МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Практикум
для студентів спеціальності 6.040301
«Прикладна математика»

Київ 2014

УДК 519.1(076.5)
ББК В 161я7
Д 482

Укладач: *П. Ф. Жук*

Рецензент: *О. М. Супрун* – канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол №   )

Дискретна математика : практикум / уклад.: П. Ф. Жук. – К. :
Д 50 НАУ, 2014. – 40 с.

Містить методичні рекомендації до практичних занять, що сприяють кращому засвоєнню студентами теоретичного курсу навчальної дисципліни «Дискретна математика», формуванню в них відповідних вмінь і навичок розв’язання типових завдань з теорії множин, комбінаторики, скінчених автоматів, булевих функцій та графів, застосування методів дискретної математики у галузі прикладної математики.

Для кожного практичного заняття викладено посилання на теоретичні відомості, наведено методи і приклади розв’язання типових завдань, сформульовано перелік завдань для самостійного виконання.

Для студентів спеціальності 6.040301 «Прикладна математика».

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Дискретна математика» є обов'язковим компонентом загальної та професійної освіти фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" за напрямом 6.040301 "Прикладна математика". Значення цього курсу визначається насамперед тим, що методи, засоби та алгоритми дискретної математики широко використовуються в сфері комп'ютерних інформаційних технологій.

Метою викладання дисципліни є ознайомлення студентів з теоретичними основами комп'ютерної математики, вироблення навиків розв'язання основних задач дискретної математики, вміння використовувати методи дискретної математики для побудови комп'ютерних моделей, постановки і розв'язання задач прикладної математики та програмування.

Важливою складовою курсу «Дискретна математика» є практичні заняття. Їх метою є закріплення та поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок застосування методів дискретної математики при комп'ютерному моделюванні та дослідженні складних процесів та систем.

У результаті виконання практичних завдань студент повинен вміти знаходити рефлексивне, симетричне та транзитивне замикання бінарного відношення, найменше відношення еквівалентності, що містить дане бінарне відношення; розв'язувати комбінаторні задачі, обчислювати твірні функції та застосовувати їх до комбінаторних задач, обчислювати числа, задані рекурентними співвідношеннями; знаходити кон'юнктивні та диз'юнктивні нормальні форми булевих функцій, визначати повноту системи булевих функцій; застосовувати алгоритми аналізу та синтезу скінчених автоматів; знаходити співвідношення між числовими характеристиками графів, визначати ейлеровість та гамільтоновість конкретних графів.

Практикум «Дискретна математика» призначено для студентів спеціальності "Прикладна математика". Він цілком відповідає програмі навчальної дисципліни, містить методичні вказівки за всіма темами курсу та значну кількість прикладів розв'язання типових задач. Для ефективного використання практикуму в навчальному процесі студент повинен для кожного практичного заняття засвоїти вказаний там теоретичний матеріал, уважно розібрати типові приклади розв'язання задач дискретної математики, наведені в практикумі, та самостійно розв'язати контрольні завдання.

ТЕМА 1. МНОЖИНИ, ВІДНОШЕННЯ, КОМБІНАТОРИКА

Практичне заняття № 1. Операції над множинами

План.
1. Поняття множини. Інтуїтивний принцип об'ємності.
2. Способи задання множин. Інтуїтивний принцип абстракції.
3. Операції над множинами та їх властивості.

Теоретичні відомості: [1, с. 67-77], [2, с. 35-39].

Перше питання.

Приклад 1. Чи існують множини A, B, C і D такі, що $A \subset B$, $B \in C$, $C \in D$ і $A \subseteq D$?

Розв'язання. Існують. Наприклад, $A = \varnothing$, $B = \{x\}$, $C = \{\{x\}, y\}$, $D = \{\{\{x\}, y\}, z\}$. Тоді, для цих множин мають місце $\varnothing \subset \{x\}$, $\{x\} \in \{\{x\}, y\}$, $\{\{x\}, y\} \in \{\{\{x\}, y\}, z\}$ і, одночасно, $\varnothing \subseteq \{\{\{x\}, y\}, z\}$.

Приклад 2. Довести, що якщо $A \subset B$, $B \subseteq C$ і $C \subset D$, то $A \subseteq D$.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Оскільки $A \subset B$, то з означення включення маємо, що $x \in B$. З умов $x \in B$ та $B \subseteq C$ випливає, що $x \in C$. Далі, оскільки $x \in C$ і $C \subset D$, то $x \in D$. Тобто, з того, що довільний елемент $x \in A$ слідує, що $x \in D$. Але тоді за означенням $A \subseteq D$, що і потрібно довести.

Приклад 3. Довести, що множина A усіх парних додатних цілих чисел дорівнює множині B додатних цілих чисел, які можна представити у вигляді суми двох непарних додатних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Доведемо, що $x \in B$. Дійсно, якщо $x \in A$, то $x = 2m$, або $x = (2m-1)+1$. Це означає, що $x \in B$. Припустимо тепер, що $x \in B$, і доведемо, що $x \in A$. Якщо $x \in B$, $x = (2p-1)+(2q-1)$, отже $x = 2(p+q-1)$ і $x \in A$. Таким чином, ми довили, що множини A і B складаються з одних і тих самих елементів. За принципом об'ємності маємо $A = B$.

Друге питання.

Приклад 4. З яких елементів складаються множини

а) $X = \{x | x \in N \text{ і } (x = 1 \text{ або } x-2 \in X\}$;

б) $X = \{x | x \in N \text{ і } (x = 2 \text{ або } x-2 \in X\}$;

в) $X=\{x_n \mid x_n = x_{n-1}+x_{n-2},\ n\geq 2,\ x_1=x_0=1\}$?

Розв'язання. а) X – множина непарних чисел, б) X – множина парних чисел, в) X – множина чисел Фібоначчі.

Третє питання.

Приклад 5. Чи існують множини A, B, X такі, що виконуються умови $\overline{A\cup B}=\varnothing$, $X\Delta A=\varnothing$, $B\setminus A\neq\varnothing$?

Розв'язання. Зобразимо множини A, B, X у вигляді прямокутників, що розташовані на площині у загальному положенні. Кожній області, на які розбита площина прямокутниками, зіставимо по одному символу: символ 4, наприклад, позначає список усіх елементів множини $(A\cap B)\setminus X$ і т.д. Тепер складемо множини A, B, X і універсальну множину U (рис. 1):

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ A=\{1,2,4,5\},\ B=\{4,5,6,7\},\ X=\{2,3,5,7\}.$$

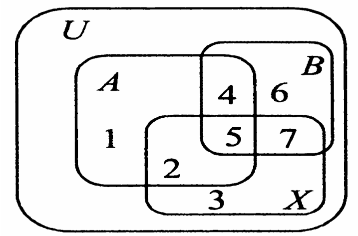

Рис. 1.

Змінимо множини A, B, X так, щоб виконувалися умови задачі. З умови $\overline{A\cup B}=\varnothing$ слідує, що множина $U\setminus(A\cup B)$ не повинна містити елементи, тобто з U віддаляємо 3 і 8. Щоб виконувалася умова $X\Delta A=\varnothing$, потрібно віддалити елементи списків 1, 4, 7. Тоді множини A, B, X мають наступний вигляд:

$$A=\{2,5\},\ B=\{5,6\},\ U=\{2,5,6\}.$$

Зауважимо, що для цих множин $B\setminus A=\{6\}\neq\varnothing$. Якщо під символами 2, 5, 6 розуміти відповідні числа, то отримаємо конкретний приклад множин A, B, X, для яких виконані усі умови задачі.

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 1.1.1-1.1.4], [4, задачі 1.1-1.5].

Практичне заняття № 2. Відношення

План.

1. Декартовий добуток множин.
2. Бінарні відношення та їх властивості.
3. Рефлексивні, симетричні, транзитивні відношення.

Теоретичні відомості: [1, с. 90-106], [2, с. 35, 185-192].

Перше питання.

Приклад 1. Для множин $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{1,3\}$ перевірити істинність рівності $C\times(B\setminus A)=(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$. Чи буде вірна ця рівність для довільних множин A,B,C?

Розв'язання. Безпосередньо підраховуємо:

$$C\times(B\setminus A)=\{1,3\}\times(\{2,3\}\setminus\{1,2\})=\{1,3\}\times\{3\}=\{(1,3),(3,3)\}.$$

$$C\times(A\cap B)=\{1,3\}\times(\{1,2\}\cap\{2,3\})=\{1,3\}\times\{2\}=\{(1,2),(3,2)\}.$$

$$C\times B=\{1,3\}\times\{2,3\}=\{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3)\}.$$

$$(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=$$

$$=\{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3)\}\Delta\{(1,2),(3,2)\}=\{(1,3),(3,3)\}.$$

Отже, дана рівність для вказаних множин вірна. Перевіримо цю рівність у загальному випадку.

Нехай $A=\{a,d\}$, $B=\{b,d\}$, $C=\{c\}$, де a,b,c,d – списки елементів. Тоді $A\cap B=\{d\}$, $C\times(B\setminus A)=\{c\}\times\{b\}=\{(c,b)\}$, де $\{(c,b)\}$ – множина пар елементів, перша компонента яких входе до списку c, а друга – до списку b.

$$(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))=\{(c,b),(c,d)\}\Delta\{(c,d)\}=\{(c,b)\}.$$

Тобто, множини $C\times(B\setminus A)$, $(C\times B)\Delta(C\times(A\cap B))$ складаються з пар однакового виду, а тому рівні для будь-яких A,B,C.

Друге питання.

Приклад 2. Нехай $P=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3)\}$ – задане бінарне відношення. Знайти P^{-1}, $P\circ P$, $P^{-1}\circ P$, $\mathrm{Pr}_2(P^{-1}\circ P)\times\mathrm{Pr}_1(P\circ P)$.

Розв'язання. За означенням інверсії, $(2,1)\in P^{-1}$, оскільки $(1,2)\in P$. Тому, маємо $P^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,2),(2,2)\}$. За означенням композиції, $(1,3)\in P\circ P$, оскільки $(1,2)\in P$ і $(2,3)\in P$. Знаходимо інші пари композиції: $P\circ P=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,2)\}$. Аналогічно отримуємо $P^{-1}\circ P=\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

Далі, за означенням проекції множини векторів на вісь, маємо $\Pr_2\left(P^{-1}\circ P\right)=\{1,2,3\}$. Аналогічно, $\Pr_1\left(P\circ P\right)=\{1,2\}$. Остаточно маємо $\Pr_2\left(P^{-1}\circ P\right)\times\Pr_1\left(P\circ P\right)=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$.

Третє питання.

Приклад 3. На множині $M=\{1,2,3,4\}$ задані відношення:

R_1 = {(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)};
R_2 = {(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4)};
R_3 = {(1,3),(1,4),(2,1),(1,2),(3,1),(3,3),(4,1)};
R_4= {(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)};
R_5 = {(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3)}.

Визначити, які з цих відношень є
а) рефлексивними;
б) антирефлексивними;
в) симетричними;
г) антисиметричними;
д) транзитивними.

Розв'язання. а). За означенням, рефлексивне відношення повинно містити діагональ, тобто всі пари виду (a,a). Тому рефлексивним є відношення R_1, R_2, R_4. б). Антирефлексивне відношення не містить жодної пари виду (a,a), тому антирефлексивним є тільки відношення R_5. в). Симетричне відношення містить пару (b,a), якщо вона містить пару (a,b). Тому симетричними відношеннями є R_1, R_3. г). Антисиметричне відношення не містить одночасно пари (a,b) і (b,a) с $a\neq b$. Тому антисиметричними відношеннями є R_2 і R_5. д). Відношення називається транзитивним, якщо зі співвідношень (a,b) і (b,c) випливає (a,c). Тому відношення R_1 є транзитивним, а відношення R_2 не транзитивне (воно містить пари $(2,3)$ і $(3,1)$, але не містить пару $(2,1)$). Аналогічно встановлюємо, що відношення R_3, R_4, R_5 також не транзитивні.

Завдання для самостійної роботи: [3, 1.2.1-4], [3, 1.17-1.24].

Практичне заняття № 3. Відношення еквівалентності

План.

1. Відношення еквівалентності.
2. Класи еквівалентності. Фактор-множина.
3. Замикання відношень.

Теоретичні відомості: [1, с. 106-112], [2, с. 188, 195-201].

Перше питання.

Приклад 1. На множині $A = \{1, 2, 3\}$ задані відношення:

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$;

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$;

$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,2)\}$.

Визначити, які з цих відношень є відношенням еквівалентності. Для відношення, що не є еквівалентністю, указати, які з властивостей (рефлексивність, симетричність, транзитивність) порушуються.

Розв'язання. Відношення R_1 є еквівалентністю, оскільки воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Відношення R_2 рефлексивне, транзитивне, але не симетричне (не містить пар (2,1), (3,2), (3,1)). Тому R_2 не є відношенням еквівалентності. Відношення R_3 також не є відношенням еквівалентності, оскільки воно рефлексивне, але не симетричне (не містить пар (2,3), (3,1)) і не транзитивне (не містить пару (1,2)).

Друге питання.

Приклад 2. Довести, відношення $x = y(mod 3)$ на множині цілих чисел Z є відношенням еквівалентності. Знайти класи еквівалентності та фактор-множину.

Розв'язання. Це відношення рефлексивне, тобто $x = x(mod 3)$ для будь-якого $x \in Z$. Справді, $x - x = 0$ ділиться на 3 без лишку. Перевіримо симетричність: якщо $x = y(mod 3)$, то $y = x(mod 3)$. Тобто, якщо число $x - y$ ділиться на 3 без лишку, то без лишку ділиться на 3 також число $y - x$. Але це очевидно, оскільки $y - x = -(x - y)$. Таким чином, відношення $x = y(mod 3)$ симетричне. Воно є також транзитивним, оскільки з того, що числа $x - y$ і

$y-z$ діляться на 3 без лишку випливає, що ділиться на 3 без лишку число $x-z=(x-y)+(y-z)$.

Таким чином, відношення $x=y(mod 3)$ є відношенням еквівалентності. Знайдемо його класи еквівалентності. Будь-яке ціле число x можна записати у вигляді $3q+r$, де $q,r\in Z$, $0\le r<3$. Клас еквівалентності буде містити всі цілі числа, які при діленні на 3 дадуть однакові лишки r. Тому ми маємо три класи еквівалентності: $[0]=\{0,3,6,9,12,\ldots\}$, $[1]=\{1,4,7,10,13,\ldots\}$, $[2]=\{2,5,8,11,14,\ldots\}$. В клас $[0]$ потрапляють всі числа, які діляться на 3 без лишку, В клас $[1]$ – всі числа, які при ділені на 3 дають у залишку 1, в клас $[2]$ – всі числа, які дають у залишку 2. Кожен клас можна охарактеризувати єдиним представником цього класу, наприклад, лишком r. Тобто, фактор-множина Z по відношенню $x=y(mod 3)$ буде такою: $\left[Z/x=y(mod 3)\right]=\{[0],\ [1],\ [2]\}$

Третє питання.

Приклад 3. Знайти рефлексивне і симетричне замикання відношення $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ на множині $\{1,2,3\}$.

Розв'язання. Щоб отримати рефлексивне замикання, додамо пари (2,2) і (3,3), бо лише цих пар вигляду (a,a) немає в R. Очевидно, що нове відношення рефлексивне і R – його підмножина. Більш того, воно є підмножиною будь-якого рефлексивного відношення, що містить R. Отже, ми справді отримали рефлексивне замикання відношення R. Аналогічно знаходимо симетричне замикання відношення R: $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

Приклад 4. Знайти транзитивне і транзитивно-рефлексивне замикання відношення $R=\{(1,1),(2,2),(1,2),(3,1)\}$ на множині $\{1,2,3\}$.

Розв'язання. Оскільки множина A містить три елемента, то транзитивне замикання відношення R дорівнює $R^+=R^1\cup R^2\cup R^3$. Обчислюємо $R^2=\{(1,1),(2,2),(1,2),(3,1),(3,2)\}$, $R^3=R^2$ і $R^+=R^2$.

Транзитивно-рефлексивне замикання:

$$R^*=R^0\cup R^+=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,1),(3,2)\}.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 1.4.1-1.4.4], [4, задачі 1.25-1.27].

Практичне заняття № 4. Відповідності

План.

1. Відповідності, функції, відображення.
2. Відношення порядку.
3. Решітки.

Теоретичні відомості**:** [1, с. 156-160, 403-408], [2, с.190-192].

Перше питання.

Приклад 1. Нехай задано множини $A=\{a,b,c,d,e\}$ і $B=\{1,2,3,4,5\}$ та відповідності між ними

$C_1 = \{(a,2),(a,5),(b,1),(b,5),(c,2),(d,3),(d,5)\}$,

$C_2 = \{(a,3),(b,2),(c,3),(e,3)\}$,

$C_3 = \{(a,2),(b,3),(c,4),(d,1),(e,5)\}$,

$C_4 = \{(a,2),(a,3),(b,1),(c,4),(c,5),(d,1),(e,2),(e,4)\}$,

$C_5 = \{(a,4),(b,3),(c,5),(d,2),(e,1)\}$.

Визначити, які з цих відповідностей є: всюди визначеними; функціональними; відображеннями; ін'єктивними; сюр'єктивними; бієктивними.

Розв'язання. Всюди визначені відповідності: C_3, C_4, C_5 (C_1 не визначено на елементі e, C_2 – на d). Функціональні відповідності: C_2, C_3, C_5. Відображеннями є C_3, C_5 (функція C_2 не всюди визначена). Ін'єктивними відповідностями є C_3, C_5 (прообраз $C_1^{-1}(5)$ містить три елемента a,b,d; а $C_2^{-1}(3)=\{a,c,e\}$, $C_4^{-1}(1)=\{b,d\}$). Сюр'єктивні відповідності: C_3, C_4, C_5 ($\mathrm{Pr}_2 C_1$ не містить 4; $\mathrm{Pr}_2 C_2$ – 1, 4, 5). Бієктивними є відповідності C_3 і C_5 (відображення C_4 не є ін'єктивним).

Друге питання.

Приклад 2. Нехай M – довільна множина, а $\beta(M)$ – її булеан. Означимо відношення R на множині $\beta(M)\times\beta(M)$: $(A,B)R(C,D)$ тоді і тільки тоді, коли $A\subseteq C$ і $B\subseteq D$. Чи є це відношення відношенням часткового порядку? Відношенням лінійного порядку?

Розв'язання. Відношення R рефлексивне: $(A,B)R(A,B)$, оскільки $A\subseteq A$, $B\subseteq B$. Вона антисиметричне: якщо $(A,B)R(C,D)$ і

$(C,D)R(A,B)$, то $A \subseteq C$, $C \subseteq A$ і $B \subseteq D$, $D \subseteq B$, тобто $A = C$ і $B = D$. Крім того, воно транзитивне, оскільки з співвідношень $(A,B)R(C,D)$ і $(C,D)R(K,L)$ випливає, що $A \subseteq C \subseteq K$, $B \subseteq D \subseteq L$, тобто $(A,B)R(K,L)$. Таким чином, відношення R є відношенням часткового порядку. Якщо множина $M = \{a,b,\ldots\}$ містить більше одного елементу, то відношення R не є відношенням лінійного порядку. Справді, тоді елементи $(\{a\},\{a\})$ і $(\{b\},\{b\})$ не є порівнюваними, оскільки ні $\{a\} \not\subset \{b\}$, ні $\{b\} \not\subset \{a\}$.

Приклад 3. Знайти мінімальні, максимальні, найменший та найбільший елементи множини $A = \{1,2,3,4,5\}$, яка частково впорядкована відношенням $R = i_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(5,2)\}$.

Розв'язання. Мінімальні елементи: 1, 5, оскільки в $R \setminus i_A$ не існує пар виду $(a,1)$ і $(b,5)$. Максимальні елементи: 2, 3, 4 (в $R \setminus i_A$ не має пар виду $(2,a)$, $(3,b)$, $(4,c)$). Множина A не має найменшого та найбільшого елементів, оскільки вона має декілька мінімальних і максимальних елементів.

Третє питання.

Приклад 4. Встановити, чи є часткове упорядкування

$$R = i_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\}$$

множини $A = \{1,2,3,4,5\}$ решіткою.

Розв'язання. Перевіримо, чи для будь-якої двоелементної підмножини $\{a,b\}$ множини A існують $\inf\{a,b\}$ і $\sup\{a,b\}$. Очевидно, що $\inf\{1,2\} = 1$, $\sup\{1,2\} = 2$ (верхніми гранями множини $\{1,2\}$ є 2, 5 і $(2,5) \in R$). Аналогічно, $\inf\{1,b\} = 1$, $\sup\{1,b\} = b$ для $b = 3,4,5$. Далі, оскільки елементи 2 і 3 не порівнювальні, то множина $\{2,3\}$ має тільки одну нижню грань (1) і одну верхню грань (5), тому $\inf\{2,3\} = 1$, $\sup\{2,3\} = 5$. Аналогічно знаходимо, $\inf\{2,4\} = 1$, $\sup\{2,4\} = 5$, $\inf\{2,5\} = 2$, $\sup\{2,5\} = 5$, $\inf\{3,4\} = 1$, $\sup\{3,4\} = 5$, $\inf\{3,5\} = 3$, $\sup\{3,5\} = 5$, $\inf\{4,5\} = 4$, $\sup\{4,5\} = 5$. Отже, часткове упорядкування R множини $A = \{1,2,3,4,5\}$ є решіткою.

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 1.3.1-1.3.3], [4, задачі 1.12-1.14, 1.28, 1.29].

Практичне заняття № 5. Кардинальні числа

План.
1. Метод трансфінітної індукції.
2. Кардинальні числа.
3. Зліченні множини.
4. Застосування теореми про булеан.

Теоретичні відомості: [1, с. 177-183], [3, с. 45-60].

Перше питання.

Приклад 1. Нехай A – цілком упорядкована множина, $B \subseteq A$ і при будь-якому $x \in A$ множина B задовольняє умову: якщо $\{y \in A | y < x\} \subseteq B$, то $x \in B$. Довести, що $B = A$.

Розв'язання. Припустімо, що $B \neq A$. Оскільки A є цілком упорядкованою множиною, то множина $A \setminus B$ має найменший елемент x, а тому $\{y \in A | y < x\} \subseteq B$. Але тоді $x \in B$ – протиріччя умові $x \in A \setminus B$. Таким чином, $B = A$.

Друге питання.

Приклад 2. Довести, що для довільної множини A виконується нерівність $|A| \leq |A \times A|$.

Розв'язання. Зафіксуємо довільний елемент $y \in A$. Очевидно, що множина A рівнопотужна множині $A \times \{y\}$. Множина $A \times \{y\}$ є підмножиною множини $A \times A$, а тому $|A| = |A \times \{y\}| \leq |A \times A|$.

Приклад 3. Нехай α, β, γ – довільні кардинальні числа. Довести, що $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Розв'язання. Нехай $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$, де множини A, B, C попарно не перетинаються. Рівність $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ буде виконано, якщо $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Розглянемо ці множини. Множина $A \times (B \cup C)$ складається з пар $\{(a,b),(a,c)\}$, причому $b \neq c$, оскільки $B \cap C = \varnothing$. Множина $(A \times B) \cup (A \times C)$ є об'єднанням множин пар $\{(a,b)\}$, $\{(a,c)\}$, тобто множиною $\{(a,b),(a,c)\}$ з $b \neq c$. Таким чином, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Третє питання.

Приклад 4. Довести, що множина Z цілих чисел є зліченною.

Розв'язання. Побудуємо список $0 \to 0$, $1 \to 1$, $-1 \to 2$, $2 \to 3$, $-2 \to 4$, $3 \to 5$, $-3 \to 6$, ... Тоді кожному парному числу відповідає від'ємне число, а кожному непарному – додатне. Ця відповідність є бієкцією: $n \leftrightarrow 2n-1$, $-n \leftrightarrow 2n$.

Приклад 5. Довести, що $|N \times N| = |N|$.

Розв'язання. Для елементів декартового добутку $N \times N$ введемо діагональну нумерацію. Отримаємо послідовність (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), ... Ця послідовність визначає бієкцію N на $N \times N$, тому $|N \times N| = |N|$.

Приклад 6. Обчислити потужність множини E усіх скінчених послідовностей натуральних чисел.

Розв'язання. Множина усіх одноелементних послідовностей – це множина натуральних чисел N, усіх двохелементних – N^2, трьохелементних – N^3 і т.д., тобто $E = N \cup N^2 \cup \ldots N^k \cup \ldots$. Оскільки (див. приклад 5) $|N| = |N^2|$, $|N^2| = |N^3|$ і т.д., то $|N^k| = \aleph_0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тому $|E| = \aleph_0 + \aleph_0^1 + \ldots + \aleph_0^k + \ldots = \aleph_0$.

Четверте питання.

Приклад 7. Довести нерівність $2^\alpha > \alpha$ для будь-якого кардинального числа α.

Розв'язання. Нехай $|A| = \alpha$. Тоді потужність булеана $\beta(A)$ дорівнює 2^α. В силу теорема Кантора, потужність булеана множини строго більша за потужність самої множини, тобто $2^\alpha > \alpha$.

Приклад 8. Чи існує найбільше кардинальне число?

Розв'язання. Ні, оскільки для будь-якого кардинального числа α кардинальне число 2^α більше за α (див. приклад 7).

Приклад 9. Довести, що множина E всіх дійсних функцій, заданих на інтервалі (0;1), має потужність більшу, ніж потужність **c** множини A дійсних чисел на цьому інтервалі.

Розв'язання. Позначимо через B множину характеристичних функцій на інтервалі (0;1). Ця множина рівнопотужна булеану $\beta(A)$ множину дійсних чисел на інтервалі (0;1). Оскільки $B \subseteq E$, то, в силу теореми про булеан, маємо $|E| \geq |B| = |\beta(A)| = 2^{\mathbf{c}} > \mathbf{c}$.

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 1.3.4], [4, задачі 1.15-1.16].

Практичне заняття № 6. Основне правило комбінаторики

План.

1. Основні правила комбінаторики.
2. Перестановки і розміщення впорядкованих множин.
3. Перестановки з повтореннями.

Теоретичні відомості: [1, с. 316-331, 359], [2, с. 48-52].

Перше питання.

Приклад 1. В одній із версій мови BASIC ім'я змінної – це рядок з одного чи двох символів, якими можуть бути 26 букв латинського алфавіту та 10 цифр. Першим символом має бути буква. Крім того, не можна використовувати п'ять двосимвольних рядків, які зарезервовані для спеціального призначення. Скільки різних імен змінних є в цій версії мови BASIC?

Розв'язання. Нехай s – величина, яку потрібно обчислити, s_1 – кількість односимвольних імен, s_2 – двосимвольних. За правилом суми всього імен $s = s_1 + s_2$. Очевидно, що $s_1 = 26$. За правилом добутку $s_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Отже, $s = 26 + 931 = 957$.

Друге питання.

Приклад 2. Знайти кількість слів, які можна утворити, переставляючи букви слова PRODUCT.

Розв'язання. Оскільки жодна буква не повторюється, то можна утворити $P_7 = 7! = 5040$ слів.

Приклад 3. Скількома способами можна розмістити 10 чоловіків за круглим столом, якщо значення має тільки порядок сусідів.

Розв'язання. Зафіксуємо за столом одну людину. Інших 9 людей можна переставляти як завгодно. Тому кількість розміщень за столом буде дорівнювати кількості перестановок $P_9 = 9!$.

Приклад 4. Скільки є способів заповнення 15 різними книжками книжкової полиці, що вміщує 12 книжок.

Розв'язання. Кількість способів заповнення полиці дорівнює кількості усіх розміщень без повторень з 15 елементів по 12, тобто

$$A_{15}^{12} = \frac{15!}{(15-12)!} = 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 = 217945728000 \text{ способів.}$$

Приклад 5. В кабіну ліфта 9-поверхового будинку увійшли 3 пасажира, кожен з яких може вийти на будь-якому з 8-ми поверхів.

Скільки є способів розвантаження ліфта, якщо на кожному поверсі вийде не більш однієї людини?

Розв'язання. Кількість способів розвантаження ліфта дорівнює кількості усіх розміщень без повторень з 8 елементів по 3, тобто

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 .$$

Третє питання.

Приклад 6. Знайти, скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова SUCCESS.

Розв'язання. У цьому слові є повторні входження букв, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P(3,2,1,1) = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420 \text{ слів.}$$

Приклад 7. Скількома способами можна вибрати 4 набора по 5 карт з колоди, що містить 52 карти?

Розв'язання. Колоду карт розбиваємо на 5 множин: 4 набора по 5 карт і 32 карти, що залишаються. Тому кількість таких наборів дорівнює кількості перестановок з повтореннями:

$$P(5,5,5,5,32) = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

Приклад 8. Лототрон містить 500 куль з номерами. З нього вибирають кулю, номер якої записують. Куля повертається в лототрон і процедура повторюється. Так продовжується 5 разів. Обчислити кількість можливих комбінацій чисел.

Розв'язання. Для кожного з 5 чисел є 500 способів вибору. Тому число різних комбінацій складає 500^5.

Приклад 9. Скільки існує індивідуальних номерів карточок соціального страхування, що складаються з 9 десяткових цифр?

Розв'язання. Оскільки кожен номер складається з 9 десяткових цифр, то існує 10^9 різних номерів карток соціального страхування.

Приклад 10. Дано 10 різних предметів і 3 ящика. Потрібно в перший ящик покласти 2 предмета, у другий – 5 предметів, у третій – 3 предмета. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює кількості перестановок з повтореннями $P(2,5,3) = 10!/2!5!3! = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$.

Завдання для самостійної роботи: [3, 5.1.1-5.1.2], [4, 2.1-2.4].

Практичне заняття № 7. Сполучення

План.
1. Сполучення.
2. Сполучення з повтореннями.
3. Біноміальні та поліноміальні коефіцієнти та їх властивості.

Теоретичні відомості: [1, с. 354-358], [2, с. 53-56].

Перше питання.

Приклад 1. Скільки трьохелементних підмножин має множина, що складається з 10 елементів?

Розв'язання. Кількість таких підмножин дорівнює кількості сполучень з 10 елементів по 3, тобто $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$.

Приклад 2. Скількома способами можна вибрати комітет, що складається з 6 чоловіків і 8 жінок, з групи 12 чоловіків і 20 жінок?

Розв'язання. Існує C_{12}^6 способів вибору чоловіків і C_{20}^8 способів вибору жінок. Тому, за основним правилом комбінаторики, є $\frac{12!}{6!6!} \times \frac{20!}{8!12!} = 116396280$ способів вибрати комітет.

Приклад 3. Скількома способами можна витягти 5 карт трефової масті зі стандартної колоди, що містить 52 карти?

Розв'язання. У колоді є 13 треф, з яких вибирають 5, тому існує $C_{13}^5 = \frac{13!}{5!8!} = 1287$ можливих 5-карткових розкладів п'яти треф.

Друге питання.

Приклад 4. Скільки розв'язків має рівняння

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 25, \qquad (1)$$

де кожне n_i – невід'ємне ціле число.

Розв'язання. Кількість розв'язків рівняння (1) співпадає з кількістю різних вибірок виду $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + n_4 a_4 + n_5 a_5$, тобто з кількістю сполучень з 5 елементів по 25 з повтореннями і дорівнює

$$C_{25+5-1}^{25} = \frac{29!}{25!4!} = 23751.$$

Приклад 5. В булочній продається 3 різних видів пончиків. Скількома способами можна вибрати 10 пончиків?

Розв'язання. Кількість різних способів вибори 10 пончиків з 3 видів дорівнює кількістю сполучень з 3 елементів по 10 з повтореннями, тобто $C_{10+3-1}^{10} = \dfrac{12!}{10!2!} = 66$.

Приклад 6. Місто має форму прямокутника, розбитого вулицями на квадрати. У напрямку з півдня на північ 10 квадратів, з заходу на схід – 5 квадратів. Обчислити кількість найкоротших маршрутів між протилежними вершинами цього прямокутника.

Розв'язання. Позначимо через n_1 кількість квадратів у напрямку з півдня на північ, які є у найкоротшому маршруті перед першим поверненням у напрямку «захід-схід», через n_2 – кількість квадратів перед другим поверненням і т.д., n_6 – після п'ятого повернення у напрямку «захід-схід». Тоді кількість найкоротших маршрутів між протилежними вершинами міста дорівнює кількості невід'ємних цілих розв'язків рівняння $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 10$. Отже, є $C_{10+6-1}^{10} = \dfrac{15!}{10!5!} = 3003$ найкоротших маршрутів.

Третє питання.

Приклад 7. Визначити коефіцієнт при $x^{12}y^{13}$ в розкладі $(x+y)^{25}$.

Розв'язання. Цей біноміальний коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5200300.$$

Приклад 8. Довести, що $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Розв'язання. Використаємо біном Ньютона

$$0 = [1 + (-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k .$$

Приклад 9. Визначити коефіцієнт при $a^3b^2c^3$ в розкладі виразу $(2a + 3b + c)^8$.

Розв'язання. В силу поліноміальної теореми, потрібний доданок має вигляд $P(3,2,3)(2a)^3(3b)^2c^3 = 560 \cdot 2^3 \cdot 3^2 a^3b^2c^3 = 4320a^3b^2c^3$. Тому коефіцієнт при $a^3b^2c^3$ дорівнює 4320.

Завдання для самостійної роботи: [3, 5.2.1-5.2.4], [4, 2.5-2.21].

Практичне заняття № 8. Методи комбінаторного аналізу

План.

1. Принцип Дирихле.
2. Метод рекурентних співвідношень.

Теоретичні відомості: [2, с. 363-368, 448-468], [2, с. 62-67].

Перше питання.

Приклад 1. В кімнаті знаходяться шість чоловіків і кожні два з них або друзі, або вороги. Довести, що тоді є три чоловіка, які або товаришують між собою, або є три чоловіка, що ворогують між собою.

Розв'язання. Виберемо одну людину, яку назвемо A, і поставимо її в у центрі кімнати. Розмістимо всіх його ворогів вздовж південної стіни, а всіх друзів – вздовж північної стіни. За принципом Дирихле, не менш ніж три чоловіка будуть стояти вздовж або південної або північної стіни. Якщо більше двох чоловіків стоять вздовж південної стіни, то або три з них взаємні друзі, що і потрібно було довести, або два з них – вороги. Але тоді ці люди разом з A є трьома взаємними ворогами. Аналогічно, якщо не менш ніж три чоловіка будуть стояти вздовж північної стіни, то або три з них взаємні вороги, що і потрібно було довести, або два з них – друзі. Але тоді вони разом з A – три взаємні друзі.

Друге питання.

Приклад 2 (числа Фібоначчі). Молоду різностатеву пару кролів завезли на острів. Після досягнення двомісячного віку кожна пара щомісяця дає приплід – нову пару. Потрібно визначити кількість пар кролів на острові через n місяців.

Розв'язання. У кінці першого місяця кількість пар кролів на острові $f_1 = 1$. Оскільки ця пара не дає приплоду впродовж двох місяців, то й $f_2 = 1$. Щоб визначити кількість пар після n місяців, додамо їх кількість у попередньому місяці f_{n-1} і кількість новонароджених пар f_{n-2}: кожна новонароджена пара походить від пари щонайменше двомісячного віку. Отже, послідовність f_n задовольняє рівняння $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ з початковими умовами $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Члени послідовності f_n називають числами Фібоначчі. Знайдемо формулу для f_n. Для цього складаємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 = \lambda + 1$, тобто $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, корені якого дорівнюють

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отже, $f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Для визначення констант C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами: $C_1 + C_2 = 0$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2 = 1$. Маємо $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Отже,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Приклад 3. На колі вибрані $2n$ точок. Скількома способами можна попарно з'єднати його вершини так, щоб отримані відрізки не перетинались?

Розв'язання. Нехай t_n – кількість способів такого з'єднання. Позначимо точки в порядку, у якому їх розміщено на колі: A_1, A_2, ..., A_{2n}. Точку A_1 можна з'єднати лише з однією з точок A_2, A_4, ..., A_{2n}, інакше з кожного боку від хорди буде розміщено непарну кількість точок, і в разі попарного з'єднання принаймні одна хорда перетне ту, що виходить з A_1. Припустимо, що точку A_1 з'єднано з A_{2k}. По один бік від хорди A_1A_{2k} міститься $2k-2$ точок; їх можна з'єднати попарно t_{k-1} способами. З іншого боку від A_1A_{2k} міститься $2(n-k)$ точок, їх можна з'єднати попарно t_{n-k} способами. За правилом добутку кількість таких способів попарного з'єднання, коли A_1 з'єднано з A_{2k}, дорівнює $t_{n-k}t_{k-1}$. Параметр k може набувати значень $1, 2, \ldots, n$. Отже, для $n = 2, 3, \ldots$, маємо

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}t_1 + \ldots + t_{n-k}t_{k-1} + \ldots + t_1t_{n-2} + t_{n-1}. \qquad (1)$$

Початкова умова для нелінійного рекурентного співвідношення (1) така: $t_1 = 1$. Наступні значення t_n знаходяться з рівняння (1): $t_2 = 2$, $t_3 = 5$ і т.д. (розв'язок рівняння (1) див. у практичному занятті №9, приклад 4).

Завдання для самостійної роботи: [3, 5.6.1-4], [4, 2.22-2.24].

Практичне заняття № 9. Методи комбінаторного аналізу

План.

1. Метод включень і вилучень.
2. Метод твірних функцій.

Теоретичні відомості: [1, с. 502-549], [2, с. 69-81].

Перше питання.

Приклад1. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=11$ у невід'ємних цілих числах у разі обмежень $x_1\le 3$, $x_2\le 4$, $x_3\le 6$.

Розв'язання. Розглянемо альтернативні властивості: $\alpha_1: x_1\ge 4$, $\alpha_2: x_2\ge 5$, $\alpha_3: x_3\ge 7$. За формулою методу включень і вилучень маємо, що кількість розв'язків, що водночас задовольняють нерівностям $x_1\le 3$, $x_2\le 4$ та $x_3\le 6$, дорівнює

$$N(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3)=N-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-N(\alpha_3)+$$
$$+N(\alpha_1,\alpha_2)+N(\alpha_1,\alpha_3)+N(\alpha_2,\alpha_3)-N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

Обчислюємо вирази в правій частині цієї рівності. Загальна кількість розв'язків $N=C_{13}^{11}=78$. Кількість розв'язків, що задовольняє умову $x_1\ge 4$: $N(\alpha_1)=C_9^7=36$. Аналогічно, $N(\alpha_2)=C_8^6=28$, $N(\alpha_3)=C_6^4=15$. Кількість розв'язків, що задовольняє умову $(x_1\ge 4)\wedge(x_2\ge 5)$: $N(\alpha_1,\alpha_2)=C_4^2=6$. Аналогічно, $N(\alpha_2,\alpha_3)=0$, $N(\alpha_1,\alpha_3)=C_2^0=1$. Далі, кількість розв'язків, що задовольняє умову $(x_1\ge 4)\wedge(x_2\ge 5)\wedge(x_3\ge 7)$ дорівнює $N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=0$. Отже, кількість розв'язків із зазначеними обмеженнями дорівнює

$$N(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3)=78-36-28-15+6+1+0-0=6.$$

Приклад 2. Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11.

Розв'язання. Позначимо як A множину чисел, що діляться на 7, B – множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=\left\lfloor\frac{100}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1000}{11}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{1000}{7\cdot 11}\right\rfloor=$$
$$=142+90-12=220.$$

Приклад 3. Хоча б одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому $|E|=180$, $|D|=110$, $|S|=70$,

$|E\cap D|=82$, $|E\cap S|=40$, $|D\cap S|=15$, де як E,D,S позначено множини студентів, які відповідно вивчають англійську, німецьку й іспанську мови. Скільки студентів вивчають усі три мови?

Розв'язання. Маємо

$$231=180+110+70-82-40-15+|E\cap D\cap S|,$$

звідки випливає, що $|E\cap D\cap S|=8$ студентів.

Друге питання.

Приклад 4. Розв'язати нелінійне рекурентне рівняння

$$t_n=t_{n-1}t_0+t_{n-2}t_1+\ldots+t_0t_{n-1},\quad n\ge 1,\quad t_0=1. \tag{1}$$

Розв'язання. Запишемо твірну функцію для послідовності t_n:

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n.$$

Помножимо обидві частини співвідношення (1) на x^n і просумуємо за n від 1 до ∞: $\sum_{n=1}^{\infty}t_nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\left(t_{n-1}t_0+t_{n-2}t_1+\ldots+t_0t_{n-1}\right)x^{n-1}$,

або $\sum_{n=0}^{\infty}t_nx^n-1=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(t_0t_n+t_1t_{n-1}+\ldots+t_nt_0\right)x^n$.

Тоді з теореми про згортку випливає, що $G(x)-1=xG^2(x)$. Розв'язуємо це квадратне рівняння відносно $G(x)$: $G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$. Оскільки $G(0)=1$, то потрібно взяти знак мінус.

Отже, твірна функція послідовності t_n це $G(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Оскільки $\sqrt{1-4x}=1-2x-\dfrac{2}{2}C_2^1x^2-\dfrac{2}{3}C_4^2x^3-\ldots-\dfrac{2}{n+1}C_{2n}^nx^{n+1}-\ldots$, то

$$G(x)=1+\frac{1}{2}C_2^1x+\frac{1}{3}C_4^2x^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_{2n}^nx^n+\ldots.$$

Звідси випливає, що

$$t_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 5.3.1-5.3.3], [4, задачі 2.10, 2.25-2.30].

ТЕМА 2. СКІНЧЕННІ АВТОМАТИ, БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ, ГРАФИ

Практичне заняття № 1.
Автоматні мови та регулярні вирази

План.

1. Автоматні мови та регулярні вирази.
2. Мінімізація скінченних автоматів.

Теоретичні відомості: [1, с. 725-740], [2, с. 285-288].

Перше питання.

Приклад 1. Побудувати скінченний автомат, який зображує регулярну подію P (автоматну мову), задану регулярним виразом

$$\left(\{x_1\}\{x_2\}^* \cup \{x_3\}\right)\left(\{x_1\} \cup \{x_2\}\{x_3\}\right)^* \{x_2\}\{x_1\}^*.$$

Розв'язання. Спочатку будуємо джерело, що зображує подію P у вигляді поміченого орграфа $D=(V,E)$: $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$$E=\{(1,2,x_1),(1,3,x_3),(2,2,x_2),(2,4,e),(3,4,e),(4,5,x_1),(4,6,x_2),$$
$$(5,7,e),(6,7,x_3),(7,5,e),(4,8,x_2),(8,8,x_1)\},$$

з початковою вершиною 1 і заключною 8. Далі, джерело D детермінуємо; при цьому розглядаємо тільки ті підмножини вершин джерела D, які досяжні з початкової вершини $\{1\}$.

Табл. 1

δ	x_1	x_2	x_3
$\{1\}$	$\{2,4\}$	$\varnothing$	$\{3,4\}$
$\{2,4\}$	$\{4,5,7\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\varnothing$
$\{3,4\}$	$\{4,5,7\}$	$\{6,8\}$	$\varnothing$
$\{4,5,7\}$	$\{4,5,7\}$	$\{6,8\}$	$\varnothing$
$\{2,4,6,8\}$	$\{4,5,7,8\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{4,7\}$
$\{6,8\}$	$\{8\}$	$\varnothing$	$\{4,7\}$
$\{4,5,7,8\}$	$\{4,5,7,8\}$	$\{6,8\}$	$\varnothing$
$\{4,7\}$	$\{4,5,7\}$	$\{6,8\}$	$\varnothing$
$\{8\}$	$\{4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Табл. 2

δ	x_1	x_2	x_3
a_1	a_2	a_{10}	a_3
a_2	a_4	a_5	a_{10}
a_3	a_4	a_6	a_{10}
a_4	a_4	a_6	a_{10}
a_5	a_7	a_5	a_8
a_6	a_9	a_{10}	a_8
a_7	a_7	a_6	a_{10}
a_8	a_4	a_6	a_{10}
a_9	a_9	a_{10}	a_{10}
a_{10}	a_{10}	a_{10}	a_{10}

Таблицю переходів δ детермінованого джерела D', вершинами якого є підмножини вершин джерела D, подано в табл. 1. Після позначення отриманих підмножин символами з алфавіту $U=\{a_i\}$ таблиця переходів для D' набирає (див. табл. 2) звичайного вигляду таблиці переходів ініціального скінченного автомата без виходів $A=\left(X,U,\delta,a_1,F\right)$. Множина заключних станів автомата A складається зі станів (підмножин), які містять заключну вершину 8 джерела D, тобто $F=\{a_5,a_6,a_7,a_9\}$.

Друге питання.

Приклад 2. Мінімізувати скінченний автомат

δ/λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	a_2/y_1	a_3/y_1	a_6/y_1	a_3/y_1	a_3/y_1	a_4/y_1	a_3/y_1
x_2	a_1/y_2	a_5/y_2	a_3/y_2	a_7/y_2	a_4/y_2	a_6/y_2	a_2/y_2
x_3	a_7/y_2	a_4/y_1	a_3/y_1	a_2/y_1	a_5/y_1	a_5/y_2	a_4/y_1

Розв'язання. За таблицею функції виходів λ одержимо розбиття Q_1 на класи 1-невідрізнювальності, об'єднуючи в класи еквівалентності стани, стовпчики значень для яких у цій таблиці збігаються: $Q_1=\left\{C_1^{(1)},C_2^{(1)}\right\}$, де $C_1^{(1)}=\{a_1,a_6\}$, $C_2^{(1)}=\{a_2,a_3,a_4,a_5,a_7\}$. Відтак будуємо допоміжну таблицю 3 для розбиття Q_1, замінюючи в таблиці переходів автомата стани на відповідні класи 1-невідрізнювальності.

Табл. 3

$\delta^{(1)}$	$C_1^{(1)}$		$C_2^{(1)}$				
	a_1	a_6	a_2	a_3	a_4	a_5	a_7
x_1	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_1^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$
x_2	$C_1^{(1)}$	$C_1^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$
x_3	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$	$C_2^{(1)}$

За табл. 3 знаходимо класи 2-невідрізнювальності. Сигнал x_1 здійснює розщеплення класу $C_2^{(1)}$ на два класи $C_2^{(2)}=\{a_2,a_4,a_5,a_7\}$ і $C_3^{(2)}=\{a_3\}$. Отже, $Q_2=\left\{C_1^{(2)},C_2^{(2)},C_3^{(2)}\right\}$, де $C_1^{(2)}=C_1^{(1)}$. Оскільки $Q_3=Q_2$, то шукане розбиття $Q=\{\{a_1,a_6\},\{a_2,a_4,a_5,a_7\},\{a_3\}\}$.

Завдання для самостійної роботи: [3, 6.1.1-2], [4, 5.1-5.7].

Практичне заняття № 2. Аналіз і синтез автоматів

План.

1. Аналіз детермінованого скінченного автомата.
2. Синтез детермінованого скінченного автомата.

Теоретичні відомості: [2, с. 289-302], [3, с. 255-268, 300-301].

Перше питання.

Приклад 1. Побудувати регулярний вираз для події P, зображуваної в автоматі-розпізнавачу A, заданого табл. 1:

Таблиця 1

δ	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1	a_3	a_2
x_2	a_3	a_1	a_3

з початковим станом a_1 і заключними станами a_2, a_3.

Розв'язання. За алгоритмом Мак-Нотона маємо $P = P_{12}^{(3)} \cup P_{13}^{(3)}$. З табл. 1 знаходимо $P_{11}^{(0)} = e \cup x_1$, $P_{12}^{(0)} = \varnothing$, $P_{13}^{(0)} = x_2$, $P_{21}^{(0)} = x_2$, $P_{22}^{(0)} = e$, $P_{23}^{(0)} = x_1$, $P_{31}^{(0)} = \varnothing$, $P_{32}^{(0)} = x_1$, $P_{33}^{(0)} = e \cup x_2$. За допомогою формули $P_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k-1)} \cup P_{ik}^{(k-1)} \left(P_{kk}^{(k-1)}\right)^* P_{kj}^{(k-1)}$ будуємо вирази для $P_{ij}^{(1)}$, $i, j = 1,2,3$. Деякі з цих виразів можна спростити, користуючись тотожностями алгебри регулярних подій. Маємо

$P_{11}^{(1)} = e \cup x_1 \cup (e \cup x_1)(e \cup x_1)^*(e \cup x_1) = (x_1)^*$,

$P_{12}^{(1)} = \varnothing \cup (e \cup x_1)(e \cup x_1)^* \varnothing = \varnothing$,

$P_{13}^{(1)} = x_2 \cup (e \cup x_1)(e \cup x_1)^* x_2 = (e \cup ((e \cup x_1)(e \cup x_1)^*) x_2 =$

$= (e \cup x_1)^* x_2 = (x_1)^* x_2$, $P_{21}^{(1)} = x_2 \cup x_2 (e \cup x_1)^* (e \cup x_1) = x_2 (x_1)^*$,

$P_{22}^{(1)} = e \cup x_2 (e \cup x_1)^* \varnothing = e$, $P_{23}^{(1)} = x_1 \cup x_2 (e \cup x_1)^* x_2 = x_1 \cup x_2 (x_1)^* x_2$,

$P_{31}^{(1)} = \varnothing \cup \varnothing (e \cup x_1)^* (e \cup x_1) = \varnothing$, $P_{32}^{(1)} = x_1 \cup \varnothing (e \cup x_1)^* \varnothing = x_1$,

$P_{33}^{(1)} = e \cup x_2 \cup \varnothing (e \cup x_1)^* x_2 = e \cup x_2$.

Для $k = 2$ маємо

$P_{11}^{(2)} = (x_1)^* \cup \varnothing (e)^* x_2 (x_1)^* = (x_1)^*$, $P_{12}^{(2)} = \varnothing \cup \varnothing (e)^* e = \varnothing$,

$P_{13}^{(2)} = (x_1)^* x_2 \cup \varnothing (e)^* (x_1 \cup x_2 (x_1)^* x_2) = (x_1)^* x_2$,

$P_{21}^{(2)} = x_2 (x_1)^* \cup e(e)^* x_2 (x_1)^* = x_2 (x_1)^*$, $P_{22}^{(2)} = e \cup e(e)^* e = e$,

$P_{23}^{(2)} = x_1 \cup x_2(x_1)^* x_2 \cup e(e)^*(x_1 \cup x_2(x_1)^* x_2) = x_1 \cup x_2(x_1)^* x_2$,
$P_{31}^{(2)} = \varnothing \cup x_1(e)^* x_2(x_1)^* = x_1 x_2(x_1)^*$, $P_{32}^{(2)} = x_1 \cup x_1(e)^* e = x_1$,
$P_{33}^{(2)} = e \cup x_2 \cup x_1(e)^*(x_1 \cup x_2(x_1)^* x_2) = e \cup x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2$.

Отже, $P_{12}^{(3)} = \varnothing \cup (x_1)^* x_2(e \cup x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2)^* x_1 =$
$= (x_1)^* x_2(x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2)^* x_1$, $P_{13}^{(3)} = (x_1)^* x_2 \cup$
$\cup (x_1)^* x_2(e \cup x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2)^*(e \cup x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2) =$
$= (x_1)^* x_2(x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2)^*$. Таки чином, зображена автоматом A подія P описується регулярним виразом

$$(x_1)^* x_2(x_2 \cup x_1 x_1 \cup x_1 x_2(x_1)^* x_2)^*(e \cup x_1).$$

Друге питання.

Приклад 2. Побудувати дешифратор з вхідним алфавітом $\{x, y\}$ та кодовою комбінацією $\alpha = xyyxyyxx$.

Розв'язання. Кількість станів автомата 8 (довжина слова α). Позначимо їх $a_1, ..., a_8$. Початковий стан – a_1. Задамо функцію виходів: $\lambda(x, a_8) = 1$, для інших випадків $\lambda = 0$. Функція переходів задамо так: $\delta(x, a_1) = a_2$, $\delta(y, a_1) = a_1$; якщо $x_1 x_2 \dots x_k$ ($k \neq 8$) – початок кодової комбінації, то покладаємо $\delta(x_k, a_k) = a_{k+1}$, у інших випадках $\delta(x_k, a_k) = a_p$, де p – найменший номер, такий, що слово $x_p x_{p+1} \dots x_k$ є початковим відрізком кодової комбінації. Маємо: $\delta(y, a_1) = a_1$, $\delta(x, a_1) = a_2$, $\delta(y, a_2) = a_3$, $\delta(x, a_2) = a_2$, оскільки в слові xx останній символ може бути початком кодової комбінації, а при отримані одного символу коду автомат переходе в стан a_2. Далі маємо $\delta(y, a_3) = a_4$, $\delta(x, a_3) = a_2$, оскільки в слові xyx останній символ може бути початком кодової комбінації, а при отримані одного символу коду автомат переходе в стан a_2. Таким чином, таблиця переходів/виходів дешифратора така:

Таблиця 2

δ/λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x	$a_2/0$	$a_2/0$	$a_2/0$	$a_5/0$	$a_2/0$	$a_2/0$	$a_8/0$	$a_2/1$
y	$a_1/0$	$a_3/0$	$a_4/0$	$a_1/0$	$a_6/0$	$a_7/0$	$a_1/0$	$a_6/0$

Завдання для самостійної роботи: [3, 6.4.1-4], [4, 5.8-5.23].

Практичне заняття № 3. Булеві функції

План.

1. Елементарні булеві функції.
2. Булева алгебра.
2. Нормальні та досконалі нормальні форми.

Теоретичні відомості: [1, с. 84-89], [2, с. 235-250].

Перше питання.

Приклад 1. Скласти таблицю значень булевої функції, заданої формулою $\overline{x} \to (\overline{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$.

Розв'язання. Процес складання показано в табл. 1.

Таблиця 1.

x	y	z	xz	$y \oplus xz$	$\overline{z}$	$\overline{z} \leftrightarrow (y \oplus xz)$	$\overline{x}$	$\overline{x} \to (\overline{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Друге питання.

Приклад 2. Довести рівності

а) $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$;

б) $xy \vee zu = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Розв'язання. Двічі застосувавши закони дистрибутивності, одержимо:

а) $(x \vee y)(z \vee u) = (x \vee y)z \vee (x \vee y)u = xz \vee yz \vee xu \vee yu$;

б) $xy \vee zu = (x \vee zu)(y \vee zu) = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Приклад 3. Доведемо, що $\overline{\overline{x}zy} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}$.

Розв'язання. Послідовно застосувавши закони де Моргана, подвійного заперечення й асоціативності, запишемо

$$\overline{\overline{x}zy} = \overline{\overline{x}z} \vee \overline{y} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{z} \vee \overline{y} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}.$$

Третє питання.

Приклад 4. Звести формулу $\overline{x \vee z}(x \to y)$ до диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ).

Розв'язання. Згідно з алгоритмом побудови ДНФ, маємо

$$\overline{x \vee z}(x \to y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{x} \vee \bar{x}\,\bar{z}\,y = \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}\,.$$

Приклад 5. Перетворимо ДНФ $\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz$ на досконалу (ДДНФ).

Розв'язання. Застосувавши розщеплення для кон'юнкції $\bar{x}\,\bar{z}$, одержимо $\bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}\,(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz\,.$

Приклад 6. Знайти кон'юктивну нормальну форму (КНФ) для формули $\overline{x \vee z}(x \to y)$.

Розв'язання. Згідно з алгоритмом побудови КНФ, маємо

$$\overline{x \vee z}(x \to y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y)\,.$$

Приклад 7. Перетворимо КНФ $\bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y)$ на досконалу (ДКНФ).

Розв'язання. Розщепивши диз'юнкції, можемо записати

$$\begin{aligned}
\bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y) &= (\bar{x} \vee y\bar{y} \vee z\bar{z})(x\bar{x} \vee y\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z}) = \\
&= (\bar{x} \vee (y \vee z)(y \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})) \wedge \\
&\wedge ((x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee \bar{z})(\bar{x} \vee (y \vee z)(y \vee \bar{z})) = \\
&= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge \\
&\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\
&= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).
\end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти ДДНФ і ДКНФ булевої функції f , заданої формулою $f(x, y, z) = \bar{x} \to (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$.

Розв'язання. Для побудови ДДНФ булевої функції необхідно знайти всі набори, на яких функція дорівнює 1, і утворити конституенти одиниці, які відповідають цим наборам. Одержані конституенти об'єднати знаками диз'юнкції. З таблиці 1 випливає, що ДДНФ булевої функції f є $\bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Для утворення ДКНФ необхідно розглянути всі набори, на яких функція дорівнює 0, та утворити конституенти нуля як елементарні диз'юнкції, в яких кожна змінна береться без заперечення, якщо вона дорівнює нулю, і з запереченням, якщо вона дорівнює 1 в цьому наборі. З'єднавши конституенти нуля знаками кон'юнкції, отримуємо ДКНФ: $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Завдання для самостійної роботи: [3, завдання 2.1.1-2.1.4, 2.3.1-2.3.3], [4, задачі 4.1-4.18].

Практичне заняття № 4. Повнота системи булевих функцій

План.

1. Поліном Жегалкіна.
2. Повнота системи булевих функцій.

Теоретичні відомості: [2, с. 250-256], [3, с. 93-115].

Перше питання.

Приклад 1. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $x \equiv y$.

Розв'язання. Загальний вигляд полінома Жегалкіна від двох змінних має вигляд $P(x,y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy$. Прирівняємо значення функції $f(x,y) = x \equiv y$ та полінома $P(x,y)$ на всіх чотирьох наборах значень змінних і одержимо систему рівнянь відносно неозначених коефіцієнтів: $f(0,0) = 1 = c_0$, $f(0,1) = 0 = c_0 \oplus c_2$, $f(1,0) = 0 = c_0 \oplus c_1$, $f(1,1) = 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3$. Розв'язавши її, визначаємо, що $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ й, отже, $x \equiv y = 1 \oplus x \oplus y$.

Приклад 2. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $x \to y$.

Розв'язання. За допомогою еквівалентних перетворень маємо $x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 \oplus x \oplus xy$.

Приклад 2. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xz$.

Розв'язання. Спочатку перетворимо цю ДНФ на досконалу:

$$xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xz = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x(y \vee \bar{y})z = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z.$$

Далі, перетворюємо отриману ДДНФ у поліном Жегалкіна:

$$xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z = xy\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus xyz \oplus x\bar{y}z =$$
$$= xy(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus x)yz \oplus xyz \oplus x(1 \oplus y)z =$$
$$= xy \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = xy \oplus yz \oplus xz.$$

Друге питання.

Приклад 3. Нехай булева функція $f = (10010100)$. Чи буде система $\{f\}$ функціонально повною?

Розв'язання. Перевіримо належність функції $f(x,y,z)$ класам Поста. Оскільки $f(0,0,0) = 1$, то $f \notin T_0$. Далі, $f(1,1,1) = 0$, тому $f \notin T_1$. Перевіряємо на монотонність: оскільки $(0,0,0) \le (0,0,1)$, але $f(0,0,0) > f(0,0,1)$, то $f \notin M$. Для перевірки самодвоїстості замітимо, що $f(0,0,1)=f(1,1,0)$ хоча $(0,0,1)$ і $(1,1,0)$ – протилежні набори, тобто $f\notin C$. Для перевірки лінійності функції f представимо її в вигляді полінома Жегалкіна:

$$f(x,y,z)=(x+1)(y+1)(z+1)+(x+1)yz+x(y+1)z=$$
$$=1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz+xyz+yz+xyz+xz=$$
$$=1+x+y+z+xy+xyz\,.$$

Оскільки в поліномі присутні кон'юнкції, то $f\notin L$. Таким чином, функція f не належить ні одному із класів Поста, а тому, система $\{f\}$ є функціонально повною.

Приклад 4. Дослідити на функціональну повноту систему булевих функцій $\{\neg,\rightarrow\}$.

Розв'язання. Складаємо таблицю Поста (табл. 1). Якщо функція належить відповідному функціонально замкненому класу, то в таблиці Поста ставимо знак «+», інакше – знак «–».

Функція $\neg x$ не зберігає нуль і одиницю, оскільки на мулевому наборі вона приймає значення 1, а на одиничному – 0. Ця функція, очевидно, немонотонна. Вона самодвоїста, оскільки на протилежних наборах вона приймає протилежні значення. Її поліном Жегалкіна: $\neg x=x\oplus 1$, тому ця функція лінійна.

Функція $x\rightarrow y$ не зберігає 0 і зберігає 1. Вона немонотонна, оскільки набір $(0,0)\le(1,0)$, але $0\rightarrow 0=1$, а $1\rightarrow 0=0$. На протилежних наборах $(0,0)$ і $(1,1)$ ця функція приймає однакові значення 1, тому вона несамодвоїста. Функція $x\rightarrow y$ нелінійна, оскільки її поліном Жегалкіна містить член xy:

$$x\rightarrow y=\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}y\vee xy=(x\oplus 1)(y\oplus 1)\oplus(x\oplus 1)y\oplus xy=xy\oplus x\oplus 1\,.$$

Табл. 1

	T_0	T_1	C	M	L
$\neg$	–	–	+	–	+
$\rightarrow$	–	+	–	–	–

Система функцій $\{\neg,\rightarrow\}$ повна, оскільки в кожному стовпчику таблиці Поста є принаймні один знак «–».

Завдання для самостійної роботи: [3, 2.4.1-3], [4, 4.19-4.31].

Практичне заняття № 5. Подання графів

План.

1. Способи подання графів.
2. Ізоморфізм графів.
3. Маршрути, ланцюги, цикли.

Теоретичні відомості: [1, с. 244-258], [2, с. 88-108].

Перше питання.

Приклад 1. Діаграми графа $G_1=(V_1,E_1)$ і орграфа $G_2=(V_2,E_2)$ з

$$V_1=\{a,b,c,d,e\},\quad E_1=\{\{a,b\},\{a,e\},\{b,e\},\{b,d\},\{b,c\},\{c,d\}\},$$

$$V_2=\{a,b,c,d\},\ E_2=\{(a,b),(b,c),(c,c),(b,d),(d,b),(c,d),(d,a)\}$$

наведено на рис. 1, 2 відповідно.

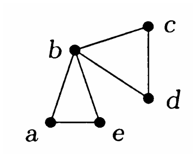

Рис. 1.

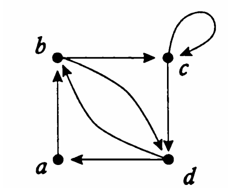

Рис. 2.

Приклад 2. Визначити матриці суміжності та інцидентності графа G_1 і орграфа G_2 з приклада 1.

Розв'язання. Елементи s_{ab}, s_{ba}, s_{ae}, s_{ea}, s_{eb}, s_{be}, s_{bd}, s_{db}, s_{bc}, s_{cb}, s_{cd}, s_{dc} матриці суміжності S_1 графа G_1 дорівнюють 1; всі інші елементи цієї матриці – 0. Аналогічно, матриця інцидентності I_1 графа G_1 має одиничні елементи $i_{a\{a,b\}}$, $i_{b\{a,b\}}$, $i_{a\{a,e\}}$, $i_{e\{a,e\}}$, $i_{e\{e,b\}}$, $i_{b\{e,b\}}$, $i_{b\{b,d\}}$, $i_{d\{b,d\}}$, $i_{b\{c,b\}}$, $i_{c\{c,b\}}$, $i_{c\{c,d\}}$, $i_{d\{c,d\}}$; всі інші елементи цієї матриці нулеві. Для орграфа G_2 одиничні елементи матриці суміжності S_2 такі: s_{ab}, s_{da}, s_{db}, s_{bd}, s_{bc}, s_{cd}, s_{cc}; всі інші елементи цієї матриці дорівнюють 0. Нарешті, матриця інцидентності I_2 графа G_2 така: елементи $i_{a(a,b)}$, $i_{b(b,c)}$, $i_{c(c,d)}$, $i_{d(d,a)}$, $i_{d(d,b)}$, $i_{b(b,d)}$ дорівнюють 1, елементи $i_{b(a,b)}$, $i_{c(b,c)}$, $i_{d(c,d)}$, $i_{a(d,a)}$, $i_{b(d,b)}$, $i_{d(b,d)}$ дорівнюють (–1), а $i_{c(c,c)}=2$; всі інші елементи цієї матриці нулеві.

Друге питання.

Приклад 3. Довести, що графи, зображені на рис. 3, ізоморфні.

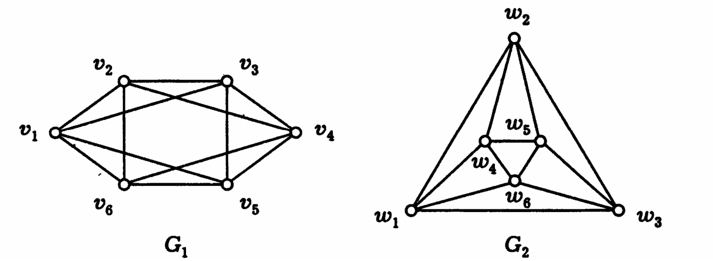

Рис.3

Розв'язання. Ізоморфізмом є, наприклад, таке відображення: $h(v_1) = w_1$, $h(v_2) = w_4$, $h(v_3) = w_2$, $h(v_4) = w_5$, $h(v_5) = w_3$, $h(v_6) = w_6$.

Трете питання.

Приклад 4. Охарактеризувати маршрути, ланцюги і цикли графа з $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$.

Розв'язання. В цьому графі послідовність вершин v_3, v_1, v_2, v_4 не утворює маршрут, оскільки у графі відсутнє ребро $\{v_2, v_4\}$. Маршрутом є послідовність $v_1, v_3, v_2, v_1, v_3, v_4$, але це не ланцюг, оскільки у ньому є ребра, що співпадають. Далі, послідовність вершин v_1, v_3, v_4 утворює простим ланцюгом. Послідовність $v_4, v_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ утворює замкнений маршрут, але не цикл, оскільки ребро $\{v_3, v_4\}$ повторюється. Послідовність v_1, v_3, v_2, v_1 є простим циклом. Степені вершин графа такі: $\mathrm{dg}(v_1) = \mathrm{dg}(v_2) = 2$, $\mathrm{dg}(v_3) = 3$, $\mathrm{dg}(v_4) = \mathrm{dg}(v_5) =$ $= \mathrm{dg}(v_6) = 1$, $\mathrm{dg}(v_7) = 0$. Вершини v_1, v_2, v_3, v_4 попарно досяжні і утворюють клас еквівалентності за відношенням досяжності. Інший клас еквівалентності за відношенням досяжності утворюють вершини v_5, v_6. Вершина v_7 утворює, за означенням, цикл довжини 0 і еквівалентна за відношенням досяжності тільки самої собі.

Приклад 5. Охарактеризувати орграф з $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ і $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_5, v_6), (v_6, v_4)\}$

Розв'язання. Послідовність вершин v_1, v_2, v_3, v_4 є простий маршрут, а $v_1, v_2, v_3, v_1, v_3, v_4$ – не простий. Послідовність v_3, v_1, v_2, v_3 є контур, а v_3, v_1, v_2, v_1, v_3 – замкнений маршрут, але не контур.

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 3.1-3.5, 3.10].

Практичне заняття № 6. Операції над графами

План.

1. Операції над графами.
2. Зв'язні графи.
3. Дводольні графи.

Теоретичні відомості: [1, с. 707-715], [2, с. 100-105, 132-137].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти об'єднання, перетин і доповнення графів $G_1=(V,E_1)$, $G_2=(V,E_2)$, де $V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)$, $E_1=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_1,v_6\},\{v_2,v_4\}\}$, $E_2=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_1,v_6\},\{v_1,v_4\}\}$.

Розв'язання. За означенням цих операцій над графами маємо: $G_1\cup G_2=(V,E_1\cup E_2)$, $G_1\cap G_2=(V,E_1\cap E_2)$, $\overline{G}_1=(V,V^{(2)}\setminus E_1)$, де

$$E_1\cup E_2=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_1,v_6\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_4\}\}$$

$$E_1\cap E_2=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_1,v_6\}\},\quad V^{(2)}\setminus E_1=$$

$$=\{\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_1,v_5\},\{v_2,v_5\},\{v_2,v_6\},\{v_3,v_5\},\{v_3,v_6\},\{v_4,v_6\}\}.$$

Приклад 2. З графа G_1 попереднього приклада вилучити 1) вершину v_4; 2) ребро $\{v_5,v_6\}$.

Розв'язання. 1) Операція вилучення вершини v_4 з графа G_1 полягає у вилученні з множини V елемента v_4, а з множини E_1 – всіх ребер, інцидентних v_4. Тобто маємо граф $G=(V\setminus\{v_4\},E)$, де $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_5,v_6\},\{v_1,v_6\}\}$. 2) Операція вилучення ребра $\{v_5,v_6\}$ з графа G_1 – це вилучення елемента $\{v_5,v_6\}$ з множини E_1; при цьому всі вершини зберігаються. Тобто маємо граф $G=(V,E)$, де $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_3,v_4\},\{v_4,v_5\},\{v_1,v_6\},\{v_2,v_4\}\}$.

Друге питання.

Приклад 3. Побудувати незв'язний граф, доповнення якого також незв'язне.

Розв'язання. Такого графа не існує. Дійсно, нехай граф $G=(V,E)$ незв'язний і $G_1=(V_1,E_1)$ одна з його компонент зв'язності. Розглянемо графи G_1 і $G' = (V', E')$, де $V' = V \setminus V_1$ і $E' = E \setminus E_1$. Для будь-якої пари вершин $v \in V_1$ і $w \in V'$ у графі $\overline{G}$ існує ребро (v, w), тому що ці вершини є несуміжні в графі G. Відтак, оскільки для кожної пари вершин $v_1, v_2 \in V_1$ графа G_1 і довільної вершини $w \in V'$ існують ребра (v_1, w) і (v_2, w), які належать множині ребер графа $\overline{G}$, то в графі $\overline{G}$ такі вершини v_1 і v_2 є зв'язаними. Аналогічно встановлюємо зв'язність у графі $\overline{G}$ будь-якої пари вершин w_1 і w_2 з множини V'. Отже, всі пари вершин графа $\overline{G}$ зв'язані між собою.

Третє питання.

Приклад 4. Будівельній фірмі для виконання певної роботи потрібні муляр, столяр, слюсар і сантехнік. На ці місця є п'ять претендентів: один може працювати муляром, другий – столяром, третій – муляром і сантехніком, ще двоє мають по дві спеціальності – сантехніка та слюсаря. Чи можуть виконати всі роботи четверо з цих робітників?

Розв'язання. Нехай V_1={муляр, столяр, слюсар, сантехнік} – множина спеціальностей, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ – множина претендентів. Утворимо дводольний граф $G = (V, E)$ з множиною вершин $V = V_1 \cup V_2$ і множиною ребер E ={{муляр, v_1}, {столяр, v_2}, {муляр, v_3}, {сантехнік, v_3}, {сантехнік, v_4}, {слюсар, v_4}, {сантехнік, v_5}, {слюсар, v_5}}. Четверо з цих робітників зможуть виконати всі роботи тоді і лише тоді, коли існує досконале паросполучення з V_1 у V_2. За теоремою Ф. Холла таке паросполучення існує тоді й лише тоді, коли для кожної множини $A \subseteq V_1$ виконується умова $|A| \le |\Gamma(A)|$, де $|\Gamma(A)|$ – множина вершин з V_2, суміжних хоча б з однією з вершин множини A. Методом перебору (15 варіантів) можна впевнитися, що нерівність $|A| \le |\Gamma(A)|$ виконується для кожної множини $A \subseteq V_1$. Тому досконале паросполучення з V_1 у V_2 існує, наприклад: {муляр, v_1}, {столяр, v_2}, {сантехнік, v_3}, {слюсар, v_4}, і четверо з цих робітників зможуть виконати всі роботи.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 3.6-3.9].

Практичне заняття № 7. Обхід графів

План.

1. Ейлерові графи.
2. Гамільтонові графи.
2. Метричні характеристики зв'язних графів.

Теоретичні відомості: [1, с. 270-277, 600-610], [2, с. 108-112].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти ейлеровій граф з 6 вершинами і 8 ребрами.

Розв'язання. Позначимо шуканий граф через $G=(V,E)$. Тоді, очевидно, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ – множина його вершин. Для знаходження множини ребер E врахуємо, що за теоремою Ейлера степені вершин ейлерова графа повинні бути парними. Крім того, сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєної кількості ребер, тобто 16. Таким чином, $\mathrm{dg}(v_1)+\mathrm{dg}(v_2)+\ldots+\mathrm{dg}(v_6)=16$, числа $\mathrm{dg}(v_i)$, $i=1,\ldots,6$, парні і більше 0 (оскільки, за означенням, ейлеровій граф зв'язний). З цих умов випливає, що степенями шуканого графа можуть бути або 2 або 4. Позначимо через x кількість вершин графа степені 2, через y – кількість вершин степені 4. Отримуємо систему рівнянь: $x+y=6$, $2x+4y=16$. Звідси маємо: $x=4$, $y=2$. Множина ребер шуканого графа така: $E=\{\{v_1,v_2\},$ $\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_5\},\{v_2,v_6\},\{v_3,v_4\},\{v_3,v_5\},\{v_3,v_6\}\}$.

Друге питання.

Приклад 2. Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого – п'ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно один раз і повернутись у початкове місто. Перехід дозволено тільки ребрами додекаедра.

Розв'язання. Додекаедр можна зобразити на площині у вигляді графа $G=(V,E)$ з множиною вершин $V=\{1,2,\ldots,20\}$ і множиною ребер $E=$ {{1,2}, {1,14}, {1,20}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,13}, {4,5}, {4,11}, {5,6}, {5,9}, {6,7}, {7,8}, {7,20}, {8,9}, {8,18}, {9,10}, {10,11}, {10,17}, {11,12}, {12,13}, {12,16}, {13,14}, {14,15}, {15,16}, {15,19}, {16,17}, {17,18}, {18,19}, {19,20}}. Тому задача зводиться до відшукання гамільтонового циклу. Один із можливих розв'язків такий: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 1.

Приклад 3. Побудувати граф з 7 вершинами, який є 1) ейлеровим, але не є гамільтоновим; 2) гамільтоновим, але не є ейлеровим.

Розв'язання. 1). Граф з множиною вершин $V=\{1,2,\ldots,7\}$ і множиною ребер $E=$ {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {3,5}, {4,5}, {5,6}, {5,7}, {6,7}} є ейлеровим (степені усіх вершин парні), але не є гамільтоновим (вершина 5 – точка з'єднання). 2). Граф з множиною вершин $V=\{1,2,\ldots,7\}$ і множиною ребер $E=$ {{1,2}, {1,4}, {1,7}, {2,3}, {3,4}, {4,5}, {5,6}, {6,7}} є гамільтоновим (існує гамільтоновий цикл: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1), але не є ейлеровим ($\mathrm{dg}(1)=\mathrm{dg}(4)=3$ – непарне число).

Третє питання.

Приклад 4. Дано граф G з множиною вершин $V=\{1,2,\ldots,6\}$ і множиною ребер $E=$ {{1,3},{1,4},{2,4},{2,5},{3,4},{4,6}}. Знайти його ексцентриситети, діаметр, радіус і центр.

Розв'язання. Ексцентриситет $e(v)$ вершини v зв'язного графа – це найбільша відстань між вершиною v і всіма іншими вершинами графа, тобто $e(v)=\max\limits_{w\in V} d(v,w)$. Оскільки $d(1,2)=2$, $d(1,3)=1$, $d(1,4)=1$, $d(1,5)=3$, $d(1,6)=2$, то $e(1)=3$. Аналогічно знаходимо $d(2,1)=2$, $d(2,3)=2$, $d(2,4)=1$, $d(2,5)=1$, $d(2,6)=2$ і $e(2)=2$. Далі маємо $d(3,1)=1$, $d(3,2)=2$, $d(3,4)=1$, $d(3,5)=3$, $d(3,6)=2$ і $e(3)=3$. Для четвертої вершини обчислимо $d(4,1)=1$, $d(4,2)=1$, $d(4,3)=1$, $d(4,5)=2$, $d(4,6)=1$ і $e(4)=2$. Оскільки $d(5,1)=3$, $d(5,2)=1$, $d(5,3)=3$, $d(5,4)=2$, $d(5,6)=3$, то $e(5)=3$. Нарешті, $d(6,1)=2$, $d(6,2)=2$, $d(6,3)=2$, $d(6,4)=1$, $d(6,5)=3$ і $e(6)=3$.

Діаметр графа $D(G)$ дорівнює найбільшому з усіх ексцентриситетів його вершин, тобто $D(G)=\max\limits_{v\in V} e(v)=3$. Радіус графа $R(G)$ – це найменший з усіх ексцентриситетів, тобто $R(G)=\min\limits_{v\in V} e(v)=2$.

Центр графа G складається з вершин 2 і 4, оскільки тільки для цих вершин виконується рівність $e(v)=R(G)$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 3.11, 3.21-3.26].

Практичне заняття № 8. Планарність графів. Дерева

План.

1. Планарність графів.
2. Розфарбовування графів.
3. Дерева.

Теоретичні відомості: [1, с.580-599, 624], [2, с.124-129, 150-176].

Перше питання.

Приклад 1. На ділянці три дома і три криниці. Від кожного дома до кожній криниці веде стежка. Власники домів посварилися і вирішили прокласти стежки від кожного дому до кожної криниці так, щоб не зустрічатися на шляху до колодязів. Як це зробити?

Розв'язання. Це зробити неможливо. Дійсно, побудуємо граф з вершинами у домах і криницях, ребрами якого є стежки. Цей граф ізоморфний дводольному графу $K_{3,3}$. Якщо задача має розв'язок, то граф $K_{3,3}$ є планарним, тобто має плоске зображення. Тоді, за формулою Ейлера, $|V|-|E|+|R|=2$, де $|V|$ – кількість вершин, $|E|$ – кількість ребер, $|R|$ – кількість граней (з урахуванням необмеженої грани). Тому, оскільки $|V|=6$, $|E|=9$, то $|R|=5$. Далі, оскільки граф $K_{3,3}$ не має простих циклів довжини 3, то межа будь-якої грані у плоскому його зображені містить не менше 4 ребер. Кожне ребро є межею двох граней (враховуємо і необмежену грань). Тому число $4|R|$ не може бути більше подвійну кількість ребер: $4|R|\le 2|E|$, тобто $20\le 18$ – протиріччя. Таким чином, граф $K_{3,3}$ не є планарним і наміри сосудів є нездійсненими.

Приклад 2. Чи можна з'єднати стежками попарно п'ять домів так, щоб стежки перетиналися лише біля домів?

Розв'язання. Ні, цього зробити не можливо. Дійсно, якщо б задача мала розв'язок, то повний граф з п'ятьма вершинами K_5 був би планарним, тобто мав плоске зображення. Оскільки $|V|=5$, $|E|=10$, то тоді за формулою Ейлера було б $|R|=2-5+10=7$. Але кожна грань обмежена не більше ніж трьома ребрами (граф K_5 повний) і кожне ребро є межею двох граней. Отже, $3|R|\le 2|E|$ або $21\le 20$ – протиріччя. Таким чином, граф K_5 не є планарним і розв'язати задачу неможливо.

Друге питання.

Приклад 3. Кожен з сімнадцяти вчених переписується з іншими. У їх переписці мова йде лише про три теми. Кожна пара вчених переписується одне з одним лише стосовно однієї теми. Довести, що не менш ніж три вчених переписуються одне з одним по одній і тій самій темі.

Розв'язання. Умові задачі відповідає повний граф з сімнадцятими вершинами і ребрами трьох кольорів. Доведемо, що в цьому графі знайдеться принаймні один трикутник з однокольоровими сторонами. Оскільки кожна вершина цього графа належить принаймні 6 ребрам одноко кольору, то можна припустити, що вершина v_1 належить 6 червоним ребрам (їх кінці позначимо v_2, v_3, ..., v_7). Якщо серед вершин v_2, v_3, ..., v_7 знайдуться дві, які з'єднані між собою червоним ребром, то існує трикутник з червоними сторонами. У протилежному випадку всі шість вершини v_2, v_3, ..., v_7 з'єднані між собою попарно ребрами двох кольорів (зеленим і синім). Повторюючи попередні міркування, можна довести, що в цьому випадку знайдеться принаймні один трикутник або з синіми, або з зеленими сторонами.

Приклад 4. У роботі міжнародного симпозіуму лінгвістів приймають участь n осіб. У кожній четвірці учасників є принаймні один, який може спілкуватися з іншими трьома. Довести, що знайдеться такий учасник симпозіуму, який зможе спілкуватися зі всіма іншими учасниками.

Розв'язання. Після формалізації умови задачі маємо повний граф з n вершинами і ребрами двох кольорів (сине ребро – два учасника можуть спілкуватися між собою, червоне – не можуть). За умовою задачі, серед будь-яких чотирьох вершин графа завжди є принаймні одна вершина, синя степінь якої дорівнює трьом.

Якщо всі ребра сині, то задача, очевидно, розв'язана. Тому припустимо, що існує червоне ребро, наприклад, $\{v_1, v_2\}$. Додамо ще будь-які інші дві вершини v_3, v_4. З чотирьох вершин $v_1, \ldots, v_4$ знайдеться принаймні одна, синя степінь якої дорівнює трьом. Це або v_3, або v_4. Припустимо, наприклад, що синю степінь три має v_3.

Далі, виберемо іншу довільну вершину v_5. З вершин v_1, v_2, v_3, v_5 або v_3, або v_5 мають синю степінь три. При цьому в обох випадках

v_3 з'єднана з v_5 синім ребром. Оскільки вершина v_5 довільна, то це означає, що вершина v_3 з'єднана синіми ребрами зі всіма вершинами графа.

Третє питання.

Приклад 5. Знайти кістякове дерево графа G з множиною вершин $V=\{1,2,\ldots,5\}$ і множиною ребер $E=\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2, 3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.

Розв'язання. За означенням кістяковим деревом графа G є дерево $T=(V,E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$. Цій умові задовольняє, наприклад, дерево з множиною ребер $E_T=\{\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}\}$.

Приклад 6. Яку найбільшу та яку найменшу кількості кінцевих вершин може мати дерево з n вершинами? Знайдіть відповідні дерева?

Розв'язання. Дерево з n вершинами має найбільшу кількості кінцевих вершин $n-1$. Це дерево $T=(V,E)$, де $V=\{1, 2, ..., n\}$ і $E=\{\{1,2\}, \{1,3\}, ..., \{1,n\}\}$. Найменша кількість кінцевих вершин у дерева з n вершинами дорівнює 2. Дерево таке: $T=(V,E)$, де $V=\{1, 2, ..., n\}$ і $E=\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, ..., \{n-1, n\}\}$.

Приклад 7. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

Розв'язання. Припустимо, що доповнення $\overline{T}=(V,V^{(2)}\setminus E)$ дерева $T=(V,E)$ також є деревом. Враховуючи, що кількість ребер будь-якого дерева дорівнює кількості вершин мінус 1, маємо рівності: $|V^{(2)}\setminus E|=|V|-1$, $|E|=|V|-1$. В повному графі з $|V|$ вершинами є $0,5|V|(|V|-1)$ ребер. Тому $0,5|V|(|V|-1)=2(|V|-1)$. Це рівняння має два розв'язки: $|V|=1$ і $|V|=4$. Тобто шукане дерево може мати або тільки одну вершину (очевидно, що тоді доповнення також дерево), або чотири вершини.

Приклад дерева T з 4 вершинами такий: $V=\{1, 2, 3, 4\}$, $E=\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$. Доповненням $\overline{T}$ до цього дерева є граф з вершинами $V=\{1, 2, 3, 4\}$ і множиною ребер $V^{(2)}\setminus E=\{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$. Він, очевидно, є деревом. Інших дерев, доповнення яких є деревами, не існує.

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 3.12-3.20, 3.27].

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика.– М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 960с.
2. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
3. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.
4. Трохимчук Р.М. Основи дискретної математики: Практикум. – К.: МАУП, 2004. – 168 с.