МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

А. П. Поліщук, П. І. Чернега, Б. Ф. Лахін

Фізика

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

Навчальний посібник

Видання третє, виправлене і доповнене

За загальною редакцією
професора А. П. Поліщука

Київ 2017

УДК 534(075.8)
ББК В 3я 7
П 509

Рецензенти:

Г. В. Клімушева — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Інститут фізики НАН України);

І. С. Войтович — д-р пед. наук, проф.
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова);

М. В. Головко — канд. пед. наук, доц.
(Інститут педагогіки АПН України)

Рекомендовано вченою радою Національного авіаційного університету (*протокол № 3 від 22.03.2017*).

Поліщук А. П.

П 509 Фізика. Коливання і хвилі: навч. посібник / А. П. Поліщук, П. І. Чернега, Б. Ф. Лахін; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. — Вид. 3-є., випр. і доп. — К. : НАУ, 2017. — 220 с.

ISBN 978–966-932–057-5

Пропонований посібник є переробленим виданням одного з найперших видань нового типу, підготовка яких стала необхідною у зв’язку з приєднанням України до Болонського процесу та переходом до кредитно-модульної системи навчання. Він відкриває започатковану та апробовану на кафедрі загальної фізики НАУ серію «Модульне навчання. Фізика», що складається із семи модулів.

У модулі «Коливання і хвилі» систематизовано подано програмний матеріал з основ теорії коливань і хвильових процесів. Навчальні елементи цього модуля містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної та індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Запитання та завдання для самоперевірки й ключові слова допоможуть студентові в підготовці до рейтингового контролю.

Для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

УДК 534 (075.8)
ББК В 3я 7

ISBN 978–966–932–057-5

ВСТУП

1. Загальні відомості про зміст

У цьому посібнику подано четвертий модуль дисципліни «Фізика». Його мета — допомогти студентам оволодіти фундаментальними знаннями з основ теорії коливальних і хвильових процесів.

У результаті вивчення матеріалу модуля студенти мають *знати* визначення таких понять, як коливальний і хвильовий процес, гармонічні коливання і монохроматичні хвилі, амплітуда і фаза коливального процесу, основні закономірності поширення механічних і електромагнітних хвиль.

Студенти повинні *вміти* використовувати методи експериментальних і теоретичних досліджень коливальних і хвильових процесів, будувати графіки, визначати похибки фізичних вимірювань, використовувати здобуті знання для розв'язування практичних задач.

Необхідно *розуміти*, що механічні й електричні коливання мають різну природу, але для їх опису можна застосувати однаковий математичний апарат.

Зауважимо, що виклад ведеться з використанням диференціального та інтегрального числення, але на доступному для студента-першокурсника рівні.

2. Структура модуля 4

Модуль «Коливання і хвилі» складається з таких навчальних елементів (НЕ):

НЕ–1 — Механічні коливання;
НЕ–2 — Електричні коливання;
НЕ–3 — Пружні хвилі;
НЕ–4 — Електромагнітні хвилі;
НЕ–5 — Лабораторні роботи;
НЕ–6 — Індивідуальні завдання.

Навчальні елементи НЕ–1 — НЕ–4 складаються з теоретичного ядра і прикладів розв'язування теоретичних задач.

У навчальному елементі НЕ–5 подано опис лабораторних робіт, які виконуються в цьому розділі фізики, та інструкції до їх виконання.

Навчальний елемент НЕ–6 містить задачі для виконання індивідуальних домашніх завдань.

Модуль «Коливання і хвилі» необхідний і корисний для студентів усіх технічних спеціальностей. Поняття, що вивчаються в цьому модулі, є базовими для інших розділів фізики, зокрема вони використовуються і поглиблюються в курсах теоретичної механіки, аеродинаміки, технічної електродинаміки тощо.

3. Вступ до розділу фізики «Коливання і хвилі»

Коливання вирізняють серед усіх інших видів руху за ознакою обмеженості і повторюваності руху біля певного середнього значення. Рух при цьому слід розуміти в широкому сенсі слова, як зміну взагалі. У цьому модулі докладно розглянуто механічні й електричні коливання. Хвилі — це процес поширення коливань у просторі. У модулі вивчають пружні й електромагнітні хвилі.

Розвиток теорії коливальних і хвильових процесів пов’язаний з іменами таких відомих учених, як Д. Релей, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов та ін.

Вивчення розділу «Коливання і хвилі» почнемо з механічних коливань, які докладно розглянуто в навчальному елементі НЕ–1. На прикладі пружинного маятника розвинуто математичний апарат так званих малих коливань, який далі застосовується для розглядання інших коливальних процесів.

Навчальний елемент НЕ–2 присвячено опису електричних коливань, що виникають в електричному коливальному контурі. Застосування розвиненого в першому модулі математичного апарату дає змогу отримати всі основні характеристики вільних і вимушених електричних коливань — як з урахуванням згасання, так і в разі нехтування ним. Докладно розглянуто змінний струм, отримано основні співвідношення між напругою і струмом на елементах кола у вигляді закону Ома для змінного струму.

Поширення коливань у пружному середовищі як пружна хвиля описано в навчальному елементі НЕ–3. Розглянуто хвильове рівняння, яке зручно використовувати під час вивчення будь-яких хвильових процесів.

На основі рівнянь Максвелла в навчальному елементі НЕ–4 розглянуто електромагнітні хвилі. Отримано основні характеристики електромагнітних хвиль, що поширюються у просторі.

Навчальний елемент 1
МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

1.1. Загальні відомості про коливання

Коливаннями називають процеси, що повторюються в часі. Залежно від фізичної природи процесу, який повторюється, розрізняють коливання механічні, електричні, електромеханічні, звукові тощо. Виявляється, що всі ці процеси математично можна описати однаковими диференціальними рівняннями. Розглянемо найбільш поширені в природі та техніці коливання: механічні й електричні. Механічні коливання характеризуються періодичною зміною положення тіла відносно точки рівноваги, а під час електричних коливань періодично змінюється величина заряду, напруги, струму. *Періодичними* називають такі коливальні процеси, за яких значення фізичної величини повторюється через однакові (або приблизно однакові) проміжки часу. *Найменший проміжок часу, протягом якого система повертається в початкове положення, називають періодом коливання.*

Залежно від характеру дії на коливальну систему розрізняють вільні (власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання і параметричні коливання.

Вільними, *або власними*, називають коливання, що відбуваються в системі, залишеній самою по собі після виведення її з положення рівноваги. Такі коливання відбуваються, наприклад, у системі, що складається з кульки, закріпленої на пружині.

Вимушеними називають коливання, під час яких коливальна система зазнає дії з боку зовнішньої періодичної сили. Прикладом таких коливань є коливання моста, що виникають унаслідок поштовхів коліс потяга під час проходження по стиках залізничних рейок, вібрація крил літака тощо. Такі процеси є небезпечними у разі появи коливань із великою амплітудою.

Автоколивання, як і вимушені коливання, *супроводжуються дією зовнішніх сил на коливальну систему*, але момент часу дії цих сил заданий самою системою, тобто система сама керує зовнішньою дією. Прикладом автоколивальної системи є годинник, у якому маятник одержує поштовхи за рахунок енергії піднятої гирі або закрученої пружини, причому ці поштовхи відбуваються в момент проходження маятника через середнє положення.

Під час *параметричних коливань* за рахунок зовнішньої дії відбувається періодична зміна якого-небудь параметра системи, наприклад, довжини нитки, до якої причеплено кульку, що здійснює коливання.

Найпростішими є *гармонічні коливання*, тобто коливання, що описують *за законом синуса або косинуса*. Цей вид коливань є важливим, тому що, по-перше, він найбільш поширений у природі й техніці, а по-друге, періодичні процеси іншої форми (не гармонічні) можна подати як результат накладання кількох гармонічних коливань.

1.2. Малі коливання

Поширеним типом руху є так звані малі коливання, що виконує коливальна система поблизу свого положення стійкої рівноваги. Розглянемо механічну систему, положення якої задається за допомогою однієї величини, наприклад координати x. У такому разі система має один степінь вільності, а потенціальна енергія є функцією однієї змінної $x: U = U(x)$. У положенні стійкої рівноваги функція $U(x)$ має мінімум. Умовимося координату x і потенціальну енергію відлічувати від положення рівноваги, тоді $U(0) = 0$. Оскільки ми розглядаємо малі коливання, то функцію $U(x)$ можна розвинути в ряд Тейлора, обмежившись малими степенями

$$U(x) \approx U(0) + \dot{U}(0)x + \ddot{U}(0)x^2/2$$

(у математиці для зручності похідну часто записують у вигляді $dU/dx \equiv \dot{U}$). Функція $U(x)$ при $x = 0$ має мінімум. Це означає, що перша похідна дорівнює нулю $\dot{U}(0) = 0$, а друга більша за нуль. Тоді

$$U(x) = \ddot{U}(0)x^2/2 = kx^2/2, \qquad (1.1)$$

де введено позначення $\ddot{U}(0) = k \ (k > 0)$.

Вираз (1.1) ідентичний виразові для потенціальної енергії деформованої пружини. Узявши похідну від $U(x)$, знайдемо силу, що діє на систему:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) тотожна формулі для пружної сили деформованої пружини. Тому сили вигляду (1.2) незалежно від їхньої природи називають *квазіпружними*. Неважко зрозуміти, що сила (1.2) завжди напрямлена до положення рівноваги. Про це свідчить знак «мінус», який показує, що напрям сили є протилежним до напряму зміщення. Модуль цієї сили пропорційний величині відхилення системи від положення рівноваги. Силу, що характеризується такими властивостями, часто називають *відновлювальною силою*.

Як приклад малих коливань розглянемо систему, яка являє собою кульку масою m, закріплену на пружині (масою пружини нехтуємо) (рис. 1.1).

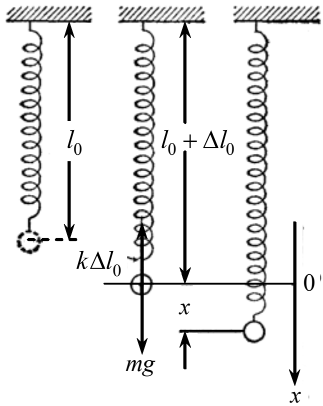

Рис. 1.1

У положенні рівноваги силу mg врівноважено силою пружності $k\Delta l_0$ (k — коефіцієнт жорсткості пружини): $mg = k\Delta l_0$, де Δl_0 — видовження пружини під дією сили тяжіння. Будемо характеризувати зміщення тіла з положення рівноваги координатою x, причому координатну вісь x спрямуємо вертикально вниз, а нуль осі сумістимо з положенням рівноваги кульки. Якщо змістити кульку в положення з координатою x, то видовження пружини становитиме $\Delta l_0 + x$. Тоді результуюча сила дорівнюватиме $F = mg - k(\Delta l_0 + x)$. Урахувавши, що $mg = k\Delta l_0$, дістанемо вираз (1.2). Таким чином, у розглянутому прикладі результуюча сили тяжіння і пружної сили має характер квазіпружної сили.

Вважатимемо, що після зміщення кульки систему залишили саму по собі. Під дією квазіпружної сили кулька буде рухатися зі зростаючою швидкістю до положення рівноваги. При цьому потенціальна енергія системи зменшуватиметься, а кінетична енергія збільшуватиметься. У положенні рівноваги швидкість кульки досягне максимального значення, а отже, максимальною буде і кінетична енергія. Далі, рухаючись за інерцією, рух кульки уповільнюватиметься і припиниться, коли вся кінетична енергія перетвориться в потенціальну, тобто коли зміщення кульки дорівнюватиме $-x$. Потім такий самий процес відбуватиметься під час руху кульки у зворотному напрямі. Якщо сили опору в системі відсутні, то рух кульки буде відбуватися в межах від x до $-x$ нескінченно довго.

Відповідно до другого закону Ньютона рівняння руху кульки має вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \qquad (1.3)$$

де $\omega_0^2=k/m$ — *циклічна (колова) частота власних незгасаючих коливань (власна частота)*.

Оскільки $k/m>0$, то ω_0 — *дійсна величина*, *що визначається самими лише параметрами коливальної системи*. Отже, за відсутності сил опору рух кульки описують диференціальним рівнянням (1.3), яке називають *рівнянням гармонічного осцилятора*.

У будь-якій реальній коливальній системі неодмінно наявні сили опору, дія яких зумовлює зменшення енергії системи. Якщо зменшення енергії системи не компенсується за рахунок роботи зовнішніх сил, коливання будуть згасати. У найпоширеніших випадках сила опору пропорційна до швидкості:

$$F_{\text{оп}}=-rv=-r\frac{dx}{dt},$$

де r — *коефіцієнт опору*, а знак «мінус» означає, що сила опору і швидкість мають протилежні напрями.

За наявності сил опору другий закон Ньютона має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-rv=-kx-r\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (1.4)$$

де $\beta=r/2m$ — *коефіцієнт згасання*.

Здобуте рівняння (1.4) є диференціальним рівнянням, що описує згасаючі коливання.

Нагадаємо, що коливання, описувані рівняннями (1.3) і (1.4), є вільними, тобто система, що була виведена з положення рівноваги або отримала поштовх, здійснює коливання сама по собі, без впливу зовнішніх сил. Тепер нехай наша коливальна система зазнає дії зовнішньої сили, що змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \cos\omega t.$ У цьому разі рівняння другого закону Ньютона набирає вигляду:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx + F_0\cos\omega t \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t, \qquad (1.5)$$

де $f_0 = F_0 / m.$ Диференціальне рівняння (1.5) описує вимушені коливання. Зауважимо, що в цьому рівнянні $\omega_0 \neq \omega.$

Запишемо рівняння (1.5) у компактному вигляді

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t. \qquad (1.6)$$

Отже, для вивчення коливань нам необхідно розв’язувати диференціальні рівняння вигляду (1.6), або в загальному випадку

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \qquad (1.7)$$

де a і b — константи; $f(t)$ — деяка функція від часу.

Рівняння вигляду (1.7) називають *лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами*.

Для рівняння (1.3) $a = 0;$ $b = \omega_0^2,$ для (1.4) $a = 2\beta;$ $b = \omega_0^2.$ В обох цих випадках функція $f(t) \equiv 0.$ У разі вимушених коливань (1.6) $f(t) = f_0\cos\omega t.$

1.3. Комплексні числа

Розв’язування рівняння (1.7) значно полегшується, якщо використовувати комплексні числа. Комплексним числом $\tilde{z}$ називають число вигляду

$$\tilde{z} = x + iy, \qquad (1.8)$$

де x і y — дійсні числа; i — уявна одиниця, визначена умовою $i^2 = -1$.

Число x називають *дійсною частиною* комплексного числа $\tilde{z}$ і позначають $x = \operatorname{Re}\tilde{z}$. Число y називають *уявною частиною* $\tilde{z}$ і позначають $y = \operatorname{Im} z$. Число

$$\tilde{z}^* = x - iy \tag{1.9}$$

називають *комплексно-спряженим* з числом $\tilde{z}$.

Дійсному числу x відповідає точка на осі x. Комплексному числу $\tilde{z}$ відповідає точка на площині, яка має координати x, y (рис. 1.2). Отже, комплексне число можна задати у вигляді $\tilde{z} = x + iy$ за допомогою декартових координат x і y відповідної точки. Те саме комплексне число можна також записати за допомогою полярних координат ρ і φ. Між зазначеними системами координат існують співвідношення

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}(y/x), \tag{1.10}$$

де число φ називають *аргументом* комплексного числа $\tilde{z}$.

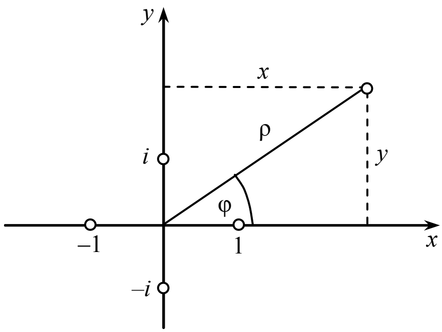

Рис. 1.2

Відстань від початку координат до точки, що відповідає числу $\tilde{z}$, називають *модулем* комплексного числа:

$$|\tilde{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Урахувавши співвідношення (1.10), можна записати комплексне число в тригонометричній формі:

$$\tilde{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексні числа $\tilde{z}_1 = x_1 + iy_1$ і $\tilde{z}_2 = x_2 + iy_2$ вважають рівними між собою, якщо окремо рівні між собою їхні дійсні та уявні частини:

$$\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2, \text{ якщо } x_1 = x_2 \text{ і } y_1 = y_2.$$

Модулі двох рівних комплексних чисел однакові, а аргументи можуть відрізнятися лише доданком, кратним 2π:

$$\rho_1 = \rho_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2\pi.$$

Із виразів (1.8) і (1.9) випливає, що, коли $\tilde{z} = \tilde{z}^*$, уявна частина цього числа дорівнює нулю, тобто число $\tilde{z}$ виявляється виключно дійсним. Тому ця умова є умовою дійсності числа $\tilde{z}$.

З математики відомо формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.11}$$

Якщо в цій формулі замінити φ на $-\varphi$ і врахувати, що косинус — функція парна ($\cos(-\varphi) = \cos\varphi$), а синус — непарна ($\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$) дістанемо співвідношення

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{1.12}$$

Додавши два вирази (1.11) і (1.12) та розв'язавши здобуте співвідношення відносно косинуса, дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{1.13}$$

Якщо відняти вираз (1.12) від (1.11), то матимемо

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.14}$$

За допомогою формули (1.11) комплексне число можна записати в показниковій формі:

$$\tilde{z} = \rho e^{i\varphi}. \tag{1.15}$$

Комплексно-спряжене число в показниковій формі має вигляд

$$\tilde{z}^* = \rho e^{-i\varphi}. \tag{1.16}$$

У разі додавання комплексних чисел додаються окремо їхні дійсні та уявні частини:

$$\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Добуток комплексних чисел зручно шукати, коли ці числа подано в показниковій формі:

$$\tilde{z} = \tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Аналогічно відбувається ділення комплексних чисел:

$$\tilde{z} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Узявши до уваги формули (1.15) і (1.16), дістанемо

$$\left|\tilde{z}\right|^2 = \tilde{z} \cdot \tilde{z}^* = \rho^2,$$

тобто квадрат модуля комплексного числа дорівнює добутку цього числа на його комплексно-спряжене.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння

Як було з’ясовано в підрозд. 1.2 під час розгляду коливальних процесів, у загальному випадку необхідно розв’язувати диференціальні рівняння другого порядку вигляду $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$. Константи a, b можуть бути й нулями. Якщо функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю $\left(f(t) \equiv 0\right)$, то зазначене рівняння називають *однорідним*, якщо ні, то рівняння називають *неоднорідним*. Однорідне рівняння другого порядку (тобто зі старшою другою похідною) має вигляд

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{1.17}$$

Розв’язок будь-якого диференціального рівняння другого порядку містить дві довільні сталі — C_1 і C_2. Розглянемо найпростіший випадок $\ddot{x} = 0$. Перше інтегрування цього рівняння дає $\dot{x} = C_1$. Наступне приводить до функції $x = C_1 t + C_2$. Легко переконатися, що для довільних значень сталих C_1 і C_2 функція $x = C_1 t + C_2$ задовольняє рівняння $\ddot{x} = 0$. Якщо сталим приписати певні значення, наприклад $C_1 = 2$, $C_2 = 7$, то матимемо *частинний* розв’язок $x = 2t + 7$.

Множину всіх без винятку частинних розв'язків називають *загальним* розв'язком диференціального рівняння. Загальний розв'язок рівняння $\ddot{x}=0$ має вигляд $x=C_1t+C_2$.

У теорії лінійних диференціальних рівнянь доведено, що якщо x_1 і x_2 — лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (1.17), то загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$x=C_1x_1+C_2x_2, \tag{1.18}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі (функції x_1 і x_2 називають лінійно незалежними, якщо співвідношення $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\equiv 0$ виконується тільки в тому разі, коли α_1 і α_2 дорівнюють нулю).

Щоб знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння (1.17), використовують підстановку $x(t)=e^{\lambda t}$, де λ — стала величина. Диференціювання змінної $x(t)$ дає $\dot{x}(t)=\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$. Підставлення цих значень у рівняння (1.17) дає так зване *характеристичне рівняння*

$$\lambda^2+a\lambda+b=0. \tag{1.19}$$

Корені рівняння (1.19) являють собою ті значення λ, для яких функція $x(t)=e^{\lambda t}$ задовольняє рівняння (1.17).

Якщо корені рівняння (1.19) різні $\lambda_1\neq\lambda_2$, то функції $e^{\lambda_1 t}$ і $e^{\lambda_2 t}$ будуть лінійно незалежними. Отже, загальний розв'язок (1.17) можна записати у вигляді

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}. \tag{1.20}$$

Коли $\lambda_1=\lambda_2$, загальний розв'язок (1.17) набирає вигляду

$$x=C_1e^{\lambda t}+C_2te^{\lambda t}. \tag{1.21}$$

У теорії диференціальних рівнянь є теорема, відповідно до якої загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.7) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1.17) і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x_{\text{заг.неоднор}}=x_{\text{заг.однор}}+x_{\text{част.неоднор}}. \tag{1.22}$$

Тепер розглянемо таку ситуацію. Припустимо, що коефіцієнти a і b — дійсні, а функція у правій частині рівняння (1.7) уявна. Зобразимо цю функцію у вигляді $f(t)+i\varphi(t)$. Тоді неоднорідне рівняння (1.7) матиме вигляд

$$\ddot{z}+a\dot{z}+bz=f(t)+i\varphi(t) \tag{1.23}$$

(позначили невідому функцію через z). Очевидно, що для такого випадку розв'язок буде комплексним $z(t)=x(t)+iy(t)$. Підставивши цей розв'язок у рівняння (1.23), дістанемо:

$$\ddot{x}+i\ddot{y}+a\dot{x}+ai\,\dot{y}+bx+bi\,y=f+i\varphi. \tag{1.24}$$

У рівних комплексних чисел мають бути рівними окремо дійсні та уявні частини. Отже, рівняння (1.24) розпадається на два незалежні рівняння

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t); \qquad \ddot{y}+a\dot{y}+by=\varphi(t), \tag{1.25}$$

перше з яких збігається з рівнянням (1.7). Цю властивість рівняння (1.24) часто використовують, щоб знайти розв'язок рівняння (1.7), оскільки такий підхід іноді значно полегшує розрахунки. Нехай у рівнянні (1.7) права частина дійсна. Додавши до неї довільну уявну функцію, зведемо рівняння до вигляду (1.25). Знайшовши комплексний розв'язок, візьмемо його дійсну частину. Вона і буде розв'язком початкового рівняння (1.7).

1.5. Вільні незгасаючі механічні коливання

У підрозд. 1.2 ми встановили, що вільні незгасаючі механічні коливання описуються диференціальним рівнянням (1.3). Перепишемо його у вигляді

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0, \tag{1.26}$$

де $\omega_0^2=k/m$ — власна частота, яка є дійсною величиною. Якщо коливальна система описується рівнянням вигляду (1.26), то можна однозначно стверджувати, що ця коливальна система є гармонічним осцилятором. Отже, коливальна система у вигляді кульки на пружині є гармонічним осцилятором. Будемо шукати розв'язок (1.26) у вигляді $x=e^{\lambda t}$, який підставимо в рівняння (1.26) і дістанемо характеристичне рівняння вигляду $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$ Це рівняння має уявні корені $\lambda_1 = +i\omega_0$ і $\lambda_2 = -i\omega_0$. Відповідно до виразу (1.20) загальний розв'язок (1.26) має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \tag{1.27}$$

де C_1 і C_2 — комплексні сталі.

Функція $x(t)$ описує коливання, тобто зміну зміщення за часом уздовж осі x (див. рис. 1.1). Очевидно, що ця функція має бути дійсною. Для цього коефіцієнти C_1 і C_2 в (1.27) необхідно вибрати так, щоб виконувалась умова $\tilde{z} = \tilde{z}^*$ (див. підрозд. 1.3), а саме:

$$C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} \tag{1.28}$$

(вираз (1.27) прирівняли його комплексно-спряженому). Співвідношення (1.28) буде виконуватися за умови $C_1 = C_2^*$ і $C_2 = C_1^*$, звідки випливає, що коефіцієнт C_2 є комплексно-спряженим коефіцієнтові C_1. Тепер відповідно до виразу (1.15) запишемо коефіцієнти C_1 і C_2 у показниковій формі у вигляді $C_1 = (A/2)e^{i\varphi}$, $C_2 = (A/2)e^{-i\varphi}$, де $A/2$ — модуль, а φ — аргумент комплексного числа. Підставлення цих коефіцієнтів у (1.27) дає

$$x(t) = (A/2)(e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-i(\omega_0 t+\varphi)}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

В останньому перетворенні скористалися формулою (1.13).

Отже, загальний розв'язок (1.26) має вигляд

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{1.29}$$

де A і φ — довільні сталі.

У виразі (1.29) сталу A називають *амплітудою*. Оскільки косинус змінюється від -1 до $+1$, то значення x лежить у межах $-A \le x \le +A$. *Амплітуду вважають додатною величиною, і вона дорівнює максимальному відхиленню від положення рівноваги* $|x|_{\max} = A$. Аргумент під знаком косинуса $\omega_0 t + \varphi$ називають *фазою коливань*, а величину φ — *початковою фазою, тобто це значення фази в момент часу* $t = 0$. Кожне конкретне коливання характеризується своїми значеннями амплітуди та початкової фази, і їх визначають із початкових умов (див. далі). Оскільки зміщення x не змінюється у разі додавання або віднімання від фази цілого числа 2π, то завжди початкову фазу можна підібрати такою, щоб вона за модулем була меншою за π. Тому зазвичай розглядають значення φ, що лежать у межах $-\pi < \varphi < +\pi$.

Відповідно до (1.29) відхилення x змінюється з часом за законом косинуса, отже рух кульки на пружині, яка перебуває під дією сили $F = -kx$, являє собою *гармонічне коливання*. Ще раз наголосимо, що найпростіші періодичні коливання, у процесі яких зміщення x змінюється з плином часу за законом косинуса (або синуса, що однаково, оскільки одну з цих функцій можна перетворити в іншу шляхом заміни φ, наприклад $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \sin(\omega_0 t + \varphi')$, де $\varphi' = \varphi + \pi/2$) називають *гармонічними коливаннями*.

Косинус — періодична функція з періодом 2π. Знайдемо проміжок часу, за який фаза змінюється на 2π: $[\omega_0(t+T)+\varphi] = [\omega_0 t + {}$ ${}+\varphi + 2\pi]$, звідки

$$T = 2\pi/\omega_0. \tag{1.30}$$

Це є найменший проміжок часу, протягом якого система повертається в початкове положення. Отже, T — *період вільних незгасаючих коливань*. Підставивши у формулу (1.30) значення $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, дістанемо

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{1.31}$$

Із виразу (1.31) випливає, що чим більша маса кульки, тим повільніше вона буде коливатися на пружині. Якщо маса постійна, то для більш жорсткої пружини коливальний рух буде швидшим. Зауважимо, що період гармонічного осцилятора не залежить від амплітуди A, тобто від початкових умов. Для нього байдуже, яка величина початкового зміщення. Цю властивість називають *ізохронністю* коливань. Ізохронність, однак, має місце лише доти, поки виконується закон Гука. Для великих зміщень закон Гука порушується. Тоді і коливання перестають бути ізохронними, тобто з'являється залежність періоду коливань від амплітуди.

Кількість коливань за одиницю часу називають частотою коливань:

$$\nu = 1/T. \tag{1.32}$$

За одиницю частоти взято частоту такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Цю одиницю називають герцем [Гц] = [$с^{-1}$]. Використовують також величини 10^3 Гц — кілогерц (кГц), 10^6 Гц — мегагерц (МГц).

Із виразу (1.30) випливає, що

$$\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi\nu. \tag{1.33}$$

Отже, ω_0 — циклічна (колова) частота, яка дорівнює кількості повних коливань за 2π секунд і, як і кутова швидкість, вимірюється у радіанах за секунду (рад/с).

У загальному випадку стан механічної коливальної системи характеризують значеннями координат і швидкостей тіл, що утворюють систему. У разі кульки на пружині положення кульки описується тільки однією координатою x, яка змінюється з часом за законом косинуса. Диференціюючи за часом вираз (1.29), дістаємо закон, за яким змінюється швидкість:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.34}$$

Із виразу (1.34) випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, при цьому амплітуда швидкості дорівнює $A\omega_0$, а її фаза випереджає фазу зміщення на $\pi/2$. Диференціюючи (1.34) ще раз за часом, визначаємо прискорення:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \tag{1.35}$$

Зміна прискорення знову відбувається за гармонічним законом, але з амплітудою $A\omega_0^2$. Фаза прискорення випереджає фазу зміщення на π, тобто перебуває в протифазі. Це означає, що в момент часу, коли зміщення досягає найбільшого додатного значення, прискорення досягає найбільшого за абсолютною величиною від'ємного значення, і навпаки. Ураховуючи (1.29), прискорення можна подати у вигляді $\ddot{x} = a = -\omega_0^2 x$, звідки випливає, що для простого гармонічного коливання прискорення пропорційне до зміщення, а їхні знаки протилежні, тобто напрям прискорення завжди протилежний напряму зміщення. При цьому гармонічний коливальний рух, описуваний залежністю від однієї координати x у вигляді (1.29), є *прямолінійним змінним рухом*, швидкість якого періодично змінюється від точки до точки за гармонічним законом [див. (1.34)]. Протягом одного періоду значення швидкості двічі досягає максимуму в точці рівноваги $x = 0$ і двічі перетворюється в нуль у точках максимального відхилення.

На рис. 1.3 зображено графіки залежностей $x(t)$, $\dot{x}(t)$ і $\ddot{x}(t)$ для випадку $\varphi = 0$.

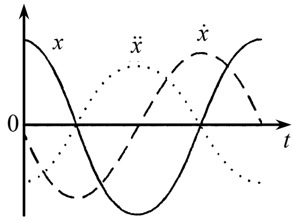

Рис. 1.3

Розв'язок (1.29), що містить значення амплітуди A і початкової фази φ, залежатиме від обставин, за яких почався коливальний процес, тобто від початкових умов. Нехай кулька в початковий момент $t = 0$ має зміщення x_0 і швидкість $\dot{x}_0$. Поклавши в (1.29) і (1.34) $t = 0$, дістанемо:

$$x_0 = A\cos\varphi,\ \dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin\varphi, \tag{1.36}$$

звідки знаходимо шукані сталі

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0^2 / \omega_0^2)},\ \mathrm{tg}\,\varphi = -\dot{x}_0 / x_0\omega_0. \tag{1.37}$$

Рівняння для $\mathrm{tg}\,\varphi$ задовольняють два значення φ в інтервалі $-\pi < \varphi < +\pi$. Із цих двох значень слід узяти те, для якого дістаємо правильні знаки в косинуса й синуса у виразі (1.36).

Для вільних незгасаючих коливань характерним є те, що коливальна система не втрачає енергію (ідеальна коливальна система, де відсутні сили опору). Отже, повна енергія такої системи має залишатися незмінною. Потенціальна енергія гармонічного осцилятора в будь-який момент часу дорівнює $U = kx^2 / 2$. Підставимо в останню рівність вираз для x із (1.29):

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.38}$$

Кінетичну енергію визначимо, скориставшись виразом (1.34):

$$W = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.39}$$

Додавши почленно вирази (1.38) і (1.39) та врахувавши, що $k = m\omega_0^2$, дістанемо вирази для повної енергії

$$E = U + W = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2. \tag{1.40}$$

Отже, повна енергія гармонічного осцилятора справді стала, оскільки її величина не залежить від часу.

Зауважимо, що під час коливального процесу безперервно відбувається перетворення потенціальної енергії в кінетичну, і навпаки. За максимального відхилення $|x|_{\max} = A$ кінетична енергія дорівнює нулю, оскільки в цій точці швидкість дорівнює нулю $(\dot{x} = 0)$. Водночас у цій точці коливальна система має максимальну потенціальну енергію.

Якщо кулька пружного осцилятора проходить положення рівноваги $x = 0$, то кінетична енергія досягає максимального значення, а потенціальна дорівнює нулю. Це ілюструє рис. 1.4. Визначивши максимальне значення потенціальної або кінетичної енергії (відповідно у формулах (1.38) і (1.39) квадрат косинуса і синуса дорівнюють одиниці), дійдемо висновку, що $U_{\max} = W_{\max} = E$, тобто повна енергія дорівнює максимальному значенню або потенціальної, або кінетичної енергії.

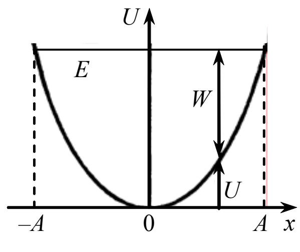

Рис. 1.4

Узявши до уваги (1.40), а також відомі тригонометричні перетворення, формули (1.38) і (1.39) можна записати так:

$$U = E\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]; \qquad (1.41)$$

$$W = E\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right]. \qquad (1.42)$$

Із цих формул бачимо, що U і W змінюються з частотою $2\omega_0$, тобто вдвічі більшою за частоту зміни зміщення, швидкості та прискорення. Відповідно період коливань енергій удвічі менший і становить $T/2 = \pi/\omega_0$. Коливання енергій відбувається навколо середнього значення, що дорівнює $\langle U\rangle = \langle W\rangle = E/2$. Це випливає з формул (1.41) і (1.42), коли врахувати, що в лівій частині рівнянь середнє за період значення квадрата косинуса і синуса дорівнює $1/2$, або, що те саме, коли в правій частині рівнянь середнє за період значення косинуса дорівнює нулю. Зміна потенціальної енергії відбувається у протифазі до зміни кінетичної енергії, і навпаки. На рис. 1.5 зображено характер коливань потенціальної й кінетичної енергій для випадку $\varphi = 0$.

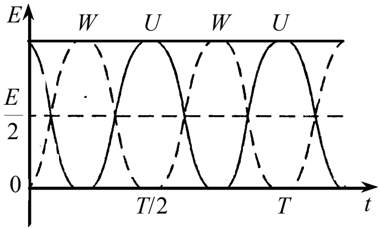

Рис. 1.5

Рівняння руху коливальної системи можна вивести не тільки з рівнянь динаміки, а й із закону збереження енергії E (іноді такий підхід буває простішим). Продемонструємо це на прикладі гармонічного осцилятора. Запишемо повну енергію осцилятора у вигляді

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m(\dot{x})^2}{2}.$$