МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний авіаційний університет

Фізика

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Навчальний посібник

За загальною редакцією
професора А. П. Поліщука

Київ 2016

УДК 537.1(075.8)
ББК В 33я7
Ф 503

Автори:

А. П. Поліщук, П. І. Чернега,
Б. Ф. Лахін, С. Л. Максимов

Рецензенти:

І. С. Войтович — д-р пед. наук, проф.
(Рівненський державний гуманітарний університет);

О. В. Ковальчук — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський університет технологій та дизайну);

М. В. Головко — канд. пед. наук, провід. наук. співроб.
(Інститут педагогіки НАПН України)

Рекомендовано до друку вченою радою Національного авіаційного університету (протокол № 4 від 25.05.2016).

Ф 503 **Фізика**. Електрика і магнетизм: навч. посібник / А. П. Поліщук П. І. Чернега, Б. Ф. Лахін, С. Л. Максимов; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. — К. : НАУ, 2016. — 340 с.

ISBN 978-966–932–000–1

Пропонований посібник є переробленим виданням одного з найперших видань нового типу, підготовка яких стала необхідною у зв’язку з приєднанням України до Болонського процесу та переходом до кредитно-модульної системи навчання. Він продовжує започатковану та апробовану на кафедрі загальної фізики НАУ серію «Модульне навчання. Фізика», що складається із семи модулів.

Модуль 3 «Електрика і магнетизм» систематизовано подає програмний матеріал з основних положень і законів електрики і магнетизму. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Питання для самоперевірки допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

Для студентів усіх технічних напрямів підготовки вищих навчальних закладів.

УДК 537.1(075.8)
ББК В 33я7

ISBN 978-966–932–000–1

ВСТУП

Загальні відомості про зміст

У посібнику подано модуль 3 «Електрика і магнетизм» дисципліни «Фізика». Його мета полягає в опануванні студентами фундаментальних знаньоснов електромагнетизму.

У результаті вивчення матеріалу модуля студенти мають *знати* визначення таких понять, як «вектор напруженості електричного і магнітного поля», «потенціал електричного поля», «електроємність», «сила струму», «вектор густини струму», «напруга», «основні закони електромагнетизму», формулювання теореми Гаусса, законів повного струму та електромагнітної індукції.

Студенти повинні *вміти* використовувати методи експериментальних і теоретичних досліджень електродинаміки, будувати графіки, визначати похибки фізичних вимірювань, використовувати здобуті знання для розв’язування практичних задач.

Необхідно *розуміти*, що електричні та магнітні явища тісно пов’язані між собою. Потрібно звернути увагу на те, що виклад ведеться з використанням диференціального та інтегрального числень, але на доступному для студента-першокурсника рівні.

Структура модуля 3

Модуль 3 «Електрика і магнетизм» складається з навчальних елементів (НЕ), а саме:

НЕ-1 — Електростатика;

НЕ-2 — Постійний електричний струм;

НЕ-3 — Магнітне поле у вакуумі;

НЕ-4 — Постійне магнітне поле в речовині, електромагнітна індукція;

НЕ-5 — Лабораторні роботи;

НЕ-6 — Індивідуальні завдання;

НЕ-7 — Таблиці довідок.

Навчальні елементи НЕ-1—НЕ-4 складаються з теоретичного ядра, питань для самоконтролю, прикладів розв’язування теоретичних задач для ведення аудиторних занять. У навчальному елементі НЕ-5 поданий опис лабораторних робіт, які виконують у цьому розділі фізики, та інструкції для їх виконання. Навчальний елемент НЕ-6 містить задачі для виконання індивідуальних домашніх завдань. У НЕ-7 подаються необхідні таблиці довідок.

Для успішного опрацювання модуля радимо не тільки ретельно вивчати теоретичний матеріал, а й використовувати питання для самоконтролю.

Модуль «Електрика і магнетизм» необхідний і корисний для студентів усіх технічних спеціальностей. Поняття, які вивчають у цьому модулі, є базовими для всіх інших розділів, їх використовують і поглиблюють у курсах технічної електродинаміки.

Вступ до розділу «Електрика і магнетизм»

Відомості про електричні та магнітні явища можна знайти у працях, що дійшли до нас з дуже давніх часів. Інтенсивні дослідження цих явищ здійснювали у XVIII–XIX ст. Дослідження таких відомих фізиків, як Х. Ерстед і М. Фарадей, показали, що існує тісний зв’язок між електричними та магнітними явищами. На основі цих досліджень Д. Максвелл створив повну класичну теорію електромагнетизму, з якої випливає, що електричні та магнітні явища є проявом єдиної наявної в природі електромагнітної взаємодії.

Вивчення розділу «Електрика і магнетизм» почнемо з електростатичних явищ, в основі яких лежить взаємодія електричних зарядів, яку визначає закон Кулона. Ідея М. Фарадея про електричне поле, як матеріальний носій взаємодії зарядів, значно спрощує підхід до задач електростатики. Тому основну увагу приділяють характеристикам електричного поля: напруженості, зміщенню, потенціалу. Навчальний елемент НЕ-2 присвячений опису постійного електричного струму, як напрямленого руху заряджених частинок у провідниках. Розглянуті основні характеристики й умови існування струму. Виведені закони, що поєднують характеристики струму та провідників.

Взаємодію намагнічених тіл, провідників зі струмом, рухомих електричних зарядів і т. ін. у вакуумі вивчають у навчальному елементі НЕ-3. Це зручно робити з допомогою магнітного поля, яке, як і електричне, є одним із проявів електромагнітного поля. У навчальному елементі НЕ-4 розглянуте постійне магнітне поле в речовині та явище електромагнітної індукції. Останнє явище, а також уведені Дж. К. Максвеллом струми зміщення є тим містком, що поєднує електричні та магнітні явища в єдину електромагнітну взаємодію.

Закінчується розділ формулюванням в інтегральній і диференціальній формах рівнянь Максвелла, які є основою завершеної класичної теорії електромагнітних явищ.

Навчальний елемент 1
ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Вивчивши НЕ-1, студент повинен знати основні положення і поняття електростатики, вміти формулювати, записувати й аналізувати закони електростатики, теорему Гаусса для електричного поля, а також навчитися застосовувати теоретичні знання до розв'язування практичних задач

1.1. Електричні заряди та їх взаємодія

Здатність багатьох тіл електризуватися — набувати електричного заряду — відома людству дуже давно. Відомо також, що існує два види електричних зарядів, умовно названих позитивними і негативними. Заряди одного знака відштовхуються, протилежного — притягуються.

Електричний заряд — важлива властивість багатьох елементарних частинок. Усі елементарні частинки можуть мати електричний заряд одного з трьох значень:

$$q = e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл};$$

$$q = 0;$$

$$q = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Заряд e дістав назву *елементарного*. Наприклад, елементарна частинка електрон має негативний елементарний заряд, протон — позитивний, нейтрон — нульовий.

Будь-який заряд макроскопічного тіла є сумою елементарних зарядів, тому кажуть, що електричний заряд квантований, тобто може змінюватись тільки порціями, кратними елементарному заряду. Але оскільки елементарний заряд дуже малий, досить часто вважають, що заряд тіла змінюється неперервно.

Абсолютна величина електричного заряду не залежить від інерціальної системи, у якій його вимірюють. Тому вважають, що **електричний заряд релятивістськи інваріантний, тобто його**

абсолютна величина не залежить від того, рухається цей заряд чи перебуває у стані спокою.

Електричні заряди можуть лише переміщуватися в просторі, але не можуть за звичайних умов виникати чи зникати. Справді, здається, наприклад, що заряди виникають під час електризації тіл за рахунок тертя. Однак цей процес пов'язаний лише з перерозподілом у просторі елементарних зарядів (електронів і іонів), які раніше існували в цих тілах, але розміщувалися в них так, що заряди протилежних знаків взаємно компенсувалися. Проте збереження певної кількості елементарних зарядів має місце лише в межах звичайних фізичних і хімічних явищ. У фізиці атомних ядер і космічних променів *кількість* зарядів може не зберігатися, наприклад, коли γ-квант утворює пари зарядів — електрон ($-e$) і позитрон ($+e$). Однак при цьому нейтральна частинка — γ-квант перетворюється на пару частинок, сумарний заряд яких також дорівнює нулю, тобто залишається незмінною алгебрична сума зарядів.

Величезний експериментальний матеріал свідчить, що яким би не був процес взаємоперетворення частинок, сумарний заряд зберігається. Інакше кажучи, у природі має місце закон збереження електричного заряду: **в електрично ізольованій системі алгебрична сума електричних зарядів лишається незмінною.** *Електрично ізольованою* називають систему, крізь межі якої не можуть проникати заряджені частинки.

Незважаючи на відносну самостійність, заряд уособлює одну з властивостей матерії. З'ясування природи цього зв'язку — одна з найскладніших проблем сучасної фізики. Поки що не зрозуміло, чому існує тільки елементарний заряд і чому він за абсолютною величиною дорівнює $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а не якомусь іншому значенню.

Для зручності опису електричних явищ використовують ідеалізоване поняття точкового заряду.

Точковим зарядом **називають заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з відстанями до інших заряджених тіл.**

Взаємодію точкових електричних зарядів визначає закон Кулона, доведений експериментально в 1785 р.

Два нерухомі точкові електричні заряди у вакуумі притягуються або відштовхуються із силою, пропорційною до абсо-

лютної величини кожного заряду й обернено пропорційною до квадрата відстані між ними.

У системі СІ, з урахуванням напряму дії сил, закон Кулона записують такими формулами (рис. 1.1 відповідає випадку однойменних зарядів):

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}; \quad (1.1)$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \vec{e}_{21}, \quad (1.2)$$

де q_1, q_2 — величини зарядів, що взаємодіють; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — електрична стала в системі СІ; $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \vec{e}_{12}$ $\left(\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \vec{e}_{21} \right)$ — одиничний вектор (орт), модуль якого дорівнює одиниці $|\vec{e}_{12}| = |\vec{e}_{21}| = e_{12} = e_{21} = 1$.

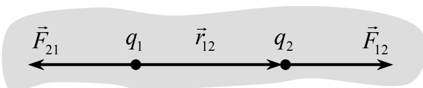

Рис. 1.1

Сила $\vec{F}_{12}$ — це сила, що діє з боку першого заряду на другий, а $\vec{F}_{21}$ — сила, що діє з боку другого заряду на перший. Оскільки $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ ($\vec{e}_{12} = -\vec{e}_{21}$), то $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Однаковий для обох зарядів модуль сили взаємодії можна подати у вигляді

$$F = |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r_{12}^2}. \quad (1.3)$$

Закон Кулона належить до головних експериментальних фактів, на яких будується вчення про електрику. Перевірка його правильності та встановлення меж застосування — важливі завдання, на розв’язання яких було спрямовано значні зусилля експериментаторів. На сьогодні встановлено, що закон Кулона виконується зі значною точністю на відстанях від 10^{-15} до 10^{7} м.

Досліди показують, що під час взаємодії електрично заряджених тіл виконується принцип суперпозиції: **сила взаємодії двох зарядів не залежить від наявності інших зарядів.**

Якщо наявні інші заряди (рис. 1.2), результуюча сила, що діє на заряд q_0, дорівнює векторній сумі сил, з якими кожний заряд діє окремо на q_0:

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + ... + \vec{F}_{i0}. \tag{1.4}$$

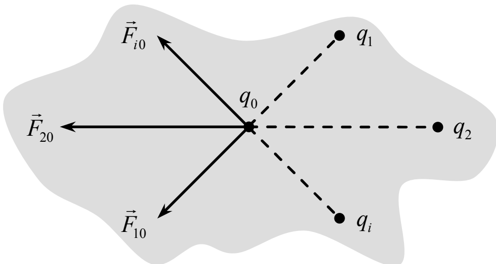

Рис. 1.2

Принцип суперпозиції дає змогу визначити силу взаємодії не тільки точкових зарядів, а й будь-яких заряджених тіл. Для цього заряджене тіло слід розбити на достатньо малі частини, які можна вважати точковими зарядами, визначити їх взаємодію і скористатися принципом суперпозиції.

1.2. Електричне поле у вакуумі та його характеристики

1.2.1. Напруженість поля та силові лінії

Електричні заряди взаємодіють на відстані. Тому постає питання: як відбувається ця взаємодія? У середині XIX століття М. Фарадей увів поняття про електричне поле як середовище, з допомогою якого відбувається взаємодія між електричними зарядами.

Згідно з теорією Фарадея, кожний нерухомий заряд створює в навколишньому просторі електричне поле, що діє на інший заряд, і навпаки.

Поле, що створюють нерухомі заряди, називають *електростатичним*. Електростатичне поле — це частинний випадок електромагнітного поля, з допомогою якого відбувається взаємодія будь-яких зарядів.

Отже, електричне поле — це певна властивість простору, що виникає разом із появою заряду та виявляється як дія із силою $\vec{F}$ на інший електричний заряд, унесений у будь-яку точку даного простору. Кількісною (силовою) характеристикою цієї дії є напруженість електричного поля $\vec{E}$.

Напруженість електричного поля в даній його точці дорівнює відношенню сили $\vec{F}$, з якою діє поле на пробний заряд q_0, унесений у цю точку поля, до абсолютної величини цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \tag{1.5}$$

(*пробним* q_0 називають позитивний точковий заряд, що не спотворює поле, яке досліджують).

У системі СІ напруженість електричного поля вимірюють у вольтах, множених на метр.

Вочевидь, що $1\ \text{В/м} = 1\ \text{Вт/А} \cdot \text{м} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м/А} \cdot \text{м} \cdot \text{с} = 1\ \text{Н/Кл}$, тобто за напруженості поля в $1\ \text{В/м}$ на заряд в 1 Кл діє сила в 1 Н.

Якщо поле створює точковий заряд q, то

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \vec{e}, \tag{1.6}$$

а напруженість поля дорівнює

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{e}. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) визначає напруженість електричного поля, що створює точковий заряд q, у точці, віддаленій на відстань $\vec{r}$ від нього. З формули (1.7) випливає, що напруженість поля в даній точці не залежить від наявності в ній пробного заряду. Напрям вектора $\vec{E}$ збігається з напрямом сили, з якою діє на позитивний пробний заряд позитивний або негативний заряд (рис. 1.3).

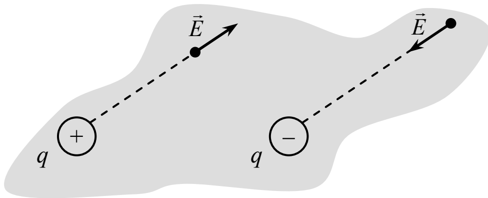

Рис. 1.3

Для електричних полів виконується принцип суперпозиції. Цей принцип випливає з виразу (1.5): **напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний заряд окремо:**

$$\vec{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_0 \vec{E}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i. \tag{1.8}$$

Для графічного зображення електричного поля використовують лінії напруженості, або силові лінії.

*Лініями напруженост*і (*силовими лініями*) електричного поля називають криві, дотичні до яких у кожній точці збігаються з напрямом вектора $\vec{E}$ (рис. 1.4).

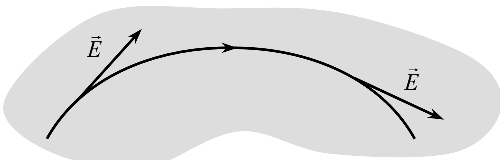

Рис. 1.4

Лінії напруженості починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних зарядах. У разі ізольованих точкових зарядів лінії напруженості являють собою сукупність радіальних прямих, напрямлених від заряду, якщо він позитивний, і до заряду, якщо він негативний (рис. 1.5). Ось чому вважають, що позитивні заряди є джерелом вектора $\vec{E}$, а негативні — стоком.

Силові лінії не перетинаються, оскільки в кожній точці поля вектор $\vec{E}$ має лише єдине значення.

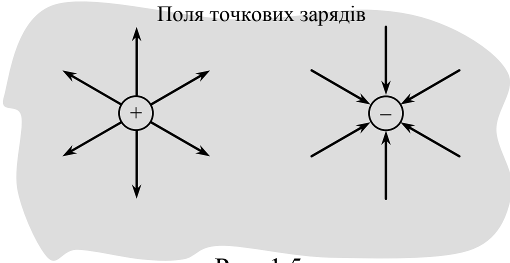

Рис. 1.5

Наголосимо, що силові лінії не мають особливого фізичного змісту. Вони є нашим уявленням, з допомогою якого наочно можна описати електричне поле. Зрозуміло, що через будь-яку точку поля можна провести силову лінію. Отже, силових ліній у просторі нескінченна множина.

Не потрібно також ототожнювати силові лінії з траєкторіями руху зарядів у полі (траєкторії — це лінії, дотичні до яких указують напрям швидкості). Причина в тому, що за дотичною до траєкторії напрямлений вектор швидкості, а напрям швидкості далеко не завжди збігається з напрямом сили. Оскільки абсолютна величина і напрям напруженості електростатичного поля $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ (1.5) визначає сила $\vec{F}$, то в загальному випадку вектор швидкості не збігається за напрямом з вектором напруженості $\vec{E}$.

Реально електрично заряджені частинки мають інертну масу і тому майже ніколи не рухаються вздовж силових ліній, за винятком тих випадків, коли останні є прямими лініями, та початкові швидкості частинок збігаються з ними за напрямом або дорівнюють нулю, чи коли рух частинок відбувається в дуже в'язкому середовищі.

Щоб з допомогою силових ліній відобразити не тільки напрям, а й абсолютну величину напруженості поля, домовились на графіках поля проводити силові лінії з певною щільністю.

Щільність ліній обирають таким чином, щоб кількість ліній, що проходять крізь одиничну площину, зорієнтовану перпендикулярно до цих ліній, була кратною модулю вектора $\vec{E}$.

Надалі для спрощення вважатимемо, що щільність ліній просто дорівнює модулю вектора $\vec{E}$. Тоді за картиною ліній напруженості можна судити про напрям і величину вектора $\vec{E}$ у різних точках простору. На рис. 1.6 зображені силові лінії для неоднорідного й однорідного полів. Для неоднорідного поля напруженість спадає зліва направо.

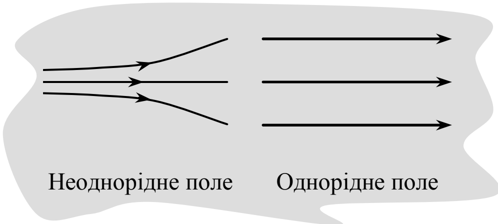

Рис. 1.6

На рис. 1.5 наведена картина силових ліній точкових зарядів. Щільність силових ліній на будь-якій відстані r від зарядів дорівнює відношенню повної кількості силових ліній N, що вийшли (увійшли) із заряду, до поверхні сфери радіуса r, тобто $\text{щільність} = \dfrac{N}{4\pi r^2}$. Вочевидь, щільність спадає обернено пропорційно до квадрата відстані від заряду, тобто так само, як і напруженість точкового заряду $\vec{E}$ [див. формулу (1.7)].

Доведемо, що силові лінії електростатичного поля починаються і закінчуються тільки на зарядах або прямують у нескінченність чи з нескінченності. Доведення проведемо для точкового заряду, а згідно з принципом суперпозиції здобутий результат буде правильним для електричних зарядів довільної конфігурації.

Щільність силових ліній поля точкового заряду чисельно дорівнює модулю напруженості електричного поля

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}. \tag{1.9}$$

Загальна кількість ліній, що перетинають сферичну поверхню довільного радіуса r, дорівнюватиме добутку щільності ліній, помножену на площу поверхні сфери:

$$N_E(=)E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{|q|}{\varepsilon_0} \qquad (1.10)$$

(знак рівності в дужках означає, що йдеться лише про чисельну рівність).

Здобутий результат означає, що кількість ліній на будь-якій відстані від заряду є однаковою. Звідси випливає, що силові лінії електростатичного поля ніде, окрім зарядів, не починаються і не закінчуються. Для ізольованих точкових зарядів вони починаються на заряді $+q$ і прямують у нескінченність або, прямуючи з нескінченності, закінчуються на заряді $-q$ (див. рис. 1.5).

Іноді викликає подив, що кількість силових ліній, які перетинають поверхню відповідно до виразу (1.10), може подаватися нецілим числом. Не потрібно цим суттєво перейматися, оскільки силові лінії — це наше умовне уявлення і особливого фізичного змісту вони не мають.

1.2.2. Робота в електричному полі. Потенціальний характер електростатичного поля

Оскільки в електростатичному полі на заряди діють сили, то під час переміщення зарядів сили поля виконують роботу.

Визначимо роботу з переміщення заряду q_0 у центральному електростатичному полі, утвореному зарядом q, що міститься в точці O (рис. 1.7).

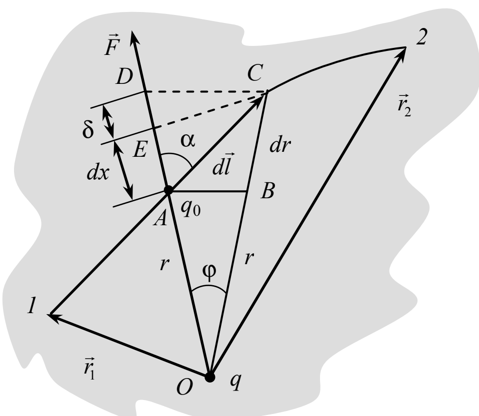

Рис. 1.7

Нехай заряд q_0 рухається за траєкторією від точки *1* до точки *2*. У певний момент часу t він потрапляє в точку A, віддалену від O на відстань $AO = r$. Через деякий час dt, подолавши шлях $AC = dl$, заряд потрапляє в точку C, віддалену від O на відстань $OC = r + dr$, де dr — приріст радіуса.

Оберемо dr достатньо малий, щоб шлях dl можна було вважати прямою лінією, а силу $\vec{F}$ — сталою. Тоді робота dA з переміщення заряду q_0 від A до C дорівнюватиме:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fdl\cos\alpha = Fdx,$$

де F — кулонівська сила, що діє між зарядами; $dx = dl\cos\alpha$ — проекція dl на пряму OA; α — кут між напрямом дії сили та напрямом переміщення; CE — перпендикуляр із точки C на пряму AO.

Відкладемо на радіусі OC відстань $OA = OB$, а на радіусі OA — відстань $OC = OD$ й опустимо на OD перпендикуляр з точки C. Тоді

$$dx = dl\cos\alpha = AD - ED = dr - \delta.$$

Визначимо $\delta = ED$ через r, dr і кут φ між радіусами OA та OC. Із рівнобедреного трикутника ODC маємо:

$$DC = 2OC\sin\frac{\varphi}{2} = 2(r+dr)\sin\frac{\varphi}{2},$$

а з прямокутного трикутника DCE дістаємо:

$$ED = \delta = DC\cos(EDC) = 2(r+dr)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) = 2(r+dr)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Тепер:

$$dA = Fdx = F(dr-\delta) = F\left[dr - 2(r+dr)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right] = Fdr - F2(r+dr)\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

За елементарно малих φ другий доданок прямує до нуля. Тому для $dr \to 0$ і $\varphi \to 0$, $dA \to Fdr$, де $F = q\,q_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, тобто

$$dA = \frac{qq_0dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Повна робота з переміщення заряду q_0 із точки *1* у точку *2* така:

$$A=\int_1^2 dA=\int_{r_1}^{r_2}\frac{qq_0dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \qquad (1.11)$$

Отже, за довільного вибору початкової і кінцевої точок робота не залежить від форми шляху, а визначається тільки положенням цих точок щодо заряду q, який утворює електричне поле. Вочевидь, під час переміщення заряду q_0 замкненим контуром l ($r_1 = r_2$) робота дорівнює нулю:

$$A=\oint_l dA=0. \qquad (1.12)$$

Згідно з принципом суперпозиції останнє твердження справджується для будь-якої системи нерухомих точкових зарядів q.

Силові поля, що задовольняють умову (1.12), називають *потенціальними* (див. механіку, підрозд. 2.9). Запишемо цю умову в іншій формі. Для цього розглянемо випадок переміщення заряду q_0 у довільному електростатичному полі з напруженістю $\vec{E}$. Із рис. 1.8 випливає, що елементарна робота за елементарного переміщення $d\vec{l}$ заряду q_0 дорівнює

$$dA=\vec{F}d\vec{l}=q_0\vec{E}d\vec{l}=q_0 Edl\cos\alpha=q_0E_\tau dl,$$

де E_τ — тангенціальна складова вектора $\vec{E}$ у напрямку руху заряду.

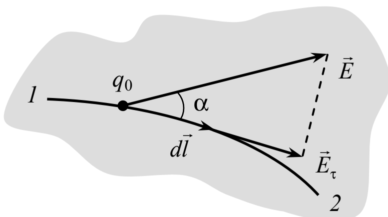

Рис. 1.8

Для повного переміщення з точки *1* у точку *2* дістаємо

$$A=\int_1^2 dA=q_0\int_1^2\vec{E}d\vec{l}=q_0\int_1^2 E_\tau dl\ . \qquad (1.13)$$

Відповідно до виразу (1.12) робота поля з переміщення заряду замкненим контуром l дорівнює нулю $A = 0$, тому вираз (1.13) для замкненого контуру можна подати у вигляді

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint_l E_\tau dl = 0. \qquad (1.14)$$

Інтеграл вектора $\vec{E}$ по замкненому контуру l називають *циркуляцією вектора* $\vec{E}$.

Отже, ми показали, що в потенціальному полі циркуляція вектора напруженості поля за довільним замкненим контуром дорівнює нулю.

Справедливе й обернене твердження: **якщо циркуляція вектора $\vec{E}$ за довільним замкненим контуром дорівнює нулю, то векторне поле $\vec{E}$ — потенціальне.** Доведення останнього твердження виходить за межі нашого курсу.

Зазначимо, що співвідношення (1.14) справджується тільки для електростатичного поля. Надалі переконаємося, що поле зарядів, які рухаються (тобто поле, що змінюється з часом), не є потенціальним; отже, умова (1.14) для *непотенціального* поля не виконується.

1.2.3. Потенціал поля і його зв'язок із напруженістю

Розглянута в попередньому підрозділі робота з переміщення пробного заряду q_0 від точки *1* до точки *2* в електростатичному полі точкового заряду q виконується за рахунок сил поля і може бути подана як зменшення (або приріст зі знаком «мінус») потенціальної енергії взаємодії між цими зарядами

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -(W_{p2} - W_{p1}) \qquad (1.15)$$

(нагадаємо, що зміну будь-якої величини a можна характеризувати або за її приростом $\Delta a = a_2 - a_1$, або за зменшенням $a_1 - a_2 = -\Delta a$; приріст і зменшення — алгебричні величини, що мають різні знаки).

Порівнюючи формули (1.11) і (1.15), дістаємо вираз для потенціальної енергії пробного заряду q_0, що міститься в полі точкового заряду q:

$$W_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}.$$

Потенціальна енергія визначена з точністю до сталої величини. Значення сталої можна дістати з умови, що в разі нескінченної відстані від заряду q до заряду q_0 потенціальна енергія їх взаємодії дорівнює нулю. Отже, const = 0.

Остаточно дістаємо:

$$W_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.16}$$

Запишемо елементарну роботу dA, що виконується під час елементарного переміщення $d\vec{l}$ під дією сили $\vec{F}$, через координати x, y, z:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(такий запис випливає з означення скалярного добутку векторів

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}; \quad d\vec{l} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — одиничні орти).

У довільному потенціальному полі, зокрема в електростатичному, елементарна зміна потенціальної енергії є повним диференціалом dW_p. Справді, робота в потенціальному стаціонарному полі не залежить від шляху. Отже, її визначають винятково положенням тіла (заряду) у просторі, тобто координатами. Математично повний диференціал можна подати через частинні похідні:

$$dW_p = \frac{\partial W_p}{\partial x}dx + \frac{\partial W_p}{\partial y}dy + \frac{\partial W_p}{\partial z}dz$$

$\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}, \frac{\partial W_p}{\partial y}, \frac{\partial W_p}{\partial z}\right.$ — частинні похідні W_p за координатами x, y, $z\Big)$.

Враховуючи формулу (1.15), елементарну роботу можемо записати через приріст потенціальної енергії $dA = -dW_p$, або ж

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}dx + \frac{\partial W_p}{\partial y}dy + \frac{\partial W_p}{\partial z}dz\right).$$

Вочевидь, $F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}$. Тоді вектор сили $\vec{F}$ можна подати як

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{F} = -\mathrm{grad} W_p. \quad (1.17)$$

Градієнт (grad) скалярної величини зручно записувати через векторний диференціальний оператор *набла*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Сам по собі оператор набла не має змісту. Він набуває змісту в комбінації зі скалярною або векторною функцією, на яку його символічно множать, наприклад:

$$\nabla W_p = \left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z}\vec{k}\right) = \mathrm{grad} W_p.$$

Нагадаємо, що градієнт (grad) скалярної величини, що залежить від координат x, y, z, — це вектор, який вказує напрям найшвидшої її зміни.

Отже, потенціальна енергія W_p найшвидше змінюється за напрямом дії сили $\vec{F}$, тобто вздовж радіуса-вектора $\vec{r}$ від центру одного заряду до центру іншого (електростатичне поле є центральним полем).

Тоді, враховуючи вираз (1.17), модуль градієнта (тобто сили) можна записати не через частинні похідні, а через повну похідну від радіуса-вектора за умови, що заряд, який створює електричне поле, міститься в початку системи координат:

$$F = -\frac{dW_p}{dr}.$$

Застосувавши цю формулу до виразу $W_p = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (1.16), дістаємо вже знайомий за формулою (1.3) закон Кулона:

$$F = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Повернемося до потенціальної енергії (1.16). Вона залежить не тільки від величини пробного заряду q_0, а й від величин q і r, що визначають електричне поле. Отже, енергію W_p можна використати для опису поля подібно до того, як це було зроблено у випадку сили, що діяла на пробний заряд.

Неважко переконатися, що різні пробні заряди q_{01}, q_{02}, ..., q_{0i} матимуть в одній і тій самій точці поля різні потенціальні енергії W_{p1}, W_{p2}, ..., W_{pi}, але відношення цих енергій до відповідного пробного заряду, згідно з формулою (1.16), буде сталим для даного заряду q, що утворив електричне поле:

$$\frac{W_{p1}}{q_{01}} = \frac{W_{p2}}{q_{02}} = \ldots = \frac{W_{pi}}{q_{0i}}.$$

Потенціалом точки поля називають відношення потенціальної енергії пробного заряду в цій точці до абсолютної величини самого пробного заряду:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}. \tag{1.18}$$

Тоді потенціал поля точкового заряду можна подати у вигляді

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.19}$$

Вочевидь, на нескінченності потенціал точкового заряду дорівнює нулю. Водночас для $r \to 0$ потенціал $\varphi(r \to 0) \to \infty$. Це пов'язано з тим, що точковий заряд формально має нескінченну об'ємну густину, оскільки його об'єм дорівнює нулю. Саме нескінченна об'ємна густина заряду і зумовлює нескінченне значення потенціалу для $r \to 0$.

Новий вираз для роботи під час переміщення пробного заряду q_0 з точки *1* в точку *2*, які мають відповідно потенціали φ_1 і φ_2, можна дістати на основі формул (1.15) і (1.18):

$$A = W_{p1} - W_{p2} = q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{1.20}$$

Якщо заряд віддаляється від точки *1* у нескінченність (тобто $\varphi_2 = 0$), то робота сил поля

$$A_\infty = q_0\varphi_1. \tag{1.21}$$

З цієї формули стає зрозумілим фізичний зміст потенціалу точки поля. **Потенціал певної точки поля чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили поля під час переміщення одиничного точкового позитивного заряду з даної точки в нескінченність.**

Порівнявши вирази для роботи (1.13) і (1.20), дістаємо вираз для різниці потенціалів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \int_1^2 E_\tau dl. \tag{1.22}$$

Одиницею виміру потенціалу в системі СІ є вольт $\left(\text{В} = \text{Дж/Кл}\right)$. Відповідно до виразу (1.21) ***вольт* — це такий потенціал точки поля, під час переміщення з якої в нескінченність заряду в 1 Кл сили поля виконують роботу в 1 Дж.**

Для потенціалу також виконується принцип суперпозиції, тому потенціал точки поля системи *N* точкових зарядів дорівнює алгебричній сумі потенціалів полів, що створює в цій точці кожний заряд окремо:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}. \tag{1.23}$$

Геометричне місце точок поля з однаковим потенціалом називають *еквіпотенціальною поверхнею*. Згідно з формулою (1.20) $dA = q_0 d\varphi$, де $d\varphi$ — зменшення потенціалу $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Оскільки для еквіпотенціальної поверхні $(\varphi = \text{const})$ $d\varphi = 0$ $(q_0 \neq 0)$, то робота під час переміщення заряду цією поверхнею дорівнює нулю $dA = 0$. Водночас цю саму роботу можна подати у вигляді