідно через u і U .

Внутрішня енергія складної системи, віднесена до 1 кг маси, дорівнює сумі внутрішніх енергій її окремих складових, тобто

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i .$$

У цілому можна зробити висновок, що внутрішня енергія є параметром стану і є однозначною функцією стану системи.

Для колового процесу, у якому початковий і кінцевий стани збігаються, зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю:

$$\oint du = 0 .$$

Оскільки значення криволінійного інтеграла, який описує зміну внутрішньої енергії газу в термодинамічному процесі не залежить від шляху інтегрування, а визначається лише початковою і кінцевою точками інтегрування, то підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції. Отже, нескінченний малий приріст внутрішньої енергії du є повним диференціалом. Для термодинамічної системи, стан якої визначається двома незалежними параметрами p, W ; p, T або T, W , вирази для du мають вигляд:

$$du(p, W) = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_W dp + \left(\frac{\partial u}{\partial W} \right)_p dW ;$$

$$du(p, T) = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p dT ;$$

$$du(T, W) = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_W dT + \left(\frac{\partial u}{\partial W} \right)_T dW .$$

5.10)

Дослідження, проведені Джоулем, показують, що внутрішня енергія ідеального газу не залежить від тиску або об'єму, а залежить лише від температури, тобто $u = f(T)$. При цьому для

$$\text{ідеального газу } \left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_T = 0 \quad \text{і} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial W} \right)_T = 0 .$$

Таким чином, за постійної температури внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму і тиску.

Співвідношення (5.10) – є математичним виразом *закону Джоуля*. У точності закон Джоуля справедливий лише для ідеального газу. Проте, якщо реальний газ перебуває в умовах малого тиску і високої температури, то з достатньою для практики точністю можна вважати, що його внутрішня енергія так само, як і ідеального газу, залежатиме лише від температури.

Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу дозволяє встановити вид функції внутрішньої енергії ідеального газу. Згідно з цією теорією, середня кінетична енергія поступального руху

молекул $\frac{mV^2}{2}$ і абсолютна температура T зв'язані залежністю

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Внутрішня енергія одного кіломоля ідеального газу буде дорівнювати кінетичній енергії всіх молекул, що містяться в об'ємі W_μ :

$$U_\mu = N_A \frac{mV^2}{2},$$

або

$$U_M = \frac{3}{2} N_A k T, \tag{5.11}$$

де k – стала Больцмана; N_A – число Авагадро.

У рівнянні (5.11) добуток сталої Больцмана k на число Авагадро N_A дорівнює універсальній газовій сталій

$$R_M = 8,314 \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}. \text{ Отже,}$$

$$U_M = \frac{3}{2} R_M T = 12,5T \frac{\text{кДж}}{\text{кмоль}}. \tag{5.12}$$

Вираз (5.12) справедливий лише для одноатомного газу, молекули якого розглядаються як матеріальні точки.

Звернемося до рухомої термодинамічної системи, в якій речовина (газ, пара) переміщається в просторі.

Під час виведення першого закону термодинаміки для потоку газу або пари вважають, що:

- вся ділянка руху газу може бути розбита вздовж потоку на елементарні ділянки, причому на кожній ділянці по всьому перерізу параметри газу залишаються постійними (стаціонарний або сталий рух);

- зміна параметрів рухомого газу від перерізу до перерізу нескінченно мала порівняно зі значенням самих параметрів і параметрів газу в різних перерізах потоку встановлюється відносно швидко.

Отже, розглянемо потік в каналі довільної форми (рис. 5.2). Між перерізами I-I і 2-2 може бути підведена деяка кількість теплоти Q_{1-2} .

За відсутності теплообміну із зовнішнім середовищем течія газу в каналі буде адіабатою.

Якщо рух газу через канал сталий, то через кожен переріз каналу за одиницю часу перетікає одна і та ж кількість газу.

Для цього випадку за певної швидкості газу в кожному перерізі каналу витрата газу

$$G = \frac{FV}{W} = \frac{F_1V_1}{W_1} = \frac{F_2V_2}{W_2} = \text{const}, \quad (5.13)$$

де G – масова витрата газу; F_1, F_2 – площі поперечних перерізів каналу; V_1, V_2 – швидкості газу у відповідних поперечних перерізах; W_1, W_2 – питомі об'єми у тих же поперечних перерізах; p_1, p_2 – тиск, який має рухомий газ в перерізах 1 і 2.

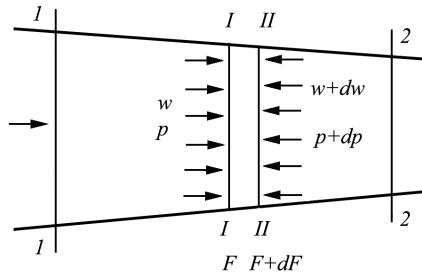


Рис. 5.2. До визначення першого закону термодинаміки для потоку

Постійність масової витрати для всіх перерізів каналу в кожен момент часу ставить умову нерозривності струменя, тому рівняння (5.13) називають *рівнянням нерозривності або суцільності*.

Для цього процесу переміщення газу через канал рівняння першого закону термодинаміки для G (кг) газу має вигляд

$$dQ_{1-2} = dU + dL_{1-2} + G \frac{dV^2}{2} + G_g dz ,$$

де dQ_{1-2} – елементарна кількість теплоти, що підводиться або відводиться від газу на певній ділянці руху; dU – зміна внутрішньої енергії газу у відповідних перерізах; dL_{1-2} – елементарна робота газу проти зовнішніх сил; $\frac{GdV^2}{2}$ – приріст кінетичної енергії газу за час його переміщення на виділеній ділянці; $G_g dz$ – елементарна робота проти сил тяжіння (цією складовою для газів можна нехтувати).

Таким чином можна зробити висновок, що *робота газу проти зовнішніх сил в рухомому газі є роботою, витраченою на його проштовхування*.

Розглянемо потік газу в каналі (рис. 5.2) за одновимірної течії. Виділимо перерізами 1–1 і 2–2 деяку масу газу. Потік до перерізу 1–1, виконує функцію поршня, який витісняє газ, що заповнює канал. На виділену масу газу в каналі діє зліва сила pF , а справа – сила $(p + dp)(F + dF)$.

Робота проштовхування (переміщення) газу, урахувавши використувані в термодинаміці знаки робіт, буде дорівнювати:

$$dL_{1-2} = (p + dp)(F + dF)(V + dV) - pFV .$$

Після скорочення і відкидання малих величин другого і вищого порядків дістаємо:

$$dL_{1-2} = pFdV + pVdF + VFdp$$

або

$$dL_{1-2} = pd(FV) + FVdp .$$

Оскільки за рівнянням нерозривності $FV = GW$, а також ураховуючи, що витрата є величиною сталою в суцільному середовищі, отримаємо:

$$dL_{1-2} = G(pdW + Wdp) = G \cdot d(pW) .$$

Відносячи роботу проти зовнішніх сил до 1 кг газу, маємо:

$$dl_{1-2} = d(pW) = pdW + Wdp .$$

Величина Wdp визначає елементарну роботу, виконану об'ємом переміщеного газу за умови, що виділена маса газу є нестисливою. Другий доданок pdW є елементарною роботою, яку об'єм переміщеного газу здійснює в результаті деформації під дією рівномірно розподіленого тиску.

Підставляючи роботу проти зовнішніх сил у рівняння першого закону термодинаміки, записаного для 1 кг газу, маємо:

$$dq = du + dl_{1-2} + \frac{dV^2}{2} = du + d(pW) + \frac{dV^2}{2} = d(u + pW) + \frac{dV^2}{2} .$$

Оскільки $u + pW = i$, отже,

$$dq = di + \frac{dV^2}{2} . \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) показує, що теплота, яка підводиться до рухомого газу, витрачається в двох напрямках: на приріст ентальпії газу і на приріст зовнішньої кінетичної енергії, тобто витрачається на збільшення швидкості газового потоку.

Рівняння (5.14) є *основним* для потоку газу або пари, причому воно справедливе як для течій, що не супроводжуються дією сил тертя, так і для течій, що супроводжуються тертям.

Приклад 5.1. Повітря рухається між двома перерізами довгого прямого відрізка трубопроводу, який має діаметр 0,1 м (рис. 5.3). У кожному з перерізів температура і тиск мають рівномірне розподілення і дорівнюють: для перерізу 1 $T_1 = 300$ К, $p_1 = 690000$ Па; для перерізу 2 $T_2 = 250$ К, $p_2 = 125000$ Па. Необхідно

обчислити зміну внутрішньої енергії, ентальпії і густини між перерізами 1 і 2.

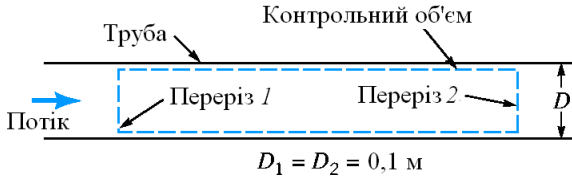


Рис. 5.3. Розрахункова схема до прикладу 5.1

Припустимо, що повітря поводить як ідеальний газ, тоді зміну величини внутрішньої енергії між перерізами 1 і 2 можна обчислити за такою формулою:

$$\check{u}_2 - \check{u}_1 = c_w (T_2 - T_1),$$

де c_w – питома теплоємність за постійного об’єму.

Величину c_w для ідеального газу можна обчислити за формулою:

$$c_w = \frac{R}{k - 1}, \tag{5.15}$$

де R – питома газова постійна, для повітря $R = 287$ Дж/(кг · К); k – показник адіабати, для повітря $k = 1,4$. Підставляючи значення для R і k у (5.15) формулу отримаємо:

$$c_w = \frac{287}{1,4 - 1} = 718 \text{ Дж/(кг · К)}.$$

Знайдемо змінення внутрішньої енергії між перерізами 1 і 2:

$$\check{u}_2 - \check{u}_1 = 718(250 - 300) = -35900 \text{ Дж/кг}.$$

Для визначення змінення величини ентальпії між перерізами 1 і 2 використаємо співвідношення

$$\check{h}_2 - \check{h}_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

де c_p – питома теплоємність за постійного тиску, $c_p = kc_w$, або підставляючи значення для k і c_w , отримаємо:

$$c_p = 1,4 \cdot 718 = 1005 \text{ Дж/кг.}$$

Визначимо зміну ентальпії між перерізами 1 і 2:

$$\check{h}_2 - \check{h}_1 = 1005(250 - 500) = -50250 \text{ Дж/кг.}$$

Зміну величини густини між перерізами 1 і 2 визначаємо за рівнянням стану для ідеального газу:

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{p_2}{RT_2} - \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1}{R} \left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1} \right) \quad (5.16)$$

Підставляючи у рівняння (5.16) задані в умовах задачі значення тиску і температури, дістаємо:

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{287} \left(\frac{125000}{250} - \frac{690000}{300} \right) = -6,27 \text{ кг/м}^3.$$

Тут маємо істотну зміну величини густини між перерізами 1 і 2 відносно значення на вході:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{690000}{300 \cdot 287} = 8,01 \text{ кг/м}^3.$$

6. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖЕВОГО ШАРУ

Як свідчать експериментальні дослідження під час руху реальних рідин і газів завжди відбувається їх прилипання до стінок, спричинене в'язкістю. Це прилипання внаслідок тертя гальмує тонкий шар рідини, який прилягає до стінок, що істотно змінює характер течії рідини біля стінок порівняно із зовнішнім потоком. У цьому тонкому шарі рідини біля стінок, який називають *примежовим шаром*, швидкість течії збільшується від нуля на стінці (прилипання) до свого повного значення у зовнішньому потоці, у якому течію рідини можна вважати такою, що відбувається без тертя.

Основи теорії примежевого шару були закладені німецьким ученим Л. Прандтлем у 1904 р. Відповідно до теорії Л. Прандтля у потоці рідини чи газу, який обтікає тверде тіло, умовно можна виділити три характерні ділянки течії (рис. 6.1): 1) примежовий шар – ділянка, у якій найбільший вплив на характер течії чинять сили в'язкості; 2) ділянка, у якій течію можна розглядати як нев'язку; 3) кормовий слід – ділянка за точкою відриву примежевого шару від обтічної поверхні, де течія загальмована і

має вихровий характер.



Рис. 6.1. Характерні області течії при обтіканні твердого тіла

Виділення ділянки примежового шару є умовним, оскільки наростання швидкості від нульового значення на стінці до повного значення у зовнішньому потоці має асимптотичний характер. У зв'язку з цим примежовий шар визначають як шар рідини, що безпосередньо прилягає до обтічної поверхні, і в межах якого швидкість змінюється від нуля на стінці до швидкості на верхній межі, що відрізняється на 1 % від швидкості у зовнішньому потоці.

Примежовий шар може мати широкий діапазон розмірів, а також різну структуру течії всередині нього. Розміри і структура примежового шару головним чином зумовлені формою поверхні тіла, біля якого формується примежовий шар, а також співвідношенням між силами інерції і силами в'язкості у примежовому шарі.

Загальмована у примежовому шарі рідина не завжди прилягає до всієї поверхні, яку вона обтікає. У тілах, які погано обтікаються (рис. 6.2), примежовий шар сильно потовщується донизу по течії і при цьому в ньому виникає зворотна течія, що призводить до винесення рідини, яку заторможено у примежовому шарі, у зовнішню течію, внаслідок чого спостерігається відрив примежового шару від поверхні тіла. Відрив примежового шару завжди зумовлюється інтенсивним вихроутворенням і з великими втратами енергії в ділянці кормового сліду. Як результат за кормовою частиною таких тіл утворюється ділянка сильно загальмованої течії (так звана *застійна ділянка*) [13].



Рис. 6.2. Структура течії навколо циліндру

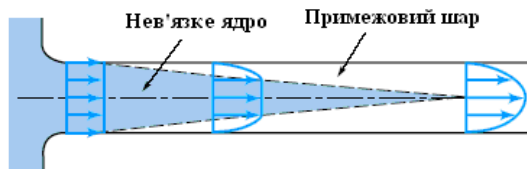


Рис. 6.3. Структура течії на вході у трубопровід

У межах примежового шару можлива як ламінарна, так і турбулентна течія (рис. 6.4). Режим течії у примежовому шарі визначається головним чином співвідношенням між силами інерції і силами в'язкості, яке характеризується числом Рейнольдса.

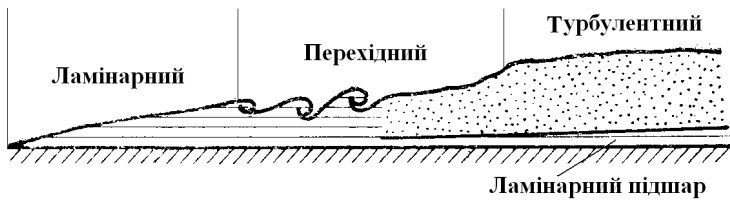


Рис. 6.4. Примежовий шар на плоскій пластині

Для плоскої пластини кінцевої довжини характерним розміром, за яким визначається число Рейнольдса, є довжина цієї пластини l . Локальне числа Рейнольдса на пластині визначається за відстанню вздовж координати x від передньої кромки пластини:

$$Re_x = Ux/\nu$$

де U – швидкість потоку зовні примежового шару; вважається, що за межами примежового шару швидкість течії має лише поздовжню складову, $\mathbf{V} = U\mathbf{i}$.

У ділянці передньої кромки пластини локальне число Рейнольдса має невелике значення, тому течія всередині примежового шару має ламінарний характер, що зумовлено стабілізуювальною дією сил в'язкості. Однак під час наближення до деякого критичного значення ламінарний режим порушується – у примежовому шарі виникають локальні зони турбулентності, які проявляються у перенесенні окремих частинок рідини впоперек основного потоку. Це критичне число Рейнольдса переходу від ламінарного режиму течії до турбулентного для плоскої пластини залежить від шорсткості поверхні пластини, а також від ступеня турбулентності потоку, що натікає на пластину, і має значення в межах від $2 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^6$.

Примежовий шар забезпечує зміну по своїй товщині δ поздовжньої складової швидкості від U у зовнішньому потоці до нуля на поверхні тіла (рис. 6.5). Таким чином, якщо $y = \delta$, маємо $\mathbf{V} \approx U\mathbf{i}$ і $\mathbf{V} = 0$, якщо $y = 0$, з профілем швидкості $u = u(x, y)$, який поєднує ці граничні значення. Зазвичай припускають на межі примежового шару $y = \delta$ якщо $u(x, y) = 0,99U$ (рис. 6.5, а) [13–15].

Як наслідок дефіциту швидкості у примежовому шарі $(U - u)$ витрата рідини через переріз $a - a$ (рис. 6.5, б) менша ніж витрата через переріз $b - b$, яка має місце при відсутності в'язкості. Однак, якщо перенести поверхню в перерізі $b - b$ угору на відстань δ^* , яка називається товщиною витіснення примежового шару, витрати

рідини через перерізи пластини одиничної товщини будуть однакові, тому

$$\delta^* U = \int_0^{\infty} (U - u) dy,$$

звідки

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy.$$

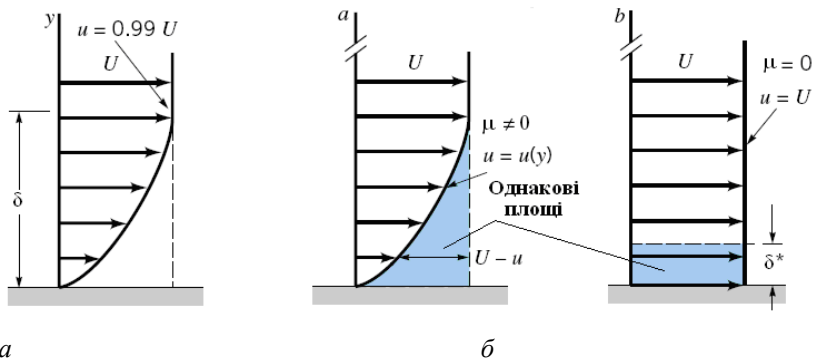


Рис. 6.5. До визначення товщини примежового шару (а) і товщини витіснення примежового шару (б)

Таким чином, товщина витіснення примежового шару є величиною, на яку необхідно збільшити товщину тіла, для того, щоб нев'язкий потік мав такі самі масові витратні характеристики, що і дійсний потік в'язкої рідини.

Для характеристики примежового шару також використовують величину, яка називається товщиною втрати

імпульсу, δ^{**} , і яка визначає ту частину потоку імпульсу вязкої рідини, яка втрачається у примежовому шарі внаслідок гальмувальної дії сил тертя у межах шару. Унаслідок тертя потік імпульсу в примежовому шарі зменшується порівняно з потоком імпульсу нев'язкої течії на величину:

$$\rho U^2 \delta^{**} = \int_0^{\infty} \rho u (U - u) dy,$$

звідки для визначення товщини втрати імпульсу маємо такий вираз:

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy.$$

Приклад 6.1. Потік повітря надходить у квадратний канал, який має сторону 0,6 м, з рівномірно розподіленою по вхідному перерізу швидкістю 3 м/с, і утворює на стінках каналу примежований шар (рис. 6.6).

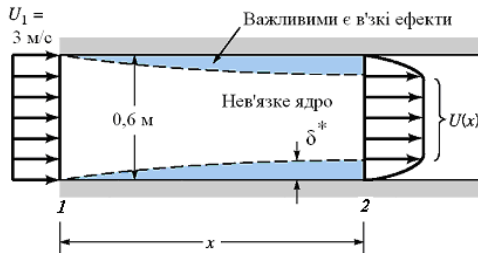


Рис. 6.6. Схема до прикладу 6.1

Повітря рухається в ядрі (за межами примежового шару) ніби воно є нев'язкою рідиною. Відомо, що для такої течії товщину витіснення примежового шару можна визначити за формулою

$$\delta^* = 3,87 \cdot 10^{-3} \sqrt{x},$$

де δ^* і x вимірюються в метрах. Необхідно визначити швидкість повітря у трубі за межами примежового шару, $U = U(x)$.

Якщо припустити, що потік повітря є нестисливим, що цілком виправдано у зв'язку з невеликою швидкістю потоку на вході, то об'ємна витрата через будь-який переріз труби дорівнює об'ємній витраті через вхідний переріз, $Q_1 = Q_2$. Отже,

$$Q_1 = U_1 A_1 = 3 \cdot 0,6^2 = 1,08 \text{ м}^3/\text{с},$$

$$\text{для довільного перерізу } \int_{(2)} u \, dA = 1,08 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Відповідно до визначення товщини витіснення примежового δ^* об'ємна витрата через переріз (2) є такою самою, як і для рівномірно розподіленого потоку, який має швидкість U , через трубопровід, стінки якого зсунуті всередину на відстань δ^* . Таким чином,

$$\int_{(2)} u \, dA = U(0,6 - 2\delta^*)^2 = 1,08 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Після підстановки замість δ^* її вираз через відстань x отримаємо

$$0,36U(1 - 0,0129\sqrt{x})^2 = 1,08,$$

або

$$U = \frac{3}{(1 - 0,0129\sqrt{x})^2}.$$

Необхідно відзначити, що швидкість U збільшується за потоком. Наприклад, $U = 3,47$ м/с, якщо $x = 30$ м.

7. МОДЕЛЮВАННЯ В ГІДРОГАЗОДИНАМІЦІ, МЕТОД РОЗМІРНОСТЕЙ І ПОДІБНОСТІ

Для вирішення багатьох практичних інженерних завдань використовують аналітичні методи і рівняння гідрогазомеханіки, але велику кількість завдань можна розв'язати тільки на підставі експериментально отриманих даних. Для гідрогазомеханічних досліджень часто комбінують аналіз і експеримент. Інженери, які працюють у галузі гідрогазомеханіки, повинні бути добре обізнані з експериментальним підходом до вирішення практичних інженерних завдань, які виникають у цій галузі. Вони повинні бути в змозі інтерпретувати і використовувати ті дані, які отримані

іншими дослідниками, наприклад, дані, наведені у довідниках, або вміти спланувати і провести експерименти у своїх лабораторіях. Розглянемо підходи і методи, які є корисними під час планування і проведення експериментальних досліджень, а також для розуміння і використання даних, отриманих іншими експериментаторами.

Очевидно, що метою будь-якого експерименту є отримання даних, придатних для якомога ширшого використання. Для цього часто застосовують концепцію подібності, за якої вимірювання за однією системою (наприклад, у лабораторії) можуть бути використані для передбачення поведінки іншої подібної системи (поза лабораторії). Лабораторні системи зазвичай розглядають як моделі і використовують для вивчення досліджуваного явища в ретельно контрольованих умовах. За допомогою вивчення на моделі можуть бути отримані емпіричні співвідношення, або передбачені характеристики інших подібних систем. Для цього необхідно встановити співвідношення між лабораторною моделлю та іншою системою. Надалі у систематичній формі з'ясуємо яким чином цього можна досягти.

7.1. Аналіз розмірностей

Для ілюстрації застосування методу аналізу розмірностей розглянемо типову задачу гідрогазомеханіки, для якої необхідний експеримент. Установимо співвідношення для визначення падіння

тиску по довжині усталеного потоку нестисливої ньютонівської рідини, яка рухається всередині довгого, установленого горизонтально, трубопроводу круглого перерізу із гладкими стінками. Ця гідродинамічна задача видається відносно простою, але вона не може бути розв'язана суто аналітичним шляхом без застосування експериментальних даних.

Спочатку, під час планування експерименту з вивчення цієї задачі, необхідно визначити фактори, або змінні, які впливають на падіння тиску на одиницю довжини трубопроводу, Δp_1 . Включимо у перелік цих факторів діаметр труби D , густину рідини ρ , в'язкість рідини η , і середню швидкість V , з якою рідина рухається всередині трубопроводу. Таким чином, можна записати це співвідношення у такому вигляді:

$$\Delta p_1 = f(D, \rho, \eta, V) \quad (7.1)$$

Функціональна залежність Δp_1 від визначених факторів, які записані у круглих дужках у правій частині виразу (7.1), не відома, і метою проведення експерименту є визначення характеру цієї функціональної залежності.

Щоб провести змістовні і систематичні експерименти, необхідно змінювати величину одного із факторів, наприклад швидкості, підтримуючи величини інших сталими, при цьому виміряти відповідне падіння тиску. Можна повторити процес

змінюючи величини інших факторів. Такі серії випробувань можуть надати залежності: $\Delta p_1 = f(V)$ при D, ρ, μ – сталих; $\Delta p_1 = f(D)$ при ρ, μ, V – сталих; $\Delta p_1 = f(\rho)$ при $D, ?, V$ – сталих; $\Delta p_1 = f(?)$ при D, ρ, V – сталих. Для наочності встановлення залежностей можна подати дані випробувань у вигляді графіків. Отримані таким чином залежності є дійсними лише для специфічних умов проведення експерименту – конкретного трубопроводу, конкретної рідини, конкретного діапазону швидкості руху рідини по трубопроводу. Отже, такий експеримент не дає змоги отримати узагальнений результат, який очікується. Крім того, за такого підходу до визначення функціональної залежності падіння тиску вздовж трубопроводу внаслідок декількох факторів, виникають ускладнення. А саме, деякі експерименти важко виконати, наприклад, для отримання залежності $\Delta p_1 = f(\rho)$ необхідно змінювати густину рідини ρ , підтримуючи при цьому сталу величину в'язкості μ , що дуже складно реалізувати. Отже, треба дослідити, яким чином можна скомбінувати за один раз отримані співвідношення $\Delta p_1 = f(V)$, $\Delta p_1 = f(D)$, $\Delta p_1 = f(\rho)$, $\Delta p_1 = f(?)$ для того, щоб побудувати таку узагальнену функціональну залежність між $\Delta p_1, D, \rho, \mu$ і V , що буде дійсною для будь-якої подібної трубопровідної системи.

Існує досить простий підхід до розв'язання поставленої задачі, який не містить відзначених ускладнень. Далі буде показано, що замість використання повного набору змінних, як у

рівнянні (7.1), можна їх об'єднати у дві безрозмірні комбінації змінних (які називаються безрозмірними добутками, або безрозмірними групами) таким чином,

$$\frac{D\Delta p_1}{cV^2} = \Psi \left(\frac{cVD}{M} \right). \quad (7.2)$$

Отже, замість п'яťох змінних можна розглядати лише дві. Необхідний експеримент може полягати у визначенні величини $D\Delta p_1/(cV^2)$ тільки в разі зміни безрозмірного комплексу cVD/M . Результати такого експерименту можна виразити єдиною універсальною кривою, як це показано на рис. 7.1.

Зображена крива може бути дійсною для будь-якої комбінації трубопроводу з гладкими стінками і нестисливої ньютонівської рідини. Для отримання цієї кривої можна вибрати трубу довільних розмірів і рідину, з якою легко працювати. При цьому немає потреби використовувати труби різних розмірів і різні рідини.

Основою пропонованого спрощення є аналіз розмірності залучених змінних. Фізичні величини можуть бути подані кількісно у виразах базових розмірностей, таких, як маса M , довжина L , і час T . Таким чином, з другого закону Ньютона маємо:

$$F \doteq MLT^{-2},$$

де символ \doteq вказує на еквівалентність розмірностей.

Розмірності змінних для потоку в трубі:

$$\Delta p_l \doteq FL^{-3}, D \doteq L, c \doteq FL^{-4}T^2, m \doteq FL^{-2}T \text{ і } V \doteq LT^{-1}.$$

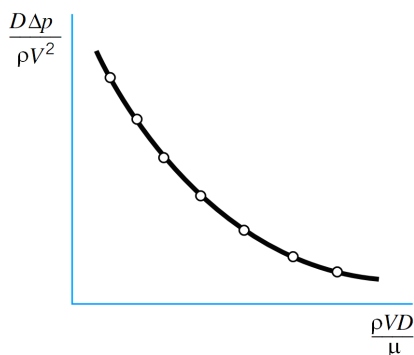


Рис. 7.1. Графік величини падіння тиску з використанням безрозмірних параметрів

Перевірка розмірностей двох груп змінних, що фігурують у виразі (7.2), показує, що ці групи є безрозмірними добутками, а саме:

$$\frac{D\Delta p_l}{cV^2} \doteq \frac{L(F/L^3)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} \doteq F^0L^0T^0;$$

$$\frac{cVD}{m} \doteq \frac{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)}{(FL^{-2}T)} \doteq F^0L^0T^0.$$

Так, у трубi ми не тiльки зменшено кiлькiсть змiнних з п'яти до двох, але новi групи є безрозмiрними комбiнацiями змiнних, що означає незалежнiсть результатiв експерименту, якi подано у формi графiка (рис. 7.1), вiд обраної базової системи одиниць. Такий тип аналізу називають аналізом розмiрностей, його основою є пi-теорема.

7.2. Пi-теорема

Пi-теорема дає вiдповiдь на питання, скiльки потрібно безрозмiрних добуткiв для замищення первiсно залучених змiнних. Ця основна теорема аналізу розмiрностей встановлює таке. Якщо рiвняння, у яке залучено k змiнних, має однорiдну розмiрнiсть, його можна замiнити спiввiдношенням вiдносно $k - r$ незалежних безрозмiрних добуткiв, де r – мiнiмальна кiлькiсть опорних розмiрностей, потрібних для опису змiнних

Безрозмiрнi добутки також називають пi-елементами. В основi пi-теорема покладає iдею про однорiдну розмiрнiсть. По сутi, можна вважати, що для будь-якого фiзично визначеного рiвняння, яке мiстить k змiнних, вигляду

$$u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_k),$$

розмірність змінної зліва від знака рівності має бути однаковою із розмірністю будь-якого окремого елемента, який міститься справа від знака рівності. Звідси випливає, що вихідне рівняння можна перетворити в рівняння відносно набору безрозмірних добутоків (пі-елементів) такого вигляду

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r}),$$

де $\psi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$ – функція безрозмірних добутоків від Π_2 до Π_{k-r} .

Потрібна кількість пі-елементів є меншою за кількість початково заданих змінних на r , де число r – визначена мінімальна кількість опорних розмірностей, які потрібні для опису початкового списку змінних. Зазвичай опорними розмірностями, які необхідні для опису змінних, є базові одиниці вимірювання маси M , довжини L і часу T , або сили F , L і T . Однак у деяких випадках можуть бути потрібні тільки дві одиниці вимірювання (L і T), або навіть одна (L). У рідкісних випадках змінні можуть мати розмірність, яка є комбінацією базових одиниць, таких як MT^2 , і L , у цьому разі r імовірно дорівнюватиме двом, а не трьом.

7.3. Визначення пі-елементів

Розглянемо один з методів, який дозволяє формувати правильну кількість безрозмірних і взаємозалежних пі-елементів. Подамо алгоритм цього методу у вигляді послідовності кроків, які необхідно реалізувати для розв'язання задачі формування пі-елементів.

1. Установити перелік змінних, використовуваних у задачі. Термін «змінна» означає будь-які величини, включаючи розмірні і безрозмірні константи, які впливають на досліджуване явище. Таке встановлення змінних має спиратися на експериментальні дані та на закони, яким підпорядковується явище. У типовому випадку змінні, які впливають на досліджуване явище, можуть належати до таких категорій, як геометричні характеристики системи, фізичні властивості рідини чи газу, зовнішні дії. Однак, у конкретному випадку можуть існувати змінні, які не підпадають під визначені категорії, і кожне встановлення кількості змінних, використаних у задачі, необхідно ретельно аналізувати. Важливою є умова незалежності змінних одна від одної.

2. Подати розмірність кожної змінної через базові розмірності. Для типових задач гідрогазомеханіки до базових розмірностей належать одиниці маси M , довжини L і часу, T , або одиниці сили F , L і T .

3. Визначити потрібну кількість пі-елементів. Для цього можна використати пі-теорему, відповідності до якої кількість пі-елементів дорівнює $k - r$, де k – кількість змінних задачі

(знайдених на першому кроці); r – кількість опорних розмірностей, потрібних для опису цих змінних (знайдених на другому кроці). Опорні розмірності відповідають базовим розмірностям і їх можна визначити за результатами розгляду розмірностей змінних, знайдених на другому кроці. У деяких випадках базові розмірності трапляються у комбінаціях, тому кількість опорних розмірностей менше ніж число базових розмірностей.

4. Вибрати повторювані змінні, кількість яких дорівнює кількості опорних розмірностей. Тут з початково заданих змінних вибираються декілька, що можуть бути скомбіновані з кожною зі змінних, які залишилися, для формування пі-елементів. Усі потрібні опорні розмірності повинні бути включені у групу повторюваних змінних і розмірність кожної із цих змінних повинна бути незалежна від розмірностей інших повторюваних змінних (або розмірність однієї із цих змінних не може бути отримана за результатом деякої комбінації добутків степенів інших повторюваних змінних). Це означає, що повторювані змінні не можна скомбінувати самі з себе для формування безрозмірного добутку.

У кожній задачі зазвичай визначається залежність однієї конкретної змінної від інших змінних. Ця змінна розглядається як залежна, і вона повинна з'являтися тільки в одному пі-елементі. Тому залежну змінну не можна використовувати як повторювану

змінну. Повторювані змінні можуть з'являтися у більш, ніж одному пі-елементі.

5. Сформувати пі-елемент множенням однієї зі змінних, яка не повторюється, на добуток змінних, які повторюються, піднесених до степеня, який робить комбінацію безрозмірною. Кожний пі-елемент буде мати вигляд $u_1 u_1^{a_i} u_2^{b_i} u_3^{c_i}$, де u_i – одна зі змінних, яка не повторюється; u_1, u_2 і u_3 – повторювані змінні; a_i, b_i і c_i – показники степеня, які визначені таким чином, що комбінація є безрозмірною.

6. Виконати п. 5 для кожної зі змінних, які не повторюються. Отриманий набір пі-елементів повинен відповідати потрібній кількості, яку отримано у п. 3.

7. Перевірити отриманий набір пі-елементів щодо того, що вони дійсно безрозмірні. Для перевірки достатньо підставити розмірності змінних в пі-елементи.

8. Записати співвідношення пі-елементів у кінцевому вигляді. Типове співвідношення пі-елементів має такий вигляд:

$$\Pi_1 = \Pi_2^{\alpha} \Pi_3^{\beta} \dots \Pi_{k-r}^{\gamma},$$

де Π_1 містить залежну змінну у чисельнику. Якщо перелік змінних, які задіяні у задачі, встановлено коректно, а інші кроки виконано точно, то співвідношення пі-елементів може бути придатним для описання задачі. Тоді можна використовувати тільки пі-елементи, а не з індивідуальні змінні. Однак це стосується

лише аналізу розмірностей, дійсна функціональна залежність між пі-елементами повинна бути встановлена в результаті експерименту.

Для ілюстрації застосування наведеного алгоритму знову розглянемо задачу, пов'язану з усталеною течією нестисливої ньютонівської рідини, яка рухається всередині довгого, встановленого горизонтально, трубопроводу круглого перерізу із гладкими стінками. Необхідно визначити зниження тиску на одиницю довжини Δp_1 уздовж трубопроводу. Відповідно до п. 1, установити перелік змінних, використовуваних у задачі, на підставі експериментальних даних. У цій задачі

$$\Delta p_1 = f(D, \rho, \eta, V),$$

де D – діаметр труби; ρ і η – відповідно густина і в'язкість рідини; V – середня швидкість.

У п. 2 розмірність кожної змінної має бути виражена через базові розмірності. Якщо як базові використати $F, L, \text{ і } T$, тоді

$$\Delta p_1 \doteq FL^{-3}, D \doteq L, \eta \doteq FL^{-4}T^2, \rho \doteq FL^{-2}T, V \doteq LT^{-1}.$$

Для визначення потрібної кількості пі-елементів має бути використана пі-теорема (п. 3). Перевірка розмірностей змінних, установлених у п. 2, показує, що задіяні всі три базові розмірності, Таким чином, є п'ять ($k = 5$) змінних (включаючи залежну змінну Δp_1) і три потрібні опорні розмірностей ($r = 3$). Відповідно до пі-

теореми $k - r = (5 - 3) = 2$, або потрібна кількість пі-елементів дорівнює двом.

Для формування пі-елементів необхідно із первісно залучених змінних (D , ρ , τ і V) вибрати три повторювані змінні, оскільки потрібні три опорні розмірності. Взагалі потрібно намагатися вибрати ті змінні, що мають простішу розмірність. У цьому випадку як повторювані змінні використані D , V , і ρ . Розмірності цих змінних не залежать одна від одної, D має розмірність довжини, V включає розмірності довжини і часу, і ρ включає розмірності довжини, часу і сили. Це означає, що із змінних D , V , і ρ неможливо сформувати безрозмірний добуток.

Відповідно до п. 5 необхідно сформувати два пі-елементи. Формування першого пі-елемента доцільно почати із залежної змінної і скомбінувати її зі змінними, які повторюються, тоді

$$\Pi_1 = \Delta p_1 D^a V^b \rho^c .$$

З умови безрозмірності цієї комбінації випливає

$$(FL^{-3})(L)^a (FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0 L^0 T^0$$

Показники степеня a , b , і c необхідно визначити таким чином, щоб у кінцевому підсумку показники степеня для кожної з базових розмірностей дорівнювали нулю (тому результуюча комбінація є

безрозмірною). Таким чином, можна скласти таку систему алгебраїчних рівнянь:

- для F

$$1 + c = 0,$$

- для L

$$-3 + a + b - 4c = 0,$$

- для T

$$-b + 2c = 0.$$

Результатом розв'язання цієї системи рівнянь є потрібні значення для a , b , і c , а саме: $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$. Отже,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_1 D}{c V^2}$$

Для неповторюваної змінної що залишилася процес необхідно повторити відповідно до п. 6, тому

$$\Pi_2 = m D^a V^b c^c,$$

або

$$(FL^{-2}T)(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0 L^0 T^0.$$

Тоді маємо:

- для F

$$1 + c = 0,$$

- для L

$$-2 + a + b - 4c = 0,$$

- для T

$$1 - b + 2c = 0.$$

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь отримуємо значення $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$, отже,

$$\Pi_2 = \frac{M}{cVD}.$$

Необхідно перевірити, чи всі пі-елементи є дійсно безрозмірними відповідно до п. 7. Виконаємо перевірку для M , L , T базових розмірностей. Маємо,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_1 D}{cV^2} \doteq \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} \doteq M^0 L^0 T^0,$$

$$\Pi_2 = \frac{M}{cVD} \doteq \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(L)(LT^{-1})(ML^{-3})} \doteq M^0 L^0 T^0.$$

Відповідно до п. 8 результат аналізу розмірностей можна подати в остаточному вигляді,

$$\frac{\Delta p_1 D}{cV^2} = \tilde{\Pi} \left(\frac{M}{cVD} \right).$$

Отриманий результат показує, що цю задачу можна подати двома пі-елементами замість п'яťох змінних, які фігурували спочатку. Однак аналіз розмірностей не дає змоги надати вигляду

функціональній залежності Π , її можна отримати тільки за результатами експериментальних досліджень. У разі потреби, пі-елементи можна перетворити, наприклад замість $?(DV\rho)$ використати її обернену величину. Тоді, для визначення другого пі-елемента маємо такий вираз:

$$\Pi_2 = \frac{cVD}{\mu} .$$

Співвідношення між Π_1 і Π_2 набуває вигляду рівняння (7.2). Безрозмірний добуток $(DVc)/\mu$ – число Рейнольдса, дуже часто використовується у механіці рідини і газу.

7.4. Фундаментальні безрозмірні групи гідрогазомеханіки

Величини, використовані у задачах гідрогазомеханіки:

- прискорення вільного падіння g ;
- модуль пружності E_n ;
- характерна довжина l ;
- густина ρ ;
- частота коливань потоку ω ;
- тиск p (або Δp);
- швидкість звуку c ;
- поверхневе напруження σ ;
- швидкість V ;
- в'язкість η (або $\nu = \eta/\rho$).

Ці величин в основному відображають ті змінні і параметри, які часто використовуються у задачах гідрогазомеханіки. Однак не усі з наведених величин обов'язково використовуються у задачах одночасно. Комбінації цих величин оформлюються у вигляді фундаментальних безрозмірних груп (пі-елементів), які наведені у табл.7.1. Цим групам присвоєні спеціальні найменування і позначення.

Число Рейнольдса є найбільш відомим у гідрогазомеханіці та найуживанішим безрозмірним параметром. Цей параметр носить ім'я британського інженера Осборна Рейнольдса (1842–1912). У більшості задач гідрогазодинаміки характерними є довжина l і швидкість V , а також фізичні властивості рідини (або газу) густина ρ і в'язкість η . Число Рейнольдса – міра співвідношення сили інерції та сили в'язкості, які діють на елемент рідини (або газу).

Число Фруда являє собою представляє міру співвідношення сили інерції, яка діє на елемент рідини (або газу), і сили ваги цього елемента. Прискорення вільного падіння g стає важливою величиною в задачах гідрогазомеханіки, коли сила ваги є значущою. Число Фруда використовують під час розв'язання задач гідродинаміки, у яких розглядається течія із вільною поверхнею. Цей параметр носить ім'я британського інженера і вченого Вільяма Фруда (1810–1879).

Таблиця 7.1

Основні фундаментальні безрозмірні числа гідрогазомеханіки

Назва, позначення	Безр озмірна група	Інтерпретація
Число Рейнольдса, Re	$\frac{cVl}{\mu}$ (або $\frac{Vl}{\nu}$)	Сила інерції — сила в'язкості
Число Фруда, Fr	$\frac{V}{\sqrt{gl}}$	Сила інерції — сила гравітації
Число Ейлера, Eu	$\frac{p}{\rho V^2}$	Сила тиску — сила інерції
Число Коші, Ca	$\frac{cV^2}{E_v}$	Сила інерції — сила стискування
Число Маха, Ma	$\frac{V}{c}$	Сила інерції — сила стискування
Число Струхалія, St	$\frac{\omega l}{V}$	Сила (локальна) інерції — сила (конвективна) інерції
Число Вебера, We	$\frac{cV^2l}{\gamma}$	Сила інерції — сила поверхневого напруження

Число Ейлера являє собою міру співвідношення сили характерного тиску в потоці рідини (або газу) і сили інерції. Часто використовують безрозмірну комбінацію $\Delta p / (\rho V^2)$, яка називається коефіцієнтом тиску, тут Δp – різниця тисків між двома характерними точками потоку. Число Ейлера використовують, коли необхідно враховувати тиск, або різницю тисків у потоці рідини (або газу). Число Ейлера названо на честь швейцарського вченого, математика Леонарда Ейлера (1707–1783).

Число Коші і число Маха використовують у задачах, у яких значущим фактором є стисливість рідини (або газу). Між числом Коші і числом Маха є таке співвідношення: $Ma^2 = Ca$. Обидва числа можна інтерпретувати як міру співвідношення сили інерції і сили стискання. У випадку, коли число Маха є відносно малим (меншим ніж 0,3), сили інерції, які виникають у потоці, є недостатньо великими, щоб викликати значну зміну густини, і тоді стисливість рідини (або газу) можна не враховувати. Число Маха більш вживане у задачах течії стисливих газів. Число Коші назване на честь французького інженера, математика і гідродинаміка Аугустіна Луїса Коші (1789–1857). Число Маха назване на честь австрійського вченого фізика і філософа Ернста Маха.

Число Струхаля є мірою співвідношення сил інерції, що зумовлені нестационарністю течії (локальним прискоренням) і сил інерції, пов'язаних зі зміненою швидкості від точки до точки всередині потоку (конвективним прискоренням). Число Струхаля

використовується в задачах з неусталими або коливальними течіями, частота коливань задається величиною ω . Число Струхаля носить ім'я дослідника «співаючих дротів» Вінсенца Струхаля (1850–1922).

Число Вебера використовують у задачах, у яких розглядається розділення рідин і газів. У цьому випадку може відігравати вагому роль поверхнєве напруження. Число Вебера може розглядатися як показник співвідношення сили інерції і сили поверхневого напруження, які діють на елемент рідини (або газу). Число Вебера назване на честь німецького професора механіки Морітца Вебера (1871–1951).

7.5. Визначення співвідношення експериментальних даних

Одне з найважливіших використань аналізу розмірностей є забезпечення оброблення, інтерпритації і кореляції експериментальних даних. Механіка рідини і газу спирається головним чином на емпіричні дані, тому аналіз розмірностей є одним з найважливіших інструментів досліджень у цій галузі. Аналіз розмірностей забезпечує безрозмірні групи, які описують характерні явища гідрогазомеханіки, але не встановлює співвідношень між цими групами. Для встановлення цих співвідношень, необхідно отримати відповідні експериментальні дані. Ступінь складності цього процесу залежить від кількості пі-

елементів і того, наскільки важко провести експериментальні дослідження.

Застосування пі-теореми показує, якщо різниця між кількістю змінних і кількістю опорних розмірностей дорівнює одиниці, тоді для описання явища, то потрібен лише один пі-елемент. Функціональне співвідношення, яке повинне існувати для одного пі-елемента має вигляд:

$$П_1 = C ,$$

де C – стала, значення якої має бути визначене експериментально. Це ситуація, коли аналіз розмірностей встановлює спеціальну форму співвідношення окремих змінних.

Якщо досліджуване явище можна описати двома пі-елементами, $П_1 = c(П_2)$, то функціональне співвідношення між змінними визначається в результаті зміни $П_2$ і вимірювання відповідних значень $П_1$. Для зручності результати можна подати у вигляді графічної залежності $П_1$ від $П_2$, як показано на рис. 7.2.

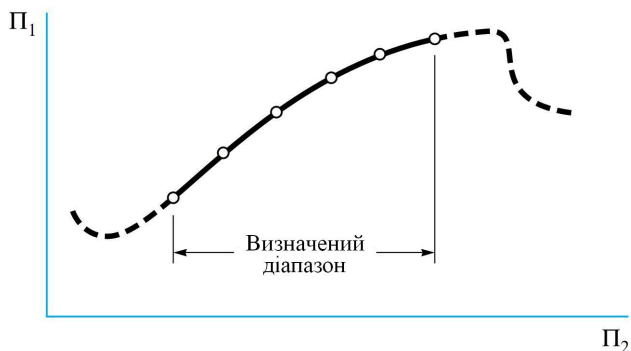


Рис. 7.2. Приклад графічного зображення даних для задачі, у якій використано два пі-елементи

Крива на рис. 7.2 є універсальною для окремого досліджуваного явища, тобто існує тільки одне співвідношення між Π_1 і Π_2 . Однак, оскільки це співвідношення є емпіричним, то воно є визначеним лише для діапазону значень Π_2 , які досліджені в експерименті. За межами цього дослідженого діапазону співвідношення між пі-елементами, які розглядаються, може істотно відрізнитися порівняно з отриманим, як показано на рис. 7.2. На додаток до графічного зображення за допомогою стандартних математичних методів оброблення експериментальних даних можна отримати емпіричний математичний вираз, який пов'язує Π_1 і Π_2 .

Якщо кількість потрібних пі-елементів зростає, стає складніше надавати результатам досліджень відповідного

графічного вигляду і визначати емпіричний математичний вираз, який описує явище. Для задач, у яких використовуються три пі-елементи, $\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3)$, залишається можливим графічне зображення їх співвідношення у вигляді сім'ї кривих (рис. 7.3).

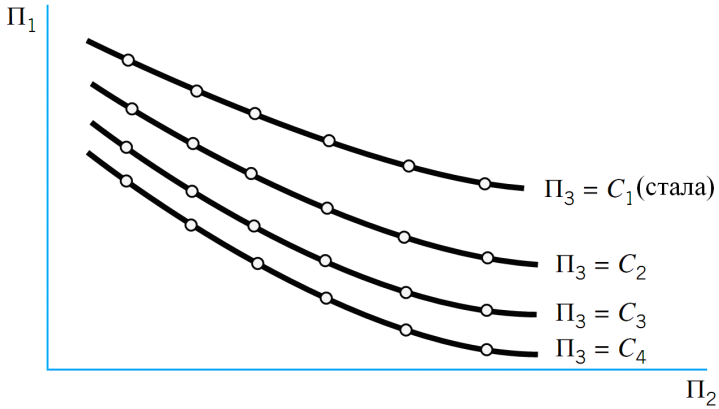


Рис. 7.3. Приклад графічного зображення даних для задачі, у якій використано три пі-елементи.

Цей шлях досить інформативний і корисний для вираження даних в узагальненому вигляді. У цьому випадку можна також отримувати емпіричний математичний вираз, який дає залежність Π_1 від Π_2 і Π_3 . Однак, якщо кількість пі-елементів збільшується унаслідок загальної складності досліджуваної задачі, то відповідно ускладнюються побудова графічного зображення, і подання емпіричного математичного виразу. Для розв'язання таких

складних задач доцільно використовувати моделі для отримання окремих характеристик системи, ніж намагатися встановити узагальнені співвідношення.

7.6. Моделювання і подібність

Моделі широко використовують у гідрогазомеханіці. У загальному інженерному розумінні модель – це представлення фізичної системи, яке може бути використане для прогнозування поведінки системи у певних ситуаціях. Фізичну систему, поведінка якої прогнозується, називають прототипом. Хоча наведеному визначенню моделі також підлягають математичні або комп'ютерні моделі, розглянемо фізичні моделі, які подібні до прототипу, але у загальному випадку вони можуть мати відмінні розміри, використовувати різні рідини (або гази) і навіть функціонувати у відмінних умовах (тисків, швидкостей, та ін.). Зазвичай модель має менші розміри ніж прототип, тому її легше виготовити у лабораторних умовах, вона має меншу вартість, з нею простіше працювати, ніж із прототипом. Утім, коли прототип має дуже малі розміри, тоді доцільно використовувати модель більших розмірів, ніж прототип, на такій моделі легше проводити дослідження. На вдало розробленій обгрунтованій моделі можна передбачити поведінку прототипу за певного набору умов. Важливо, щоб

модель була правильно побудована і випробувана, а результати інтерпретувати коректно.

Розглянемо процедуру побудови моделей, поведінка яких є ідентичною поведінці прототипу. Теоретичні основи побудови моделей базуються на принципах аналізу розмірностей. Будь-яку задачу гідрогазодинаміки можна подати у вигляді співвідношення пі-елементів таким чином:

$$\Pi_1 = \psi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n). \quad (7.3)$$

Щоб правильно формулювати співвідношення (7.3), потрібно тільки знати природу фізичного явища і змінних, використовуваних для опису цього явища. Проведення аналізу розмірностей не потребує конкретних значень змінних (розмірів компонентів, властивостей рідини, та ін.). Таким чином, рівняння (7.3) можна застосовувати до будь-якої системи, поведінка якої підпорядкована тим же змінним. Якщо рівняння (7.3) описує поведінку конкретного прототипу, ідентичне співвідношення можна записати для моделі цього прототипу, а саме:

$$\Pi_{1m} = \psi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \dots, \Pi_{nm}), \quad (7.4)$$

де форма функції ідентична функції у співвідношенні (7.3), якщо ідентичні гідрогазомеханічні явища задіяні і в прототипі, і в

моделі. Змінні, або пі-елементи, які не мають індексів, належать до прототипу, а з індексом m належить до моделі.

Пі-елементи належить підбирати таким чином, щоб Π_1 містив змінну, значення якої необхідно спрогнозувати у результаті дослідження на моделі. Якщо модель побудована і вона функціонує відповідно до таких умов:

$$\begin{aligned}\Pi_{2m} &= \Pi_2, \\ \Pi_{3m} &= \Pi_3, \\ &\vdots \\ \Pi_{nm} &= \Pi_n\end{aligned}\tag{7.4}$$

тоді за умови ідентичності форми функції ψ для моделі і прототипу впливає, що

$$\Pi_1 = \Pi_{1m}.\tag{7.5}$$

Співвідношення (7.5), яке називають рівнянням передбачення, показує, що вимірне за допомогою моделі значення пі-елемента Π_{1m} буде ідентичним значенню відповідного пі-елемента Π_1 для прототипу, якщо інші пі-елементи моделі і прототипу мають однакові значення. Умови, які описує система рівнянь (7.4), забезпечують умови побудови моделі, які ще називають вимогами подібності або законами моделювання.

Як приклад застосування наведеної процедури побудови моделей у гідрогазомеханіці розглянемо задачу визначення сили опору X тонкої прямокутної пластини, яка має розміри w і h і розміщена перпендикулярно до напрямку швидкості руху потоку рідини V . Вважаємо, що сила опору пластини залежить від набору змінних: розмірів пластини w і h , фізичних властивостей рідини, вязкості μ і густини ρ , а також швидкості руху потоку рідини V ; $X = f(w, h, \mu, \rho, V)$.

Застосування пі-теореми дає змогу отримати таке співвідношення між безрозмірними добутками, складеними із використовуваних у задачі змінних:

$$\frac{X}{w^2 \rho V^2} = \Pi \left(\frac{w}{h}, \frac{\rho V w}{\mu} \right). \quad (7.6)$$

У цій задачі розглянемо побудову моделі, яку можна використовувати для прогнозування сили опору певного прототипу (який можливо має розміри, відмінні від розмірів моделі). Оскільки співвідношення (7.6) можна застосовувати як до прототипу, так і до моделі, а його використано для опису прототипу, то для моделі маємо ідентичне співвідношення:

$$\frac{X_m}{w_m^2 \rho_m V_m^2} = \Pi \left(\frac{w_m}{h_m}, \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m} \right).$$

Таким чином, для даної задачі умови побудови моделі, або вимоги подібності мають наступний вигляд:

$$\frac{w_m}{h_m} = \frac{w}{h}, \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m} = \frac{\rho V w}{\mu}.$$

Розміри моделі можна отримати із першої вимоги:

$$w_m = \frac{h_m}{h} w. \tag{7.7}$$

Можна вільно встановлювати співвідношення висот моделі і прототипу h_m/h , але тоді ширина моделі пластини є фіксованою відповідно до виразу (7.7).

Для другої вимоги подібності потрібно, щоб числа Рейнольдса для умов функціонування моделі і прототипу мали однакові значення $Re_m = Re$. Таким чином, потрібну швидкість для моделі можна визначити співвідношенням:

$$V_m = \frac{\mu}{\mu_m} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{w}{w_m} V \tag{7.8}$$

Розглянутий приклад показує, що побудова моделі потребує не тільки геометричного масштабування відповідно до

співвідношенням (7.7), але і коректного масштабування швидкості згідно із співвідношенням (7.8). Цей результат є типовим для побудови більшості моделей у гідрогазомеханіці – необхідно більше ніж суто геометрична подібність.

Для задоволення зазначених умов подібності рівняння передбачення для визначення сили опору пластини має такий вигляд:

$$\frac{X}{w^2 \rho V^2} = \frac{X_m}{w_m^2 \rho_m V_m^2},$$

або

$$X = \left(\frac{w}{w_m} \right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_m} \right) \left(\frac{V}{V_m} \right)^2 X_m.$$

Таким чином, для отримання передбачуваного значення сили опору прототипу X необхідно виміряну на моделі силу опору X_m помножити на квадрат відношення ширини прототипу до ширини моделі, відношення густини рідини (або газу) у прототипі до густини рідини (або газу) у моделі, квадрат відношення швидкості руху рідини (або газу) у прототипі до швидкості руху рідини (або газу) у моделі.

У загальному випадку, як продемонстровано у розглянутому прикладі, для досягнення подібності поведінки між моделлю і прототипом усі відповідні пі-елементи моделі і прототипу повинні

бути прирівнянні. Один, або більше із цих пі-елементів буде включати відношення характерних розмірів (таких, як w/h у попередньому прикладі), оскільки вони є суто геометричними. Таким чином, для того щоб прирівняти пі-елементи, які включають відношення розмірів, потрібна повна геометрична подібність між моделлю і прототипом. Це означає, що модель має бути масштабованою версією прототипу. Геометричне масштабування необхідно виконувати для геометричних характеристик системи, які мають малі розміри, таких, як шорсткість поверхні, або невеликі виступи, оскільки геометричні характеристики такого типу можуть істотно впливати на картину течії. Кожне відхилення моделі від повної геометричної подібності необхідно ретельно аналізувати. Повного геометричного масштабування іноді дуже важко досягти, зокрема, у випадку присутня поверхневої шорсткості, яку складно характеризувати і контролювати.

Інша група типових пі-елементів (наприклад число Рейнольдса) включає відношення сил. Еквівалентність цих пі-елементів потребує однакових значень відношень подібних сил у моделі і у прототипі. Таким чином, для течій, у яких числа Рейнольдса мають однакові значення, відношення сил в'язкості у моделі і прототипі дорівнює відношенню сил інерції. Якщо враховуються інші пі-елементи, наприклад, число Фруда, або число Вебера, можна зробити аналогічний висновок, а саме: еквівалентність цих пі-елементів потребує однакових значень

відношень подібних сил у моделі та прототипі. Коли ці типи пі-елементів мають однакові значення для моделі і для прототипу, маємо динамічну подібність між моделлю і прототипом. Отже, якщо для моделі і прототипу властива геометрична і динамічна подібність, буде однаковим зображення ліній течії, а також постійними відношення відповідних швидкостей (V_m/V) і відношення відповідних прискорень (a_m/a) усюди в потоці. Таким чином, існує кінематична подібність між моделлю і прототипом. Для того, щоб мати повну подібність між моделлю і прототипом, потрібно забезпечити геометричну, кінематичну і динамічну подібність між двома системами. Повна подібність може бути досягнута автоматично, якщо в аналіз розмірностей включені всі змінні, які впливають на досліджуваний процес, і якщо задоволені всі вимоги подібності, які ґрунтуються на пі-елементах.

Зрозуміло, що відношення подібних величин для моделі і прототипу природно витікає із вимог подібності. Наприклад, якщо в задачі фігурують дві характерні змінні довжини, l_1 і l_2 , відповідна вимога подібності ґрунтується на пі-елементі, отриманому з цих двох змінних:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_{1m}}{l_{2m}},$$

тоді

$$\frac{l_{1m}}{l_1} = \frac{l_{2m}}{l_2}.$$

Отже, відношення l_{1m}/l_1 , або l_{2m}/l_2 визначено як масштаб довжини. Для коректної моделі існує лише один масштаб довжини, і всі довжини є фіксованими відповідно до цього масштабу. Однак є інші масштаби, такі, як масштаб швидкості V_m/V , масштаб густини ρ_m/ρ , масштаб в'язкості μ_m/μ , і т. ін. Фактично можна визначити масштаб для кожної змінної, яка фігурує у задачі, і отже немає сенсу говорити про масштаб моделі безвідносно до конкретизації якогось масштабу.

Розглянемо практичні аспекти застосування моделей. Більшість досліджень на моделях включає спрощуючі припущення щодо задіяних змінних. Хоча ці припущення менш суворі, ніж потрібно для математичних моделей, вони, проте, вносять деяку невизначеність у конструкцію моделі. Отже, якщо це можливо, необхідно провести експериментальну перевірку цієї конструкції. У деяких випадках метою моделі є прогнозування ефектів, які виникають за певних пропонованих змін заданого прототипу, тоді можуть бути відомі деякі дані щодо прототипу. Можна побудувати і випробувати модель та отримані дані порівняти з відомими за прототипом даними. Якщо отримано задовільну відповідність, тоді можна внести необхідні зміни у модель, і з підвищеною достовірністю прогнозувати відповідні ефекти на прототипі.

Основою іншої корисної та інформативної процедури є проведення досліджень на наборі моделей різних розмірів, серед

яких одну з моделей можна розглядати як прототип, а інші як моделі цього прототипу. У цьому підході необхідною умовою для коректності конструкції моделі є наявність точного прогнозування між будь-якими парами моделей, якщо одна з моделей розглядається як модель іншої.

Хоча загальна ідея встановлення вимог подібності для моделей однозначна (прирівнюються пі-елементи), не завжди можливо задовольнити всі відомі вимоги. Якщо одна, або більше вимог подібності не задовільняються, наприклад, якщо $\Pi_{2m} \neq \Pi_2$, тоді і рівняння передбачення $\Pi_{1m} = \Pi_1$ теж не виконується: $\Pi_{1m} \neq \Pi_1$. Моделі, для яких не задовільняється одна, або більше вимог подібності, називають викривленими моделями.

Викривлені моделі досить поширені, і їх застосування може бути обґрунтованим. Наприклад, якщо для моделі не може бути підібрана відповідна рідина. Класичний приклад викривленої моделі: течія у відкритому каналі, або течія з вільною поверхнею. У цих задачах ураховують і число Рейнольдса $\rho V l / \mu$, і число Фруда $V / \sqrt{g l}$. Якщо модель і прототип функціонують в однакових гравітаційних полях, з ідентичності числа Фруда витікає потрібний масштаб швидкості:

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\sqrt{l_m}}{\sqrt{l}}.$$

Ідентичність числа Рейнольдса потребує, щоб

$$\frac{\rho_m V_m l_m}{\mu_m} = \frac{\rho V l}{\mu},$$

відповідно для масштабу швидкості

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{l}{l_m}.$$

Оскільки масштаб швидкості має дорівнювати квадратному кореню з масштабу довжини, то

$$\frac{\mu_m / \rho_m}{\mu / \rho} = \frac{v_m}{v} = \left(\frac{l_m}{l} \right)^{3/2}, \quad (7.9)$$

де v – кінематичний коефіцієнт в'язкості, $v = \mu / \rho$. Хоча принципово конструктивну умову (7.9) можна задовольнити, проте складно підібрати відповідну рідину, зокрема для малих значень масштабу довжини. У задачах, у яких фігурують річки, або водовідведення, і рідиною прототипу є вода, моделі також мають відносно великі розміри і єдиною придатною рідиною моделі є також вода. Однак у випадку, коли масштаб кінематичного коефіцієнта в'язкості дорівнює одиниці, умова (7.9) не може бути

задоволена, і як результат маємо викривлену модель. Гідравлічні моделі цього типу є викривленими і будуються на основі числа Фруда за відмінного числа Рейнольдса для моделі і прототипу.

Викривлені моделі можуть бути успішно використані, але інтерпретація результатів, отриманих на моделях цього типу, складніша ніж інтерпретація результатів, отриманих на коректних моделях, для яких виконані всі вимоги подібності. Не існує загальних рекомендацій щодо побудови викривлених моделей, і по суті кожна задачу необхідно розглядати з урахуванням якості її розв'язання. Успішне використання викривлених моделей багато в чому залежить від навичок і досвіду дослідника, який відповідає за розроблення моделі і інтерпретацію експериментальних даних, отриманих за допомогою цієї моделі.

8. ДИНАМІКА В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ПРИ РУСІ В ТРУБОПРОВОДАХ

8.1. Ламінарне режим руху рідини

Розглянемо в циліндричній системі координат усталеного ламінарного потоку в круглій трубі (рис. 8.1) [16].

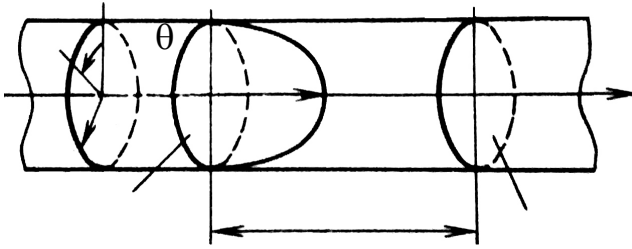


Рис. 8.1. Розрахункова схема ламінарного потоку

Вважаємо, що лінії струму прямі і паралельні осі труби. Тоді проекції швидкості:

$$u_r = u_\theta = 0; \quad u_z \neq 0.$$

Із рівняння нерозривності для нестисливої рідини в циліндричній системі координат

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0$$

знаходимо

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Оскільки, ця умова має виконуватися у всіх точках потоку, тоді

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0.$$

Осесиметричність потоку означає, що всі параметри не залежать від змінної θ . З огляду на це, а також нехтуючи дією масових сил, запишемо рівняння Нав'є – Стокса в циліндричних координатах:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0;$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0. \quad (8.1)$$

Рівняння (8.1) показує, що тиск у «живому» перерізі труби сталий і залежить лише від координати z . Останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z},$$

яке еквівалентне рівнянню

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (8.2)$$

Проінтегруємо двічі рівняння (8.2) і отримуємо

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Величина $C_1 = 0$ забезпечує фізично реальний розподіл швидкості u . Для визначення C_2 варто задати граничну умову для стінки труби:

$$u(r_0) = 0,$$

де r_0 – радіус труби.

Отримаємо

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_0^2.$$

Отже, закон розподілу швидкостей має вигляд

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (r^2 - r_0^2). \quad (8.3)$$

Максимальне значення швидкості буде на осі труби, тобто якщо $r = 0$, то

$$u_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r_0^2. \quad (8.4)$$

Безрозмірний закон розподілу швидкості по перерізу отримаємо шляхом ділення формули (8.3) на вираз (8.4):

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}.$$

Витрати рідини визначимо в такий спосіб:

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi u r dr = 2\pi u_{\max} \int_0^{r_0} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) dr = \pi r_0^2 \frac{u_{\max}}{2}. \quad (8.5)$$

Якщо формулу (8.5) порівняти з формулою визначення витрати за середньою швидкістю, то буде видно, що максимальна швидкість на осі буде вдвічі меншою від середньої швидкості в перерізу. Формулу (8.4) можна записати для середньої швидкості V у вигляді:

$$V = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} r_0^2. \quad (8.6)$$

Для ділянки довжиною L і тисками p_1, p_2 у перерізах дістанемо формулу Пуазейля шляхом інтегрування виразу (8.6) за z :

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu\nu L}{r_0^2} = \frac{32\mu\nu L}{d^2}.$$

Ураховуючи, що втрати напору по довжині з рівняння

Бернуллі для в'язкої рідини

$$\Delta h_{\text{тер}} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g},$$

а коефіцієнт динамічної в'язкості $\mu = \nu\rho$, отримуємо

$$\Delta h_{\text{тер}} = \frac{32\nu LV}{gd^2} = \frac{64\nu}{Vd} \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (8.7)$$

Звівши вираз (8.7) до формули Дарсі, остаточно маємо

$$\Delta h_{\text{тер}} = \lambda_{\lambda} \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g};$$

$$\lambda_{\lambda} = \frac{64}{Re}.$$

Визначимо значення коефіцієнта Коріоліса для ламірної течії.
Скористаємося формулою

$$\alpha = \frac{\int u^3 dS}{V^3 S},$$

у якій врахуємо, що $S = \pi r_0^2$, а $dS = 2\pi r dr$ і після перетворення дістаємо:

$$\alpha = \frac{1}{V^3 S} \int_S u^3 dS = 16 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 \frac{r \cdot dr}{r_0^2}.$$

Замінивши змінну

$$1 - \frac{r^2}{r_0^2} = x,$$

визначимо значення коефіцієнта α :

$$\alpha = -8 \int_1^0 x^3 dx = 2x^4 \Big|_0^1 = 2.$$

Отримане значення показує, що кінетична енергія ламінарного потоку з параболічним розподілом швидкостей у два рази перевищує кінетичну енергію того ж потоку з рівномірним розподілом швидкостей.

Якщо вхід у трубу постійного діаметра з резервуара виконано досить плавним і рідина рухається по ній ламінарним потоком, то розподіл швидкостей на початку ділянки виходить майже рівномірним (рис. 8.2) [1-3, 6,17].

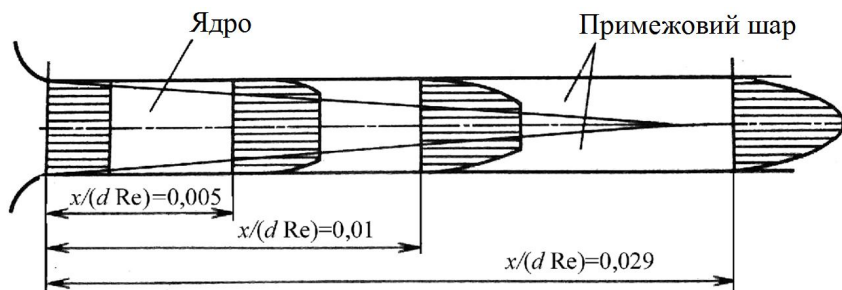


Рис. 8.2. Початкова ділянка ламінарного потоку

Під час руху рідини під дією сил в'язкості і впливу стінок відбувається перерозподіл швидкостей по перерізах. На деякій ділянці, яку називають *початковою*, потік має ядро, у якому зберігається рівномірний розподіл швидкостей, і пристінний примежовий шар з нерівномірним розподілом швидкості. При цьому товщина примежового шару зростає доти, доки у кінці початкової ділянки не зімкнеться на осі труби. Нижче за течією

встановлюється параболічний профіль розподілу швидкостей. У цьому потоці осьова швидкість, що є максимальною, у два рази більша за середню:

$$u_{\max} = 2V .$$

Такий розподіл швидкостей настає лише на відстані від входу в трубу, що дорівнює нескінченності. На практиці визначено значення початкової ділянки L , у якій розподіл швидкості мало відрізняється від параболічного. Теоретично довжина початкової ділянки була визначена Буссінеском у 1891 р. і визначалася за формулою

$$L_{\text{поч}} = 0,065d \text{ Re} .$$

У технічній літературі часто наводиться формула, яку отримав Шіллер:

$$L_{\text{поч}} = 0,02875d \text{ Re} .$$

Однак, найбільше збігається з дослідями Нікурадзе рішення С.М. Тарга [18], згідно, з яким довжина початкової ділянки

$$L_{\text{поч}} = 0,04d \text{ Re} .$$

Описаний характер течії спостерігається тільки в разі стійкого ламінарного режиму.

8.2. Турбулентний режим руху рідини

Для розгляду турбулентного потоку вводиться поняття усередненої місцевої швидкості. При цьому вважають, що поле миттєвих швидкостей у турбулентному потоці можна розбити на поле місцевих усереднених швидкостей і на поле пульсаційної швидкості [1-3, 5, 9]:

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} + \vec{u}'.$$

У кожний проміжок часу значення місцевої швидкості різні, тому усереднену місцеву швидкість визначають як

$$\vec{\bar{u}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{u}(t) dt,$$

де T – період усереднення (рис. 8.3), $\vec{u}(t)$ – місцеві значення швидкості.

Довжина початкової ділянки в турбулентному потоці залежить від умов входу та від числа Re . Експериментальні дослідження показують, що для формування поля усереднених швидкостей довжина початкової ділянки має перебувати в межах від 40 до 50 калібрів трубопроводу.

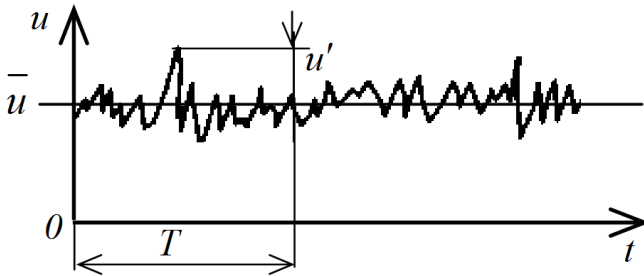


Рис. 8.3. Швидкості в турбулентному потоці

Епюра усереднених швидкостей у стабілізованому

ламінарному потоці має форму параболи. Але в турбулентному потоці епюра являє собою зрізану параболу (логарифмічний профіль у ядрі потоку). При цьому, середня швидкість V відносно максимальної по перерізу становить

$$V = (0,75 \dots 0,9)u_{\max} .$$

8.3. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини

Рівняння Бернуллі для струменя ідеальної рідини розглянуто в підрозділі 4.4. Відмінність між ідеальною рідиною і реальною полягає в оскільки під час стаціонарного руху реальної рідини від точки 1 до точки 2 уздовж лінії течії (рис. 4.3) унаслідок впливу в'язкості відбувається дисипація (розсіювання) механічної енергії. Тому повний напір зменшується, а рівняння Бернуллі набуває вигляду:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\text{тер}} ,$$

де $h_{\text{тер}}$ – втрати напору на подолання опору.

Коефіцієнт Коріоліса α зумовлений нерівномірністю розподілу швидкості по «живому» перерізу струменя і залежить від режиму течії. Його значення лежить у діапазоні 1,025...1,13 для турбулентного потоку, а для ламінарного дорівнює 2. Якщо середня швидкість постійна, то для турбулентного режиму течії $\alpha = 1$.

Кожний доданок має розмірність M і називаються відповідно геометричним напором, пьезометричним напором і швидкісним напором. Сума всіх трьох складових – *повний напір*.

8.4. Гідравлічні втрати напору

Втрати питомої енергії (гідравлічні втрати напору) залежать від форми, розмірів і шорсткості трубопроводу, від швидкості течії та в'язкості рідини, але не залежать від абсолютного значення тиску в рідині.

Як показують досліди, у багатьох випадках гідравлічні втрати приблизно пропорційні квадрату швидкості, тому в гідравліці застосовують такий загальний спосіб вираження гідравлічних втрат повного напору

– у лінійних одиницях (M):

$$h_m = \xi_m \frac{V^2}{2g}, \quad (8.8)$$

де V – середня по перерізу швидкість у трубопроводі, у якому встановлено місцевий опір;

– в одиницях тиску (Pa):

$$\Delta p_m = h_m \rho g = \xi_m \frac{V^2}{2} \rho. \quad (8.9)$$

Формули (8.8), (8.9) містять безрозмірний коефіцієнт пропорційності ξ_m , названий *коефіцієнтом опору*, і швидкісний

напір, що входить до рівняння Бернуллі.

Коефіцієнт опору ξ_m – відношення втраченого напору до швидкісного напору,

Гідралічні втрати поділяють на два види: місцеві втрати і втрати на тертя.

Місцеві втрати енергії зумовлюються місцевими гідралічними опорами, тобто місцевими змінами форми та розмірів трубопроводу, що спричиняють деформацію потоку. Під час протікання рідини через місцеві опори змінюється її швидкість і виникають вихроутворення.

Приклади місцевих опорів розглянуто в підрозділі 8.6.

Місцеві втрати енергії визначають за формулою Вейсбаха (8.8). Якщо діаметр трубопроводу, a отже, і швидкість у ньому змінюються по довжині, то за розрахункову швидкість зручніше брати більшу зі швидкостей, тобто ту, яка відповідає меншому діаметру трубопроводу. Кожний місцевий опір характеризується значенням коефіцієнта опору ξ_m , що у багатьох випадках можна вважати сталим для форми місцевого опору.

Втрати на тертя, або втрати по довжині – це втрати енергії, які виникають у прямих трубах постійного перерізу, тобто за рівномірної течії, і зростають пропорційно довжині труби. Цей вид втрат зумовлюється внутрішнім тертям у рідині, а тому він виникає в трубах з як завгодно малою шорсткістю стінок.

Втрату напору на тертя можна виразити за загальною формулою для гідравлічних втрат (8.8), тобто

$$h_{\text{тер}} = \zeta_{\text{тер}} \frac{V^2}{2 \cdot g}, \quad (8.10)$$

де $\zeta_{\text{тер}}$ визначається як

$$\zeta_{\text{тер}} = \lambda \frac{l}{d}$$

і формула (8.10) набуває вигляд у:

$$h_{\text{тер}} = \lambda \frac{L V^2}{d 2g} \quad (8.11)$$

або

$$\Delta p_{\text{тер}} = \lambda \frac{L V^2}{d 2} \rho. \quad (8.12)$$

Формули (8.11), (8.12) називають формулами Дарсі.

Безрозмірний коефіцієнт λ умовимося називати *коефіцієнтом втрат на тертя або коефіцієнтом опору тертя*.

8.5. Вплив шорсткості стінок на коефіцієнт опору тертю. Досліди Нікурадзе

Гладкі круглі труби геометрично подібні і для них

експериментальні точки на графіку $\lambda = f(\text{Re})$ утворюють єдину криву. Шорсткі труби не є геометрично подібними, оскільки абсолютний розмір горбків шорсткості в трубах однакового діаметра може бути різним [16;17].

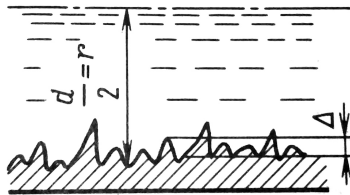


Рис. 8.4. Шорсткість трубопроводу

Припустимо, що шорсткі труби геометрично подібні, якщо їх відносна шорсткість, що визначається як відношення середньої висоти Δ нерівності до діаметра (або радіуса) буде однаковою. Виходячи із цього, дослідні дані можна обробляти у вигляді залежності

$$\lambda = f(\text{Re}, \Delta/d).$$

Величина d/Δ називається відносною гладкістю.

Никурадзе в 1933 р., обробивши дослідні дані, побудував універсальну залежність (рис. 8.5) [1 – 3 ; 5;15;16].

Шорсткість у цих дослідях створювалася штучно, тому вона була зернистою, тим самим відрізняється від природної шорсткості труб. На полі графіка, побудованого в логарифмічній системі координат, можна відзначити чотири характерні зони.

1. Зона ламінарного режиму (пряма *A*). У цій зоні коефіцієнт опору λ залежить лише від числа Re і не залежить від шорсткості стінок труби. Межею зони є значення абсиси 3,36, яке відповідає $\lg(Re_{кр})$. Це означає, що ця закономірність виконується при числах $Re \leq Re_{кр}$, тобто за ламінарного режиму течії в трубі.

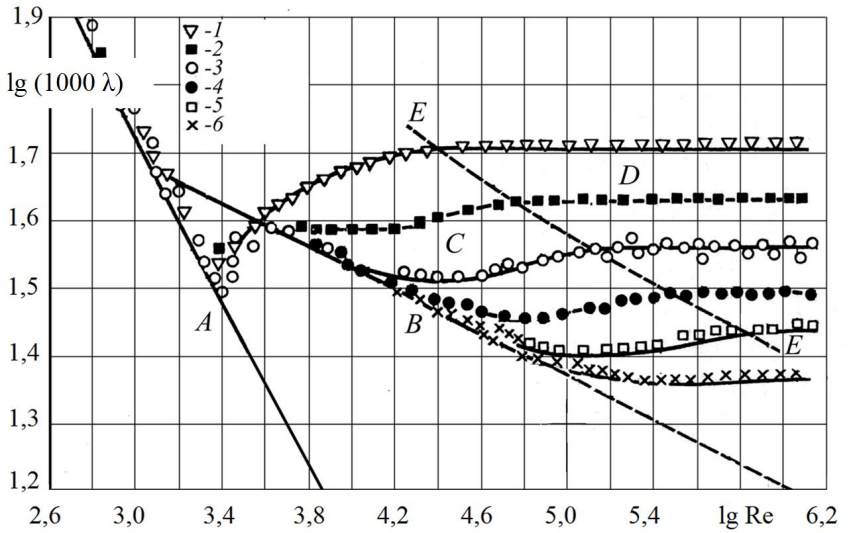


Рис. 8.5. Графік Нікурадзе для визначення коефіцієнта опору трубопроводу, якщо d/Δ : 1 – 30; 2 – 11,2; 3 – 120;

4 – 252; 5 – 504; 6 – 1014

Точки, що містяться на прямій *A*, мають коефіцієнт опору,

який визначають за формулою

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

2. Зона течії в трубах з гладкими стінками (пряма B). Ця зона існує у випадку невеликих значень Re і Δ/d (умова: $\text{Re}(\Delta/d) < 10$), за яких шорсткість на опір не впливає: дослідом точки збігаються із прямою B . Це можна пояснити таким чином. При турбулентній течії поблизу стінки зберігається в'язкий підшар, рух у якому ламінарний. Товщина цього підшару покриває нерівності стінки, завдяки чому турбулентний потік рухається немовби в гладкій трубі. Тому такі труби називають *гідравлічно гладкими*. У цьому випадку коефіцієнт λ можна визначити за однією із формул:

– Коначова

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2};$$

– Блазіуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}.$$

3. Зона доквadraticного опору (між лінією B і лінією E). У цій зоні коефіцієнт λ залежить одночасно від числа Re і від відносної шорсткості (умова: $10 < \text{Re}(\Delta/d) < 500$), тобто кожна крива відповідає певному значенню відносної шорсткості.

Значення λ можна визначити за формулою Альтшуля

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{1,46\Delta}{d} - \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

4. Зона D квадратичного опору (зона автомодельності), у якій коефіцієнт λ не залежить від числа Re (*умова*: $\text{Re}(\Delta/d) > 500$), а визначається лише відносною шорсткістю (див. рис. 8.5, горизонтальні ділянки кривих) і втрати пропорційні квадрату швидкості.

Значення λ можна визначити за формулою Нікурадзе

$$\lambda = \frac{1}{\left(1,74 + 2 \lg \left(\frac{d}{\Delta} \right) \right)^2}.$$

8.6. Місцеві втрати напору в трубопроводах

Місцевим опором називається будь-яка зміна геометрії трубопроводу, що зумовлює деформацію потоку і як наслідок зміну його параметрів, таких як швидкість і тиск. Як правило, досить різке падіння лінії енергії відбувається на відносно короткій ділянці, втрати на якій в кілька разів перевищують утрати в рівномірному потоці на ділянці тієї ж довжини. У місцевих опорах гідравлічний опір викликається не тільки гальмувальною дією стінок, але і деформацією потоку примезовими поверхнями, з утворенням зон, заповнених вихровими масами рідини. При цьому зростає робота в'язкісних напружень, а великі вихори

інтенсифікують процес дисипації енергії, що приводить до втрат напору.

Місцевими опорами можна вважати поворот трубопроводу з різними відносними радіусами згинання, раптове розширення трубопроводу, раптове звуження ділянки, поступове розширення, поступове звуження, вихід рідини із трубопроводу в резервуар, вхід рідини у трубопровід з резервуару, трійники, запірно-регулювальна арматура.

Під час протікання рідини через місцевий опір у потоці виникають деформації епюри швидкості, вихрові зони, які можуть поширюватися по потоці за місцевий опір і перед ним. Тому визначати величину сумарних втрат гідравлічного напору на місцевих опорах правомірно лише в тому випадку, якщо в місцевих опорах немає взаємного впливу. Це можливо тільки у випадку, коли вони розділені ділянками потоку зі стабілізованим розподілом швидкості руху. Якщо таких умов немає, то два або більше місцевих опорів варто розглядати як одне складне і для нього застосовують спеціальні розрахункові залежності.

Структура потоку в місцевих опорах різна. Однак із законів гідродинаміки можна отримати загальну формулу, що виражає втрати в будь-якому опорі. Другий підхід передбачає використання дослідних даних і емпіричних формул, за визначенням коефіцієнтів.

У практичних розрахунках всі втрати напору на місцевих опорах визначають за формулою Вейсбаха (8.8). Якщо необхідно визначити втрати тиску на ділянці з місцевим опором, то використовують формулу (8.9).

Значення коефіцієнта місцевого опору ξ_m визначають експериментально, а в деяких випадках і теоретично.

8.6.1. Експериментальне визначення коефіцієнта місцевих опорів

Найбільш точним способом є метод модельного трубопроводу досить великої довжини, у центрі якого

встановлений місцевий опір, що досліджується. Втрати питомої енергії такої системи визначають як різниця втрат напору в трубопроводі з місцевим опором і в трубопроводі без місцевого опору. Схему такої установки показано на рис. 8.6 [16].

Приєднання ртутних дифманометрів здійснюється в точках *A*, *B*, *C*, *D*, у яких розподіл швидкостей по «живих» перерізах можна вважати однаковим (коефіцієнти Коріоліса $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D$).

Використовуючи диференціальний манометр 4, можна визначити значення

$$\left(z_A + \frac{p_A}{\rho g} \right) - \left(z_D + \frac{p_D}{\rho g} \right) = h_1 \left(\frac{\rho_{рт} - \rho}{\rho g} \right),$$

що дорівнює сумі втрат напору по довжині на ділянці *A – D* і в місцевому опорі 2:

$$h_1 \frac{\rho_{рт} - \rho}{\rho} = h_{тер} + h_M. \quad (8.13)$$

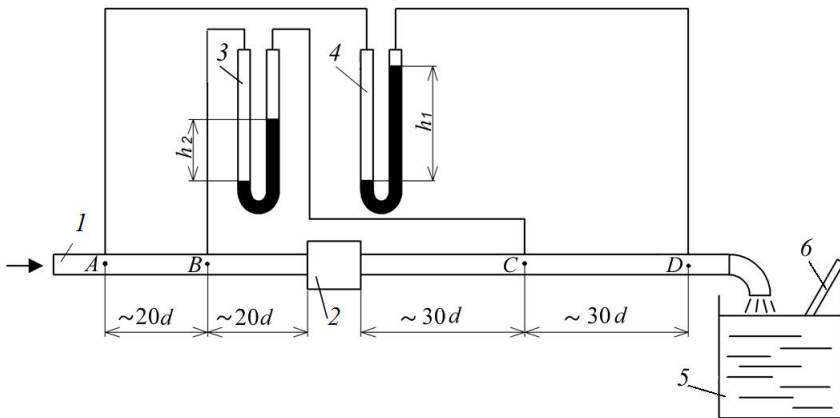


Рис. 8.6. Схема експериментальної установки для визначення коефіцієнта місцевого опору:

1 – трубопровід; 2 – місцевий опір; 3,4 – диференціальні манометри; 5 – мірна посудина; 6 – термометр.

Диференціальний манометр 3 дозволяє визначити значення

$$\left(z_B + \frac{p_B}{\rho g}\right) - \left(z_C + \frac{p_C}{\rho g}\right) = h_2 \left(\frac{(\rho_{\text{рт}} - \rho)g}{\rho g}\right),$$

що дорівнює сумі втрат напору по довжині на ділянці $B - C$, яка вдвічі менша від ділянки $A - D$, і в місцевому опорі 2

$$h_2 \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho}{\rho} = 0,5h_{\text{тер}} + h_m. \quad (8.14)$$

Із двох рівнян (8.13) і (8.14) для h_1 і h_2 знаходимо

$$h_m = (2h_2 - h_1) \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho}{\rho}.$$

Значення коефіцієнта місцевого опору:

$$\xi_m = \frac{2gh_m}{V^2} = \frac{2g}{V^2} (2h_2 - h_1) \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho}{\rho}.$$

8.6.2. Теорема Борда – Карно. Раптове розширення

Втрати напору при раптовому розширенні теоретично можна знайти на підставі теореми Борда – Карно, що дає задовільні результати у квадратичній зоні опору (рис. 8.7).

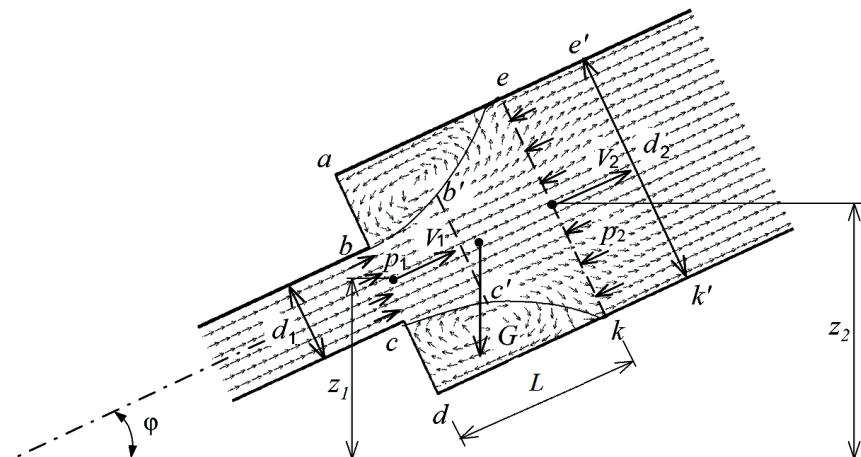


Рис. 8.7. Схема потоку у випадку раптового розширення

Розглянемо потік рідини, що проходить через ділянку трубопроводу, у якому є місцевий опір у вигляді раптового розширення. У випадку раптового розширення труби потік зривається з кута і розширюється не раптово, а поступово, причому в кільцевому просторі між потоком і стінкою труби (зони abe і cdk) утворюються вихори, які і є причиною втрат енергії. На деякій відстані L струмінь повністю розширюється, але має в перерізі $e - k$ нерівномірну епюру швидкості, що зумовлено деформацією потоку на ділянці L [16].

Епюра швидкості вирівнюється в кінці перерізу $e' - k'$, у якому установлюється розподіл швидкостей, характерний для стабілізованого турбулентного потоку. Тому як перерізи, для яких буде проведено аналіз, варто вибрати перерізи $a - d$ і $e' - k'$. Площі перерізу потоку: ω_1 – у площині труби діаметром d_1 , з якої потік потрапляє в ділянку більшого перерізу трубопроводу; ω_2 – у тому місці, де потік, розширившись, заповнив весь переріз широкої труби діаметром d_2 . Потік між розглянутими перерізами розширюється, тому швидкість його зменшується. Середню швидкість потоку V_2 у перерізі ω_2 визначають за формулою

$$V_2 = V_1 \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Запишемо рівняння Бернуллі для ділянки потоку, обмеженої перерізами ad і ek :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_m,$$

звідки величина втрат за раптового розширення становить

$$h_m = h_{p.p} = (z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2g}. \quad (8.15)$$

Обчислимо збільшення кількості руху dq розглянутого об'єму рідини $adek$ за час dt . Справедливим буде вважати збільшення проекції на вісь потоку кількості руху dq системи матеріальних точок об'єму $adek$, що дорівнює проекції на ту саму вісь імпульсу зовнішніх сил, що діють на них.

За час dt ділянка потоку $bcke$ переміститься в положення $b'c'k'e'$. Це зумовить зміну кількості руху рідини в об'ємі $adek$. З огляду на те, що вихрові зони abe і cdk не беруть участі у головному русі потоку, визначимо збільшення кількості руху рідини в об'ємі $adek$ за час dt як різницю кількостей руху рідини в об'ємах $eke'k'$ і $bc'b'c'$.

$$\frac{dq}{dt} = \rho V_2^2 \omega_2 - \rho V_1^2 \omega_1 = \rho \omega_2 V_2 (V_2 - V_1),$$

Визначимо імпульс зовнішніх сил, що діють на розглянутий об'єм у напрямку руху, якщо дотичне напруження на бічній поверхні циліндра дорівнює нулю.

Зовнішні сили, які проектуються на вісь руху:

- 1) вага рідини в розглянутій об'ємі

$$G = \rho g \omega_2 L,$$

де L - довжина розглянутої ділянки.

- 2) сили тиску на поверхні перерізів $a - d$ і $e - k$. З огляду на те, що площі перерізу циліндра злива і справа однакові і дорівнюють ω_2 , а також, що в перерізі $a - d$ тиск p_1 діє по всій площині ω_2 . Проекція імпульсу Fdt визначається таким чином:

$$Fdt = ((p_1 - p_2)\omega_2 - \rho g L \omega_2 \sin \varphi) dt.$$

На підставі закону кількості руху $Fdt = dq$ маємо:

$$(p_1 - p_2) \cdot \omega_2 - \rho g L \omega_2 \cdot \sin \varphi = \rho \omega_2 V_2 (V_2 - V_1).$$

Підставляючи $\sin \varphi = (z_2 - z_1)/L$ і скорочуючи на $\rho g \omega_2$ обидві частини, отримаємо:

$$(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2(V_2 - V_1)}{g}.$$

Підставляючи $(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ у рівняння (8.15), знаходимо:

$$h_m = h_{p.p} = \frac{V_2(V_1 - V_2)}{g} + \frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2g}.$$

Після перетворення, а також, вважаючи розподіл швидкостей по перерізах рівномірним ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), у турбулентному режимі дістаємо формулу, відому за назвою теореми Борда – Карно:

$$h_{p.p} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}. \quad (8.16)$$

Теорема Борда – Карно стверджує, що втрата напору (питомої енергії) у випадку раптового розширення русла дорівнює швидкісному напору, розрахованому за різницею швидкостей.

Доведена теорема добре підтверджується дослідями у турбулентному режимі течії.

Для раптового розширення потоку з огляду на рівняння нерозривності $V_1\omega_1 = V_2\omega_2$, формула (8.15) набуває вигляду

$$h_{p,p} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} = \xi_{p,p} \frac{V_1^2}{2g}.$$

Отже, для випадку раптового розширення трубопроводу коефіцієнт опору

$$\xi_{p,p} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right)^2.$$

У тому випадку, коли площа ω_2 значно більша порівняно з площею ω_1 і, отже, швидкість V_2 можна вважати рівною нулю (тобто труба сполучається з більшим резервуаром), втрати напору у випадку раптового розширення визначають за формулою

$$h_{p,p} \approx \frac{V_1^2}{2g},$$

коефіцієнт опору в цьому випадку $\xi = 1$.

8.6.3. Раптове звуження трубопроводів

У разі раптового звуження труби «живий» переріз струменя спочатку зменшується, а потім розширюється (рис. 8.8.). Причому

площі «живого» перерізу струменя співвідносяться між собою в такий спосіб: $\omega_1 > \omega_2 > \omega_{зв}$.

Втрати напору у випадку раптового звуження являють собою суму втрат енергії на стискання і подальше розширення. Загальне значення коефіцієнта опору залежить від ступеня стискання потоку в перерізі $a - b$:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{зв}}{\omega_2}.$$

Чим менше значення коефіцієнта стискання, тим менший переріз $\omega_{зв}$, а отже, збільшуються втрати напору у міру подальшого розширення потоку до перерізу ω_2 .

У практичних розрахунках у випадку раптових звужень зручніше задавати співвідношення площ перерізів потоку ω_1 і ω_2 , тому використовують формулу Ідельчика:

$$\xi_{р.з.} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \quad (8.17)$$

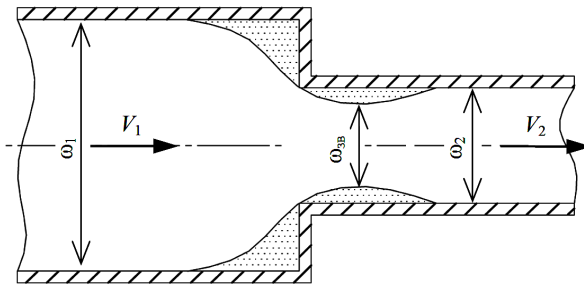


Рис. 8.8. Раптове звуження труби.

Значення коефіцієнта опору у випадку раптового звуження для турбулентного руху зведенов табл. 8.1 [16].

Таблиця 8.1.

Значення коефіцієнта опору у випадку раптового звуження

ω_2/ω_1	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\xi_{p.з}$	0,5	0,47	0,45	0,38	0,34	0,3	0,25	0,2	0,15	0,09

Значення коефіцієнта втрат $\xi_{p.з} = 0,5$ припускається при вході в трубу з гострою вхідною крайкою з великого резервуара. Це впливає з того, що співвідношення площ ω_2/ω_1 прагне до нуля. У випадку закругленої вхідної кромки, коли відношення радіуса скруглення до діаметра умовного проходу труби дорівнює 0,12, коефіцієнт опору $\xi_{p.з}$ дорівнює 0,1.

8.6.4. Дифузор

Для зниження втрат енергії потоку, спричинених раптовим розширенням труби, перехід від вузького перерізу до широкого виконують плавним. Такі переходи називають дифузорами.

На конфігурацію потоку впливають кут розкриття і довжина дифузора (рис. 8.9).

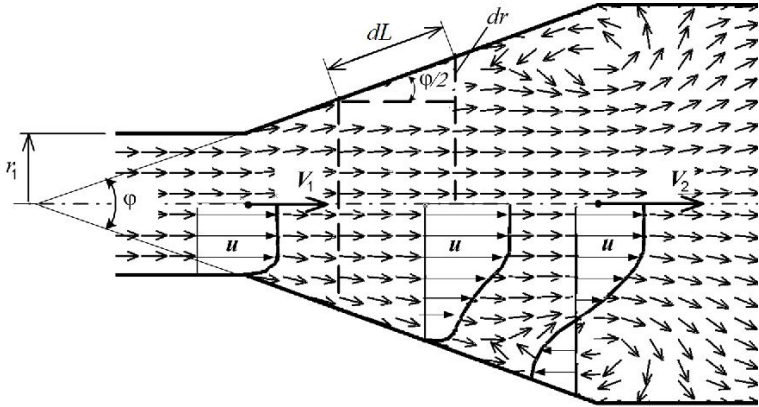


Рис. 8.9. Розрахункова схема дифузора

У ньому зменшується середня швидкість V , як впливає з рівняння Бернуллі, збільшується тиск. Це збільшення тиску гальмує частинки рухомої рідини поблизу стінок, де локальні швидкості завжди менші, ніж в осевій частині потоку. Шари рідини, поблизу до стінок, зупиняються або починають рухатися у зворотньому напрямку. Основний потік натрапляє на цей зворотний рух рідини, унаслідок чого виникають вихроутворення і відрив потоку від стінки. Тому найбільш сприятливі умови для течії рідини в дифузорі виникають, якщо кут розкриття не перевищує $8^\circ \dots 9^\circ$. В цьому випадку (як показує досвід) рідина тече плавно, не відриваючись від стінок.

Втрати напору в дифузорі $h_{\text{диф}}$ складаються із втрати напору

на вихроутворення (розширення) $h_{\text{розш}}$ і втрати напору на тертя $h_{\text{тер}}$:

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тер}} + h_{\text{розш}}, \quad (8.18)$$

Визначимо втрату напору на тертя [19]. Для цього розглянемо круглий дифузор із прямолінійної твірної з кутом φ при вершині. Радіус вхідного отвору дифузора дорівнює r_1 , вихідного – r_2 (рис. 8.9). З огляду на зміну радіуса перерізу та швидкості руху рідини уздовж дифузора, визначимо елементарну втрату напору на тертя за формулою

$$dh_{\text{тер}} = \lambda \frac{dL}{2r} \frac{V^2}{2g}, \quad (8.19)$$

де λ - коефіцієнт тертя по довжині, значення якого припускається як постійне і обчислюється за середнім радіусом (звичайне значення цього коефіцієнта становлять 0,015...0,025); dL – довжина елементарного відрізка твірної дифузора:

$$dL = \frac{dr}{\sin \frac{\varphi}{2}}; \quad (8.20)$$

V – середня швидкість у довільно взятому перерізі, радіус якого дорівнює r , що визначається за швидкістю рідини V_1 на початку дифузора:

$$V = V_1 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2. \quad (8.21)$$

Підставимо вирази (8.20) і (8.21) у формулу (8.19) для $dh_{\text{тер}}$ і виконаємо інтегрування в межах від r_1 до r_2 , вважаючи, що коефіцієнт $\lambda = \text{const}$:

$$dh_{\text{тер}} = \lambda \frac{dr}{2r \sin \frac{\varphi}{2}} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{V_1^2}{2g},$$

звідки

$$h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{V_1^2}{2g} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right) \frac{V_1^2}{2g}. \quad (8.22)$$

Формулу (8.22) можна подати у вигляді

$$h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_1^2}{2g}, \quad (8.23)$$

де $n = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$ – ступінь розширення дифузора.

Втрата напору на розширення (вихроутворення) визначається аналогічно випадку раптового розширення (8.16), але з поправковим коефіцієнтом k , меншим за одиницю:

$$h_{\text{розш}} = k \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = k \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} = k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}. \quad (8.24)$$

Значення коефіцієнта k можна визначити за наближеною формулою Флигнера:

$$k = \sin\varphi.$$

Більш точні значення коефіцієнта (для дифузоров з кутами конусності $\varphi = 5^\circ \dots 20^\circ$) можна отримати за емпіричною формулою Ідельчика [19; 20]:

$$k = 3,2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

Підставляючи формули (8.23), (8.24) у вираз (8.18), дістаємо остаточну формулу для визначення втрат напору в дифузори:

$$h_{\text{диф}} = \left(\frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right) \frac{V_1^2}{2g},$$

де вираз у дужках являє собою коефіцієнт опору дифузора, тобто

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Експериментальні значення $\xi_{\text{диф}}$ залежності від кута φ і ступеня розширення n показано на рис. 8.10 [16]. Найбільший інтерес становить той факт, що мінімуму втрат відповідає майже такий самий кут $\varphi=6^\circ \dots 8^\circ$ (кут відриву потоку), а максимум втрат, що відповідає куту $63^\circ \dots 67^\circ$, перевищує втрати, що відповідає відповідному раптовому розширенню ($\varphi = 180^\circ$). З огляду на це рекомендується замінити дифузори з кутами, що перевищують $40^\circ \dots 60^\circ$ на раптове розширення, оскільки це дає менші втрати напору.

Для квадратних дифузорів оптимальні значення кута φ відповідають кутам для круглих дифузорів. Прямокутні дифузори (плоскі дифузори) з розширенням в одній площині мають більший оптимальний кут, що становить $10^\circ \dots 12^\circ$.

Криволінійні дифузори з постійним градієнтом тиску вздовж осі ($dp/dx = \text{const}$) відрізняються більшою стійкістю потоку і зменшенням втрат напору в ньому порівняно із прямолінійними.

Ступеневі дифузори, що складаються зі звичайного дифузора з оптимальним кутом і наступним раптовим розширенням мають опір значно менший, ніж звичайного дифузора такої самої довжини і з таким самим ступенем розширення.

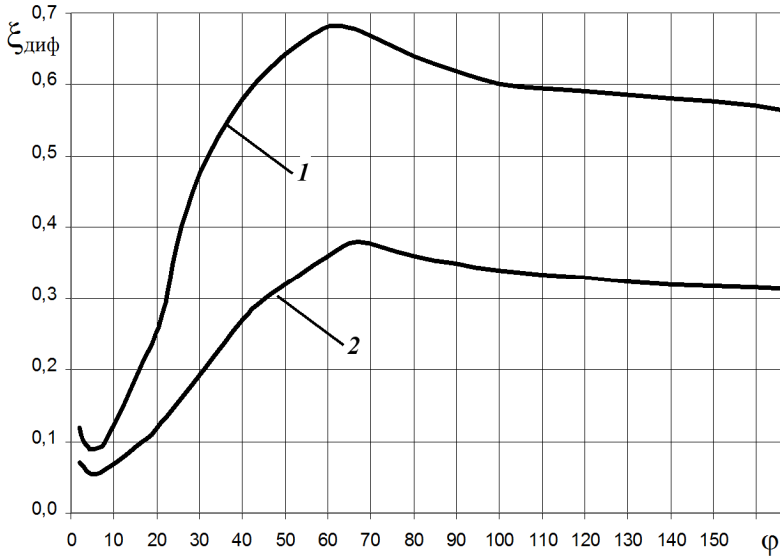


Рис. 8.10. Розподіл значень коефіцієнта опору дифузора:
 1 – якщо $n=4$; 2 – якщо $n=2,25$

8.6.5. Конфузор

Поступове звуження труби називається конфузоровим (рис. 8.11). Потік рідини в конфузорові супроводжується збільшенням швидкості і зниженням тиску; рідина рухається від більшого тиску до меншого, тому причин до виникнення вихроутворення і зривів потоку (як це відбувається в дифузорові) тут немає. У конфузорові є лише втрати на тертя. У зв'язку з цим опір конфузорова завжди менший, ніж опір такого самого дифузорова:

$$h_{\text{конф}} = h_{\text{тер}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{V_2^2}{2g},$$

де $n = \omega_1 / \omega_2$ – ступінь звуження конфузора [19].

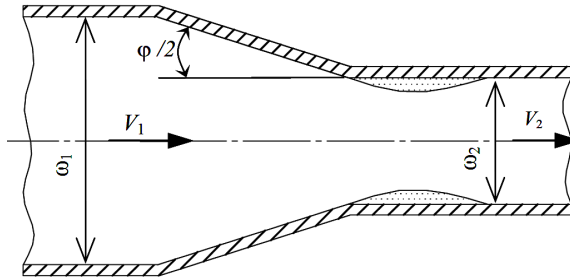


Рис. 8.11. Конфузор

Невеликі вихроутворення і відрив потоку від стінки з одночасним стисканням потоку виникає лише на виході з конфузора в місці з'єднання конічної труби із циліндричною. Для усунення цих вихроутворювань і спричинених ними втрат рекомендується конічну частину плавно сполучати із циліндричною або конічну частину замінити криволінійною, що плавно переходить у циліндричну. Коефіцієнт опору такого плавного звуження, що називається соплом, змінюється в межах $\xi = 0,03 \dots 0,10$ залежно від ступеня звуження, плавності та числа Re (більшим числам Re відповідають малі значення ξ і навпаки).

8.6.6. Поворот ділянки

Раптовий поворот труби (коліно) без закруглення (рис. 8.12, *a*) зумовлює значні втрати енергії, оскільки в ньому відбуваються відривши потоку й вихроутворення.

Через більші втрати напору в колінах без закруглення застосування їх у трубопроводах не рекомендується.

Плавний поворот труби (рис. 8.12, *б*, 8.13) називається відводом. Плавність повороту значно зменшує масштаби вихроутворення, а отже, і опір відводу порівняно з коліном. Це зменшення буде тим більшим, чим більший відносний радіус кривизни відводу R/d і за досить великого його значення зрив потоку і зумовлені ним вихроутворення ліквідуються повністю. Коефіцієнт опору відводу залежить від відношення R/d , кута φ , а також від форми поперечного перерізу труби. Коефіцієнт опору коліна круглого перерізу $\xi_{\text{кол}}$ зростає зі збільшенням кута φ .

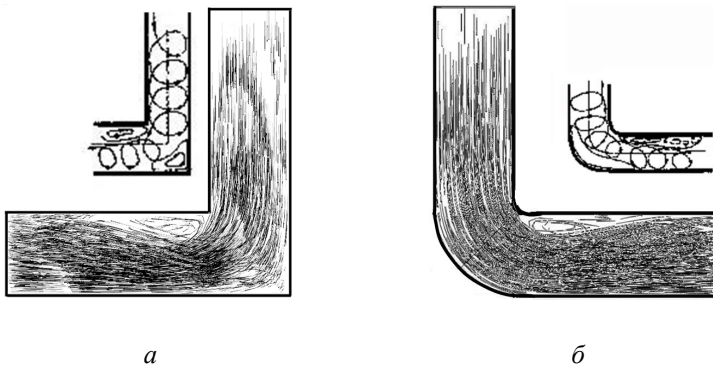


Рис.8.12. Структура потоку при повороті ділянки

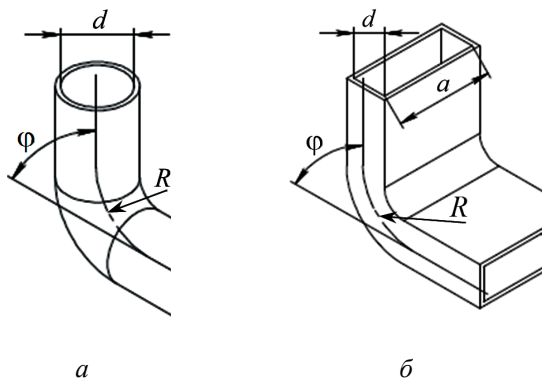


Рис.8.13. Відводи: *а* – круглого перерізу, *б* – прямокутного перерізу

Особливістю потоку на повороті є наявність вторинних течій, що виникають у поперечному перерізі і накладаються на основний потік. Під час руху рідини по скривленому руслу на всі частинки діють відцентрові сили. Але оскільки розподіл швидкостей по перерізу нерівномірний (у центрі швидкості більшим, а біля стінок – меншим), то відцентрова сила, пропорційна квадрату швидкості, буде значно більшою в центральній частині потоку, ніж поблизу стінок. Виникають моменти відцентрових сил, які приводять рідину в обертання. У середині потоку рідина переміщується від внутрішньої стінки до зовнішнього, тобто вздовж радіуса кривизни, а біля бічних стінок – у зворотному напрямку. Утворюється «парний вихор» (рис. 8.14). У результаті додавання колового руху рідини до поступального потік розділяється на два гвинтових потоки.

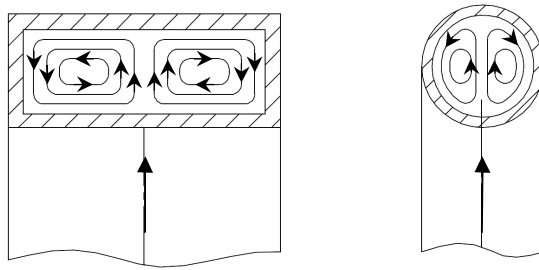


Рис.8.14. Утворення «парного вихору»

На утворення «парного вихору» витрачається енергія рідини, пропорційна моменту інерції площі поперечного перерізу вихору. Мінімальний момент інерції має круглий переріз вихору за співвідношенням сторін прямокутника дорівнює $a/d \approx 2 \dots 2,5$. У цьому випадку поперечний переріз кожного з вихорів має більш круглу форму, у всіх інших випадках вихори будуть сплюсненими в одному або в іншому напрямку.

Для зменшення втрат при повороті потоку найбільш вигідний прямокутний переріз зі співвідношенням сторін $a/d=2,5$. Таким чином, коли необхідно мати мінімальні втрати, доцільно застосовувати спеціальну форму перерізу русла на повороті (зменшені втрати від кривизни порівняно із круглим перерізом).

Коефіцієнт опору відводів круглого перерізу з кутом $\varphi = 90^\circ$ і $R/d > 1$ можна розрахувати за такою формулою

$$\xi_{\text{відв}} = 0,051 + 0,19 \frac{d}{R},$$

або за формулою Вейсбаха [16]

$$\xi_{\text{відв}} = \left[0,31 + 0,16 \left(\frac{d}{R} \right)^{3,5} \right] \frac{\varphi}{90}.$$

Для кутів $\varphi \leq 70^\circ$ коефіцієнт опору [19]

$$\xi'_{\text{відв}} = 0,9 \xi_{\text{відв}} \sin \varphi,$$

а якщо $\varphi > 100^\circ$, то

$$\xi'_{\text{відв}} = \left(0,7 + \frac{\varphi}{90} 0,35 \right) \xi_{\text{відв}}.$$

Варто мати на увазі, що втрата напору, зумовлена наведеними коефіцієнтами $\xi_{\text{відв}}$, тобто

$$h_{\text{відв}} = \xi_{\text{відв}} \frac{V^2}{2g},$$

являє собою різницю між повною втратою напору у відводі і втратою на тертя в прямій трубі, довжина якої дорівнює довжині відводу, тобто коефіцієнт $\xi_{\text{відв}}$ враховує лише додатковий опір, зумовлений кривизною русла. Тому для розрахунку трубопроводів, що містять відводи, треба довжини цих відводів включати в загальну довжину трубопроводу, за якою розраховується втрата на

тертя, а потім до цієї втрати на тертя додавати додаткову втрату від кривизни, зумовлену коефіцієнтом $\xi_{\text{відв}}$.

Для відводів прямокутного перерізу за співвідношення сторін прямокутника $a/d = 2,5$, коли виникають мінімальні втрати опору, коефіцієнт опору відводу

$$\xi = 0,4\xi_{\text{відв}},$$

де $\xi_{\text{відв}}$ – коефіцієнт опору відводу круглого перерізу з такими самими R/d і φ .

8.6.7. Трійник

У разі злиття двох потоків у трійнику відбувається їх змішування із втратами повного напору. Процес змішування супроводжується обміном кількості руху між частинками потоків, що надходять у трійник з різними швидкостями. Потік, що рухається з меншою швидкістю, сприймає частину кінетичної енергії потоку, що надходить у трійник з більшою швидкістю. У результаті, вирівнюється середня швидкість сумарного потоку.

Величина втрат у відгалуженні та вздовж головного напрямку залежить від співвідношення діаметрів трубопроводів, з яких складається трійник, від співвідношення кількості рідини в основному потоці і у відгалуженні та від того, чи зливаються потоки, чи відбувається їх поділ.

Значення коефіцієнтів місцевих опорів для трійників, що подаються в різних літературних джерелах, здебільшого правильні і різняться між собою незначно, тому ними можна користуватися під час виконання розрахунків.

На графіку (рис. 8.15.) наведено значення коефіцієнтів втрат для випадку поділу і злиття потоку у турбулентному режимі, побудовані на підставі узагальнених експериментальних даних [20]. З огляду на велику кількість видів трійників рекомендується значення їх коефіцієнтів опорів визначати з довідкової літератури.

Від'ємні значення коефіцієнта на графіку вказують на збільшення енергії рідини у відповідному напрямку течії. Це збільшення зумовлюється тим, що різниця повних напорів між перерізами до і після змішування для струменя, що рухається з більшими швидкостями, завжди додатна величина. Ця різниця тим більша, чим більша частина енергії, передана нею струменю, що рухається з меншими швидкостями. Тому коефіцієнт опору – відношення зазначеної різниці повних напорів до середнього швидкісного напору – в перерізі, завжди величина додатна. Запас енергії струменя, що рухається з меншими швидкостями у разі змішування збільшується. Це означає, що різниця повних напорів і відповідно коефіцієнт опору відгалуження, у якому потік має меншу швидкість, може мати від'ємні значення.

8.6.8. Коефіцієнти опорів запірно-регулювальної арматури

Засувки належать до запірних пристроїв, у яких прохід перекривається поступальним переміщенням запірного органа в напрямку, перпендикулярному до руху потоку рідини або газу. Залежність коефіцієнта опору від ступеня відкриття засувки наведено в табл. 8.2, де h_i – поточний хід; h_{\max} – максимальний хід.

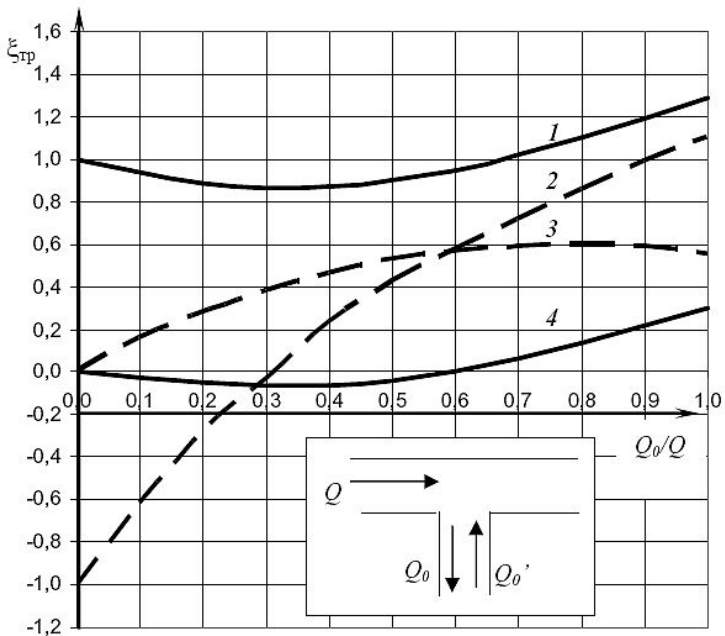


Рис. 8.15. Розподіл значень коефіцієнта опорів у трійнику:

1 – крива, що відповідає відгалуженню у разі поділу потоку;

2 – крива, що відповідає відгалуженню у разі злиття потоків;

3 – крива, що відповідає прямому напрямку в разі злиття потоків;

4 – крива, що відповідає прямому напрямку в разі поділу потоків

У засувках опір зумовлюється тим, що після раптового стискання відбувається раптове розширення потоку.

Течія рідини в інших запірних пристроях більш складна. Крім раптових звужень і розширень, спостерігаються складні повороти потоку (рис.8.16). Це пов'язано як з відривами потоку, які призводять до вихроутворення, що викликає великий опір цих елементів, так і з місцевими підвищеннями швидкостей.

Таблиця 8.2

Залежність коефіцієнта опору від ступеня відкриття засувки

Відносний хід замикального елемента h_1/h_{\max}	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Коефіцієнт опору клинової засувки	80,2	17,9	9,4	4,45	2,05	1,2	0,65	0,4	0,35
Коефіцієнт опору шиберної засувки					1,35	0,71	0,34	0,26	0,07

На опір запірного пристрою впливає тип і положення закриваюльного елемента. Так, у запірному прохідному клапані замикальний елемент переміщується перпендикулярно до осі потоку робочого середовища, у той час, як у засувці замикальний

або регулювальний елемент переміщується перпендикулярно до осі потоку робочого середовища.

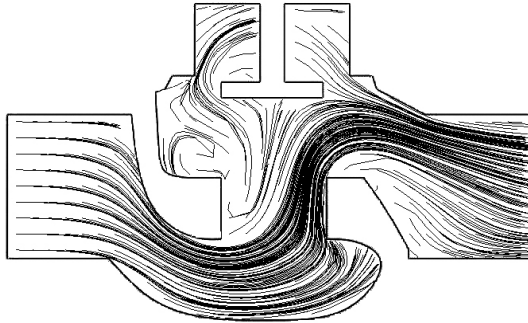
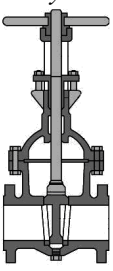
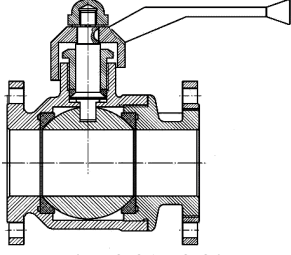


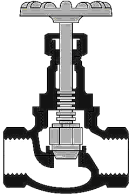
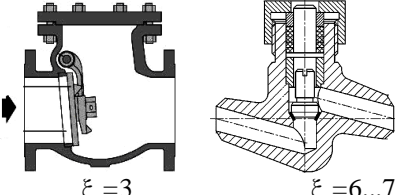
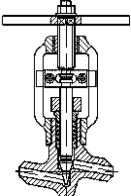
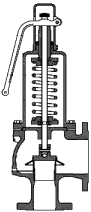
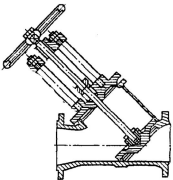
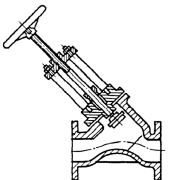
Рис. 8.16. Лінії течії в проточній частині запірного клапана

Значення коефіцієнтів опору основних типів запірної арматури наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Значення коефіцієнтів опору запірних арматур

<p style="text-align: center;"><i>Засувка</i></p>  <p style="text-align: center;">$\xi = 0,34$ – <i>клинова</i> $\xi = 0,07$ – <i>шиберна</i></p>	<p style="text-align: center;"><i>Кран шаровий</i></p>  <p style="text-align: center;">$\xi = 0,01 \dots 0,02$</p>
<p><i>Клапан запірний прохідний</i></p>	<p><i>Клапан зворотний</i></p>

 <p style="text-align: center;">$\xi = 4...6$</p>	 <p style="text-align: center;">$\xi = 3$ $\xi = 6...7$ ($D_v = 50...250$ мм) ($D_v = 10...40$ мм)</p>
<p style="text-align: center;"><i>Клапан запірний голчастий</i></p>  <p style="text-align: center;">$\xi = 7...8$</p>	<p style="text-align: center;"><i>Клапан запобіжний</i></p>  <p style="text-align: center;">$\xi = 0,34$</p>
<p style="text-align: center;"><i>Клапан запірний прямотечійний</i></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="199 715 508 959">  <p style="text-align: center;"><i>Тип 1</i></p> <p style="text-align: center;">$\xi = 5,2 / \sqrt{D_y}$, ($D_y = 25...250$ мм)</p> </div> <div data-bbox="564 715 941 959">  <p style="text-align: center;"><i>Тип 2</i></p> <p style="text-align: center;">$\xi = 22,5 / \sqrt{D_y}$, ($D_y = 5...250$ мм)</p> </div> </div>	

Коефіцієнти опору відкритих засувок одного і того ж типу конструкції тим менші, чим більший діаметр засувки. Малий гідравлічний опір засувки (значення коефіцієнта опору не більше за 0,5) робить їх особливо цінними для застосування на трубопроводах, через які постійно рухається середовище з великою швидкістю.

Сталеві кульові крани появились на ринку трубопровідних арматур у середині 90-х років як альтернатива традиційним чавунним і сталевим засувкам.

Основні переваги сталевих кульових кранів порівняно із засувками сталевими:

1. Менша матеріалоемність і ергономічність конструкції. Маса сталевих засувок перевищує масу аналогічних кульових кранів у 1,5 – 2,5 рази, а за положенням ручки крана відразу можна визначити, у якому положенні перебуває кран – відкритому чи закритому.

2. Повна герметичність затвора істотно збільшує термін експлуатації.

3. Фторопластові ущільнювальні кільця в контакті з полірованою запірною кулею мають незначне зношування. Необхідності у сервісному обслуговуванні немає.

4. Коефіцієнт місцевого гідравлічного опору кульового крана не більший ніж 0,2...0,4 (повнопрохідний має коефіцієнт гідравлічного опору у відкритому положенні 0,01). Застосування кульового крана не призводить до втрати напору, що позитивно позначається на гідравлічних характеристиках трубопроводу, а також дозволяє знизити витрату електроенергії в приводах насосних і компресорних агрегатів.

Клапан прохідний запірний муфтовий має коефіцієнт опору 4 – 6 одиниць. Голчастий запірний клапан через невеликі умовні проходи має дещо більші значення коефіцієнта опору, які не перевищують 8.

Зворотні клапани призначені для автоматичного запобігання зворотному потоку робочого середовища в трубопроводах.

Якщо два запірні пристрої встановлені на одній ділянці близько один до одного, то сумарний коефіцієнт опору в такому випадку можна розрахувати за такою формулою:

$$\xi_{1+2} = 0,5(\xi_1 + \xi_2)(2 - \beta),$$

де

$$\beta = 4,2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{L}{D_y} \right) - 5 \cdot 10^{-3} \frac{L}{D_y} + 0,15;$$

L – відстань між двома запірними пристроями; D_y – умовний прохід запірного пристрою.

8.6.9. Місцеві опори за ламінарного режиму

Місцеві опори за ламінарного режиму невеликі порівняно з тертям і закон опору в цьому випадку є більш складним і менш дослідженим ніж у турбулентному режимі.

Якщо за турбулентного режиму місцеві втрати напору можна вважати пропорційними квадрату швидкості (витрати), а коефіцієнти опору ξ визначаються в основному формою опору і майже не залежать від числа Re , то за ламінарного режиму втрату напору h_m варто розглядати як суму

$$h_m = h_{\text{тер}} + h_{\text{вихр}}, \quad (8.25)$$

де $h_{\text{тер}}$ – втрата напору, зумовлена безпосередньою дією сил тертя (в'язкості) у місцевому опорі і пропорційна в'язкості рідини та швидкості в першому степені; $h_{\text{вихр}}$ – втрата, спричинена з відривом потоку і вихроутвореннями, що виникають у самому місцевому опорі або за ним, і пропорційна квадрату швидкості [19].

З огляду на закон опору за ламінарного режиму формулу (8.25) можна подати

$$h_m = \frac{A}{Re} \frac{V^2}{2g} + B \frac{V^2}{2g},$$

де A і B – безрозмірні константи, що залежать від форми

місцевого опору.

Після ділення рівняння на швидкісний напір отримаємо загальний вираз для коефіцієнта місцевого опору за ламінарного режиму

$$\xi = \frac{A}{\text{Re}} + B.$$

8.7. Пристрої для визначення витрати потоків в'язкої рідини в трубопроводах

8.7.1. Класифікація витратомірів

Існують близько 60 видів витратомірних пристроїв, які можна згрупувати таким чином:

1. Витратомір змінного рівня, принцип дії якого ґрунтується на залежності рівня рідини в посудині від її витрати у разі вільного витікання через отвір у бічній стінці.

2. Витратомір змінного перепаду тиску, принцип дії якого ґрунтується на залежності перепаду тиску, створюваного нерухомим пристроєм, установленим у трубопроводі, або елементом трубопроводу, від витрати рідини (газу). Це такі витратоміри: із звужувальним пристроєм; з гідравлічним опором; капілярний витратомір; з напірним пристроєм; з напірним підсилювачем; відцентровий витратомір; із крилом.

3. Тахометричний витратомір, принцип дії якого ґрунтується

на залежності швидкості руху перетворювального елемента, встановленого в трубопроводі або в спеціальній камері, від витрати рідини (газу): камерний витратомір, турбінний витратомір, кульковий витратомір.

4. Витратомір постійного перепаду тиску, принцип дії якого ґрунтується на залежності вертикального переміщення поплавця, що змінює при цьому площу прохідного отвору трубки таким чином, що перепад тиску по обидва боки поплавця залишається постійним, від витрати рідини (газу): ротаметр, поплачковий витратомір, поршневий витратомір обтікання, електричний ротаметр, пневматичний ротаметр, поплавково-пружинний витратомір, витратомір з поворотною лопаткою.

5. Вихровий витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності частоти коливань, що виникають у потоці в процесі вихроутворювання, від витрати рідини (газу): вихровий витратомір з тілом обтікання, вихровий витратомір з обертовим потоком.

6. Силовий витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності ефекту силового впливу, що надає прискорення потоку, від масової витрати рідини (газу): коріолісовий витратомір, гідравлічний міст Уїтстона, турбосилової витратомір, перепадно-силової витратомір, гіроскопічний витратомір.

7. Акустичний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності акустичного ефекту в потоці рідини (газу) від її витрати. Витратомірами цього типу є ультразвуковий витратомір,

у якому використовуються звукові коливання частотою понад $2 \cdot 10^4$ Гц, і доплерівський ультразвуковий витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності доплерівської різниці частот, що виникає у наслідок відбиття ультразвукових коливань частинками потоку, від витрати рідини (газу).

8. Доплерівський оптичний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності доплерівської різниці частот, що виникає у наслідок відбиття світлового променя частинками потоку, від витрати рідини (газу).

9. Електромагнітний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності взаємодії рухливої рідини з магнітним полем від об'ємної витрати рідини

10. Ядерно-магнітний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності ефекту ядерно-магнітного резонансу в потоці від об'ємної витрати рідини.

11. Тепловий витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності ефекту теплового впливу на потік або тіло, що обтікається потоком, від масової швидкості або витрати рідини (газу): калориметричний витратомір, термоконвективний витратомір, термоанемометричний витратомір.

12. Ударно-струминний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності перепаду тиску, що утворюється при гідравлічному ударі струменя, від витрати рідини (газу).

13. Іонізаційний витратомір, принцип дії якого ґрунтується

на залежності ефекту іонізації рідини від витрати рідини (газу).

14. Концентраційний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності кратності розведення речовини, що вводитьься в потік, від витрати рідини (газу).

15. Кореляційний витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності часу переміщення місцевої неоднорідності потоку на ділянці шляху зумовленого кореляційною функцією, від витрати рідини (газу).

16. Критичний витратомір, що містить пристрій для прискорення потоку газу до швидкості, що дорівнює швидкості звуку, і засобу вимірювання параметрів потоку, необхідних для визначення його витрати.

17. Мітковий витратомір, принцип дії якого ґрунтується на залежності часу переміщення на заданій ділянці шляху мітки, що вводитьься в потік, від витрати рідини (газу).

Примітка. Залежно від характеру мітки, що вводитьься в потік, до терміна «мітковий витратомір» необхідно додавати слово: «іонізаційний», «ядерно-магнітний», «оптичний», «тепловий» і т.ін.

Усі типи витратомірів мають як переваги так і недоліки, і вибір пристрою буде зумовлений конкретною ситуацією. Зокрема, він буде залежати від кількості споживачів води (точок витрати) і їх витратних характеристик ($\text{м}^3/\text{год}$), тиску і температури води в трубопроводі, на якому буде встановлений лічильник, від режиму споживання (величини і тривалості в часі мінімальних і максимальних витрат).

8.7.2. Витратоміри змінного та постійного перепадів тиску

У лабораторних умовах найчастіше використовуються витратоміри дроселювального типу зі змінним і постійним перепадами тиску: витратомірна шайба (діафрагма), витратомірне сопло і витратомірна трубка Вентурі. Установлений в трубопроводі звужувальний пристрій (рис. 8.17) приводить до збільшення швидкості у звуженому перерізі. У результаті частина потенціальної енергії тиску переходить у кінетичну, тому статичний тиск у звуженому перерізі стає меншим від статичного тиску перед звужувальним пристроєм. Перепад тисків залежить від швидкості руху рідини, а отже, і від витрати.

Отримаємо основне рівняння витрати рідини, що перетікає через трубку Вентурі, використовуючи рівняння Бернуллі, складене для перерізів діаметрами D і d . У цих перерізах установлені п'єзометри. Перепад рівнів рідини між п'єзометрами дорівнює Δh . Площина порівняння міститься на осі трубопроводу. Втрати напору між перерізами нехтуємо. Тоді рівняння Бернуллі буде мати вигляд:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}. \quad (8.26)$$

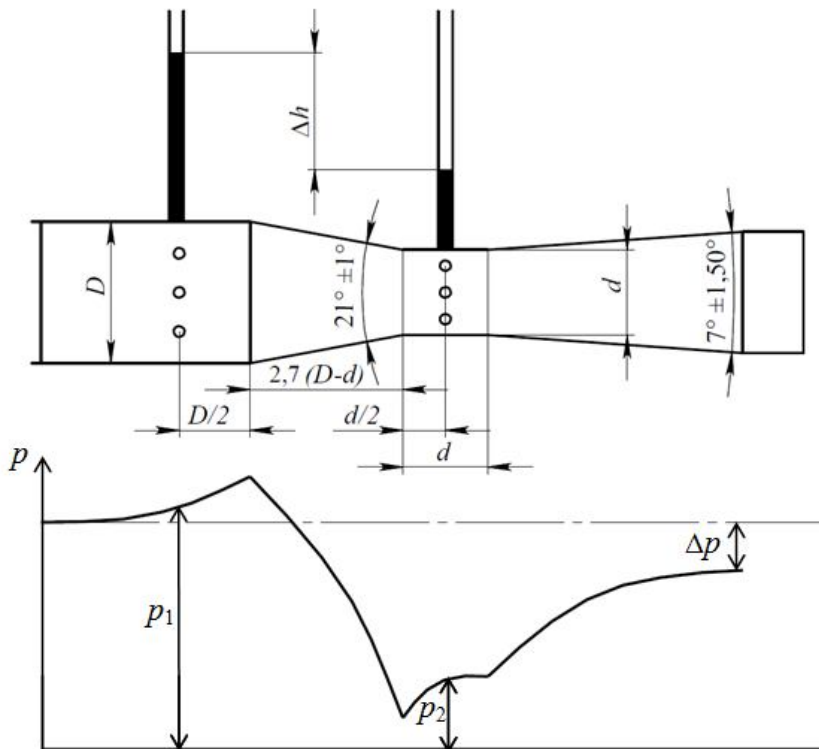


Рис. 8.17. Трубка Вентурі

Розв'язок рівняння (8.26) відносно V_1 з урахуванням рівняння нерозривності $V_1\omega_1 = V_2\omega_2$, а також $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ і $\Delta h = (p_1 - p_2)/\rho g$ буде таким:

$$V_1 = \frac{\Delta h \sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}}.$$

Теоретичну витрату в трубопроводі визначаємо за формулою

$$Q_T = V_1 \omega_1 = \frac{\omega_1 \Delta h \sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}}.$$

Позначимо через k вираз, що є сталою величиною (стала витратоміра) і залежить лише від геометричних розмірів трубки Вентурі:

$$k = \frac{\omega_1 \sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}}.$$

З огляду на втрати енергії фактична витрата буде меншою за теоретичну і визначається через коефіцієнт витрати μ :

$$\mu = \frac{Q}{Q_T}.$$

Коефіцієнт витрати μ визначаємо шляхом тарування приладу.

Формула для визначення фактичної витрати набуває вигляду

$$Q = \mu k \sqrt{\Delta h}.$$

Точність показань витратоміра змінного перепаду становить $\pm 1 \dots \pm 1,5\%$. Трубку Вентурі застосовують на трубопроводах діаметром понад 0,05 м. Для вимірювання витрати в трубопроводах меншого діаметра застосовують витратомірну шайбу (діафрагму) (рис. 8.18). Витратомірна діафрагма викликає різку зміну конфігурації потоку, а також швидкостей і тисків, що, у свою чергу, спричиняє втрати енергії потоку. Ці втрати фіксуються перепадом рівня рідини в диференціальному манометрі (або між двома п'єзометрами), за допомогою якого відбирається тиск по обидва боки діафрагми. Основним недоліком діафрагми є те, що вона має більший гідравлічний опір і зумовлює значні втрати напору.

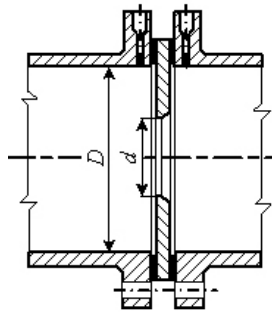


Рис. 8.18. Витратомірна шайба

Гідравлічний опір можна знизити застосуванням

витратомірного сопла (рис. 8.19), що має плавню звужувальну частину на вході в отвір і циліндричну частину на виході.

Перевагою витратомірного сопла можна вважати підвищену точність вимірювання витрати, однак складність виготовлення знижує його практичне застосування.

Витратоміром з постійним перепадом тиску є ротаметр (рис. 8.20). Ротаметр складається зі скляної конічної трубки 1, що розширюється до верху, усередині якої переміщається поплавець 2. Вимірюваний потік рідини переміщається через трубку знизу вверх і піднімає поплавець. Чим вищий рівень поплавця, тим більша площа навколо нього, через яку може протікати потік. Піднявшись настільки, що сила ваги зрівноважує піднімальну силу з боку потоку, поплавець зупиняється.

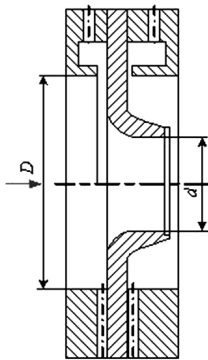


Рис. 8.19. Витратомірне сопло

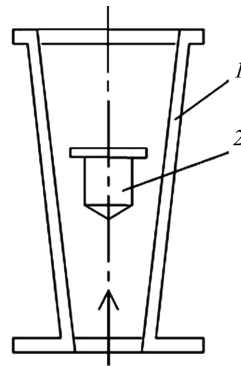


Рис. 8.20. Ротаметр

Таким чином, кожному положенню поплавця відповідає певна витрата. Для візуального відліку показань призначені розподільні шкали, нанесені на скляну трубку приладу.

Як переваги приладу можна відзначити простоту конструкції; високу чутливість, і отже, можливість вимірювати досить малі витрати, а також витрати агресивних рідин. Як недоліки можна виокремити такі: ротаметр потрібно розміщувати вертикально; необхідність індивідуального градуювання на реальних рідинах і істотне зниження точності у разі вимірювання в інших середовищах, відмінних від тих, у яких виконується градуювання; непридатність для вимірювання великих витрат; використання ротаметрів в автоматизованих системах з оптичним зчитуванням положення поплавця допускає протікання тільки прозорої рідини. Відносна точність показань ротаметра не перевищує 2,5%.

8.7.3. Тахометричні витратоміри

Конструкція тахометричного витратоміра полягає в такому: поміщена в потік рідини крильчатка, що обертається під дією проточної води і сполучена з лічильним механізмом. Кількість обертів крильчатки пропорційне об'єму води.

Як переваги сторони тахометричних витратомірів (рис. 8.21) слід відзначити те, що вони не потребують електроживлення і мають малі габарити. Однак цей вид витратомірів має ряд експлуатаційних недоліків:

- не працюють за малих витрат;
- забруднюються і зношуються, якщо вода дає осад, що

спотворює показання;

– термін експлуатації від 6 до 12 років, а при перевірці (через 4 роки після введення в експлуатацію) відсоток лічильників з невідповідністю показань досягає 30%.



Рис. 8.21. Крильчастий витратомір

8.7.4. Ультразвукові витратоміри

В основу роботи ультразвукових витратомірів і лічильників покладено ультразвуковий часово-імпульсний принцип, сутність якого полягає у вимірюванні і визначенні різниці швидкостей ультразвукових зондувальних імпульсів, що проходять у напрямку потоку рідини і проти нього.

Вимірювані середовища: вода, чисті рідини, стоки, пульпи, брудні рідини, що містять абразивні частинки. На точність показань не впливають фізичні та хімічні властивості середовища. Перевагами є простота конструкції за відсутності механічних частин, висока точність у широкому динамічному діапазоні; відсутність гідроопору; можливість монтажу п'єзоперетворювачів на трубопроводах; простота перевірки імітаційним методом без демонтажу; працездатність у випадках гідродарів, температурних і механічних деформацій; тривалий термін експлуатації (25 і більше років); можливість застосування у трубах великого діаметра.

Відомі три методи вимірювання витрати рідини за допомогою ультразвуку:

1. Метод, що ґрунтується на різниці часу поширення

ультразвукових хвиль у напрямку потоку і проти нього (рис. 8.22, *a*). Ультразвукові коливання переміщуються рухливим середовищем. Поверхнею відбиття для імпульсу зондування є природна внутрішня поверхня трубопроводу або спеціальний екран безпосередньо у вимірюваному середовищі. Середня швидкість обмірюваного середовища може визначатися на підставі ефекту зносу ультразвукового коливання рухливим середовищем і зміни часу проходження променя як векторна різниця швидкостей ультразвукових коливань у напрямку руху вимірювального середовища і проти її.

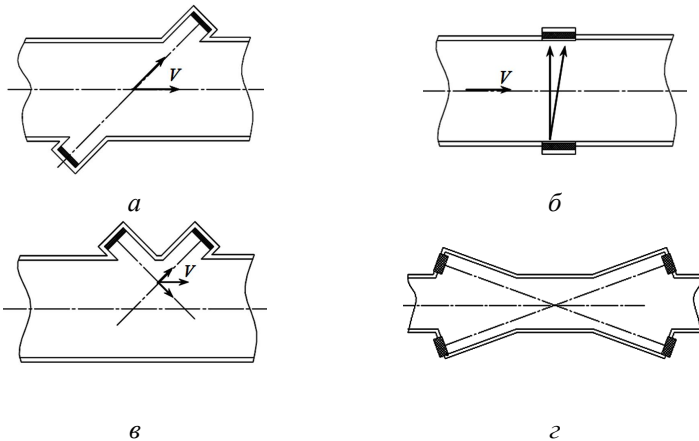


Рис. 8.22. Схема роботи ультразвукових витратомірів

2. Метод, що ґрунтується на геометричному зносі ультразвукової хвилі (із променем перпендикулярним до потоку), зумовленому рухом потоку рідини (рис. 8.22, *б*). Ультразвукові хвилі випромінюються в рідину по нормалі до напрямку руху потоку. Два приймальні п'єзоелементи встановлюють поруч таким чином, що при нерухомому вимірюваному потоці інтенсивності коливань, прийнятих кожним п'єзоелементом, однакові. Під час руху вимірюваного потоку ультразвукові хвилі поширюються в напрямку потоку, при цьому інтенсивність ультразвукових коливань на приймальних п'єзоелементах різна. Обчислена різниця

сигналів на приймальних п'єзоелементах є мірою витрати потоку речовини.

Метод застосовується для вимірювання в трубопроводах більших діаметрів і за більших швидкостей потоків. За своєю суттю цей метод відрізняється від описаного в п.2 тим, що виміряється не час, а геометричний знос променя.

3. Метод, що ґрунтується на доплерівському зрушенні частоти гармонічного ультразвукового сигналу, відбитого від частинок вимірюваного потоку (рис.8.22, в). Доплерівський метод широко застосовують для вимірювання локальних швидкостей, а в області вимірювання витрати має обмежені можливості.

Ультразвукові витратоміри також поділяють за кількістю каналів вимірювання (променів):

- 1) одноканальні (однопроменеві) – мають два п'єзоелементи, кожний з яких по черзі виконує функції випромінювання або приймання (рис. 8.22, а, б, в);
- 2) двоканальні (двопроменеві) – мають два випромінювачі та два приймачі, які створюють два незалежні акустичні канали; ці канали або розміщені паралельно, або перехрещуються (рис. 8.22, г);
- 3) багатоканальні (багатопробієві) – мають більше двох каналів і застосовуються для вимірювання витрати деформованих потоків з метою досягнення підвищеної точності.

За способами розміщення електроакустичних перетворювачів ультразвукові витратоміри поділяють на прилади: зі стаціонарними електроакустичними перетворювачами (витратоміри без переломлення) (рис.8.23) і на накладні електроакустичні перетворювачі (витратоміри з переломленням).

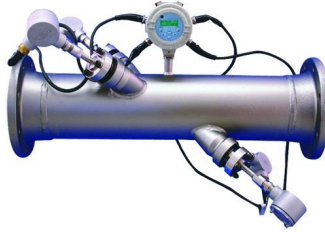


Рис. 8.23. Приклад розміщення ультразвукового витратоміра

Приклад 8.1. У результаті перекачування води по горизонтальному трубопроводу діаметром $d=0,1$ м, довжиною $L=500$ м у разі перепаду тисків у кінцевих перерізах $\Delta p=73575$ Па отримано витрату $Q=37,8$ м³/год; кінематична в'язкість води $\nu=1,12 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Визначити величину шорсткості Δ трубопроводу.

Розв'язання. Знайдемо значення коефіцієнта гідравлічного опору λ . Спочатку обчислимо величину середньої швидкості води в трубопроводі:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 37,8}{3600\pi \cdot 0,1^2} = 1,34 \text{ м/с.}$$

Відповідно до формули Дарсі знаходимо:

$$\lambda = \frac{2\Delta p d p}{LV^2} = \frac{2 \cdot 73575 \cdot 0,1 \cdot 1000}{500 \cdot 1,34^2} = 0,0164.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1,34 \cdot 0,1}{1,12 \cdot 10^{-6}} = 119643. \text{ Режим течії – турбулентний.}$$

Для визначення відносної шорсткості використаємо формулу Альтшуля, коли коефіцієнт λ залежить одночасно від числа Re та від відносної шорсткості

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{1,46\Delta}{d} - \frac{100}{Re} \right)^{0,25}.$$

Звідси отримаємо:

$$\Delta = \left(\left(\frac{\lambda}{0,1} \right)^4 + \frac{100}{\text{Re}} \right) \frac{d}{1,46} = \left(\left(\frac{0,0164}{0,1} \right)^4 + \frac{100}{119643} \right) \frac{0,1}{1,46} = 1,07 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Приклад 8.2. Визначити втрати, пов'язані з установленням діафрагми в трубі, якщо відомо, що діаметр труби $D = 125$ мм, діаметр отвору діафрагми $d = 65$ мм, об'ємна витрата води $Q = 0,01$ м³/с, коефіцієнт опору $\xi = 0,065$, коефіцієнт стиснення струменя $\varepsilon = 0,65$.

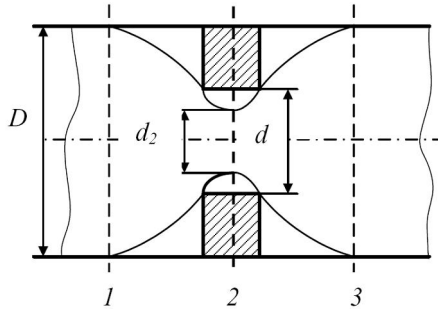


Рис. 8.24. Розрахункова схема діафрагми

Розв'язання. Швидкість $V_3 = V_1$ і визначається через витрату рідини Q :

$$V_1 = V_3 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,01}{3,14 \cdot (0,125)^2} = 0,82 \text{ м/с.}$$

Втрати, пов'язані з установкою діафрагми рівняються сумі втрат на вході і на внутрішнє розширення в ньому, тобто

$$\Delta h_{\text{діаф}} = \Delta h_{\text{вх}} + \Delta h_{\text{розш}}$$

Вибираємо такі перерізи: 2 – вузький переріз, 3 – переріз, в якому $V_3 = V_1$. Тоді:

$$\Delta h_{\text{діаф}} = \xi \frac{V_2^2}{2g} + \frac{(V_2 - V_3)^2}{2g}$$

Знайдемо діаметр вузького перерізу:

$$\varepsilon = \left(\frac{d_2}{d} \right)^2 \Rightarrow d_2 = d\sqrt{\varepsilon} = 0,065 \cdot \sqrt{0,65} = 5,24 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Знайдемо V_2 – швидкість у вузькому перерізі діафрагми:

$$V_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0,01}{3,14 \cdot (5,24 \cdot 10^{-2})^2} = 4,64 \text{ м/с,}$$

тоді
$$\Delta h_{\text{діаф}} = 0,065 \frac{4,64^2}{2 \cdot 9,81} + \frac{(4,64 - 0,82)^2}{2 \cdot 9,81} \approx 0,82 \text{ м.}$$

9. ОСНОВИ ГІДРАВЛІЧНОГО РОЗРАХУНКУ ТРУБОПРОВОДІВ

У техніці застосовують дві групи трубопроводів:

- прості, які являють собою одну або декілька послідовно з'єднаних труб, що не мають бічних відгалужень;
- складні, які мають одне або більше відгалужень.

Рух рідини по трубопроводу зумовлюється тим, що її потенціальна енергія на початку трубопроводу більша, ніж у кінці. Цей перепад (різниця) рівнів потенціальної енергії може створюватись тим або іншим способом: роботою насоса, тиском газу або за рахунок різниці рівнів рідини.

Для розрахунку напірних трубопроводів застосовують рівняння Бернуллі, нерозривності потоку та формули Вейсбаха (8.8), Дарсі (8.11) для визначення гідравлічних втрат. Виходячи з місцевих втрат і втрат на тертя трубопроводи поділяють на короткі

та довгі. До коротких належать усмоктувальні трубопроводи насосів, сифонні труби, деякі лінії гідроприводів. Під час їх розрахунку оцінюють і визначають втрати на тертя і на місцевих опорах.

Розрахунок довгих трубопроводів виконують за спрощеним рівнянням Бернуллі. У цьому випадку швидкісні напори порівняно з іншими членами рівняння малі і ними зазвичай нехтують. Отже, напірна лінія збігається з п'езометричною. Втрати на місцевих опорах без точного розрахунку становлять деяку частку втрат по довжині – 10...15 %.

9.1. Прості трубопроводи гідросистем

Нехай простий трубопровід постійного перерізу розташований довільно в просторі, має загальну довжину L і діаметр d і містить ряд місцевих опорів (рис. 9.1).

У початковому перерізі 1–1 маємо нівелірну висоту z_1 і надлишковий тиск p_1 , а в кінцевому 2–2 – відповідно z_2 і p_2 . Швидкість потоку в цих перерізах внаслідок незмінності діаметра труби однакова і дорівнює V .

Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1–1 і 2–2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \sum h, \quad (9.1)$$

де $\sum h$ – сумарні втрати на тертя по довжині та на місцевих опорах на ділянці труби довжиною L . Втрати на тертя по довжині трубопроводу відповідно до формули Дарсі становлять

$$h_{\text{тер}} = \lambda \frac{L V^2}{d 2g}.$$

Втрати на місцевих опорах відповідно до формули Вейсбаха

$$h_{\text{м}} = \xi \frac{V^2}{2g}.$$

З огляду на рівняння нерозривності потоку і незмінність діаметра труби маємо $V_1 = V_2$ і $\alpha_1 = \alpha_2$, тому швидкісні напори в обох частинах рівняння (9.1) можна скоротити. Тоді рівняння Бернуллі набуває вигляду

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \sum h. \quad (9.2)$$

Запишемо рівняння (9.2) наступним чином:

$$\frac{p_1}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + \sum h. \quad (9.3)$$

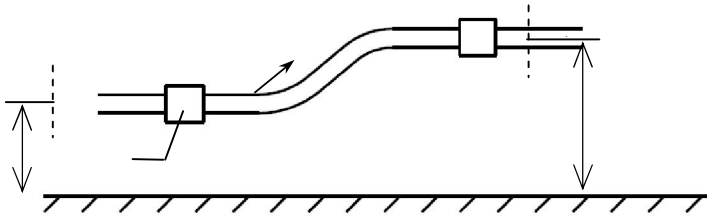


Рис. 9.1. Розрахункова схема простого трубопроводу

П'єзометричний напір у лівій частині рівняння (9.3) складається з геометричної різниці висот $z_2 - z_1$, на яку необхідно підняти рідину, п'єзометричної висоти в кінці трубопроводу та суми всіх гідравлічних втрат у трубопроводі.

Якщо цей п'єзометричний напір відомий, то його називають розміщуваним напором. У протилежному випадку цей напір називають потрібним:

$$H_{\text{п}} = \frac{p_1}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum \xi \right) \frac{V^2}{2g}. \quad (9.4)$$

Формула (9.4) є основною для розрахунку простих трубопроводів і дозволяє побудувати криву потрібного напору.

Кривою потрібного напору називають графік залежності потрібного напору від витрати рідини в трубопроводі. Чим більша витрата рідини, яка подається по трубопроводу, тим більший потрібний напір. У ламінарному режимі крива потрібного напору зображується прямою лінією, у турбулентному - параболою з

показником степеня 2. Величина початку кривої додатна в тому випадку, коли рідина, рухаючись по трубопроводу піднімається з меншої висоти на більшу або рухається в порожнину з підвищеним тиском. Зі збільшенням довжини трубопроводу, зі зменшенням діаметра, а також зі зростанням коефіцієнтів місцевих гідравлічних опорів у трубопроводі підвищується опір трубопроводу. За ламінарного режиму руху кут нахилу прямої змінюється пропорційно в'язкості рідини.

Кругість кривої зростає зі збільшенням довжини трубопроводу, зі зменшенням діаметра, а також з підвищенням коефіцієнтів місцевих гідравлічних опорів у трубопроводі. Крім того, у ламінарному режимі кут нахилу прямої змінюється пропорційно в'язкості рідини.

Замість кривих потрібного напору іноді зручніше користуватися характеристикою трубопроводу, що виражає зв'язок між витратою і гідравлічними втратами:

$$\Sigma h = f(Q).$$

Щоб побудувати таку характеристику, необхідно знати геометричні параметри труби. Довільно підбирають кілька значень витрат і визначають відповідні їм гідравлічні втрати. За даними розрахунку будують криву характеристики труби.

Таким чином, характеристика трубопроводу являє собою криву потрібного напору, зміщену на початок координат.

Характеристика трубопроводу збігається із кривою потрібного напору, коли трубопровід лежить у горизонтальній площині, а протитиск p_2 відсутній.

Розрахунок простих трубопроводів зводиться до трьох типових задач з визначення напору, витрат та діаметрів трубопроводу. Задачі розв'язують аналітичним і графоаналітичним способами. За графоаналітичним способом будується гідравлічна характеристика трубопроводу. Для розрахунку складних трубопроводів зручно користуватися графоаналітичним способом, графічно підсумовуючи гідравлічні характеристики окремих труб.

Різноманітність матеріалів, з яких виготовляють сучасні труби, призвела до зміни діапазонів застосовуваних швидкостей рідини в системах водопостачання, що потрібно враховувати під час проектування таких систем.

Допустиму максимальну швидкість руху води в сталевих трубопроводах та запірно-регулювальній арматурі для систем водопостачання визначають за правилами державних будівельних норм України (ДБН В.2.5-74:2013. Водопостачання. Зовнішні мережі та споруди. Основні положення проектування). Її максимальне значення становить 1,5 м/с. Для пластикових труб, які характеризуються здатністю гасити як звук, так і гідравлічні удари, допускається брати дещо вищі значення швидкостей – до 2,5 м/с. Швидкість води у мідних трубопроводах не повинна перевищувати максимального значення, за якого знищується захисний оксидний

прошарок на внутрішній поверхні труби. Рекомендоване значення – 1 м/с. Мінімальна межа швидкості пов'язана зі спливанням повітряних бульбашок. Для переміщення і збирання повітря необхідно, щоб швидкість води перевищувала у вертикальних трубах 0,2...0,25 м/с, нахилених та горизонтальних – 0,1...0,15 м/с. Однак допускається зменшення цих значень у разі малих витрат води і відсутності труб меншого типорозміру в номенклатурному ряді. Номенклатурний ряд діаметра умовного проходу D_u для труб та запірно-регулювальної арматури має такі значення: 15, 20, 25, 32, 40, 50, 65, 80, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 500 мм.

9.2. Послідовне з'єднання ділянок трубопроводу

Візьмемо кілька труб, наприклад 1, 2 і 3, різної довжини, різного діаметра і які мають різні місцеві опори. З'єднаємо їх послідовно і отримаємо простий трубопровід змінного перерізу (рис. 9.2).

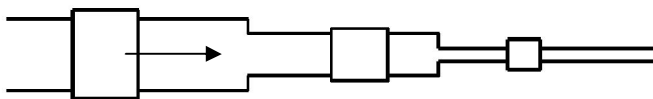


Рис. 9.2. Послідовне з'єднання труб

У разі подачі рідини через такий трубопровід витрата у всіх послідовно з'єднаних трубах буде однаковою, а повна втрата напору між точками A і B дорівнює сумі втрат напору у всіх послідовно з'єднаних трубах, тобто маємо такі основні рівняння:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q;$$

$$\Sigma h_{A-B} = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3 . \quad 9.5)$$

Рівняння (9.5) визначають правило побудови характеристик послідовного з'єднання труб: для побудови характеристики $\Sigma h = f(Q)$ усього послідовного з'єднання Σ_{1-2-3} , необхідно відповідно до системи рівнянь (9.5), виконати додавання втрат напору за однакових витрат, тобто скласти ординати всіх характеристик трьох трубопроводів з однаковими абсцисами (рис. 9.3).

9.3. Паралельне з'єднання ділянок трубопроводу

Розглянемо паралельне з'єднання декількох різних трубопроводів (1, 2, 3) між точками A і B (рис. 9.4).

Позначимо: повні напори в точках A і B відповідно H_A і H_B ; витрата в основній магістралі (тобто до розгалуження і після злиття) Q , а в паралельних трубопроводах Q_1 , Q_2 і Q_3 ; сумарні втрати напору в цих трубопроводах Σh_1 , Σh_2 і Σh_3 .

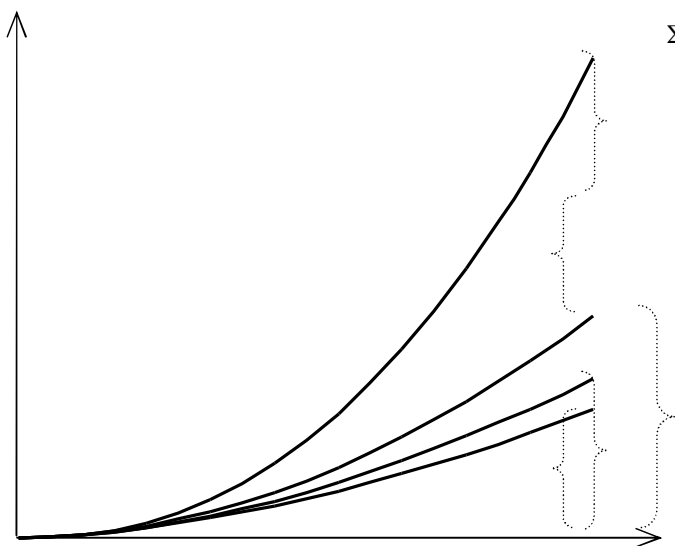


Рис. 9.3. Побудова характеристики послідовного з'єднання труб

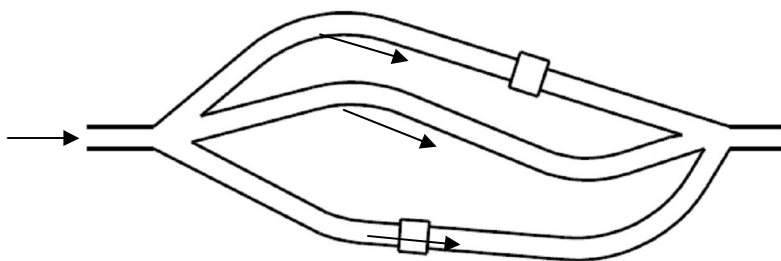


Рис. 9.4. Послідовне з'єднання труб

Запишемо таке очевидне рівняння:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (9.6)$$

Виразимо втрати напору в кожному із трубопроводів через повні напори в точках A і B , тобто:

$$\Sigma h_1 = H_A - H_B;$$

$$\Sigma h_2 = H_A - H_B;$$

$$\Sigma h_3 = H_A - H_B.$$

Звідси випливає, що втрати напору в паралельних трубопроводах рівні між собою:

$$\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3. \quad (9.7)$$

За рівняннями (9.6), (9.7) завжди можна скласти стільки рівнянь, скільки паралельних трубопроводів між точками A і B . Із цих співвідношень випливає таке важливе правило: для побудови характеристики паралельного з'єднання декількох трубопроводів потрібно скласти абсиси (витрати) характеристик цих трубопроводів з однаковими ординатами (Σh). Приклад такої побудови показано на рис. 9.5.

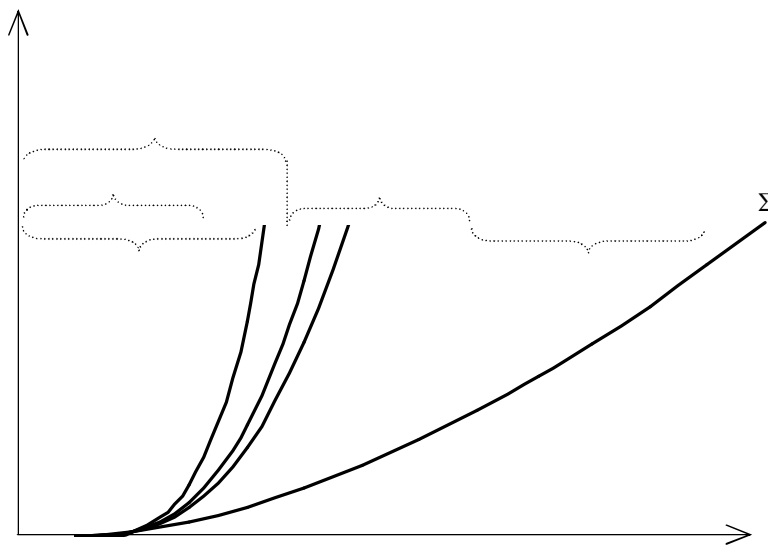


Рис. 9.5. Побудова характеристики послідовного з'єднання труб

Викладені співвідношення і правила для паралельних трубопроводів справедливі також у тому випадку, коли трубопроводи $1, 2, 3$ не сходяться в одній точці B , рідина подається в різні місця, але з однаковими тисками та однаковими нівелірними висотами кінцевих перерізів. Якщо ж остання умова не дотримується, то розглянуті трубопроводи не можна вважати паралельними, а варто відносити їх до розряду розгалужених трубопроводів.

Побудова сумарної характеристики для розгалуженого трубопроводу виконується додаванням так само, як складаються характеристики паралельно з'єднаних труб, тобто треба скласти

абсциси Q з однаковими ординатами (Σh). Отримана крива для розгалуженого трубопроводу буде мати злами.

9.4. Сифонний трубопровід

Трубопровід називається сифонним, якщо деякі його ділянки розміщуються вище від рівня рідини, що перебуває в резервуарі, звідки подається рідина (рис. 9.6).

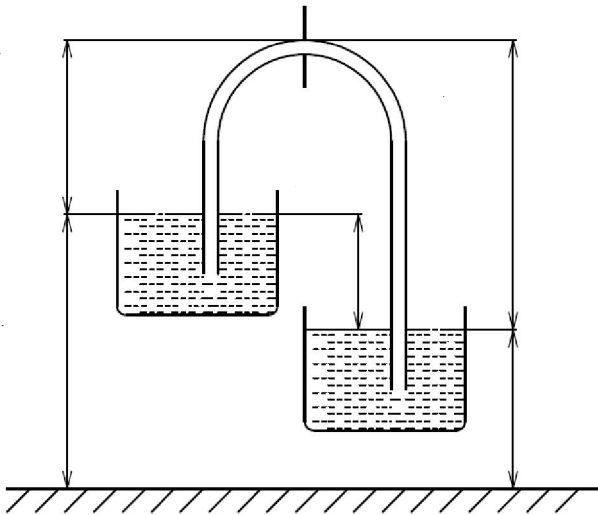


Рис. 9.6. Схема сифонного трубопроводу

Сифонні трубопроводи потребують попереднього заливання. Якщо сифон виконується у вигляді стаціонарного металевого трубопроводу, то необхідно в його верхній точці 1-1 передбачити

кран для відсмоктування повітря. Рідина рухається по сифону за рахунок різниці рівнів H , причому, спочатку рідина піднімається на висоту H_1 від вільної поверхні з атмосферним тиском p_a , а потім спускається на висоту H_2 .

Особливістю такого трубопроводу є те, що тиск рідини по всій його висхідній лінії і по частині спадної менший за атмосферний.

Запишемо рівняння Бернуллі для перерізів $0 - 0$ і $2 - 2$, де вважаємо швидкості рівними нулю, а тиск – атмосферним (p_a):

$$z_1 = z_2 + \sum h.$$

Звідси

$$z_1 - z_2 = H = \sum h$$

Таким чином, витрата через сифон визначається різницею рівнів H та опором трубопроводу, але не залежить від висоти підняття H_1 . Однак це справджується лише до відомих меж. Зі збільшенням висоти H_1 зменшується абсолютний тиск p_1 у верхньому перерізі сифона (переріз $1-1$). Коли цей тиск становиться рівним пружності насиченої пари, то починається кавітація і витрата зменшується, а потім утворюється скупчення пару (парові пробки) і подача рідини припиняється.

Тому під час проектування сифона необхідно стежити за тим, щоб тиск p_1 у його верхній точці не був надто малим. Якщо відома витрата рідини через сифон і всі розміри, то абсолютний тиск p_1

можна знайти з рівняння Бернуллі для перерізів $0-0$ і $1-1$, що має вигляд

$$\frac{p_a}{\rho g} = H_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} + \sum h_{0-1}.$$

Якщо ж відомий мінімально допустимий тиск p_1 , то, знаючи витрату, можна з того ж рівняння знайти максимально допустиму висоту H_1 .

9.5. Гідравлічні характеристики відцентрових насосів

Насос – це гідравлічна машина, що перетворює механічну енергію, що підводиться до вала насоса, в енергію потоку рідини. У системах водопостачання, перекачування нафтопродуктів і хімічно активних рідин найбільшого поширення набули відцентрові насоси. Вони мають пологоу характеристику $H = f(Q)$, тобто напір і подача взаємозалежні. Насос цього типу складається з корпусу 1 у вигляді спіральної камери, всередині якого розміщене робоче колесо 3 , що приводиться через вал 2 в обертання від електродвигуна 4 (рис. 9.7). Ущільнення зазору між валом і корпусом у місці виходу вала з насоса здійснюється сальником або торцевим механічним ущільненням.

У робочому колесі відцентрового насоса основна частина енергії, що підводиться до насоса, передається рідині шляхом динамічного впливу лопаток на потік. У разі набігу потоку на поверхню лопатки (аналогічно крилу літака) на її поверхнях утворюється перепад тиску і виникають піднімальні сили.

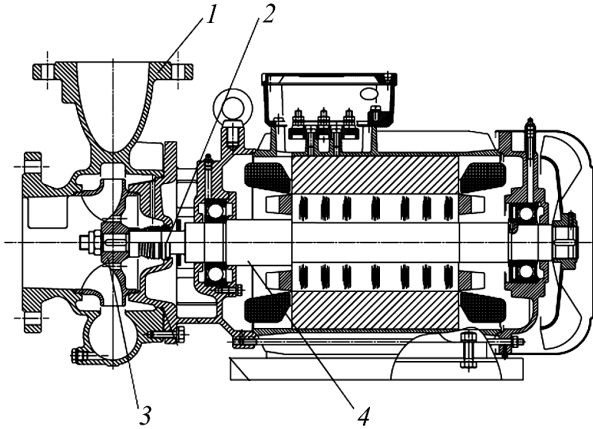


Рис. 9.7. Конструкція відцентрового насоса

Робоче колесо здійснює роботу, переборюючи під час свого обертання момент цих сил, для цього до колеса насоса підводиться механічна енергія двигуна, що насосом перетворюється в енергію рухомої рідини.

Подачею насоса називається об'єм рідини, що подається насосом за одиницю часу через напірний патрубок. Подача виражається зазвичай в літрах за хвилину (л/хв) або в кубічних метрах за годину (м³/год) і позначається літерою Q . Варто пам'ятати, що під час виконання розрахунків необхідно величину подачі насоса подавати одиницею вимірювання м³/с.

Напором насоса називається приріст питомої енергії рідини, що подається насосом, від входу в насос до виходу з нього. Напір виражається в метрах стовпа рідини та позначається літерою H .

Напір насоса дорівнює різниці повного напору за насосом і напору перед ним:

$$H = H_{\text{вих}} - H_{\text{вх}} = \frac{p_{\text{вих}}}{\rho g} - \frac{p_{\text{вх}}}{\rho g} + \Delta z + \frac{V_{\text{вих}}^2 - V_{\text{вх}}^2}{2g},$$

де $p_{\text{вих}}$, $p_{\text{вх}}$ – абсолютні тиски на виході з насоса і перед ним, Па;

$V_{\text{вих}}, V_{\text{вх}}$ – середні швидкості в нагнітальному й усмоктувальному трубопроводах, м/с; Δz – вертикальна відстань між точками відбору тисків $p_{\text{вих}}, p_{\text{вх}}$, М; ρ – щільність переміщуваної рідини, кг/м³.

Оскільки вертикальна відстань Δz зазвичай невелика, а швидкісні напори $V^2/2g$ на виході та вході в насос або однакові, або досить близькі, то напір насоса можна визначити за спрощеною формулою

$$H = \frac{p_{\text{вих}} - p_{\text{вх}}}{\rho g}.$$

Кількість обертів насоса визначається кількістю обертів за хвилину вала ротора і позначається літерою n .

Потужністю, споживаною насосом (або потужністю на валу), називається потужність, передана двигуном на вал насоса. Потужність виражається у ватах (Вт), позначається буквою N і обчислюється за формулою

$$N = \frac{\rho g H Q}{\eta},$$

у якій вираз у чисельнику означає корисну (або гідравлічну) потужність, отриману рідиною, а η – значення коефіцієнта корисної дії насоса (ККД).

Насос передає рідині не всю механічну енергію, що підводиться до насоса. Коефіцієнтом корисної дії насоса називається відношення корисної потужності до споживаної, виражене у відсотках або в частках одиниці. Коефіцієнт корисної дії характеризує ступінь досконалості насоса. Він дорівнює добутку трьох ККД: об'ємного η_o , гідравлічного η_r та механічного η_m :

$$\eta = \eta_o \eta_\Gamma \eta_M .$$

Об'ємний ККД урахується втрати об'єму рідини (витікання рідини через ущільнення, зменшення подачі через кавітацію і проникнення повітря в насос), гідравлічний ККД – зменшення напору насоса, викликане гідравлічними опорами в самому насосі (при вході рідини в насосне колесо і виході з нього, опір рідини в міжлопатевих каналах насосного колеса та ін.), механічний ККД – тертя між елементами машини.

Під час конструювання й експлуатації відцентрових насосів користуються законами їх подібності:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} &= \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^3 \frac{n_1}{n_2}; \\ \frac{H_1}{H_2} &= \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2; \\ \frac{N_1}{N_2} &= \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^5 \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^3. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Геометрична подібність робочих коліс означає пропорційність усіх відповідних розмірів їх проточної частини (діаметра, ширини лопаток, радіусів кривизни лопаток і т.ін.). Якщо геометрично подібні робочі колеса діаметрами D_1 і D_2 обертаються відповідно із частотою n_1 і n_2 , то при цьому розвиваються напори H_1 і H_2 .

Співвідношення (9.8) можна застосовувати, якщо геометричні розміри порівнювальних насосів не відрізняються більш ніж у 2 – 3 рази і якщо порівнювальні насоси перекачують однакову рідину.

У разі потреби зменшити подачу відцентрового насоса, якщо $n = \text{const}$, виконують *обточування* робочих коліс, що полягає в зменшенні діаметра робочого колеса D .

Для радіальних робочих коліс при обточуванні (обточування не є геометрично подібним зменшенням, оскільки ширина виходу залишається, як правило, постійною) взаємозв'язок між Q , H і діаметром робочого колеса D виглядає таким чином:

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \approx \frac{H_1}{H_2} \approx \frac{Q_1}{Q_2};$$
$$D_2 \approx D_1 \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} \approx D_1 \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}. \quad (9.9)$$

Використовуючи залежності (9.9), можна побудувати криві $H = f(Q)$ для будь-якого значення діаметра робочого колеса. Для збереження високого ККД насосів межа обточування (підрізання) коліс не повина перевищувати 20%.

Заводи-виробники поставляють насоси з колесами одного із трьох розмірів, наприклад (рис. 9.8): необрізаними, чому відповідає

верхня крива A ; обрізаними (крива C) і максимально обрізаними (крива F).

Якщо на характеристиках, що відповідають необточену і максимально обточену робочих колесах, нанести точки, що обмежують робочі зони, і з'єднати їх прямими відрізками, то вийде чотирикутник, що називається *зонами рекомендованої роботи насоса*. Такі зони поліпшують підбір насоса для заданих умов, оскільки для будь-якої точки, що лежить всередині поля, може бути використаний насос типорозміру з тим або іншим ступенем обточування робочого колеса.

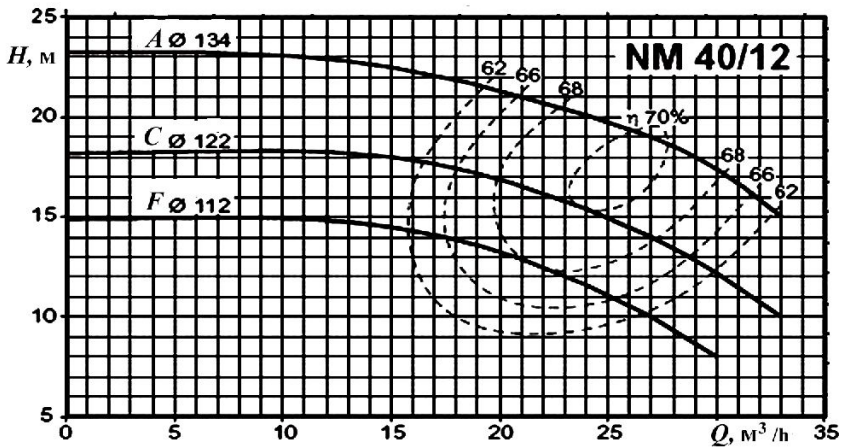


Рис. 9.8. Гідралічна характеристика відцентрового насоса

На цьому ж графіку наносять ізолінії однакових значень ККД. Користуючись такими характеристиками, легше встановити оптимальні робочі зони насосів.

Наведені вище характеристики притаманні насосам з постійною частотою обертання. Заводи-виробники встановлюють максимально допустиму частоту обертання насоса цього типу. Тому найчастіше зміни характеристики досягають шляхом зменшення частоти обертання.

Для того щоб за цією характеристикою та за частоти обертання n побудувати характеристики з іншими, меншими, частотами обертання n_1, n_2, \dots, n_i , використовують закони подібності відцентрових насосів (9.8). Як відомо, частоти обертання електродвигунів насосів n мають стандартні значення: 2900, 1450, 960, 750 хв^{-1} . Тому характеристики перераховують на наведені значення.

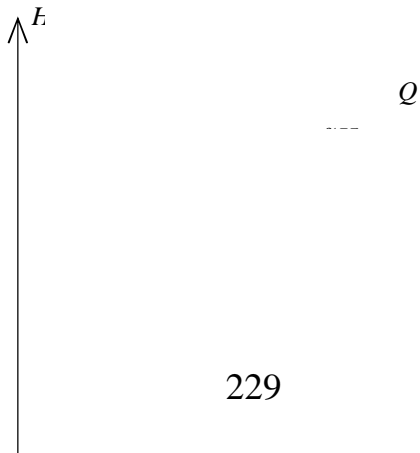
9.6. Відцентрові компресори

У відцентрових компресорних машинах так само, як і у відцентрових насосах, подача не є сталою величиною. Вона залежить від тиску в нагнітальному патрубку. Якщо за незмінної кількості обертів поступово змінювати величину відкриття напірної засувки, заміряючи з кожною зміною подачу та напір, і отримані точки з'єднати плавною кривою на діаграмі $H = f(Q)$,

можна побудувати характеристику машини. Таку характеристику, що подібна до характеристики відцентрового насосу, а також зміну ККД машини η і споживану нею потужність N показано на рис. 9.9.

Найбільша подача буде за відсутності протитиску в нагнітальному патрубку. Із підвищенням протитиску подача поступово збільшується, а після точки K разом зі зменшенням подачі починає знижуватися і створений відцентровим компресором напір.

Точку K називають *критичною точкою*. Якщо подача стає меншою ніж у точці K , робота машини стає нестійкою. Це відбувається тому, що такому самому напору H_1 відповідають дві величини подачі: Q_1 і Q'_1 . Унаслідок цього машина починає працювати то в одному, то в іншому режимі. Газ подається ривками. Спостерігаються різкі струси машини. Це явище називається *помпажем*.



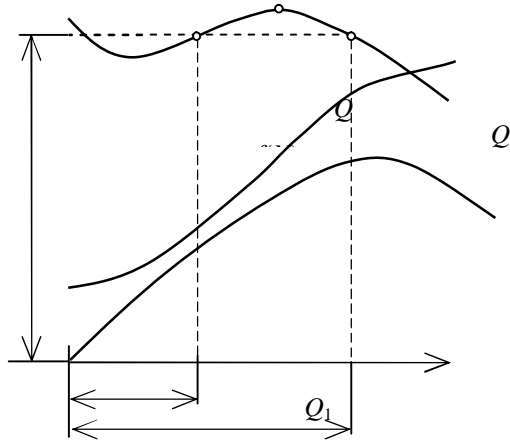


Рис. 9.9. Характеристики відцентрового компресора

Розрахункова або нормальна продуктивність відцентрового компресора завжди перебуває правіше точки K у стійкій частині кривої і за максимального значення ККД. Для того щоб забезпечити захист машини від помпажу, варто передбачити складну систему регулювання.

В основу регулювання кладуть один з таких принципів або комбінацію їх.

1. *Зміна кількості обертів.* Подачу і напір можна розрахувати за законом подібності відцентрових машин (9.8). Якщо привід дозволяє змінювати кількість обертів вала компресора, то в разі наближення до критичної точки, змінивши кількість обертів,

можна знову потрапити в стійку зону роботи. Таке регулювання найбільш економічне.

2. *Дроселювання на всмоктуванні.* Зі зменшенням тиску газу на вході в робоче колесо збільшується його питомий об'єм. Оскільки характеристика відцентрового компресора (рис. 9.9) стосується умов входу на колесо, стає можливим, залишаючись у зоні сталої роботи, зменшувати вагову подачу газу. Коефіцієнт корисної дії зменшується, оскільки під час дроселювання губиться різниця тиску до і після дроселя.

3. *Перепуск зайвої кількості газу на лінію всмоктування.* Зі зменшенням подачі компресора до критичної відкривається антипомпажний клапан і пропускаються надлишки газу у зворотньому напрямку у всмоктувальний трубопровід. Цей спосіб також економічно невигідний, оскільки губиться частина витраченої роботи.

4. *Додавання до компресора газової турбіни.* На відміну від попереднього способу надлишки газу, що переміщуються через антипомпажний клапан, подаються на робоче колесо газової турбіни, де віддають енергію, витрачену на його стискання. Завдяки цьому ККД під час роботи з малими подачами майже не зменшується.

5. *Регулювання повороту лопаток напрямного апарата.* Повертаючи лопатки напрямних апаратів, можна змінити

характеристику компресора і тим самим значно зменшити зону нестійкої роботи з незначним зменшенням ККД.

На нафтопереробних заводах компресори застосовуються для стискання різних нафтових газів. Стискання нафтових газів відрізняється від стискання повітря таким:

1) нафтові гази горючі, і змішуючись із повітрям, утворюють вибухонебезпечні суміші;

2) перехід з газоподібного стану в рідкий в деяких нафтових газах відбувається в умовах, близьких до навколишнього середовища;

3) під час стискання газу зменшуються споживана потужність і подача компресора, ніж у разі стискання повітря.

9.7. Трубопровід з насосною подачею

Гідросистему для переміщення рідини насосом називають насосною установкою. Вона в основному складається із приймального резервуара; трубопроводу, через який всмоктується рідина; насоса; нагнітального трубопроводу і напірного резервуара.

Трубопровід з насосною подачею може бути розімкненим (рис. 9.10, *а*), тобто таким, по якому рідина перекачується з одного місця в інше, або замкненим (рис. 9.10, *б*), у якому циркулює така сама кількість рідини.

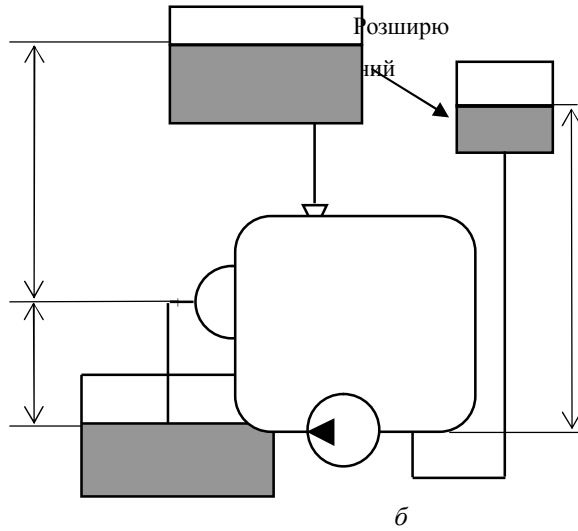


Рис. 9.10. Схема трубопроводу з насосною подачею:

a – розімкнений, *б* – замкнений

Розглянемо розімкнений трубопровід, по якому насос перекачує рідину, з нижнього резервуара з тиском p_1 в інший резервуар з тиском p_2 .

Потрібним напором H_n установки називають енергію, яку необхідно надати на одиницю маси рідини для її переміщення із приймального резервуара в напірний по трубопроводу за відповідної витрати:

$$H_n = h + H_r + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \sum h,$$

де H_r – геометрична висота нагнітання, м; h – геометрична висота всмоктування, м; $(p_2 - p_1)$ – різниця тисків у напірному та

приймальному резервуарам, P_a ; $\sum h$ – сума втрат напору у всмоктувальному і нагнітальному трубопроводах, м.

За незмінного режиму роботи установки напір, що розвиває насос, дорівнює потрібному напору установки:

$$H_n = H_{\Pi}$$

На цій рівності ґрунтується метод розрахунку трубопроводів з насосною подачею.

Режим роботи насоса визначають сполученням на одному і тому самому графіку (рис. 9.11) в однакових масштабах робочої характеристики насоса з характеристикою насосної установки (кривої потрібного напору $H_{\Pi} = f(Q)$). Остання являє собою параболу (у турбулентному режимі течії), зміщену вздовж осі напорів на числове значення статичного напору установки. Насос у цій установці працює в такому режимі, за якого потрібний напір дорівнює напору насоса. Точку перетину зазначених двох характеристик називають робочою точкою. Якщо робоча точка відповідає оптимальному режиму роботи насоса, то насос вважається підібраним правильно. Однак необхідну подачу насоса можна змінювати. Для цього необхідно змінити або характеристику насоса (через зміну частоти обертання насоса), або характеристику насосної установки (наприклад, змінивши ступінь відкривання засувки, або геометрію трубопроводу). Найбільш економічний підхід для регулювання подачі і напору – зміна частоти обертання. Він здійснюється завдяки застосуванню електродвигунів постійного струму або спеціальних передач.

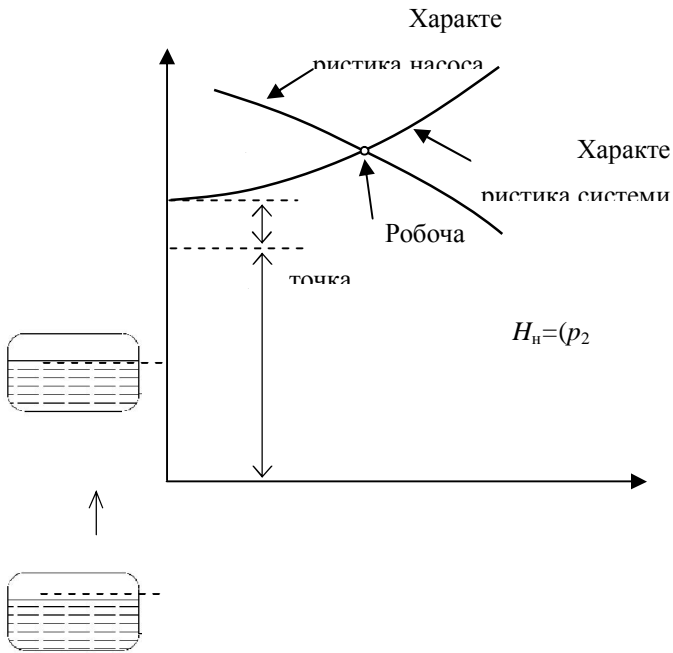


Рис. 9.11. Графічне знаходження робочої точки

Через надмірне падіння тиску на всмоктувальній частині насоса може виникнути кавітація, унаслідок якої різко знижується ККД насоса, зменшується його подача та напір. Крім того, виникає сильна вібрація і поштовхи, що супроводжуються характерним шумом. Для запобігання кавітації насос необхідно встановити таким чином, щоб тиск рідини в ньому було більшим від тиску насиченої пари рідини за певної температури. Це забезпечується обмеженням висоти всмоктування для насоса. Допустима висота

всмоктування в насосах найчастіше визначається за допустимого вакууметричною висотою всмоктування, що позначається на характеристиках усіх типів насосів як функція витрати. Необхідно пам'ятати, що зі зміною частоти обертання змінюється також допустима вакууметрична висота всмоктування.

Підбираючи насос, варто керуватися таким:

- розрахункова точка не повинна розміщуватись нижче ніж на 10% від робочої точки на максимальній характеристиці насоса;
- розрахункова точка може розміщуватись вище не більш як на 10% від робочої точки;
- робоча точка повинна завжди міститися у зоні максимальних ККД;
- якщо кілька насосів відповідають наведеним критеріям, необхідно обирати насос меншої потужності.

Для замкненого трубопроводу (рис. 9.10, б) геометрична висота підняття рідини дорівнює нулю, отже, якщо $V_1 = V_2$:

$$H_{\text{п}} = \sum h = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = H_{\text{п}}.$$

Замкнений трубопровід обов'язково повинен мати розширювальний (компенсаційний) бачок. Він призначений для запобігання зростанню статичного тиску в системі внаслідок об'ємного розширення води з підвищенням її температури, захисту устаткування від надмірного тиску, компенсації втрат рідини внаслідок витікання через нещільності. Розширювальний бак, як

правило, з'єднаний трубою з одним з перерізів трубопроводу, найчастіше на вході в насос, де тиск має мінімальне значення.

За наявності розширювального бачка тиск перед насосом визначається такою формулою

$$p_1 = p_0 + \rho g H_0.$$

9.8. Спільна робота відцентрових насосів

Насоси в насосних станціях працюють спільно, тобто кілька насосів подають рідину в одну систему. При цьому насоси можуть бути ввімкнені в систему послідовно (послідовна робота) або паралельно (паралельна робота). Паралельною називають спільну одночасну роботу декількох насосів, приєднаних напірними патрубками до загальної системи.

9.8.1. Паралельна робота відцентрових насосів з однаковими характеристиками

Характеристику $H_{I,II} = f(Q)$ кожного із двох однакових насосів показано на рис. 9.12.

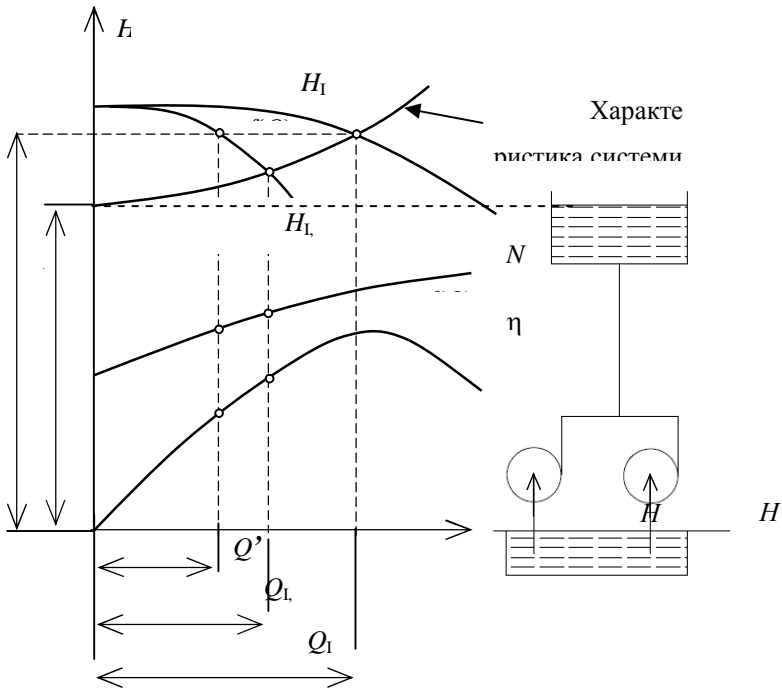


Рис. 9.12. Характеристики паралельної роботи двох відцентрових насосів з однаковими характеристиками в одній системі

Для того щоб побудувати сумарну характеристику цих двох насосів за паралельної роботи, необхідно подвоїти абсциси кожної точки кривої $H_{1,II}=f(Q)$ одного насоса з однаковими ординатами (напорами).

Для визначення режиму спільної роботи насосів

характеристику трубопроводу необхідно накласти на характеристику насосів у єдиному масштабі. Робоча точка 2 в цьому випадку буде розміщена на перетині сумарної характеристики насосів з характеристикою системи.

Загальна подача за паралельної роботи двох насосів характеризується абсцисою точки 2 і дорівнює Q_{I+II} , напір відповідає ординаті точки 2, що дорівнює H_{I+II} . Щоб установити, у якому режимі працює кожний з насосів, необхідно провести із точки 2 лінію, паралельну осі абсцис. Абсциса, що відповідає точці перерізу цієї лінії із кривою $H_{I, II} = f(Q)$ насоса (точка 1), визначить подачу, а ордината – напір кожного з паралельно працюючих насосів. Отже, напір, що розвивається кожним насосом, дорівнює напору, що розвивається двома насосами за їх паралельної роботи, а подача $Q'_{I, II}$ кожного насоса дорівнює половині сумарної подачі двох насосів.

Якби в таку систему рідину подавав лише один насос, то режим його роботи характеризувався б напором і подачею $Q_{I, II}$ в точці 5. Як видно з графіка, його подача була б більша, ніж у випадку паралельної роботи із другим насосом.

Таким чином, сумарна подача насосів, що працюють паралельно в загальній системі, менша, за суму подачі цих же насосів у разі їх роздільної роботи. Це відбувається через те, що зі збільшенням загальної витрати рідини, що подається в систему, зростають втрати напору, а отже, збільшується і напір, необхідний

для забезпечення даної витрати, що спричиняє зменшення подачі кожного насоса.

Коефіцієнт корисної дії кожного з паралельно працюючих насосів характеризується ККД у точці 4 на перерізі кривої $\eta=f(Q)$ є перпендикуляром, опущеним із точки 1. Як видно з рис. 9.12, ККД кожного з паралельно працюючих насосів також відрізняється від ККД насоса у разі роздільної роботи, що характеризується ККД у точці 3 на кривій $\eta=f(Q)$.

Потужність кожного з паралельно працюючих насосів характеризується потужністю в точці 7 на кривій $N=f(Q)$, тоді як потужність окремо працюючого насоса визначається потужністю в точці 6.

Для побудови сумарної характеристики трьох паралельно працюючих насосів необхідно потроїти абсциси характеристики кожного насоса. Режим роботи трьох і більше насосів у разі їх паралельного вмикання визначається так само, як і у випадку паралельної роботи двох насосів.

Паралельна робота однакових насосів в одну систему ефективна за пологих характеристик системи і крутих характеристик насосів. У разі крутої характеристики системи паралельна робота може виявитися неефективною, оскільки з підключенням до одного насоса, другого або третього насоса подача зросте незначно.

Однакові насоси для паралельної роботи з каталогів підбирати треба так, щоб оптимальна точка характеристики відповідала напору, обчисленому для всієї подачі рідини в систему, і подачі, що дорівнює загальній витраті, поділеній на кількість увімкнених однакових насосів.

9.8.2. Паралельна робота відцентрових насосів з різними характеристиками

Насоси з різними характеристиками можуть паралельно працювати лише за певних умов залежно від співвідношення характеристик цих насосів.

Проаналізувати можливість і доцільність паралельної роботи насосів з різними характеристиками можна, сполучаючи характеристики насосів і системи. Характеристики насосів I і II, показано на рис. 9.13.

Як видно з рисунка, насос II розвиває менший напір, ніж насос I. Тому насос II може працювати паралельно з насосом I, тільки починаючи із точки, напори, що розвиваються ними, однакові (рис. 9.13, точка 3). Характеристика спільної роботи насосів (сумарна характеристика), починаючи із точки 3, будується шляхом додавання абсцис характеристик насосів I і II з однаковими ординатами (напорами, що розвиваються насосами).

Для визначення сумарної подачі необхідно з точки 4 – точки перерізу характеристики системи із сумарною характеристикою

$H_{I+II} = f(Q)$ спільної роботи насосів I і II провести лінію, паралельну осі ординат, що відтинає на осі абсцис відрізок, який відповідає подачі рідини (Q_{I+II}) у систему з обома працюючими насосами. Подачу кожного зі спільно працюючих насосів можна знайти, провівши із точки 4 пряму, паралельну осі абсцис. Переріз цієї прямої з характеристиками насосів I і II дає відповідні точки 1' і 2' величини подачі Q'_I , Q'_{II} .

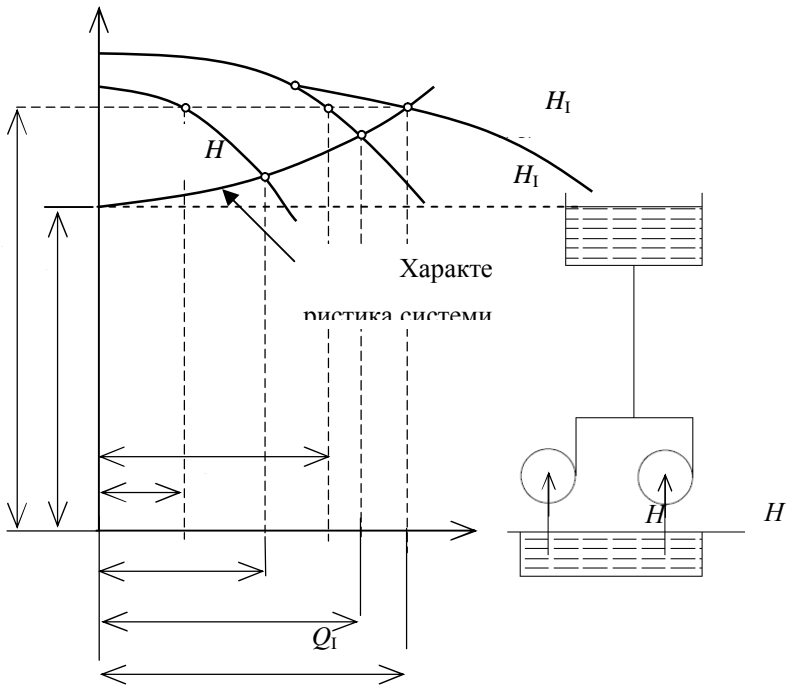


Рис. 9.13. Характеристики паралельної роботи двох відцентрових насосів з різними характеристиками в одній системі

Як і у випадку паралельної роботи двох насосів з однаковими характеристиками сумарна подача двох насосів менша від суми подач кожного з насосів окремо: $Q_I + Q_{II} > Q_{I+II}$. Потужність і ККД спільно працюючих насосів визначаються так само, як і у випадку спільної паралельної роботи двох насосів з однаковими характеристиками.

9.8.3. Послідовна робота відцентрових насосів

Відцентрові насоси іноді вмикають в одну систему послідовно, тобто напірний патрубок одного насоса підключають до всмоктувального патрубку другого.

Сумарну характеристику двох однакових насосів за їх послідовної роботи у випадку, коли кожний з них окремо не може підняти воду на задану висоту (тому що $H_r > H$), показано на рис. 9.14.

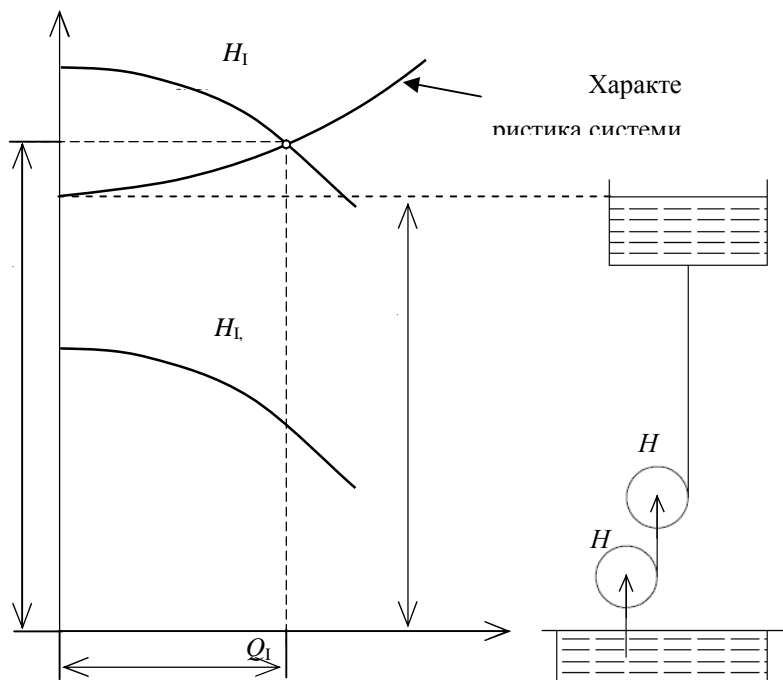


Рис. 9.14. Характеристика послідовної роботи двох однакових насосів, якщо $H_1 > H$

Для побудови сумарної характеристики послідовно працюючих насосів необхідно скласти ординати характеристик $H=f(Q)$ цих насосів за однієї і тої самої подачі, оскільки напір, що розвивають послідовно працюючі насоси, дорівнює сумі напорів, що розвиває кожний із цих насосів. У випадку послідовної роботи двох насосів з однаковими характеристиками ординати (за подачі) подвоюються. Характеристика спільної роботи двох насосів (крива $H_{I+II}=f(Q)$) отримана шляхом подвоєння ординат (напорів)

характеристики кожного насоса (крива $H_{i,II} = f(Q)$) за відповідної подачі Q . Робоча точка послідовно ввімкнених насосів лежить на перетині кривої спільної роботи насосів з характеристикою системи.

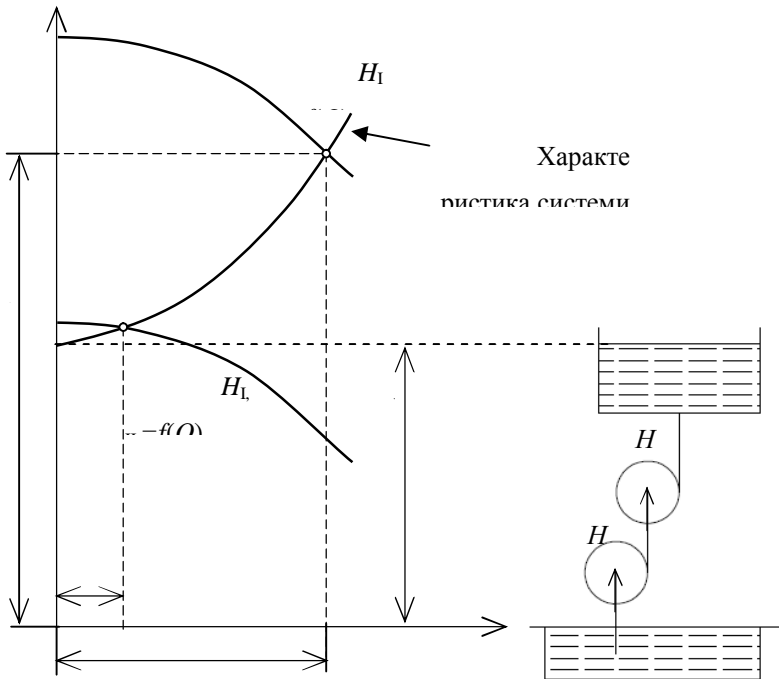


Рис. 9.15. Характеристика послідовної роботи двох однакових насосів при $H_i < H$

Насоси вмикаються послідовно також у випадках, коли один насос може подати воду в систему, але не забезпечує заданої подачі

($H_1 < H$). Побудову сумарної характеристики двох однакових насосів для такого випадку показано на рис. 9.15. Послідовне ввімкнення насосів дозволяє збільшити не тільки напір, але і подачу води.

У випадку послідовного ввімкнення двох насосів з неоднаковими характеристиками сумарна крива їх спільної роботи будується шляхом додавання ординат характеристик кожного з послідовно працюючих насосів за однакових подач.

Приклад 9.1. Визначити тиск p_2 на вході в маслонасос у системі змачення (рис. 9.16) і потужність насоса, якщо відомо, що $p_a = 101325$ Па, довжина трубопроводу $L=2$ м, діаметр трубопроводу $d=0,018$ м, висота розміщення рівня рідини в маслобаку відносно рівня насоса $h=2,5$ м, подача насоса $Q=6 \cdot 10^{-4}$ м³/с, надлишковий тиск на виході з насоса $p_3=2,2 \cdot 10^6$ Па, ККД насоса $\eta=0,8$, кінематична в'язкість рідини $\nu=0,11 \cdot 10^{-4}$ м²/с, густина масла $\rho=900$ кг/м³. Маслобак перебуває під атмосферним тиском. Коефіцієнти місцевих опорів: раптове звуження $\xi_{р.з.} = 0,5$; коліно $\xi_{кол} = 2$. Висоту рівня рідини в баку не враховувати.

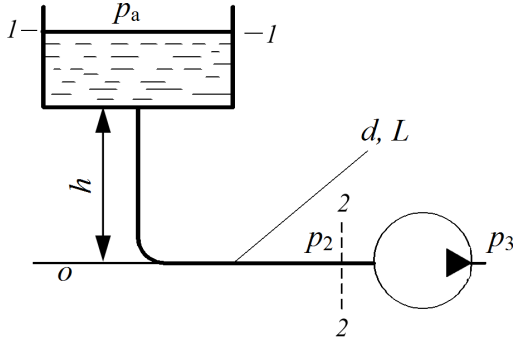


Рис. 9.16. Система змащення

Розв'язання. Визначимо швидкість витікання:

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{3,14 \cdot (18 \cdot 10^{-3})^2} = 2,36 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

Визначимо режим витікання:

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{2,36 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{0,11 \cdot 10^{-4}} = 3860 > 2300 \Rightarrow \text{турбулентний режим};$$

Знайдемо опір трубопроводу за формулою для труби круглого перерізу:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{\text{Re}}} = 0,04.$$

Втрати напору в трубопроводі визначимо як суму втрат напору по довжині трубопроводу і на місцевих опорах:

$$\Sigma h = \left(\lambda \frac{L}{d} + \Sigma \xi \right) \frac{V^2}{2g} = \left(0,04 \frac{2}{18 \cdot 10^{-3}} + 0,5 + 2 \right) \cdot \frac{2,36^2}{2 \cdot 9,81} = 1,98 \text{ м},$$

Запишемо рівняння Бернуллі для ділянки 1-1 і 2-2:

$$z_1 + \frac{p_{1\text{абс}}}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_{2\text{абс}}}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \Sigma h,$$

де $p_{1\text{абс}}, p_{2\text{абс}}$ – абсолютний тиск у перерізах 1 – 1 і 2 – 2.

Припускаємо $z_1=h, V_1 = V_2$.

Остаточно маємо

$$h + \frac{p_a}{\rho g} = \frac{p_{2\text{абс}}}{\rho g} + \Sigma h.$$

Звідки

$$p_{2\text{абс}} = (h - \Sigma h) \rho g + p_{\text{атм}} = (2,5 - 1,98) \cdot 900 \cdot 9,81 + 101325 = 105916 \text{ Па.}$$

Величина надлишкового тиску p_2 перед входом у насос буде становити

$$p_2 = p_{2\text{абс}} - p_a = 105016 - 101325 = 4591 \text{ Па}$$

Визначимо потужність насоса

$$N = \frac{(p_3 - p_2)Q}{\eta} = \frac{(2200000 - 4591) \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{0,8} = 1647 \text{ Вт.}$$

10. ЗАКОНОМІРНОСТІ ТЕЧІЇ ГАЗУ ПО ТРУБОПРОВОДАХ ТА ЇХ РОЗРАХУНОК

Для течій наявність сил тертя не може порушити загального балансу енергії. За адіабатної течії газу, коли під час руху газу через канал теплота йому не передається ($dq = 0$), маємо:

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2}. \quad (10.1)$$

З рівняння (10.1) випливає, що під час стаціонарної течії газу через теплоізолюваний канал сума питомих ентальпій і питомої кінетичної енергії зберігає постійне значення.

Рівняння (10.1) справедливе лише у тому випадку, коли газ під час руху здійснює тільки роботу розширення (наприклад, обертання робочого колеса турбіни) і не здійснює корисної технічної роботи. У разі здійсненні потоком газу

технічної роботи рівняння першого закону термодинаміки має вигляд:

$$dq_{1-2} = du + d(pW) + dl_{\text{тех}} + \frac{dV^2}{2} = di + dl_{\text{тех}} + \frac{dV^2}{2}. \quad (10.2)$$

де: $l_{\text{тех}}$ – технічна робота.

У разі здійснення потоком технічної роботи робота деформації при розширенні віддається зовнішньому споживачу, тоді як у каналах вона сприймається сусідніми елементами і змінює їх кінетичну енергію.

В інтегральній формі технічна робота

$$l_{\text{тех}} = \int_1^2 pdW + p_1W_1 - p_2W_2 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}. \quad (10.3)$$

Із рівняння (10.3) видно, що технічна робота складається з роботи деформації, різниці робіт витіснення на вході і виході з машини ($p_1W_1 - p_2W_2$) і різниці кінетичних енергій в машині.

Якщо зміна кінетичної енергії робочого тіла дорівнює нулю, то

$$l_{\text{тех}} = \int_1^2 pdW + p_1W_1 - p_2W_2.$$

Для процесу течії газу зберігає силу рівняння першого закону термодинаміки для елемента потоку газу:

$$dq = di - Wdp. \quad (10.4)$$

Підставивши рівняння (10.4) у вираз (10.2), в разі $l_{\text{тех}} = 0$, отримаємо:

$$di - Wdp = di + \frac{dV^2}{2};$$

$$\frac{dV^2}{2} = -Wdp.$$

Приріст зовнішньої кінетичної енергії тіла, що дорівнює $-\int_1^2 Wdp$ зветься *наявною роботою*. Вона може бути використана в машинах і перетворена в інші види енергії.

Позначимо цю роботу через l_0 , тоді

$$dl_0 = \frac{dV^2}{2} = VdV = -Wdp.$$

Таким чином, робота, що витрачається на прошовування потоку $d(pW)$, на зміну кінетичній енергії потоку $w dw$, на технічну роботу $dl_{\text{тех}}$, на подолання сил тертя $dl_{\text{тер}}$, здійснюється за рахунок роботи розширення газу (пари), рухомого в потоці, тоді

$$pdW = d(pW) + VdV + dl_{\text{тех}} + dl_{\text{тер}} + qdz.$$

Процеси, що здійснюються в турбінах, відцентрових і осьових компресорах, реактивних двигунах, супроводжуються різними перетвореннями енергії, які відбуваються в рухомому газі. Теорія і розрахунки цих машин будуються на загальних даних і положеннях теорії газового потоку. Ця теорія дає змогу не тільки вивчати окремі процеси в рухомому газі, але і визначати умови, які впливають на перебіг цих процесів та їх ефективність.

На підставі зроблених припущень стаціонарна течія газу описується системою рівнянь, у яку входить *рівняння безперервності, енергії (першого закону термодинаміки) і стану газу, рух якого вивчається.*

Якщо у процесі теплоізолюваної течії газу не виникають сили тертя, то течія буде ізоентропною, а стан рухомого газу змінюється *за законом адіабати*. Адіабатна течія газу має важливе значення в теорії турбін, компресорів, реактивних двигунів.

Розглядаючи роботу газу в потоці, слід враховувати, що як і в нерухомому середовищі, вона є функцією процесу. Наявна робота газу визначається як

$$dl_0 = (dV^2 / 2) = VdV = -Wdp,$$

а в разі адіабатної течії без підведення тепла ззовні

$$dl_0 = (dV^2 / 2) = -Wdp = -di. \quad (10.5)$$

Вираз (10.5) встановлює основні особливості течії газів. Із цього виразу випливає, що величини dV і dp мають обернені знаки, тобто під час оборотного процесу збільшення швидкості течії газу V завжди супроводжується зниженням тиску, і навпаки, зменшення швидкості супроводжується підвищенням тиску. Якщо в процесі течії газу його тиск залишається постійним ($dp = 0$), то наявна робота газу $l_0 = 0$, $V_1 = V_2$.

Канали, у яких відбувається розширення газу зі зниженням тиску ($dp < 0$) і збільшенням швидкості ($dV > 0$), називаються *соплами*.

Канали, у яких відбувається стиснення газу із підвищенням тиску ($dp > 0$) і зменшенням швидкості ($dV < 0$), називаються *дифузорами*.

Із рівняння (10.5) випливає, що приріст кінетичної енергії дорівнює технічній роботі, яка була б здійснена в аналогічному статичному процесі, рівняння якого збігається з рівнянням процесу рухомого елемента потоку. Це і є підставою для зображення процесів течії газу в термодинамічних діаграмах (pW , TS , iS).

Якщо процес зміни стану газу під час його течії без тертя зобразити лінією на діаграмі (рис. 10.1), то для процесу течії $A-B$ наявна робота

$$l_0 = - \int_{p_2}^{p_1} W dp \quad (10.6)$$

зображається у вигляді площі, обмеженої кривою процесу, лініями $p = p_1$ і $p = p_2$ та віссю ординат.

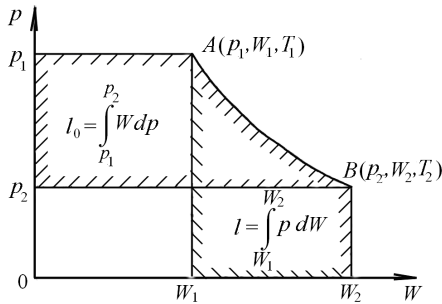


Рис. 10.1. Визначення наявної роботи газу за pW – діаграмою

Робота розширення газу $l = \int_{w_1}^{w_2} p dW$ зобразиться площею під

кривою процесу, яка обмежена крайніми ординатами і віссю абсцис.

Залежно від виду процесу значення наявної роботи можна розрахувати на основі загальних термодинамічних положень. В адіабатному процесі, у якому зміна стану підлягає умові $pW^k = \text{const}$, після підстановки в рівняння (10.6) значення поточного об'єму $W = p_1^{1/k} W_1 / p^{1/k}$ наявна робота визначиться за формулою

$$l_0 = \int_{p_2}^{p_1} p_1^{1/k} W_1 \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{k}{k-1} p_1 W_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right].$$

Між наявною роботою і роботою розширення в адіабатному процесі існує співвідношення

$$l_0 = k l.$$

Для адіабатної течії газу наявна робота, може бути визначена через ентальпію газу. Інтегруючи рівняння (10.5), отримаємо:

$$l_0 = - \int_{i_1}^{i_2} d i = (i_1 - i_2).$$

Температурний перепад $i_0 = i_1 - i_2$ (наявна робота) на iS -діаграмі показано на рис. 10.2.

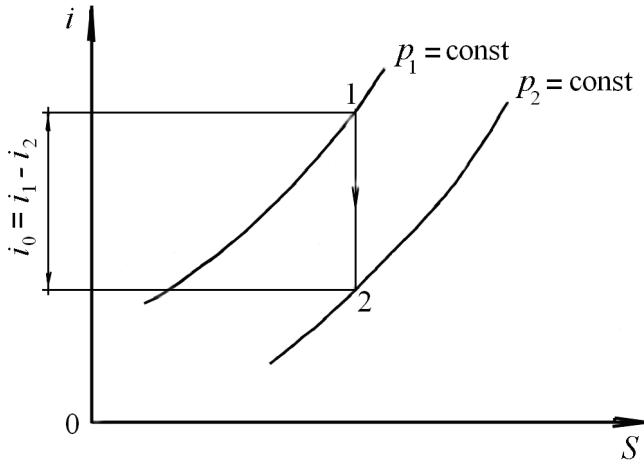


Рис. 10.2. Визначення наявної роботи газу за iS -діаграмою

Течія газу за наявності тертя не буде ізоентропною, оскільки через дію сил тертя відбувається дисипація (розсіювання) механічної енергії і перетворення її частини в теплоту, внаслідок чого внутрішня енергія, ентальпія і ентропія рухомого газу зростають.

За наявності тертя в потоці, розділивши dq в рівнянні $dq = di + \frac{dV^2}{2}$ на $dq_{\text{вн}}$ – кількість теплоти, що підводиться до газу ззовні, і на $dq_{\text{тр}}$ – кількість теплоти, що виділилася в

результаті тертя, та за умови, що $dq_{\text{вн}} = 0$, $dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}}$, закон збереження енергії можна записати у вигляді

$$\begin{cases} -Wdp + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = dl_{\text{тр}}; \\ dq_{\text{тр}} = di - Wdp. \end{cases} \quad (10.7)$$

До цих двох рівнянь необхідно додати нерівність $dS > 0$, оскільки реальна адіабатична зміна стану завжди супроводжується зростанням ентропії.

Адіабатний процес течії з тертям є необоротним процесом. Зобразити його на діаграмах можна, якщо припустити, що робота тертя під час течії дуже швидко перетворюється на зміну ентальпії, викликаючи зміну інших параметрів. Можна зобразити такий процес, вважаючи, що теплота тертя підводиться немовби ззовні, наприклад, на iS -діаграмі (рис. 10.3) лінією 1-2.

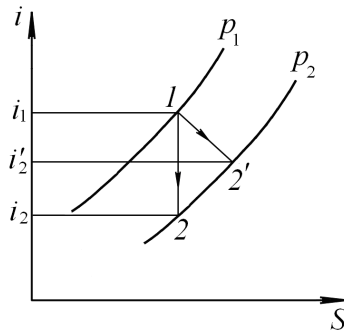


Рис. 10.3. iS -діаграма для адіабатних процесів

З рис. 10.3 видно, що тепловий перепад $i_0 = i_1 - i_2$ за наявності тертя менший, а отже, і швидкість течії, яка визначається за формулою (10.7), буде менша, ніж у разі течії без опору. Втрата енергії, що спричиняється внутрішнім опором, визначається за формулою

$$i_2 - i_{2'} = \frac{\Delta V_2^2}{2} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_{2'}^2}{2} = \xi \frac{V_2^2}{2}, \quad (10.8)$$

де ξ – коефіцієнт втрати енергії.

Якщо позначити $\frac{V_{2'}}{V_2} = \varphi$ (де φ – коефіцієнт швидкості), то

формула (10.8) матиме вигляд

$$\frac{\Delta V_2^2}{2} = (1 - \varphi^2) \frac{V_2^2}{2},$$

звідки

$$V_2 = \varphi \sqrt{2(i_1 - i_2) + V_1^2}.$$

Коефіцієнт швидкості φ для сопел сучасних турбін $\varphi = 0,95 \dots 0,98$.

Під дроселюванням розуміють падіння тиску в струмені робочого тіла, який протікає через ділянку каналу, що звужується. Для здійснення такого процесу на шляху руху газу встановлюється який-небудь гідравлічний опір: дросельний вентиль, заслінка і т. ін.

Падіння тиску в місцевому опорі можна пояснити дисипацією енергії потоку (тертям), що витрачається на подолання цього опору.

Проходячи через місцеве звуження каналу (рис. 10.4), тиск p_2 газу за місцем звуження завжди менший ніж тиск p_1 перед звуженням. Але робота розширення газу за різниці тиску $p_1 - p_2$ у зовнішнє середовище не передається, тобто процес дроселювання – це істотно необоротний процес. Дроселювання, що протікає без теплообміну з навколишнім середовищем, називається адіабатним.

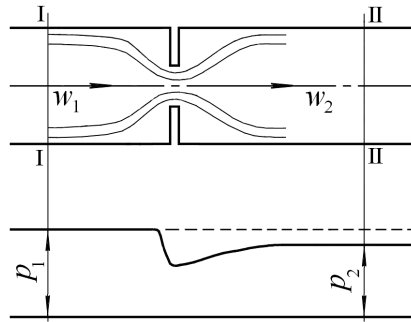


Рис. 10.4. Схема дроселювання газу

Вважаючи, що зміна стану газу від перерізу I–I до перерізу II–II відбувається адіабатно, маємо

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} = i_2 + \frac{w_2^2}{2}.$$

Якщо перерізи каналу до і після звуження однакові, то можна нехтувати зміною кінетичної енергії потоку $\Delta w^2/2$, тоді $i_1 = i_2$, тобто в результаті дроселювання ентальпія газу не змінюється.

Оскільки в зроблених передумовах не йдеться про властивості газу, то отриманий результат справедливий як для ідеальних, так і для реальних газів.

Внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму, а в процесі дроселювання газ не здійснює роботи і не бере участі в теплообміні із зовнішнім середовищем, тобто його внутрішня енергія повинна залишатися постійною. У разі дроселювання ідеального газу $du = 0$; $dT = 0$; $di = 0$; $i = \text{const}$.

Процес дроселювання ідеального газу повністю необоротний, оскільки неможливо створити первинний тиск без витрати роботи. Процес дроселювання реального газу частково оборотний, оскільки зміна температури порівняно з навколишнім середовищем може бути використана для отримання роботи, яку можна спрямувати на повернення газу в початковий стан.

Зміну температури реального газу при адіабатному дроселюванні визначають, задавшись рівнянням стану реального газу і залежністю $c_p = f(T, p)$, тоді

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp \quad (10.9)$$

якщо $i = \text{const}$, $di = 0$.

Розділивши обидві частини рівняння (10.9) на dp , отримаємо після перетворення

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial i}\right)_T} = -\frac{\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p}. \quad (10.10)$$

Значення частинної похідної $(\partial i / \partial T)_p = c_p$, а для 1 кг газу

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = -\left[T\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_p - W\right].$$

Отже,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = -\frac{T\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_p - W}{c_p}.$$

Для газу, що підлягає рівнянню Ван-дер-ваальса, маємо

$$\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p - \frac{a}{W^2} + \frac{2ab}{W^3}}.$$

Підставляючи це значення частинної похідної в рівняння стану газу, знаходимо

$$dT = \frac{2a/(RT) - b}{c_p} dp. \quad (10.11)$$

Відношення нескінченно малої зміни температури до нескінченно малої зміни тиску у випадку дроселювання називається *диференціальним температурним ефектом дроселювання* і позначається через β_i :

$$\alpha_i = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_i.$$

Якщо тиск під час дроселювання змінюється незначно, то зміна температури буде дорівнювати

$$T_2 - T_1 = \alpha_i (p_2 - p_1).$$

У разі значного зниження тиску різниця температур визначиться як

$$T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \alpha_i dp.$$

Оскільки під час дроселювання $dp < 0$ (p_2 завжди менше за p_1 , а c_p завжди додатна), знак T залежатиме від того, яких значень набуде чисельник у формулі (10.11).

Візьмемо три випадки:

- 1) $dT < 0$, $T < 2a/(bR)$;
 - 2) $dT > 0$, $T > 2a/(bR)$;
 - 3) $T = 0$, $T = 2a/(bR)$.
- (10.12)

Із розгляду співвідношень (10.12) видно, що залежно від природи газу і початкової температури в результаті дроселювання

його температура знижується, підвищується або залишається постійною. Зміна знака дросельного ефекту називається *інверсією*.

У точці інверсії $(\partial T / \partial p)_i = 0$, а початкова температура за рівнянням (10.11) буде дорівнювати $2a/(bR)$.

Таку температуру називають *температурою інверсії* $T_{\text{інв}}$ і вона визначається через критичну температуру $T_{\text{кр}}$. Оскільки $T_{\text{інв}} = 2a/(bR)$, а $T_{\text{кр}} = 8a/(27bR)$ знайдемо, що $T_{\text{інв}} = 6,75 T_{\text{кр}}$. Таким чином, температура інверсії реальних газів за законом Ван-дер-Ваальса в 6,75 разу більша від їх критичної температури.

Температура під час дроселювання підвищується, якщо $T > T_{\text{інв}}$, і знижується, якщо газ знаходиться при $T < T_{\text{інв}}$.

Температури інверсії більшості газів, за винятком водню і гелію, досить високі, і процеси дроселювання зазвичай відбуваються зі зниженням температури. Це зниження температури вперше було досліджено Джоулем і Томпсоном і отримало назву ефекту Джоуля–Томпсона. Цей ефект дроселювання використовується на практиці для отримання низьких температур.

Приклад 10.1. Процес течії з тертям повітря у трубопроводі постійного перерізу є адіабатичним (рис. 10.5). У перерізі 1 швидкість течії $v_1 = 240$ м/с,

температура $T_1 = 320$ К, тиск $p_1 = 170$ кПа; у перерізі 2 швидкість течії $V_2 = 290$ м/с, тиск $p_2 = 135$ кПа. Необхідно визначити параметри загальмованого потоку у перерізі 1: температуру T_1^* , тиск p_1^* і густину ρ_1^* , а також температуру T_2 і тиск p_2^* у перерізі 2.

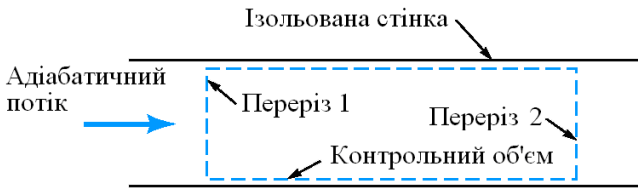


Рис. 10.5. Розрахункова схема до прикладу 10.1

Температуру загальмованого потоку у перерізі 1 визначимо за формулою

$$T_1^* = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = T_1 + \frac{V_1^2}{2 \frac{k}{k-1} R} = 320 + \frac{240^2}{2 \cdot 1005} = 348,7 \text{ К.}$$

Тиск загальмованого потоку в перерізі 1

$$p_1^* = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = p_1 (1 + 0,2 M_1^2)^{3,5},$$

де число $M_1 = V_1/a_1$ визначимо з урахуванням швидкості звуку

$$a_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 320} = 358,6 \text{ м/с,}$$

тоді

$$M_1 = \frac{240}{358,6} = 0,67 ;$$

$$p_1^* = p_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1,7 \cdot 10^5 (1 + 0,2 \cdot 0,67^2)^{3,5} = 229551 \text{ Па.}$$

Густина загальмованого потоку c_1^* у перерізі 1 визначимо з рівняння стану ідеального газу:

$$c_1^* = \frac{p_1^*}{R \cdot T_1^*} = \frac{229551}{287 \cdot 348,7} = 2,294 \text{ кг/м}^3.$$

Процес течії повітря у трубі є адіабатним ($T_1^* = T_2^*$), тому температуру повітря у перерізі 2 визначимо за формулою

$$T_2 = T_2^* - \frac{V_2^2}{2c_p} = T_2^* - \frac{V_1^2}{2 \frac{k}{k-1} R} = 348,7 - \frac{290^2}{2 \cdot 1005} = 306,8 \text{ К.}$$

Оскільки течія повітря у трубі не є ізоентропічною, тиск загальмованого потоку у перерізі 2 визначимо з рівняння адіабати з урахуванням локальних умов течії у цьому перерізі

$$p_2^* = p_2 \left(\frac{T_2^*}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1,35 \cdot 10^5 \left(\frac{348,7}{306,8} \right)^{3,5} = 211181 \text{ Па.}$$

11. НЕСТАЛИЙ РУХ РІДИНИ І ГАЗУ ПО ТРУБОПРОВОДАХ

11.1. Нестала течія рідини і газу у напірних трубопроводах

Несталою течією називається така течія рідини, за якої швидкість і тиск у просторі з рухомою рідиною змінюються в часі і є функціями координат і часу:

$$u = f(x, y, z, t), \quad p = \psi(x, y, z, t).$$

Розглянемо несталий рух для елементарної струминки рідини усередині напірного трубопроводу. Виділимо в середині елементарної струминки потоку рідини елементарний циліндр завдовжки dl площею dS з віссю, нахиленою під кутом β до горизонту (рис. 11.1).

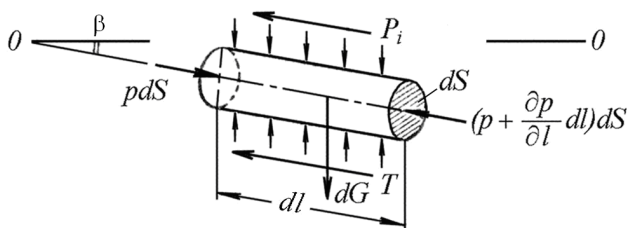


Рис. 11.1. Елементарна струминка рідини в середині трубопроводу

На цей циліндр діють:

- сила тяжіння $dG = \gamma dS dl$;

- сили гідродинамічного тиску зліва $p dS$ і справа

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial l} dl \right) dS ;$$

- сила інерції $P_i = \frac{\Gamma}{g} dl dS \frac{du}{dt}$, яка напрямлена убік,

зворотний прискоренню (тут u – місцева швидкість);

- сила тертя $T = \tau d\chi dl$, де $d\chi$ – периметр «живого» перерізу елементарного циліндра.

Застосуємо до елементарного циліндра принцип Д'Аламбера, спроектувавши всі сили, що діють на циліндр, на вісь $0 - 0$:

$$\Gamma dS dl \sin \alpha + p dS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial l} dl \right) dS - \frac{\Gamma}{g} dS dl \frac{du}{dt} - \tau d\chi dl = 0 .$$

(11.1)

Розділивши вираз (11.1) на $\Gamma dS dl$, матимемо:

$$\sin \alpha - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{1}{g} \frac{du}{dt} - \frac{\tau d\chi}{\Gamma dS} = 0 .$$

Подамо похідну du/dt у такому вигляді:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l} \frac{dl}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2} \right) .$$

Оскільки $\sin \alpha = \frac{dz}{dl}$, то

$$\frac{dz}{dl} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\Phi d\chi}{\Gamma dS} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t},$$

або

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\Gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{\Phi d\chi}{\Gamma dS} - \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (11.2)$$

Помноживши обидві частини рівняння (11.2) на dl і інтегруючи отриманий вираз від перерізу 1-1 до перерізу 2-2, отримаємо

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\Gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\Gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) = \int_1^2 \frac{\Phi d\chi}{\Gamma dS} dl - \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} dl. \quad (11.3)$$

Перший член правої частини виразу (11.3), що позначається через h_f , – відома втрата напору на подолання опору по довжині між перерізами 1-1 і 2-2.

Другий член, який позначимо через h'_i , характеризує зміну за часом кінетичної енергії в елементарній струминці між перерізами 1-1 і 2-2 і називається *інерційним напором*.

Його можна подати ще в дещо іншому вигляді. Позначимо витрату елементарної струминки через $q = u dS$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{dS} \frac{\partial q}{\partial t};$$

$$h'_i = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{1}{dS} \frac{\partial q}{\partial t} dl = \frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial t} \int_1^2 \frac{dl}{dS}$$

Порівнювано з рівнянням Бернуллі в рівняння (11.3) входить член інерційного напору h'_i .

Основне диференціальне рівняння (11.3) несталоного руху для елементарної струминки можна поширити і на цілий потік, для якого рівняння матиме вигляд

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\beta u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\beta u_2^2}{2g} + h_l + h_i,$$

де β – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу швидкостей по перерізу потоку; h_l – втрати напору потоку по довжині між перерізами 1–1 і 2–2; h_i – інерційний напір, витрачений на подолання інерції маси рідини в потоці на тій же ділянці.

Величина h_i для потоку може бути визначена як:

$$h_i = \frac{1}{g} \int \frac{\partial u}{\partial t} dl,$$

або

$$h_i = \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} \int \frac{dl}{S}.$$

11.2. Гідравлічний удар у трубах

Гідравлічний удар – це коливальний процес, що виникає в пружному трубопроводі з рідиною, що мало стискається, у

разі раптової зміни її швидкості або тиску. Цей процес є дуже швидкоплинним і характеризується чергуванням різких підвищень і знижень тиску. Зміна тиску при цьому тісно пов'язана з пружними деформаціями рідини і стінок трубопроводу.

Гідравлічний удар найчастіше виникає унаслідок швидкого закриття або відкриття крана або іншого пристрою керування потоком. Але можуть бути й інші причини його виникнення.

Теоретичне і експериментальне дослідження гідравлічного удару в трубах було вперше виконано професором М.Є. Жуковським.

Припустимо, що в кінці труби, по якій рідина рухається зі швидкістю u_0 і тиском p_0 , проведено миттєве закриття крана А (рис. 11.2, а).

Тоді швидкість частинок рідини, що досягли крана, буде погашена, а їх кінетична енергія перейде в роботу деформацій стінок труби і рідини. При цьому стінки труби розтягуються, а рідина стискається унаслідок підвищення тиску на величину $\Delta p_{\text{уд}}$. На загальмовані частинки рідини біля крана набігають інші, сусідні з ними частинки, і теж втрачають швидкість. У результаті цього переріз $n-n$ пересувається вправо зі швидкістю a , яку називають швидкістю ударної хвилі; саму ж перехідну ділянку, у якій тиск змінюється на величину $\Delta p_{\text{уд}}$, називається ударною хвилею.

Коли ударна хвиля добіжить до резервуара, рідина виявиться зупиненою і стислою у всій трубі, а стінки труби розтягнутими. Ударне підвищення тиску $\Delta p_{\text{уд}}$ пошириться на всю трубу (рис. 11.2, б).

Але такий стан не є рівноважним. Під дією перепаду тиску $\Delta p_{\text{уд}}$ рідина спрямується з труби в резервуар, причому цей рух почнеться з перерізу, безпосередньо прилеглого до резервуара. Переріз $n-n$ пересувається тепер назад до крана зі швидкістю a , залишаючи за собою тиск p_0 (рис. 11.2, в).

Рідина і стінки труби передбачаються абсолютно пружними, тому вони повертаються до колишнього стану, що відповідає тиску p_0 . Робота деформації повністю переходить назад у кінетичну енергію, і рідина в трубі набуває первинної швидкості, яка напрямлена тепер у протилежний бік.

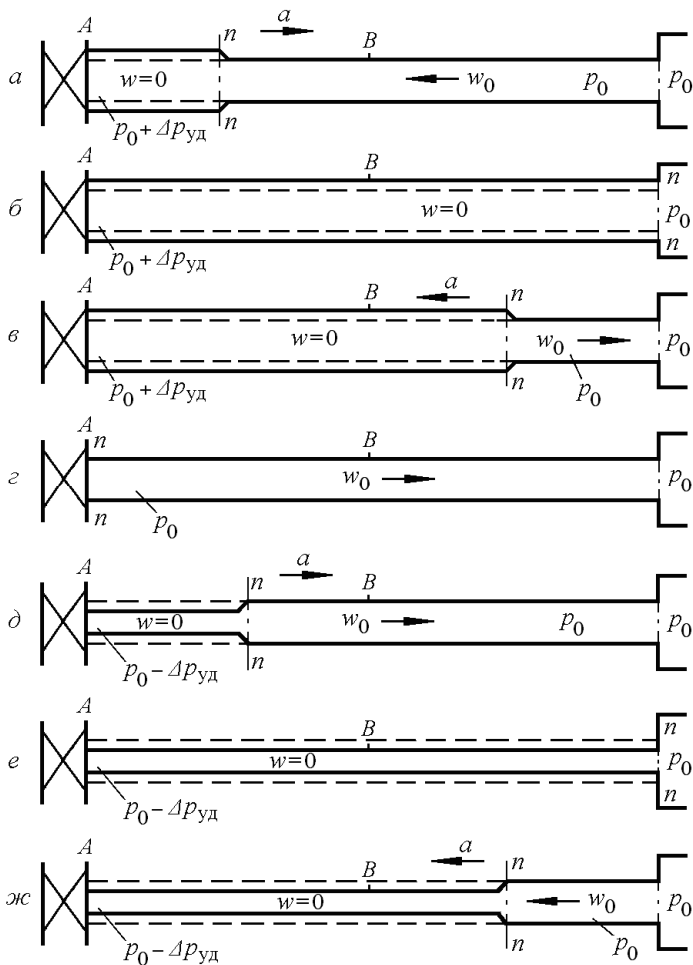


Рис. 11.2. Схема руху ударної хвилі в трубопроводі у випадку гідралічного удару

Із цією швидкістю стовп рідини (рис. 11.2, з) прагне відірватися від крана, унаслідок чого виникає від’ємна ударна хвиля $-\Delta p_{уд}$, яка біжить від крана до резервуара зі швидкістю a ,

залишаючи за собою стінки стисненої труби і рідину, яка розширилася, що зумовлено зниженням тиску $-\Delta p_{\text{уд}}$ (рис. 11.2, д). Кінетична енергія рідини знову переходить у роботу деформацій, але протилежного знака.

Стан труби в момент надходження від'ємної ударної хвилі до резервуара показано на рис. 11.2, е. Так само, як і для випадку, показаного на рис. 11.2, б, він не є рівноважним. На рис. 11.2, ж показано процес вирівнювання тиску в трубі та резервуарі, що супроводжується утворенням швидкості u_0 .

Очевидно, що як тільки ударна хвиля $-\Delta p_{\text{уд}}$, що рухається від резервуара, досягне крана, виникне ситуація, що спостерігалася у момент закриття крана. Весь цикл гідравлічного удару повториться знову.

Величина ударного тиску може бути знайдена з умови, що з виникненням гідроудару кінетична енергія рідини переходить у роботу деформації стінок труби і деформації рідини.

Кінетична енергія E_k рухомої рідини в трубопроводі радіусом R становить

$$E_k = \frac{M u_0^2}{2} = \frac{1}{2} \rho R^2 l c u_0^2,$$

де M – маса рідини в трубопроводі; l – довжина трубопроводу.

Робота деформації стінок трубопроводу A_d складатиме половину добутку сили на подовження. Виражаючи роботу деформації стінок труби як роботу сил тиску на шляху ΔR (рис. 11.3), отримаємо:

$$A_d = \frac{1}{2} \Delta p_{уд} 2\pi l \Delta R.$$

За законом Гука

$$\frac{\Delta R}{R} E = y,$$

де E – модуль пружності матеріалу трубопроводу; σ – нормальне напруження в матеріалі стінки труби, пов'язане з тиском $\Delta p_{уд}$ і товщиною стінки d співвідношенням

$$y = \frac{\Delta p_{уд} R}{d}.$$

Роботу стиснення об'єму W рідини можна подати як роботу сил тиску на шляху l (рис. 11.4), тобто

$$A_{ст} = \frac{1}{2} S \Delta p_{уд} \Delta l = \frac{1}{2} \Delta p_{уд} \Delta W.$$

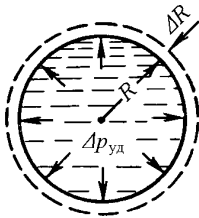


Рис. 11.3. Деформація трубопроводу у випадку гідродару

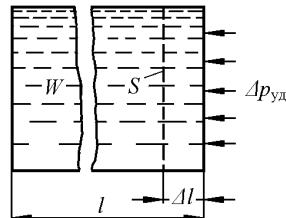


Рис. 11.4. Схема стиснення рідини в трубопроводі у випадку гідродару

Аналогічно закону Гука для лінійного подовження відносно зменшення об'єму рідини $\Delta W/W$ пов'язане з тиском $\Delta p_{\text{уд}}$ залежністю

$$\frac{\Delta W}{W} E_{\text{рід}} = \Delta p_{\text{уд}},$$

де $E_{\text{рід}}$ – об'ємний модуль пружності рідини.

Поклавши за W об'єм рідини в трубі, отримаємо вираз для роботи стиснення рідини:

$$A_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_{\text{уд}}^2 \pi R^2 l}{E_{\text{рід}}}.$$

Таким чином, рівняння балансу енергії у випадку гідроудару набуває вигляду

$$\frac{1}{2} \pi R^2 l \rho u_0^2 = \frac{\pi R^3 l \Delta p_{\text{уд}}^2}{\delta E} + \frac{\pi R^2 l \Delta p_{\text{уд}}^2}{E_{\text{ж}}}. \quad (11.4)$$

Розв'язавши рівняння (11.4) відносно $\Delta p_{\text{уд}}$, дістанемо формулу М.С. Жуковського

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho u_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{рід}}} + \frac{2\rho R}{\delta E}}}. \quad (11.5)$$

Величина

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{E_{\text{рід}}} + \frac{2cR}{dE}}} = a$$

є швидкістю поширення ударної хвилі в рідині, що заповнює пружний трубопровід.

Формула М.Є. Жуковського (11.5) у стислій формі має вигляд

$$\Delta p_{\text{уд}} = c u_0 a .$$

У тому випадку, коли швидкість у трубопроводі зменшується не до нуля, а до значення u , виникає неповний гідравлічний удар і формула М.Є. Жуковського набуває вигляду

$$\Delta p_{\text{уд}} = c a(u_0 - u) . \quad (11.6)$$

Формула (11.6) справедлива у разі дуже швидкого закриття крана або коли час закриття

$$t_{\text{закр}} < t_0 = \frac{2l}{a} ,$$

де час t_0 – фаза гідравлічного удару.

За цієї умови має місце прямий гідравлічний удар.

Якщо $t_{\text{закр}} > t_0$, виникає непрямий гідравлічний удар, за якого ударна хвиля, відбившись від резервуара, повертається до крана раніше, ніж він буде повністю закритий. Очевидно, що підвищення тиску $\Delta p'_{\text{уд}}$ при цьому буде меншим, ніж у випадку прямого удару $\Delta p_{\text{уд}}$.

Приклад 11.1. У трубопроводі, через який перетікає рідина, змінюється швидкість руху цієї рідини на величину $\Delta w = 1$ м/с за час $\Delta t = 0,05$ с. Довжина трубопроводу $l = 5,0$, густина рідини $\rho = 850$ кг/см³. Необхідно визначити зниження тиску в трубопроводі за рахунок інерційних втрат, які виникають під час зміни швидкості.

Розв'язання. Зниження тиску за рахунок інерційних втрат можна визначити за такою формулою:

$$\Delta p = \rho j l = 850 \cdot \frac{1}{0,05} \cdot 5 = 85000 \text{ Па.}$$

12. ВИТІКАННЯ РІДИНИ ТА ГАЗУ ЧЕРЕЗ ОТВОРИ І НАСАДКИ

12.1. Витікання рідини крізь отвори

В інженерній практиці виконують завдання зі встановлення залежності між напором у резервуарі і витратою (або швидкістю) струменя, що витікає крізь отвір у стінці резервуара або через насадок (рис. 12.1).

Струмінь може витікати в газовий простір (незатоплений струмінь) або в простір, затоплений рідиною (затоплений струмінь). Розрізняють витікання за змінного напору і за постійного напору.

Залежно від типу розв'язуваних завдань застосовують різноманітні форми отворів і насадків.

Розрізняють малий і великий отвори, які можуть бути як у тонкій, так і товстій стінці.

Малим отвором будемо називати отвір вертикальний розмір якого (або діаметр d_0) значно менший від напору: $d_0 < 0,1H$ (рис. 12.1).

Більшим називають отвір вертикальний розмір якого (або діаметр d_0) відповідає умові $d_0 \geq 0,1H$.

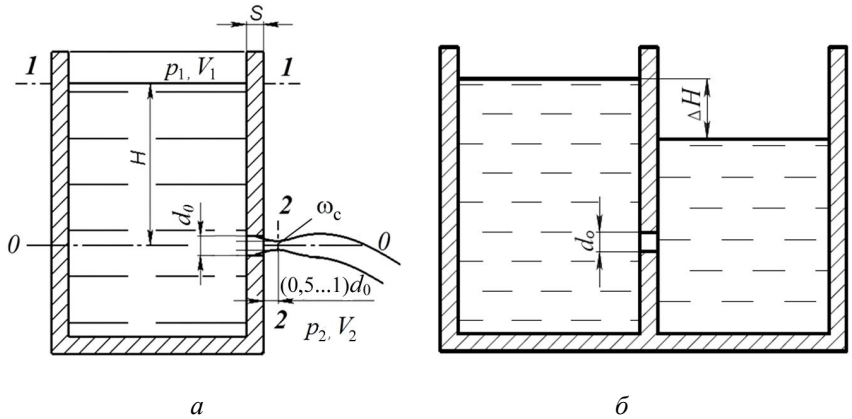


Рис. 12.1. Розрахункова схема витікання рідини крізь отвір:

a – незатоплений струмінь, *б* – затоплений струмінь

Стінка називається тонкою, якщо вона не впливає на форму струменя і її товщина s не перевищує трикратного розміру отвору: $s < 3d_0$. Якщо товщина стінки s порівнянна з розмірами отвору і впливає на характер витікання, то така стінка називається товстою. При цьому виконується умова $s \geq 3d_0$.

Струмінь, що витікає крізь малий отвір у тонкій стінці, плавно стискується, набуваючи циліндричної форми на відстані $0,5...1$ від діаметра отвору d_0 . На подальший рух струменя впливає сила тяжіння. Відношення площі «живого» перерізу струменя у стислому місці ω_c до площі отвору ω_0 показує ступінь стиснення струменя ε :

$$\varepsilon = \omega_c / \omega_0 . \quad (12.1)$$

Коефіцієнт стиснення залежить від форми отвору, положення отвору відносно стінок резервуара, а також від числа Рейнольда.

Вплив стінок визначає характер стиснення струменя. Розрізняють досконале, недосконале, повне і неповне стиснення.

Стиснення називається досконалим (отвір 1, рис. 12.2), якщо на нього не впливають стінки резервуара. Для цього досить, щоб межі отвору були розміщені від стінок і дна посудини не менш ніж на потроєну довжину відповідного боку отвору: $e \geq 3a, k \geq 3b$. У випадку досконалого стиснення стислий переріз струменя виходить найменшим.

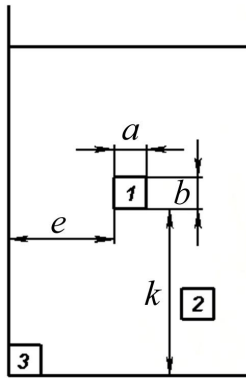


Рис.12.2. Розташування отворів

Стиснення називається недосконалим (отвори 2, 3, рис. 12.2), якщо на нього впливає близькість стінок або дно резервуара. Це

можливо за умови $e < 3a, k < 3b$.

Повним називають стиснення, якщо струмінь випробовує стиснення з усіх боків (отвори 1, 2, рис. 12.2).

Неповним називається стиснення, якщо струмінь не має бічного стиснення з одного або з декількох боків (отвір 3, рис. 12.2).

Розглянемо витікання рідини крізь малий отвір у тонкій стінці за постійного напору (рис. 12.1). Визначимо дійсну швидкість витікання, застосувавши рівняння Бернуллі. «Живими перерізами, що обмежують розглянуту ділянку потоку, вважатимемо вільну поверхню рідини в резервуарі (перетин 1-1) і стислий переріз струменя (перетин 2-2). Площина порівняння 0-0 проходить через центр ваги стислого перерізу струменя. Будемо мати:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \xi_c \frac{V_2^2}{2g}, \quad (12.2)$$

де H – геометричний напір, що відповідає положенню перерізу 1-1 над площиною порівняння 0-0; p_1, p_2 – абсолютні тиски в розглянутих перерізах; V_1, V_2 – середні швидкості в перерізах; $\xi_c \frac{V_2^2}{2g}$ – втрати напору від витікання крізь отвір.

Припустивши, що $V_1 = 0$, виразимо з рівняння (12.2) швидкість:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}{\alpha_2 + \xi_c}}.$$

Знехтувавши нерівномірністю розподілу швидкостей у розрахунковому перерізі струменя ($\alpha_2 = 1$), уведемо поняття коефіцієнта швидкості φ :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_c}}.$$

Діючим напором назвемо величину:

$$H_0 = H + (p_1 - p_2)/\rho g.$$

Остаточо отримаємо:

$$V_d = V_2 = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad (12.3)$$

де V_d – дійсна швидкість руху рідини в стислому перерізі струменя.

Теоретичну швидкість витікання під час руху ідеальної рідини визначимо з урахуванням того, що коефіцієнт опору $\xi = 0$, а отже, $\varphi = 1$:

$$V_{\text{теор}} = \sqrt{2gH_0} .$$

Видно, що коефіцієнт швидкості φ дорівнює відношенню дійсної швидкості до теоретичної:

$$\varphi = V_{\text{д}} / V_{\text{теор}} .$$

У разі витікання під рівень (затоплений струмінь, рис. 12.1,б) швидкість визначається як

$$V_{\text{д}} = \varphi \sqrt{2g\Delta H} ,$$

де ΔH – різниця рівнів.

У лабораторних умовах дійсну швидкість витікання можна визначити з рівняння вільного падіння струменя:

$$x = V_2 t; \quad y = \frac{gt^2}{2} ,$$

де x, y – координати довільної точки струменя (рис. 12.3).

Розв'язуючи спільно два рівняння, дістаємо

$$V_{\text{д}} = V_2 = x \sqrt{\frac{g}{2y}} .$$

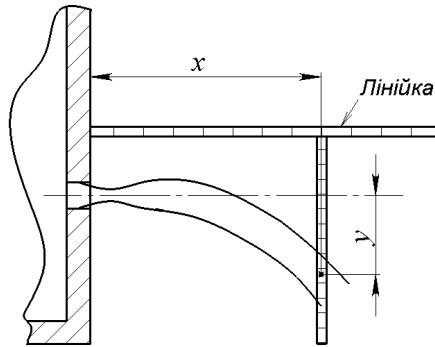


Рис. 12.3. Схема вимірювання координат струменя, що витікає

Витрата рідини визначається за формулою

$$Q_d = \omega_c V_d.$$

У практичних розрахунках зручніше оперувати не площею стислого перерізу струменя, а площею отвору. З огляду на формули (12.1) і (12.3) отримаємо формулу з визначення витрати:

$$Q_d = \varepsilon \omega_o \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

Визначимо коефіцієнт витрати як $\mu = \varepsilon \varphi$.

Остаточно формула дійсної витрати набуває вигляду

$$Q_d = \mu \omega_o \sqrt{2gH_0},$$

$$Q_d = \mu \omega_o \sqrt{2g\Delta H} \quad (\text{для затопленого струменя}).$$

Якщо теоретичну витрату визначити як

$$Q_{\text{теор}} = \omega_0 \sqrt{2gH_0},$$

то коефіцієнт витрати можна розглядати як відношення дійсної витрати до теоретичної:

$$\mu = Q_{\text{д}} / Q_{\text{теор}}.$$

Залежно від форми отвору поперечний переріз струменя, що витікає, буде різним. Якщо струмінь витікає крізь квадратний отвір, форма струменя буде хрестоподібною, а крізь трикутний – із трьома тонкими ребрами (рис. 12.4).

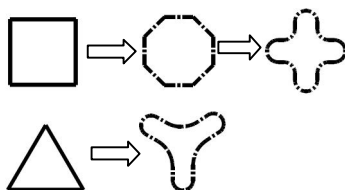


Рис.12.4. Інверсія струменя

Витікаючи через квадратний переріз струмінь по довжині не зберігає хрестоподібної форми. У стислом перерізі струмінь здобуває форму восьмикутника, далі перетворюється в хрестоподібний, потім знову змінюється на восьмикутний переріз. Таке явище називається інверсією струменя і викликається дією

сил поверхневого натягу. Найбільш сильно інверсія струменя проявляється під час витікання крізь отвори, форма яких відмінна від кола.

Залежності коефіцієнтів ϵ , ϕ , μ для круглого отвору від числа Рейнольдса показано на рис. 12.5.

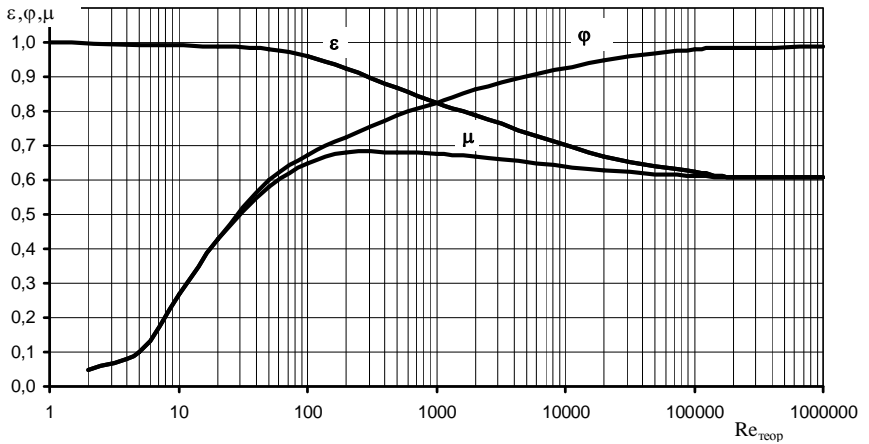


Рис. 12.5 Графік залежності ϵ , ϕ і μ від числа $Re_{теор}$ для круглого отвору в тонкій стінці

За число Рейнольдса береться теоретичне число. Число Рейнольдса розраховують за формулою

$$Re_{теор} = \frac{V_{теор} d_0}{\nu} = \frac{d_0 \sqrt{2gH_0}}{\nu}.$$

Зі збільшенням числа $Re_{теор}$ вплив сил в'язкості зменшується, що веде до збільшення коефіцієнта швидкості φ унаслідок зменшення коефіцієнта опору ζ_c . Коефіцієнт стиснення ε при цьому зменшується і за чисел $Re_{теор} \rightarrow \infty$ коефіцієнт стиснення ε прагне до значення 0,61. Коефіцієнт витрати μ зі збільшенням числа $Re_{теор}$ спочатку збільшується, що зумовлено крутим зростанням φ , а потім, досявши максимального значення ($\mu_{max}=0,69$, якщо $Re_{теор} \approx 350$), зменшується у зв'язку зі значним падінням ε і за більших $Re_{теор}$ робиться майже сталим і дорівнює $\mu = 0,6 \dots 0,61$.

В області малих чисел $Re_{теор}$ унаслідок в'язкості та гальмування швидкості поблизу кромки стиснення струменя не відбувається ($\varepsilon = 1$). Тому коефіцієнт швидкості φ дорівнюватиме коефіцієнту витрати μ .

Якщо $Re_{теор} > 10^4$, рекомендується формула А.Д. Альтшуля:

$$\mu = 0,592 + \frac{5,5}{\sqrt{Re_{теор}}}.$$

У широкому діапазоні значень чисел Рейнольдса ($Re=10^4 \dots 2 \cdot 10^6$) коефіцієнт витрати змінюється в межах: для прямокутних отворів – 10%, для круглих – не більше 7%. Тому середні значення встановлені дослідями: витікання рідини через круглий малий отвір у тонкій стінці за повного досконалого стиснення можна припустити

$$\varepsilon = 0,64 ; \mu = 0,62 ; \varphi = 0,97 ; \zeta_c = 0,065 .$$

12.2. Витікання рідини через насадки

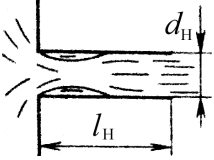
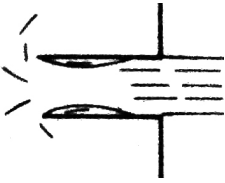


Збільшити продуктивність струменя, що витікає, можна шляхом застосування насадка: короткого патрубку l_n довжиною від 3 до 5 внутрішнього d_n діаметра, приєднаного до отвору в тонкій стінці.

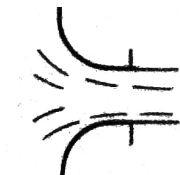
За формою насадки бувають циліндричні зовнішні, циліндричні внутрішні, конічні розбіжні, конічні збіжні, коноїдальні (табл. 12.1).

Залежно від форми змінюється значення коефіцієнта витрати μ . Найбільші значення коефіцієнта витрати спостерігаються у випадку застосування коноїдального ($\mu = 0,98$) і конічного збіжного насадків ($\mu_{\max} = 0,946$). У конічному збіжному насадку коефіцієнт витрати спочатку збільшується і, досягнувши максимуму за кута конфузора $13^{\circ}24'$, починає спадати.

Таблиця 12.1

Значення коефіцієнтів витрати μ для насадків

Вид насадка	Коефіцієнт витрати μ
Циліндричний зовнішній 	0,82
Циліндричний внутрішній 	0,71
Конічний розбіжний 	0,475 (кут дифузора 5°)
Конічний збіжний 	0,873 (кут конфузора 2°) 0,946 (кут конфузора 13°24') 0,908 (кут конфузора 25°) 0,857 (кут конфузора 45°)

Коноїдальний 	0,98
---	------

У випадку витікання рідини через насадок струмінь, входячи в нього, стискається під дією відцентрових сил, що виникають унаслідок криволінійності траєкторії, як і в разі витікання крізь отвір у тонкій стінці.

Розглянемо випадок, коли струмінь відривається від стінок насадка. Це відбувається, коли тиск усередині насадка знижується до значення, що дорівнює тиску пароутворення. При цьому настає явище кавітації. Місцем найменшого тиску є стислий переріз, величина якого під час витікання в атмосферу становить

$$h_{\text{вак}} = \frac{P_a - P_{\text{ст}}}{\rho g} \cong 0,74H_0.$$

Під час руху рідини через насадок виникає додатковий гідравлічний опір. У результаті цього швидкість витікання рідини через насадок значно менша, ніж швидкість витікання крізь простий отвір. Однак витрата рідини через насадок порівняно з витіканням крізь отвір у тонкій стінці, збільшується. Це збільшення витрати відбувається через наявність вакууму в стислому перерізі.

Досліди показують, що за значення вакууму $h_{\text{вак}} > 9,7\text{м}$ відбувається відрив струменя від внутрішньої поверхні насадка. У цьому випадку витікання відбувається як витікання з отвору без насадка з коефіцієнтом витрати $\mu = 0,62$. Щоб уникнути зриву струменя граничне значення діючого напору H_0 не слід допускати більшим ніж

$$H_0^{\text{max}} \approx 9,7/0,74 \approx 13 \text{ м.}$$

Коефіцієнт витрати для циліндричного насадка також залежить від числа Рейнольдса та від відносної довжини насадка (відношення довжини до внутрішнього діаметра насадка).

Не рекомендується працювати з напорами більшими ніж $0,7H_0^{\text{max}}$, оскільки, якщо напори близькі до відривних, витікання через насадок стає нестійким.

Розрахункові формули швидкості і витрати для насадків такі самі, що і для отвору в тонкій стінці.

Для насадків коефіцієнт стиснення приймається рівним $\varepsilon = 1$, отже, коефіцієнт витрати μ буде дорівнювати коефіцієнту швидкості φ .

12.3 Витікання рідини і газу крізь отвори і насадки, струминні течії, течія газу крізь сопла

Визначимо швидкість течії газу крізь сопло за умови, що параметри газу (тиск, питомий об'єм, температура) на вході сопла p_1, W_1, T_1 , а на виході сопла – p_2, W_2, T_2 .

Наявна робота газу

$$l_0 = (V_2^2 - V_1^2) / 2,$$

де V_1 і V_2 – середні швидкості газу на початку і у кінці процесу.

Якщо нехтувати початковою швидкістю газу (у ряді практичних випадків це можна зробити), то швидкість у кінці течії $V_2 = V$ можна визначити за формулою

$$V = \sqrt{2l_0}. \quad (12.4)$$

Підставляючи в цю формулу значення наявної роботи при адіабатній течії газу, отримаємо формулу для визначення швидкості при оборотному адіабатному розширенні:

$$V = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 W_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]} \quad (12.5)$$

або

$$V = \sqrt{2(i_1 - i_2)} = \sqrt{2i_0}. \quad (12.6)$$

Як видно з формул (12.5) і (12.6), швидкість витікання визначається станом газу на вході в сопло і його кінцевим тиском на виході або різницею ентальпій на вході і виході з сопла i_0 .

Під час витікання газу у вакуум ($p_2 = 0$) швидкість витікання повинна бути максимальною

$$V_{\max} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 W_1}.$$

Масову витрату газу через сопло можна розрахувати за рівнянням нерозривності

$$G = \omega_2 V / W_2,$$

де ω_2 – площа вихідного перерізу сопла; W_2 – питомий об'єм газу в цьому перерізі.

Із рівняння адіабати $p_2 W_2^k = p_1 W_1^k$ маємо

$$W_2 = W_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/k}.$$

Масову витрату газу через сопло можна визначити як

$$G = \omega_2 \frac{1}{W_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 W_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]} =$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_2 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{W_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]} = \\
&= \Psi_2 \frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}. \tag{12.7}
\end{aligned}$$

Як видно з рівняння (12.7), масова витрата газу залежить від площі вихідного перетину сопла, параметрів газу на вході p_1 , W_1 , T_1 , і тиску p_2 у вихідному перетині.

Розглянемо течію газу з резервуара нескінченно великого об'єму через сопло, що звужується, і проаналізуємо швидкісні та витратні характеристики потоку (рис. 12.6).

Параметри газу в резервуарі через p_1 , W_1 , T_1 . Значення цих параметрів через розміри резервуара не повинні змінюватися з часом. Початкову швидкість газу в резервуарі припускаємо рівною нулю ($V_1 = 0$). Температуру, питомий об'єм, тиск і швидкість на виході (зрізі) сопла позначимо через p_2 , W_2 , T_2 , V_2 . Тиск зовнішнього середовища, куди спрямовується течія, позначимо через p_0 . У випадку *розрахункового* режиму течії $p_0 = p_2$, тобто тиск на зрізі сопла має дорівнювати тиску навколишнього середовища. Якщо режим течії газу є оборотним і адіабатним, то швидкість і витрату газу через сопло можна визначити з рівнянь (12.5) і (12.7).

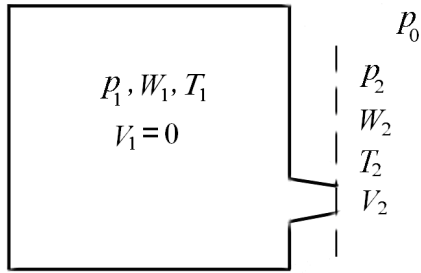


Рис. 12.6. Схема течії газу з сопла, що звужується

Для визначення максимальної витрати беремо першу похідну з виразу, взятого у квадратні дужки рівняння (12.7) і дорівнюємо її до нуля. У результаті відповідних перетворень отримуємо

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}.$$

Відношення тиску p_2 / p_1 називається критичним і позначається через $\beta_{кр}$; воно відповідає критичному тиску на зрізі сопла $p_{кр}$ і питомому об'єму $W_{кр}$:

$$\beta_{кр} = \frac{p_{кр}}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}. \quad (12.8)$$

Критичне відношення тиску залежить лише від фізичних властивостей газу, точніше від його показника адіабати. Для двоатомних газів $k = 1,4$ і $\beta_{кр} = 0,528$.

Підставивши в загальну формулу масової витрати значення $\beta_{кр}$, за якого витрата газу буде максимальною, отримаємо:

$$G_{\max} = \omega \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)} \frac{p_1}{W_1}}. \quad (12.9)$$

Максимальній витраті відповідає критична швидкість $V_{кр}$, що має місце тільки тоді, коли перепад тиску

$$\Delta p = p_1 - p_{кр} = p_1 (1 - \beta_{кр}).$$

Підставляючи у формулу для швидкості потоку (12.5) значення $\beta_{кр}$ з формули (12.8), отримаємо:

$$V_{кр} = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} p_1 W_1}. \quad (12.10)$$

Таким чином, значення критичної швидкості для певного робочого тіла залежить від параметрів його початкового стану. Критична швидкість витікання є максимальною швидкістю течії через сопло, що звужується, за певного початкового стану газу.

Оскільки для критичного перерізу справедливі співвідношення

$$p_1 = p_{кр} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} ;$$

$$W_1 = W_{\text{кр}} \left(\frac{p_{\text{кр}}}{p_1} \right)^{1/k} = W_{\text{кр}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)},$$

то, підставляючи ці значення у формулу (12.10), отримаємо після перетворень:

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{kp_{\text{кр}} W_{\text{кр}}^2}.$$

Критична швидкість течії буде дорівнювати швидкості звуку у вихідному перерізі сопла, тобто місцевій швидкості звуку.

Швидкість звуку є швидкістю поширення нескінченно малих збурень в суцільному середовищі і залежить від пружних властивостей та щільності середовища. Унаслідок малості змін стану газу в хвилях розрідження і стиснення вплив внутрішнього тертя незначний, тому поширення звуку в газовому середовищі можна розглядати як оборотний адіабатний (ізоентропний) процес ($S = \text{const}$).

Швидкість поширення звуку визначається за формулою Лапласа

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S} = \sqrt{-W^2 \left(\frac{\partial p}{\partial W} \right)_S}.$$

Для ідеального газу відношення $(\partial p / \partial W)$ можна знайти з диференціального рівняння адіабати

$$k \frac{dW}{W} + \frac{dp}{p} = 0.$$

У результаті отримаємо:

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kpW} = \sqrt{kRT}.$$

Оскільки $a = \sqrt{kpW}$, то кожному перерізу сопла має відповідати своя місцева швидкість звуку, що визначається величинами p і W у відповідному перерізі. Для вихідного перерізу сопла, коли $V = V_{кр} = a$, тиск на зрізі повинен дорівнювати критичному. У цьому випадку швидкість не може перевищувати критичну, і швидкість газу, що дорівнює швидкості звуку, може бути тільки в мінімальному (вихідному) перерізі сопла. Використовуючи формулу (12.9), дістаємо:

$$\Pi_{\min} = \frac{G_{\max}}{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_1}{W_1}}}.$$

Стає зрозумілим і характер зміни витрати через сопла, що звужуються. За формулою (12.7) залежність $G = f(p)$ має параболічний характер (крива $A-B-0$, рис. 12.7). Витрата газу дорівнюватиме нулю, якщо $p_2 = p_1$. Зі зниженням тиску витрата газу зростає до якоїсь максимальної величини G_{\max} , коли $p = p_{кр}$

і $V = V_{кр} = a$. Наскільки природне збільшення витрати газу по правій гілці параболи $A-B$, настільки неймовірне зменшення його по лівій гілці параболи $B-0$, якщо $p_2 < p_{кр}$. Причому в точці 0 згідно з формулою (12.7), якщо $p_2 = 0$ витрата має дорівнювати 0 .

Дослідами встановлено, що витрата газу через звужуване сопло має максимум, якщо $p_2 = p_{кр}$, але з подальшим зниженням тиску $p_2 < p_{кр}$ витрата залишається постійною, що дорівнює максимальному (ділянка $B-C$, рис. 12.7).

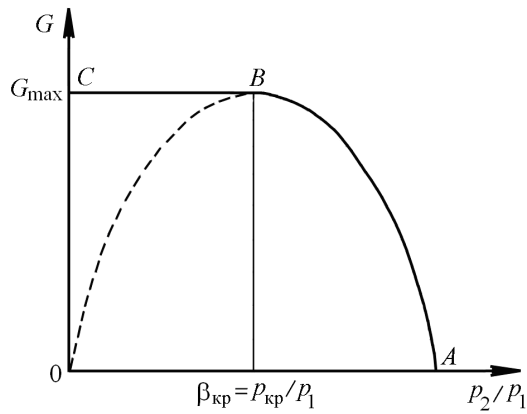


Рис. 12.7. Залежність витрати газу через звужуване сопло від співвідношення тиску p_2 / p_1

Сталість витрати $G = G_{max}$, якщо $p_2 < p_{кр}$ можна пояснити тим, що зі зниженням тиску середовища не відбувається зниження тиску на зрізі сопла. Сталий на зрізі сопла тиск $p_{кр}$ відповідає

критичній швидкості, що дорівнює швидкості звуку, причому це максимальна швидкість, яку може мати газ під час течії через звукуване сопло. За цієї швидкості ніяке зменшення зовнішнього тиску всередину сопла не передається; воно немовби зноситься потоком газу, що рухається з такою самою швидкістю, з якою поширюються збурення (зменшення тиску).

Розглянемо умови переходу через критичну швидкість, зокрема зв'язок між зміною стану потоку і профілем каналу. Аналізувати процес течії будемо на підставі рівнянь нерозривності, енергії, адіабати. Всі рівняння розглядатимемо в диференціальній формі.

Рівняння нерозривності $\omega V = GW$ після диференціювання має вигляд

$$\omega dV + V d\omega = G dW + W dG .$$

Якщо врахувати, що $dG = 0$ і поділити обидві частини на ωV , отримаємо:

$$\frac{dV}{V} + \frac{d\omega}{\omega} = \frac{GdW}{\omega V} = \frac{dW}{W}$$

або

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dW}{W} - \frac{dV}{V} . \tag{12.11}$$

Рівняння адіабати $\frac{dp}{p} + k \frac{dW}{W} = 0$, звідки

$$\frac{dW}{W} = -\frac{1}{k} \frac{dp}{p}.$$

Із рівняння (10.5)

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -Wdp; \quad VdV = -W dp,$$

або після ділення на V^2 маємо

$$\frac{dV}{V} = -\frac{W}{V^2} dp.$$

Підставивши значення dW/W і dV/V у рівняння (12.11), отримаємо формулу

$$\frac{d\omega}{\omega} = \left(\frac{W}{V^2} - \frac{1}{kp}\right) dp = \frac{kpW - V^2}{kpV^2} dp,$$

у якій $kpW = a^2$, де a – швидкість звуку в газі; отже,

$$\frac{d\omega}{\omega} = \left(\frac{a^2V^2}{kpV^2}\right) dp$$

Оскільки для сопла $dp < 0$, $dV > 0$ і, якщо швидкість течії менша за швидкість звуку $(a^2 - V^2) > 0$, то сопло має бути таким, що звужується у напрямку руху газу ($d\omega < 0$). Якщо швидкість течії більша від швидкості звуку $(a^2 - V^2) < 0$, то сопло повинне бути таким, що розширюється у напрямку руху газу ($d\omega > 0$).

Місце переходу частини сопла, що звужується, в ту, що розширюється – найвужчий перетин, в якому $V = V_{кр} = a$.

Проведений аналіз показав, що швидкість газу $V > a$ можна отримати в комбінованому соплі, яке складається з частин, що звужуються і частин, що розширюються. Таке сопло називається за іменем винахідника соплом Лавалю (рис. 12.8).

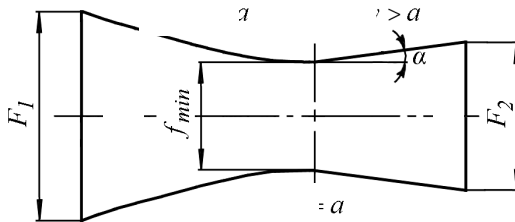


Рис. 12.8. Сопло Лавалю

Конфузорна частина сопла Лавалю, що звужується, працює за дозвукової швидкості ($V < a$), а дифузорна, що розширюється, – за надзвукової швидкості ($V > a$). У найменшому перерізі сопла швидкість потоку дорівнює місцевій швидкості звуку.

Розглянемо зміну швидкості та площі поперечного перерізу залежно від зміни тиску за довжиною сопла. Для зручності такого аналізу скористаємося формулами (12.7), (12.10) і подамо їх у

безрозмірному вигляді. Для цього швидкість потоку

$$V = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} RT_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]}$$

поділимо на величину $\sqrt{RT_1}$.

Безрозмірне відношення

$$\frac{V}{\sqrt{RT_1}} \tag{12.12}$$

називають *параметром швидкості*.

Витрата газу через сопло

$$G = \frac{\omega V}{W} = \frac{\omega V p_2}{RT_2}. \tag{12.13}$$

Помножимо і поділимо праву частину рівності (12.13) на p_1/T_1 , тоді

$$G = \frac{\omega V p_1}{RT_1} \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}.$$

Оскільки зв'язок між тиском і температурою можна визначити за рівнянням адіабати для ізоентропійної течії газу, то

$$G = \frac{\omega V p_1}{\sqrt{RT_1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k}. \tag{12.14}$$

Після підстановки значення швидкості потоку в рівняння (12.14), отримаємо:

$$G = \frac{\pi p_1}{\sqrt{RT_1}} \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(k+1)/k} \right]}$$

Безрозмірне відношення

$$\frac{\pi}{\left(\frac{G}{p_1} \right) \sqrt{RT_1}} = \frac{\pi}{G \sqrt{W_1 / p_1}} \quad (12.15)$$

називають *параметром площі*.

Залежності параметрів швидкості та площі у функції відношення тиску p_2 / p_1 , показано на рис. 12.9.

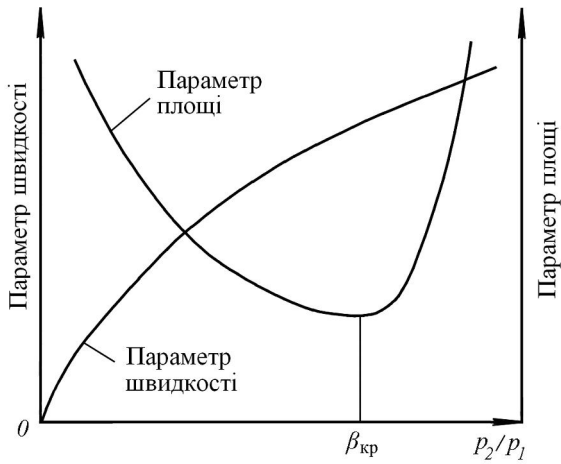


Рис. 12.9. Залежності параметрів швидкості газу і площі у функції відношення тиску p_2 / p_1 .

Як видно з графіків, параметр площі поперечного перерізу спочатку зменшується. Це пояснюється тим, що швидкість збільшується швидше, ніж питомий об'єм. Так триває до перерізу, у якому $\frac{p_2}{p_1} = \beta_{кр}$. У цьому перерізі встановлюється критичний тиск і швидкість набуває значення швидкості звуку. При подальшій побудові цієї кривої за формулою (12.15) параметр площі, а отже, і площа поперечного перерізу будуть збільшуватися; збільшується також і параметр швидкості (12.12).

Частина сопла Лавалю, що розширюється, створює умови для отримання надзвукового потоку, які не можуть бути створені тільки зниженням тиску в середовищі, у яке відбувається витікання. Розрахунок комбінованого сопла зводиться до визначення прохідних перерізів сопла ω_{min} і ω_2 за заданої витрати G та кута розширення сопла α (рис. 12.8), що забезпечує безвідривну течію газу.

Профілізацією проточної частини сопла досягається лише різний розподіл тиску всередині сопла, але витрата при цьому у вихідному перерізі завжди залишається постійною.

Таким чином, для того, щоб повністю розширити газ до тиску навколишнього середовища (розрахунковий режим роботи сопла), потрібно для випадку $p_2 \geq p_{кр}$ сопло виконувати звужувальним.

Якщо у звужуваному соплі тиск $p_2 < p_{кр}$, то газ розширюється до тиску в навколишньому середовищі, але його розширення від тиску $p_{кр}$ до p_2 відбуватиметься за соплом і кінетична енергія газу повністю не може бути використана. Для повного перетворення енергії тиску в кінетичну енергію при $p_2 < p_{кр}$ потрібно застосовувати сопло Лаваля.

Приклад 12.1. Витікання води із закритої вертикальної посудини в атмосферу відбувається за постійного геометричного напору $H=3\text{м}$ через зовнішній циліндричний насадок діаметром $d_0=0,08\text{м}$ (рис. 12.10). Визначити, який надлишковий тиск p_1 необхідно створити на вільній поверхні води в посудині для того, щоб витрата під час витікання становила $Q=0,05\text{ м}^3/\text{с}$.

Розв'язання: Для зовнішнього циліндричного насадка коефіцієнт витрати $\mu = 0,82$ (див. табл.12.1). Площа перерізу насадка:

$$\omega_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} = 0,005\text{ м}^2.$$

Витрата рідини під час витікання :

$$Q_d = \mu \omega_0 \sqrt{2gH_0},$$

Звідки отримуємо діючий напір H_0 :

$$H_0 = \left(\frac{Q_d}{\mu \omega} \right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = \left(\frac{0,05}{0,82 \cdot 0,005} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 9,81} = 7,58\text{ м}.$$

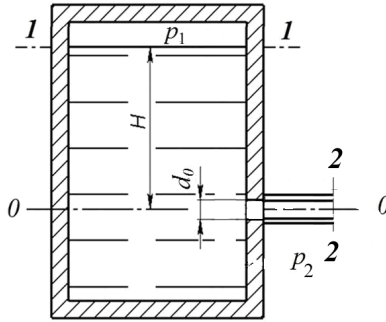


Рис. 12.10. Витікання рідини через насадок

У розглянутому випадку

$$H_0 = H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g},$$

де $p_2 = p_{\text{атм}}$.

Звідси маємо надлишковий тиск на вільній поверхні:

$$p_1 - p_2 = (H_0 - H)\rho g = (7,58 - 3) \cdot 1000 \cdot 9,81 = 44930 \text{ Па}$$

Приклад 12.2. Сила $F=1200\text{Н}$ штовхає поршень діаметром $d_{\text{п}}=0,12\text{м}$ у теплоізованому циліндрі, який наповнений повітрям (рис. 12.11). Витікання з циліндра відбувається крізь отвір діаметром $d_0=0,03\text{м}$ у навколишнє середовище з тиском $p_{\text{а}}=101325 \text{ Па}$. Внаслідок розширення у вихідному отворі повітря набуває температури $t_0=15^\circ\text{C}$. Необхідно визначити тиск $p_{\text{ц}}$ і температуру повітря у циліндрі $t_{\text{ц}}$, швидкість V_0 і масову витрату G повітря, яке витікає через вихідний отвір.

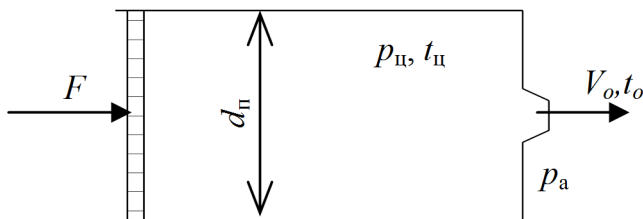


Рис. 12.11. Витікання повітря под дією поршня

Розв'язання. Визначимо надлишковий тиск у циліндрі:

$$p_{ц} = \frac{F}{\pi \frac{d_n^2}{4}} = \frac{1200}{3,14 \frac{0,12^2}{4}} = 106103 \text{ Па.}$$

Температуру повітря у циліндрі визначимо з рівняння адіабати:

$$T_{ц} = T_0 \left(\frac{p_{ц} + p_a}{p_a} \right)^{\frac{k-1}{k}} = (15 + 273,15) \left(\frac{106103 + 101325}{101325} \right)^{0,286} = 353,7 \text{ К.}$$

Визначимо швидкість витікання повітря через отвір,

$$V_o = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} R T_{ц}} = \sqrt{2 \frac{1,4}{1,4+1} 287 \cdot 353,7} = 344,1 \text{ м/с.}$$

Масову витрату повітря крізь вихідний отвір визначимо з урахуванням надкритичного перепаду тиску між циліндром і навколишнім середовищем:

$$\frac{p_u + p_a}{p_a} = \frac{106103 + 101325}{101325} = 2,05 > 1,89;$$

$$G = \omega_o \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}} R \frac{p_u + p_a}{\sqrt{T_u}} =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 0,003^2}{4} \cdot 0,0404 \frac{106103 + 101325}{\sqrt{353,7}} = 0,00315 \text{ кг/с (11,3 кг/год).}$$

СПИСОК ВИКОРАСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Гідравліка і гідроприводи: навч. посіб. для автомеханіків/* В.П. Сидоренко, О.М. Яхно. – К.: Ун-т «Україна». 2007. – 163 с.
2. *Гідрогазотермодинаміка: навч. посіб./* [В.М. Бадах, М.М. Глазков, Ю.С. Головка та ін.]; за ред. Г.Й. Зайончковського. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 352с.
3. *Константинов Ю.М.* Технічна механіка рідини і газу: підручник/ Ю.М.Константинов, О.О.Гіжа. – К.: Вища шк., 2002. – 277 с.
4. *Кулінченко В.Р.* Гідравліка, гідравлічні машини і гідропривод: підручник. – К.: Фірма «ІНКОС», Центр навч. літ-ри, 2006. – 616с.

5. *Левицький Б.Ф.* Гідравліка. Загальний курс/ Б.Ф. Левицький, Н.П. Лещій. – Львів: Світ, 1994. – 264 с.
6. *Рогалевич Ю.П.* Гідравліка: підручник/ Ю.П. Рогалевич. – К.: Вища шк., 2010. – 431с.
7. *Срібнюк С.М.* Гідравлічні та аеродинамічні машини. Основи теорії і застосування: навч. посіб./ С.М. Срібнюк. – К.: Центр навч. літератури, 2004. – 328 с.
8. *Яхно О.М.* Гидромеханика, газовая динамика и теории гидродинамических решеток: Записки/ О.М. Яхно. – Габрово, 1975. – 86 с.
9. Коваль О.Д. *Прикладні питання механіки рідини і газу: навч. посіб.* Електронне навчальне видання НМУ №Е10/11-215 / О.Д. Коваль, О.М. Яхно -К.: НТУУ «КПІ» 2011. – 106 с.
10. *Краснов Н.Ф.* Прикладная аэродинамика / Н.Ф. Краснов, В.Н. Кошевой, А.Н. Данилов. – М.: Высш. шк., 1974. – 731 с.
11. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М: Наука, 1969. – 824 с.
12. *Дейч М.Е.* Гидрогазодинамика: учеб. пособие для вузов / М.Е. Дейч, А.Е. Зарянкин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
13. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
14. *Albertson M.L.* Fluid mechanics for engineers / M.L. Albertson, J.R. Barton, D.B. Simons. – Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc, 1960. – 575 p.
15. *Munson B.R.* Fundamentals of fluid mechanics / B.R. Munson, D.F. Yong, T.H. Okiishi. – N. Y. John Wiley & Sons, Inc., 2002. – 822 p.
16. *Емцев Б.Т.* Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
17. *Френкель Н.З.* Гидравлика / Н.З. Френкель. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 456 с.
18. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений / С.М. Тарг. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 420 с.

19. *Некрасов Б.Б.* Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах: учебник / Б.Б. Некрасов. – М: Машиностроение, 1967. – 236 с.

20. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М: Машиностроение, 1992. – 672 с.

21. *Новоселов В.Ф.* Типовые расчеты при проектировании и эксплуатации газопроводов: учеб. пособие для вузов / В.Ф. Новоселов, А.И. Гольянов, Е.М. Муфтахов. – М.: Недра, 1982. – 136 с.

22. *Сборник задач по гидравлике и газодинамике для нефтяных вузов* / под ред. Г.Д. Розенберга. – М.: Недра, 1990. – 238с.

23. *Альтшуль А.Д.* Гидравлика и аэродинамика: учеб. для вузов / А.Д. Альтшуль, Л.С. Животовский, Л.П. Иванов. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.

24. *Башта Т.М.* Машиностроительная гидравлика / Т.М. Башта. – М: Машиностроение, 1971. – 671 с.