МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ Національний авіаційний університет

П.Ф. Жук І.А. Юрчук

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В АЕРОДИНАМІЦІ

Навчальний посібник

Київ 2013

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

Затверджено Вченою радою Національного авіаційного університету З грифом МОН України. Лист №1/11-1328 від 01.02.12р.

Рецензенти:

Голуб А.П., д-р фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України. Солодкий С.Г., д-р фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу теорії наближень Інституту математики НАН України. Василик В.Б., канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України.

П.Ф. Жук, І.А. Юрчук

Математичні методи в аеродинаміці: Навчальний посібник. – К.: НАУ-друк, 2013. – 315 с.

Підручник нормативної дисципліни «Математичні методи в аеродинаміці» призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом 6.040301 «Прикладна математика» спеціальності 8/7.04030101 «Прикладна математика». Навчальний матеріал охоплює всі змістові модулі навчальної програми дисципліни, складеної відповідно до освітнього стандарту.

> © Жук П.Ф., Юрчук І.А., 2013 © Національний авіаційний університет, 2013

3MICT

ВСТУП	4
Розділ 1. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ В АЕРОДИНАМІЦІ	7
1.1. Математичні моделі аеродинаміки	7 34
 1.3. Метод малих збурень 1.4. Метод функцій комплексної змінної 	55 85
Розділ 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В АЕРОДИНАМІЦІ	117
2.1. Методи конструювання скінченно-різницевих алгоритмів розв'язання аеродинамічних задач	117
2.2. Чисельні методи розв'язання нестаціонарних двовимірних задач аеродинаміки в лагранжевих координатах	138
2.3. чисслын методи розв язання багатовимірних задач аеродинаміки 2.4. Метод «частинок у комірці» розв'язання нестаціонарних	153
задач аеродинаміки 2.5. Методика «медуза» розв'язання двовимірних	177
аеродинамічних задач	197
аеродинаміки. 2.7. Методи побудови криволінійних сіток	213 258
Розділ 3. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В АЕРОДИНАМІЦІ.	280
3.1. Обчислення аеродинамічних і теплових навантажень літальних апаратів	280
3.2. Обчислення аеродинамічних характеристик пристроїв	• • •
роторного типу Література	303 314

сучасній аеродинаміці використовуються досягнення V багатьох розділів науки, таких як загальна механіка, теорія vправління та оптимізація процесів. аналіз. математичний чисельний аналіз, теорія кінетики і надзвукового горіння, теорія багатофазних середовищ, експериментальна аеродинаміка тощо. Усі вони, як правило, об'єднані технологіями математичного та обчислювального моделювання. Особливо складними комплексними є актуальні проблеми авіаційно-космічної техніки, обчислення оскільки побудова та математичних молелей повітряно-космічних літальних апаратів залучення вимагає надзвичайно широкого обсягу знань і методів з усіх галузей механіки і математики

Проте в арсеналі сучасної прикладної математики є вельми потужні математичні і чисельні методи розв'язання складних завдань аеродинаміки. Це і знаменита схема С.К. Годунова, що заснована на розв'язку задачі про розпад розриву і лежить в основі практично всіх сучасних методів чисельного моделювання течій з ударними хвилями, і TVD-схеми А. Хартена, які є зараз основним робочим інструментом в галузі обчислювальної аеродинаміки і використовуються у більшості відомих комерційних кодів, і безліч інших ефективних математичних методів та алгоритмів, що використовуються для розв'язання практичних завдань аеродинаміки.

Знання цих математичних і чисельних методів необхідне кожному фахівцю в галузі прикладної математики, оскільки вони також застосовуються і в газовій динаміці, і в гідродинаміці, і в механіці суцільних середовищ.

Навчальний посібник «Математичні методи в аеродинаміці» призначено для спеціалістів і магістрів зі спеціальності 8/7.04030101 «Прикладна математика». Він містить систематизований виклад зазначеної навчальної дисципліни та повністю відповідає програмі курсу.

Метою викладання дисципліни «Математичні методи в аеродинаміці» є:

- засвоєння основних математичних моделей аеродинаміки, аналітичних та чисельних методів їх розв'язання;

- формування у студентів логічного та алгоритмічного мислення, необхідного для розв'язання теоретичних та практичних задач за фахом.

Завданнями вивчення навчальної дисципліни «Математичні методи в аеродинаміці» є:

- засвоїти основні принципи побудови та дослідження математичних моделей аеродинаміки;

- опанувати сучасні аналітичні методи, які дають можливість розв'язувати окремі типи наближених моделей аеродинаміки;

- оволодіти сучасними чисельними методами розв'язання складних аеродинамічних задач.

Дана навчальна дисципліна є теоретичною основою сукупності знань та вмінь, що дає змогу фахівцям в галузі прикладної математики застосовувати на практиці сучасні математичні методи, моделі та алгоритми при розв'язанні аеродинамічних завдань у системі конкретних професійних знань.

Дисципліна «Математичні методи в аеродинаміці» базується на знаннях студентів з курсів алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, якісної теорії диференціальних рівнянь, фізики, теорії функцій комплексної змінної. математичної чисельних методів. Вона є однією з дисциплін, що пов'язує математику з технічними науками і дає можливість проводити виробничих процесів та розв'язувати певні аналіз класи організаційно-технічних задач сучасними методами. Знання та вміння, отримані під час вивчення даної навчальної дисципліни, використовуються під час виробничої практики студентів та при виконанні дипломних проектів.

У першому розділі розглядаються як фундаментальні закони аеродинаміки – закони збереження мас, зміни кількості руху та зміни моменту кількості руху, що у випадку гладких рухів еквівалентні диференціальним рівнянням неперервності, Ейлера (рівняння руху ідеального нестисливого середовища), Нав'є-Стокса (рівняння руху неідеального нестисливого середовища), так і основні аналітичні методи – метод характеристик, малих збурень та функції комплексної змінної. Другий розділ присвячений вивченню найефективніших методів дослідження задач аеродинаміки – чисельним методам, за допомогою яких розв'язуються як двовимірні, так і багатовимірні задачі. Яскравим прикладом дієвості методу є його застосування у гіперзвуковій динаміці. Також детально розглянуто такі чисельні методи, як метод скінченних різниць, «частинок у комірці», методика «медуза».

Безпосереднє практичне застосування математичних методів проілюстровано у третьому розділі на прикладах обчислення аеродинамічних і теплових навантажень літальних апаратів та аеродинамічних характеристик пристроїв певного типу.

Розділ 1. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ В АЕРОДИНАМІЦІ

1.1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ АЕРОДИНАМІКИ

Для теоретичного аналізу аеродинамічних явиш використовується широко розповсюджений прийом моделювання. Ha початковому етапі замість математичне реального процесу розглядається деякий спрощений, ідеальний процес — «модель явища», яка, з одного боку, відбиває основні якісні сторони явища, з другого, допускає досить простий математичний опис. Деякі чинники вважаються другорядними на певному етапі побудови, тому ними нехтують. Проте, в міру ускладнення моделі, вони можуть бути включені до розгляду. Залежно від мети дослідження, один і той самий чинник може бути основним або другорядним.

1.1.1. Основні відомості з кінетики газів

З-поміж основних законів фізики є закони збереження мас та енергії, кількості руху та моменту кількості рух, формулювання яких і є основною метою даного пункту.

1.1.1.1. Змінні Лагранжа та Ейлера. Зв'язок між ними

Існує два основних підходи до вивчення руху газу – Ейлера та Лагранжа.

Підхід Лагранжа. Нехай $\tau_0 -$ об'єм деякої маси газу, який він займав у початковий момент часу t_0 . В момент часу t ця маса газу буде займати об'єм τ . Між τ_0 та τ існує взаємно однозначна відповідність. Довільна частинка об'єму τ_0 , яка в момент часу t_0 знаходилась в точці A_0 , перейшла в деяку точку A об'єму τ .

Положення частинки визначається координатами x, y, z тієї точки простору, в якій вона знаходиться в момент часу t. Координати частинки в момент t залежать від її розміщення в початковий момент часу. Задамо початкове положення частинки її декартовими координатами a, b, c. Тоді координати частинок можуть бути представлені у вигляді:

x = x(a, b, c, t), y = y(a, b, c, t), z = z(a, b, c, t). (1.1)

Аеродинамічні величини густини ρ , швидкості **v** та температури T також можна записати у вигляді функцій від змінних a, b, c, t, які називаються з*мінними Лагранжа*. Отримаємо

 $\rho = \rho(a, b, c, t), v = v(a, b, c, t), T = T(a, b, c, t).$ (1.2)

Підхід Ейлера. У просторі вибирають деяку точку A з декартовими координатами x, y, z. У різні моменти часу через цю точку проходять різні частинки газу, зі своїми аеродинамічними величинами. Як змінюються ці характеристики у фіксованій точці простору в залежності від часу? Припустимо, що рух відомий, якщо відомі функції

$$\rho = \rho(x, y, z, t), \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t), T = T(x, y, z, t).$$
 (1.3)

Рівності (1.3) задають аеродинамічні величини газової частинки, яка в момент часу t розташована в точці з координатами x, y, z. Змінні x, y, z, t називають з*мінними Ейлера*.

Зауваження 1. У формулах (1.1) – (1.3) можна використовувати не тільки декартову, але й будь-які інші системи координат.

Зауваження 2. Домовимось надалі через v_x , v_y , v_z позначати складові вектора швидкості **v**, тобто $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$. В той час як через v будемо позначати величину швидкості.

Розглянемо задачу переходу від змінних Лагранжа до змінних Ейлера та навпаки.

1. Нехай задача про математичний опис руху газу розв'язана в змінних Лагранжа:

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t), \quad (1.4)$$

$$v_x = v_x(a, b, c, t), \quad v_y = v_y(a, b, c, t), \quad v_z = v_z(a, b, c, t), \quad (1.5)$$

$$\rho = \rho(a, b, c, t), \quad T = T(a, b, c, t). \quad (1.6)$$

Знайдемо її розв'язок у змінних Ейлера.

Оскільки $\Delta = \frac{D(a,b,c)}{D(x,y,z)} \neq 0$, то між координатними x, y, z та

a, *b*, *c* існує взаємно однозначна відповідність. При $t = t_0$, a = x, b = y, c = z якобіан дорівнює одиниці. Розв'яжемо систему (1.4) відносно a, b, c:

$$a = a(x, y, z, t), b = b(x, y, z, t), c = c(x, y, z, t).$$
 (1.7)

Тоді, підставивши функції з (1.7) в (1.5) і (1.6), отримаємо розв'язок задачі в змінних Ейлера:

$$v_x = \tilde{v}_x(x, y, z, t), v_y = \tilde{v}_y(x, y, z, t), v_z = \tilde{v}_z(x, y, z, t)$$
 (1.8)

$$\rho = \widetilde{\rho}(x, y, z, t), \ T = T(x, y, z, t).$$
(1.9)

2. Нехай задача розв'язана у змінних Ейлера. Це означає, що аеродинамічні величини відомі у вигляді (1.8) і (1.9). Для переходу до змінних Лагранжа необхідно спочатку знайти формули, які пов'язують координати x, y, z із змінними a, b, c.

У формулах (1.4) величини a, b, c є початковими координатами та сталими для кожної частинки, а час t – незалежна змінна. Оскільки координати частинки є функціями від часу, то можемо записати

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z. \tag{1.10}$$

Проте v_x , v_y , v_z відомі, підставимо (1.8) у праві частини рівнянь (1.10) та отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \ \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \ \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t) \ (1.11)$$

Проінтегрувавши систему (1.11), знайдемо x, y, z як функції від t:

$$x = x(t, c_1, c_2, c_3), y = y(t, c_1, c_2, c_3), z = z(t, c_1, c_2, c_3),$$
 (1.12)

де c_1 , c_2 , c_3 – довільні сталі. За означенням, при $t = t_0$ маємо x = a, y = b, z = c. Підставимо ці значення в (1.12) і знаходимо c_1 , c_2 , c_3 як функції від a, b, c. Підставляючи $c_i(a, b, c, t_0)$ в (1.12) і опускаючи t_0 , отримуємо шукані формули (1.4). Якщо тепер знайдені формули (1.4) підставити у відомі вирази для аеродинамічних величин (1.8) і (1.9), то отримаємо ці величини у змінних Лагранжа.

1.1.1.2. Деякі аеродинамічні поняття

Нехай A – деяка аеродинамічна величина (векторна або скалярна). Для фіксованої точки газу ця величина буде залежати лише від часу A = A(t).

Індивідуальною похідною A'_i деякої величини A називається похідна A за часом t. Вона характеризує зміну величини A в припущенні, що вона віднесена до фіксованої частинки.

Розглянемо приклади індивідуальних похідних:

а) нехай A - функція змінних Лагранжа: <math>A = A(a, b, c, t). Для фіксованої частинки аргументи a, b, c фіксовані, а змінюється тільки час. Тому $A'_i = \frac{\partial A}{\partial t}$;

б) припустимо тепер, що A – функція змінних Ейлера. Для фіксованої частинки її координати є функціями часу x = x(t), y = y(t), z = z(t), тому A(t) = A[x(t), y(t), z(t), t], відповідно до закону її руху.

Звідки похідна в змінних Ейлера дорівнює $A'_{i} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_{x} \frac{\partial A}{\partial x} + v_{y} \frac{\partial A}{\partial y} + v_{z} \frac{\partial A}{\partial z}.$

Припустимо, що деяка точка є зафіксованою в просторі. Через неї в різні моменти часу будуть проходити різні частинки з деякою аеродинамічною величиною A, яка є функцією A = A(t) від t.

Покальною похідною A'_{π} за часом t називається зміна величини A у фіксованій точці простору.

Приклади локальних похідних:

10

а) нехай A = A(x, y, z, t) – функція змінних Ейлера. Оскільки, x, y, z фіксовані, то $A'_{\vec{e}} = \frac{\partial A}{\partial t}$;

б) нехай A = A(a, b, c, t) – функція змінних Лагранжа. Оскільки через фіксовану точку простору проходять частинки з різними значеннями a, b, c, то у фіксованій точці простору A = A(a(t), b(t), c(t), t) і

$$A'_{\pi} = \frac{\partial A}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial A}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$
 (1.13)

Диференціюючи по t обидві частини (1.1) і враховуючи, що x, y, z фіксовані, отримаємо систему трьох лінійних рівнянь

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{db}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{dc}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

відносно $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$. Розв'язавши її та підставивши значення

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$$
 в (1.13), отримаємо $A'_{a} = \frac{\frac{D(A, x, y, z)}{D(t, a, b, c)}}{\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}}.$

Течія газу називається *стаціонарною*, якщо в кожній фіксованій точці простору, що належить області руху, всі аеродинамічні величини не залежать від часу.

Якщо аеродинамічні величини в усьому просторі, що зайнятий газом, або в деякій його частині змінюються з часом, то рух називається *нестаціонарним*. Зазначимо, що при переході від однієї системи координат до іншої стаціонарний рух може перейти в нестаціонарний і навпаки. Швидкість частинки — це індивідуальна похідна від радіусвектора **r** за часом, а прискорення — індивідуальна похідна від вектора швидкості за часом, тобто $\mathbf{v} = \mathbf{r}'_i$, $w = \mathbf{r}''_i$.

Нехай $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радіус-вектор.

Тоді, в змінних Лагранжа:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \mathbf{i} \quad w = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = (w_x, w_y, w_z) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}\right).$$

Для змінних Ейлера
$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

Траєкторією частинки називається геометричне місце точок простору, через які частинка послідовно проходить у часі.

Якщо рух заданий у змінних Лагранжа, то функції x = x(a,b,c,t), y = y(a,b,c,t), z = z(a,b,c,t) є параметричними рівняннями траєкторії тієї частинки, положення якої в момент часу t_0 визначається параметрами a, b, c.

У випадку змінних Ейлера рівняння траєкторії треба шукати у вигляді розв'язку системи диференціальних рівнянь виду $\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t).$

Лінісю течії називається лінія, яка у фіксований момент часу має таку властивість: вектор швидкості v, знайдений в довільній точці цієї лінії, спрямований по дотичній до неї.

Для стаціонарних течій рівняння траєкторій та ліній течії збігаються, а для нестаціонарних, в загальному випадку, це не так.

Поверхня течії – це поверхня для фіксованого моменту часу, в кожній точці якої вектор швидкості лежить у дотичній площині.

Геометрично поверхню течії будують таким чином: беруть криву, яка не є лінією течії, і через точки цієї лінії проводять лінії течії.

Критична точка – це точка, в якій вектор швидкості дорівнює нулю, тобто одночасно $v_x = v_y = v_z = 0$.

Через критичну точку може проходити декілька і навіть нескінченно багато ліній течії.

У загальному випадку об'єм частинки газу при своєму русі деформується і повертається як ціле з кутовою швидкістю $\frac{1}{2}\Omega$, де $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$. Щоб краще уявити собі сукупність частинок, що обертаються, вводять поняття вихрових ліній.

Вихровою лінією називається лінія, що дотична до кожної точки в даний момент часу та збігається з напрямом вектора вихру Ω в цій точці.

Її диференціальне рівняння має вигляд $\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$, де

$$\Omega_x = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial y}.$$

Вихрові лінії, проведені через точки замкненого контура, утворюють вихрову трубку.

Візьмемо в газі деяку криву *l*. Нехай **v** – швидкість частинки в кожній точці даної кривої.

Циркуляцією швидкості по кривій l називається інтеграл

$$\Gamma = \int_{A}^{B} v_{x} dx + v_{y} dy + v_{z} dz,$$

якщо крива замкнена, то $\Gamma = \bigoplus_{r} \mathbf{v} dr$, де напрям обходу зазначають.

Потоком вихру через поверхню S називають інтеграл $\iint_{a} (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$.

Застосувавши до циркуляції Г теорему Стокса, яка встановлює зв'язок між криволінійним інтегралом по замкненій кривій та інтегралом по поверхні, межа якої складається з даної кривої, легко отримати даний інтеграл.

1.1.1.3. Основні фізичні закони кінетики газів

1. Закон збереження мас. Його інтегральна та диференціальна форми (рівняння неперервності у змінних Ейлера та Лагранжа). Розглянемо в момент часу t деякий об'єм газу τ , який обмежений поверхнею S. Позначимо через M масу газу в цьому об'ємі. Частинки газу, які знаходились в момент t в об'ємі τ , рухаючись, заповнять в момент t' об'єм τ' масою M'.

Припустимо, що в процесі руху маса газу ні виникала, ні зникала; тоді закон збереження маси можна записати у вигляді

$$M = M'. \tag{1.14}$$

Оскільки, за означенням густини ρ , маса об'єму $d\tau$ рівна $dm = \rho d\tau$, то $M = \iiint_{\tau} \rho d\tau$ та $M' = \iiint_{\tau'} \rho' d\tau'$. Тоді з (1.14) випливає

інтегральна форма закону збереження мас

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0.$$

Припустимо тепер, що в заповненому рухомим газом просторі є просторово-розподілені джерела або стоки. Нехай в об'ємі $d\tau$ протягом проміжку часу dt за рахунок джерел надходить маса газу $dm = qd\tau dt$. Тут q – це об'ємна потужність джерел, тобто маса газу, яка потрапляє з джерел або зникає у стоці, в одиниці об'єму за одиницю часу.

Маса газу, яка в момент t знаходилась в об'ємі τ , буде змінюватись під час руху. За час dt вона отримає приріст $\Delta m = dt \iiint_{\tau} q d\tau$. За скінченний проміжок часу від t до t' приріст

маси буде дорівнювати $\Delta M = \int_{t}^{t'} \left(\iiint_{\tau} q d\tau \right) dt$. Тепер запишемо

рівність $M' = M + \Delta M$ та отримаємо інтегральну форму запису закону збереження мас для скінченного об'єму та скінченного проміжку часу за наявності просторово-розподілених джерел

$$\iiint_{\tau} \rho d\tau + \int_{t}^{t'} \left(\iiint_{\tau} q d\tau \right) dt = \iiint_{\tau'} \rho' d\tau .$$
 (1.15)

14

Припустимо, що $t' = t + \Delta t$, тоді (1.15) набуде вигляду $M' - M = \Delta t \iiint_{\tau} \rho d\tau$. Розділимо отриману рівність на Δt та

запишемо $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[M' - M]}{\Delta t} = \iiint_{\tau} \rho d\tau$. Звідки випливає закон

збереження мас для скінченного об'єму для даного моменту часу за наявності просторово-розподілених джерел, який має вигляд

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} q d\tau .$$
(1.16)

Розглянемо в момент t деяку масу газу в об'ємі τ , який обмежений поверхнею S. В момент $t + \Delta t$ ця ж маса газу буде займати об'єм τ' , який обмежений поверхнею S'.

Швидкістю об'ємного розширення газу в даній точці називається границя $I = \lim_{\tau \to 0} \frac{\tau' - \tau}{\tau \Delta t}$. Вираз $\frac{dI}{dt}$ обчислюють за формулою:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] d\tau. \quad (1.17)$$

Підставимо (1.17) в (1.16) та отримаємо

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) - q \right] d\tau = 0.$$

Рівність має місце для довільного об'єму τ , а це можливо лише тоді, коли підінтегральна функція рівна нулю. Звідки випливає, що

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = q.$$
(1.18)

Розкривши в (1.18) похідні від добутку та позначивши через $\frac{d\rho}{dt}$ індивідуальну похідну, отримаємо

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = q. \tag{1.19}$$

Рівність (1.19) – це диференціальна форма закону збереження маси в змінних Ейлера за наявності просторово-розподілених джерел з потужністю *q*.

Зауважимо, якщо розглядати нестисливу рідину, то індивідуальна похідна густини за часом рівна нулеві. Рівняння неперервності у випадку нестисливої рідини має вигляд $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{q}{\rho}$ або div $\mathbf{v} = \frac{q}{\rho}$.

Виходячи з (1.16), отримаємо рівняння неперервності у змінних Лагранжа.

Перейдемо від змінних x, y, z до змінних Лагранжа a, b, c, які визначають положення частинок в момент часу t_0 в об'ємі τ_0 . Тоді (1.16) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau_0} \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} dadbdc = \iiint_{\tau_0} q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} dadbdc.$$

Оскільки об'єм τ_0 не залежить від часу, то похідну $\frac{d}{dt}$ можна внести під знак інтегралу. У змінних Лагранжа індивідуальна похідна обчислюється як частинна похідна, тому

$$\iiint_{\tau_0} \left[\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right) - q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} \right] dadbdc = 0.$$

З того, що τ_0 – довільний об'єм, випливає така рівність

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)}\right) - q\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = 0$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{d}{dt} \ln \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = q.$$
(1.20)

Рівняння (1.20) – це рівняння неперервності у змінних Лагранжа (в загальному випадку, за наявності джерел).

2. Закон збереження енергії.

Для запису такого фундаментального закону фізики, як закон збереження енергії, необхідно з'ясувати, з яких видів енергії складається повна енергія об'єму газу, визначити види надходження енергії ззовні, а також врахувати перетворення одного виду енергії в інший.

Розглянемо спочатку деяку однорідну масу газу М, що перебуває у стані спокою та в об'ємі т. Позначимо через О його вихідний стан, який, взагалі кажучи, визначається деяким набором параметрів (наприклад, тиском, температурою та ін.). У результаті нагрівання, стискання та інших впливів маса газу перейде в новий стан, який буде визначатись іншими набором значень цих параметрів. Йдеться про перехід маси газу із вихідного стану О в інший, пов'язаний із зміною енергії ΔЕ. Будемо вважати, що у вихідному стані маса *М* мала запис енергії *E*₀. Покладемо $E = E_0 + \Delta E$. Якщо E_0 вибрана певним чином і ΔE відомий (практично або теоретично), то для будь-якого нового стану величину Е можна знайти. Таким чином, за допомогою ΔE знаходиться величина внутрішньої енергії Е даної маси газу. Введемо величину Е — внутрішню енергію, яка віднесена до одиниці маси. У загальному випадку, для неоднорідного рухомого газу *Е* — функція, що залежить від координат і часу:

$$E = \lim_{\tau \to 0} \frac{E}{M}.$$
 (1.21)

Із (1.21) випливає, що запас внутрішньої енергії в масі dm дорівнює $dE = Edm = E\rho d\tau$. Звідки, внутрішня енергія скінченої маси газу в об'ємі τ дорівнює $E = \iiint \rho E d\tau$.

Для ідеального газу в стані термодинамічної рівноваги рівняння стану – рівняння Клапейрона $p = \rho RT$, тому внутрішня енергія залежить тільки від температури і $E = \int_{0}^{T} c_{v} dT$, де $c_{v} - C_{v}$ теплоємність при сталому об'ємі. Як вихідний беремо стан, в якому абсолютна температура дорівнює нулю.

У випадку, коли немає процесів дисоціації та іонізації, внутрішня енергія складається з енергій поступального E_n , обертального $E_{\alpha\beta}$ і коливального E_k рухів молекул.

Якщо газ рухається, то він має кінетичну енергію. Кінетична енергія dT_{κ} маси dm, яка рухається зі швидкістю v, рівна $dT_{k} = dm \frac{v^{2}}{2} = \frac{\rho v^{2}}{2} d\tau$. Кінетична енергія маси в об'ємі τ рівна

$$T_k = \iiint_{\tau} \frac{\rho v^2}{2} d\tau.$$

Повною енергією називається сума кінетичної та внутрішньої енергій даної маси газу $U = \iiint_{\tau} \rho \left(\frac{v^2}{2} + E \right) d\tau.$

Зміна повної енергії маси газу за проміжок часу від t_1 до t_2 відбувається за допомогою роботи масових і поверхневих сил, притоку (за той самий проміжок часу) теплової енергії, за умови наявності об'ємно-розподілених джерел тепла, а також притоку тепла через поверхню. Якщо позначити через A_r роботу масових сил, A_s – роботу поверхневих сил, Q_r – об'ємне надходження енергії, Q_s – кількість тепла, яка надійшла через поверхню за час від t_1 до t_2 , то закон збереження енергії можна записати у вигляді $U|_{t=t_2} - U|_{t=t_1} = A_r + A_s + Q_r + Q_s$, де $U|_t$ – значення повної енергії в момент часу t. Згідно з означенням повної енергії, маємо

$$U\Big|_{t=t_2} - U\Big|_{t=t_1} = \iiint_{\tau} \rho\bigg(\frac{v^2}{2} + E\bigg) d\tau \bigg|_{t=t_2} - \iiint_{\tau} \rho\bigg(\frac{v^2}{2} + E\bigg) d\tau \bigg|_{t=t_1}.$$
 (1.22)

Обчислимо доданки, які входять у праву частину (1.22).

Робота масових сил. Позначимо через ΔA_{τ} роботу за проміжок часу dt масових сил, які прикладені до маси в об'ємі τ . На масу dm в об'ємі $d\tau$ діє сила $\rho F d\tau$. Переміщення цієї маси за

час dt рівне $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Робота зазначеної сили при переміщенні dr рівна $\rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})d\tau dt$. Звідки випливає, що робота, виконана силами за скінченний проміжок часу від t_1 до t_2 , дорівнює

$$A_{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \iiint_{\tau} \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau.$$
(1.23)

Робота поверхневих сил. На елемент поверхні dS з нормаллю **n** діє сила $\tau_n dS$, причому її робота за час dt рівна $(\tau_n \cdot \mathbf{v}) dS dt$. Звідки робота поверхневих сил за скінчений проміжок часу рівна

$$A_s = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \iint_{S} (\mathbf{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS.$$
(1.24)

Об'ємне поглинання енергії. Іноді виникає необхідність враховувати поглинання (або виділення) енергії кожним елементом об'єму газу, не вказуючи конкретних причин. Позначимо через $\varepsilon d\tau dt$ кількість тепла, яке надійшло в об'єм $d\tau$ за час dt.

Швидкістю об'ємного поглинання енергії назвемо величину є, яка є секундним потоком тепла, що віднесений до одиниці об'єму. Енергія, яка поступила за час від t_1 до t_2 буде

$$Q_{\tau} = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\tau} \varepsilon d\tau.$$
(1.25)

Потік тепла через поверхню. Внаслідок теплопровідності, тепло іззовні може проникати в середину об'єму газу τ , через поверхню *S*, яка його обмежує. Кількість тепла, що проникає через елемент поверхні dS, рівна $t_n dS dt$.

Густиною потоку енергії називається величина t_n – це тепловий потік, що віднесений до одиниці площі та одиниці часу. За час від t_1 до t_2 в об'єм т через поверхню *S* проникає кількість тепла

$$Q_{s} = \int_{t_{1}}^{t_{2}} dt \iint_{S} t_{n} dS.$$
(1.26)

Підставляючи (1.23) – (1.26) в (1.22), отримаємо іншу форму інтегрального запису закону збереження енергії

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho\left(\frac{v^2}{2} + E\right) d\tau = \iiint_{\tau} \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) d\tau + \iint_{S} (\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{v}) dS + \iiint_{\tau} \varepsilon d\tau + \iint_{S} t_n dS$$

Таким чином, швидкість зміни повної енергії деякої маси газу рівна сумі потужності, яка розвивається об'ємними і поверхневими силами, швидкості об'ємного надходження енергії та потоку енергії через поверхню. Використовують також і загальну форму запису, яка має вигляд

$$\iiint_{\tau} \left[\rho \frac{dE}{dt} - \mathbf{\tau}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \mathbf{\tau}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - \mathbf{\tau}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \varepsilon \right] d\tau = \iint_{S} t_n dS.$$
(1.27)

Перейдемо до диференціальної форми запису закону збереження енергії. Спочатку отримаємо формулу для потоку тепла t_n . Введемо величини t_x , t_y , t_z такі, що

$$t_n = t_x \cos(n, x) + t_y \cos(n, y) + t_z \cos(n, z).$$
(1.28)

Вектором потоку тепла називають вектор $t = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} + t_z \mathbf{k}$. Величина t_n – це проекція даного вектора на вектор нормалі **n**.

Використовуючи формули (1.27) та (1.28), отримаємо

$$\iiint_{\tau} \left[\rho \frac{dE}{dt} - \mathbf{\tau}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \mathbf{\tau}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} - \mathbf{\tau}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \varepsilon - \frac{\partial t_x}{\partial x} - \frac{\partial t_y}{\partial y} - \frac{\partial t_z}{\partial z} \right] d\tau = 0.$$

Оскільки дана рівність справедлива для довільного об'єму, то

$$\rho \frac{dE}{dt} = \mathbf{\tau}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{\tau}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{\tau}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \varepsilon + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z}.$$
 (1.29)

Рівність (1.29) – диференціальна форма закону збереження енергії.

3. Закони кількості руху та моменту кількості руху.

Закон кількості руху для системи матеріальних точок встановлює зв'язок між зміною кількості руху та силами, які її викликають. При розгляді руху газу, на відміну від руху системи точок, необхідно враховувати, які неперервно розподілені в об'ємі або на поверхні.

Сили, що прикладені до частинок газу, можна розділити на два класи.

Масові сили – сили, які діють на кожен елемент об'єму незалежно від того, чи є поруч інші частинки газу. Нехай \mathbf{F}^{M} – головний вектор сил, що діють на масу M газу, яка заповнює об'єм τ .

Середньою масовою силою, яка діє на масу M, називають величину $F_{cp} = \frac{\mathbf{F}^M}{M}$.

Масовою силою називається вектор $\mathbf{F} = \lim_{\tau \to 0} \mathbf{F}_{n\delta} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\mathbf{F}^M}{M}$ у відношенні до одиниці маси.

Якщо сила **F** відома в усіх точках деякого об'єму τ як функція координат точок простору і часу **F** = **F**(*x*, *y*, *z*, *t*), то можна обчислити **F**^{*M*} сил, які діють на масу газу в цьому об'ємі. На об'єм *dx* з масою *dm* = ρdx діє сила **F***dm* = **F** $\rho d\tau$. Звідки головний вектор масових сил

$$\mathbf{F}^{M} = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau. \tag{1.30}$$

Нехай об'єм τ обмежений поверхнею *S*. Газ, що міститься за межами τ , діє через поверхню *S* на газ, який міститься в середині τ .

Поверхневими силами називають сили, з якими частинки газу, що знаходяться зовні поверхні, діють на поверхневі частинки об'єму т.

Виділимо на *S* елемент поверхні ΔS з нормаллю **n**. Головний вектор поверхневих сил, які діють на ΔS , позначимо через $\Delta \mathbf{F}_n^S$. Середня напруга, яка діє на ΔS , рівне $\boldsymbol{\tau}_n^{\tilde{n}\delta} = \frac{\Delta \mathbf{F}_n^S}{\Delta S}$. Нехай ΔS стягується в точку, тоді означимо таке поняття.

Напругою поверхневих сил, яка діє в даній точці (або вектором поверхневої сили, яка віднесена до одиниці площі), називається вектор

$$\boldsymbol{\tau}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \boldsymbol{\tau}_n^{\tilde{n}\delta} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n^{\tilde{n}\delta}}{\Delta S}.$$
 (1.31)

Вектор τ_n залежить від координат точки, часу і напряму нормалі **n**. 3 (1.31) випливає, що на елемент поверхні dS діє сила $\tau_n dS$. Головний вектор поверхневих сил, які діють на поверхню S:

$$\mathbf{F}^{S} = \iint_{S} \mathbf{\tau}_{n} dS. \tag{1.32}$$

Поверхневі сили описують взаємодію між різними областями газу.

Виділимо в рухомому газі деякий об'єм τ , обмежений поверхнею *S*. Нехай вектор **K** – кількість руху маси газу, яка заповнює даний об'єм. В елементарному об'ємі $d\tau$ міститься маса $\rho d\tau$. Кількість руху цієї маси, яка має швидкість **v**, рівна $\Delta \mathbf{K} = \rho \mathbf{v} d\tau$. Тоді кількість руху маси, яка міститься в об'ємі τ :

$$\mathbf{K} = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau. \tag{1.33}$$

Для фіксованого газу вектор **K**, так само, як і об'єм τ – функції часу.

Закон кількості руху можна сформулювати так: похідна за часом від кількості руху деякої системи мас рівна головному вектору зовнішніх сил, які діють на цю систему. Тому

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}^M + \mathbf{F}^S. \tag{1.34}$$

Підставляючи в (1.34) вирази (1.30), (1.32) і (1.33), отримаємо запис закону кількості руху у вигляді

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \iint_{S} \boldsymbol{\tau}_{n} dS.$$
(1.35)

Інтегруючи (1.35) від t_1 до t_2 , отримаємо запис закону кількості руху для скінченного проміжку часу

$$\iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau \Big|_{t=t_2} - \iiint_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau \Big|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \iiint_{S} \tau_n dS \right] dt.$$
(1.36)

Зміна кількості руху за деякий проміжок часу рівна сумі імпульсу масових сил та імпульсу поверхневих сил. Інколи даний закон записують у вигляді

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \text{div } \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} \right] d\tau = \iint_{S} \boldsymbol{\tau}_{n} dS.$$
(1.37)

Рівності (1.35) – (1.37) дають інтегральний запис закону кількості руху.

Використовуючи формули Коші (див. [1, ст.51-52]) та Остроградського-Гауса, рівність (1.37) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho \mathbf{F} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}$$
(1.38)

або

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}, \quad (1.39)$$

де τ_x , τ_y , τ_z – проекції вектора напруги на осі Ox, Oy та Oz відповідно.

Рівності (1.38) та (1.39) – диференціальні форми запису закону кількості руху в загальному випадку.

Для механічної системи закон моменту кількості руху формулюється так: *похідна за часом* від повного моменту кількості руху деякої системи дорівнює головному моменту зовнішніх сил, які діють на неї. Запишемо цей закон для випадку руху суцільного середовища.

Нехай маса M в даний момент часу займає деякий об'єм τ , обмежений поверхнею S, а \mathbf{K} та \mathbf{L} – її кількість руху та момент руху відповідно. Для елементу об'єму $d\tau$ даної маси момент кількості руху відносно початку координат рівний ($\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$) $d\tau$. Він пов'язаний із поступальним рухом і часто називається орбітальним моментом. Для деякого τ отримаємо

$$\mathbf{L}_{i\delta} = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) \ d\tau. \tag{1.40}$$

Проте, так буває не завжди. Газ має молекулярну будову, і його стан пов'язаний із рухом молекул та їхньою взаємодією.

Зіткнення молекул (атомів) між собою призводить до їх обертання. Обертання кожної молекули можна охарактеризувати вектором внутрішнього моменту кількості руху. У звичайних умовах внаслідок хаотичності руху сума внутрішніх моментів кількості рухів рівна нулеві. У тих випадках (наприклад, за наявності магнітних або інших вільних полів), коли розподіл цих моментів не ізотропний, сумарний внутрішній момент є відмінним від нуля. У зв'язку з цим при розгляді макроскопічного руху частинок необхідно вводити вектор внутрішнього моменту.

Повний момент кількості руху частинки складається із орбітального моменту, який пов'язаний із рухом частинки як цілого, та внутрішнього моменту кількості руху, що являє собою сумарний момент обертів молекул. Позначимо через **M** внутрішній момент кількості руху, який має одиниця маси газу $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Маса $dm = \rho d\tau$ має момент $\mathbf{M}\rho d\tau$. Для маси в об'ємі τ отримаємо

$$\mathbf{L}_{\dot{a}\dot{i}} = \iiint_{\tau} \mathbf{M} \rho d\tau. \tag{1.41}$$

Повний момент кількості руху маси дорівнює $L = L_{op} + L_{eh}$,

$$\mathbf{L} = \iiint_{\tau} \left[\left(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \right) + \mathbf{M} \rho \right] d\tau.$$
(1.42)

Зміна повного моменту кількості руху пов'язана з наявністю моментів, що породжені силовими полями – полем масових і поверхневих сил, наявністю об'ємно-розподілених джерел внутрішнього моменту і потоку внутрішнього моменту через поверхню. Введемо необхідні означення і запишемо вирази для моментів зовнішніх сил та внутрішніх моментів.

На елемент $d\tau$ з масою dm діє сила $\rho F d\tau$. Орбітальний момент цієї сили $(\mathbf{r} \times \rho F) d\tau$, звідки головний орбітальний момент масових сил рівний

$$\mathbf{M}_{0} = \iiint_{\tau} \left(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} \right) \, d\tau. \tag{1.43}$$

На елемент поверхні dS з нормаллю **n** діє поверхнева сила $\tau_n dS$. Головний орбітальний момент поверхневих сил

24

$$\mathbf{M}_{S} = \iint_{S} \left(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_{n} \right) \ dS. \tag{1.44}$$

Нехай за час dt в об'ємі $d\tau$ з'являється момент $\rho \Pi d\tau dt$, де Π – момент, віднесений до одиниці маси та одиниці часу. Позначимо приріст внутрішнього моменту в об'ємі $d\tau$ за цей час через $\mathbf{M}_{0}^{e_{H}} dt$ і запишемо

$$\mathbf{M}_{0}^{ai} = \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau. \tag{1.45}$$

Через елемент поверхні dS з нормаллю **n** протягом часу dt проникає момент $\pi_n dS dt$. Тут π_n – густина потоку внутрішнього моменту. Позначимо потік за час dt внутрішнього моменту через поверхню S через $\mathbf{M}_{S}^{e_{H}} dt$ та отримаємо

$$\mathbf{M}_{S}^{ai} = \iint_{S} \pi_{n} dS. \tag{1.46}$$

Похідна за часом від повного моменту кількості руху L рівна сумі названих вище чотирьох моментів. Таким чином, закон моменту кількості руху запишемо у вигляді

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_0^{\scriptscriptstyle \mathcal{B}H} + \mathbf{M}_S^{\scriptscriptstyle \mathcal{B}H}.$$
 (1.47)

Враховуючи вирази (1.42) – (1.46), отримаємо

$$\iiint_{\tau} [(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) + \mathbf{M}\rho] d\tau = \iiint_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) d\tau + \\ + \iiint_{\tau} \rho \Pi d\tau + \iint_{S} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_{n}) dS + \iint_{S} \boldsymbol{\pi}_{n} dS$$
(1.48)

іншу форму запису закону моменту кількості руху.

1.1.2. Математичні моделі ідеальних та неідеальних газів

Однією з основних математичних моделей є модель нестисливої ідеальної рідини, яка розглядається як спрощений, ідеальний процес.

В основі аеродинамічної моделі лежить фундаментальне припущення про суцільність середовища. Як відомо, будь-яке середовище дискретне – воно складається з окремих мікрочастинок (атомів, молекул, іонів, електронів тощо), відстань між якими у багато разів перевищує їхні власні розміри. Ці частинки хаотично рухаються, час від часу стикаючись одна з одною. У газовій динаміці розглядаються досить щільні середовища, які містять в одиниці об'єму величезну кількість частинок. Уявлення про цю величину може дати число Авогадро.

У цьому і полягає зміст переходу до моделі суцільного середовища, що заповнює простір неперервно. Звісно, такий перехід можна здійснити не в усіх випадках. Кількісним критерієм застосовності наближення суцільного середовища може служити

нерівність $\frac{l}{L} << 1$, де l – довжина вільного пробігу, L –

характерний розмір заданого тіла. Міра малості відношення $\frac{l}{L}$ в конкретних завданнях може бути різною.

Ця нерівність виконується при обтіканні тіл потоком газу (для якого $l \approx 10^{-5} - 10^{-6}$ см) у звичайних умовах при характерному розмірі тіла, яке обтікається, L > 1 см.

Ідеальним називається газ, в'язкість якого дорівнює нулю, або, що те ж саме, в якому не виникає тертя. При русі без тертя між окремими газовими шарами, що дотикаються, виникають лише нормальні сили (тиск), дотичні ж сили (напруги зсуву) відсутні. Це означає, що ідеальний газ не надає зміні форми ніякого внутрішнього опору.

Нестисливою називають рідину, яка не змінює свого об'єму під дією зовнішнього тиску. Модель такого газу є базою для інших моделей, що враховують більше різних фізичних показників. Течію рідини можна розглядати як нестисливу, якщо $\frac{1}{2}M^2 \ll 1$, де M-це число Маха, що дорівнює відношенню величини швидкості даної течії до швидкості звуку.

Модель ідеального газу широко застосовується для опису багатьох важливих сторін явища обтікання тіл або рухів газів у каналах. Проте вона не може пояснити походження опору тіл, втрат енергії в каналах, нагрівання газів за допомогою дисоціації механічної енергії в тепло та ін. Для опису цих явищ використовується більш складна модель в'язкого газу. Простішою і найбільш широко використовуваною моделлю в'язкого газу є ньютонівський в'язкий газ, в якому дотичні та нормальні напруги виражаються лінійно через швидкості зсуву та відносного віддалення.

Закони збереження мас, зміни кількості руху та зміни моменту кількості руху у випадку гладких рухів еквівалентні таким диференціальним рівнянням: неперервності, Ейлера (рівняння руху ідеального нестикаємого середовища), Нав'є-Стокса (рівняння руху неідеального нестикаємого середовища).

1.1.2.1. Система рівнянь для ідеального газу. Рівняння Ейлера

Нагадаємо, що в ідеальній рідині відсутні дотичні напруги, в ній є лише тиск (нормальні напруги). Рух ідеального нестисливої рідини описується такою системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{cases}$$
(2.1)

де v – швидкість газу, ρ – густина, F – масова густина зовнішніх щодо об'єму масових сил, p – тиск.

У даній системі рівнянь параметр ρ відомий, а масові сили **F** задані, тому система є замкненою і містить дві невідомі функції **v**(*x*, *y*, *z*, *t*) та *p*(*x*, *y*, *z*, *t*).

Перше з рівнянь системи (2.1) називається рівнянням Ейлера, а друге – рівнянням неперервності.

Нехай $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ і $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, де v_x, v_y, v_z , F_x, F_y, F_z – проекції, відповідно, векторів **v** та **F** на осі координат. Тоді рівняння Ейлера набуває вигляду:

$$\frac{dv_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$
(2.2)

Оскільки $t_x = t_y = t_z = 0$, то рівняння енергії ідеального газу:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon - p \text{ div } \mathbf{v},$$

де є – об'ємне поглинання енергії.

Додавши до отриманих рівнянь ще рівняння стану $f(p,\rho,T)=0$ і вираз для внутрішньої енергії *E* через довільні дві величини з трьох (p,ρ,T) , отримаємо систему рівнянь для ідеального нетеплопровідного газу, яка має такий вигляд:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$
(2.3)
$$\rho \frac{dE}{dt} + p \text{ div } \mathbf{v} = \varepsilon,$$

$$f(p, \rho, T) = 0.$$

Дана система — система шести рівнянь для знаходження шести шуканих функцій: ρ , p, T, v_x , v_y , v_z . П'ять рівнянь нелінійні рівняння в частинних похідних першого порядку, одне рівняння — скінченне співвідношення. У багатьох випадках вигляд залежності E = E(p,T) відомий, а масові сили **F** вважаються заданими функціями координат і часу. Об'ємне поглинання є зазвичай задається як функція p і T, хоча деколи вона може бути явно виписана від координат і часу.

Розпишемо детальніше систему (2.3) та отримаємо:

$$\begin{split} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \bigg(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \bigg) &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \bigg(\frac{\partial E}{\partial t} + v_x \frac{\partial E}{\partial x} + v_y \frac{\partial E}{\partial y} + v_z \frac{\partial E}{\partial z} \bigg) + p \bigg(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \bigg) &= \varepsilon, \\ f(p, \rho, T) &= 0, \end{split}$$

де E = E(p,T). Цю систему рівнянь задовольняють всі течії ідеальних нетеплопровідних газів, а також ті, що пов'язані з процесом обтіканням тіл різної форми.

1.1.2.3. Система рівнянь для неідеального газу. Рівняння Нав'є-Стокса

Спочатку розглянемо суть поняття в'язкості для (неідеального) газу, що можна легко проілюструвати на експерименті Куетта. Нехай задано течію між двома дуже довгими паралельними пластинами, одна з яких (наприклад, нижня) нерухома, в той час як друга рухається у своїй же площині зі сталою швидкістю *v*.

Позначимо відстань між пластинами через h і припустимо, що тиск в усьому просторі, який займає газ, сталий. Експериментально показано, що газ прилипає до обох пластин, звідки безпосередньо біля нижньої пластини швидкість газу рівна нулю, а біля верхньої — збігається зі швидкістю v, причому в просторі між пластинами має місце лінійний розподіл швидкостей.

ρ

Швидкість *v* пропорційна відстані *y* від нижньої пластини і виражається формулою $v(y) = \frac{y}{h}v$.

Для того, щоб існував такий стан руху, до газу з боку верхньої пластинки має бути прикладена дотична сила в напрямі руху, яка врівноважує силу тертя газу τ , що віднесена до одиниці площі. Іншими словами, дотична напруга пропорційна відношенню v/h, замість якого можна взяти dv/dy. Множник пропорційності між τ і dv/dy позначають через μ і він залежить від природи газу.

Тому закон тертя (закон Ньютона) для газу має вигляд $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$,

де величину µ називають динамічним коефіцієнтом в'язкості газу.

Рівняння Нав'є-Стокса – система диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує рух і теплопередачу неідеальної (в'язкої) нестисливої рідини. Вони є одними з найважливіших у аеродинаміці й застосовуються в математичному моделюванні багатьох природних явищ і технічних задач.

Система складається з двох рівнянь – рівняння руху та рівняння неперервності, векторний запис яких має вигляд

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \upsilon \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$
(2.4)

де **v** – швидкість середовища, $\Delta \mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$, ρ – густина,

F – масова густина зовнішніх, по відношенню до об'єму, масових сил, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, $\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, p – тиск.

У даній системі рівнянь параметри μ та ρ відомі, а масові сили **F** задані, тому система є замкненою і містить дві невідомі функції **v**(*x*, *y*, *z*, *t*) та *p*(*x*, *y*, *z*, *t*). Нехай $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$. Спростимо задачу. Будемо розглядати прямолінійний рух газу, який паралельний осі Ox, та знехтуємо дією масових сил. Тоді в (2.4) $v_y = 0$, $v_z = 0$, F = 0. В результаті рівняння неперервності матиме вигляд: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Звідки випливає, що v_x не залежить від x і буде мати вигляд $v_x = v_x(y, z, t)$. Враховуючи, що $v_y = 0$, $v_z = 0$, запишемо $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, звідки рівняння системи (2.4) набуде вигляду

$$\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \upsilon \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \quad (2.5)$$

де

$$(\mathbf{v} \times \nabla) v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Оскільки $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$, то $(\mathbf{v} \times \nabla) v_x = 0$. Звідки випливає, шо $\frac{dv_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$. Толі рівняння (2.5) можна записати у вигляді

grad $p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}, \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x;$

що
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{\partial t}$$
. Тоді рівняння (2.5) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$
(2.6)

і $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ за умовою.

Зрозуміло, що p = p(x,t), але $v_x = v_x(y,z,t)$, звідки, для уникнення суперечностей, будемо вважати, що рівняння (2.6) можливе тоді і лише тоді, коли $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t)$. В результаті чого запишемо

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \upsilon \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f(t).$$
(2.7)

Це рівняння за своїм виглядом збігається з рівнянням теплопровідності. Таким чином, довільні прямолінійні рухи в'язкої нестисливої рідини за відсутності масових сил описуються рівнянням (2.7), в якому $v_x = v_x(y, z, t)$.

Якщо ж початкові та крайові умови не будуть залежати від y, то і розв'язок v_x рівняння (2.7) також не буде залежати від y.

Тоді, при сталому тиску $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \upsilon \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \quad v_x = v_x(z,t), \tag{2.8}$$

яке описує плоскопаралельний та прямолінійний рух неідеального газу.

Розглянемо для даного рівняння початково крайову задачу. Нехай газ знаходиться в стані спокою та обмежений в каналі скінченної висоти h із твердими стінками, що паралельні і мають нескінченну довжину і ширину.

Нехай в початковий момент часу верхня стінка z = h починає рух зі сталою швидкістю v_{ox} , а нижня z = 0 залишається нерухомою. Задача полягає в знаходженні закону розвитку поля швидкостей в газі (*задача Куетта*). Припустивши, що рух плоскопаралельний та прямолінійний зі швидкістю $v = v_x$ **i**, $v_x = v_x(z,t)$, а тиск сталий, отримаємо, що v_x має задовольняти (2.8) і початкові та межові умови $v_x|_{t=0} = 0$, $v_x|_{z=0} = 0$, $v_x|_{z=0} = v_{0}$.

Межова умова $v_x|_{z=0} = 0$ відповідає, з огляду на наявність в'язкого тертя, прилипанню газу до нижньої стінки, а межова умова $v_x|_{z=h} = v_0$ – прилипанню в'язкого газу до верхньої стінки, яка рухається зі швидкістю v_0 .

Основні застосування системи рівнянь Нав'є-Стокса та їхні варіації: опис течій у мантії Землі («проблема динамо») та опис руху повітряних мас атмосфери, зокрема, при формуванні прогнозу погоди.

Розглянемо задачу про *рух газу в круглому циліндрі скінченної* довжини.

Нехай в циліндрі скінченної довжини h і радіуса a, вісь якого збігається з віссю Ox, у стані спокою знаходиться в'язкий газ. В момент часу t = 0 раптово в торцях циліндра утворюється перепад тиску $p_1 - p_2 > 0$, який надалі є сталим. Знайдемо поле швидкостей, що виникає.

Нехай рух газу прямолінійний, а градієнт тиску сталий $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{h}$. Скористаємось рівнянням (2.8), яке описує прямолінійний рух в'язкого газу $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \upsilon \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f(t)$, де

$$v_x = v_x(y, z, t), \quad f(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{\rho h} = const.$$

Це рівняння має розв'язок за таких крайових умов: $v_x|_{t=0}$, $v_x|_{r=a} = 0$, де крайова умова відповідає прилипанню газу до нерухомих твердих стінок труби.

Контрольні питання

- 1. Сформулюйте основні підходи до вивчення руху газу.
- 2. Наведіть означення індивідуальної та локальної похідних.
- 3. Яка течія газу називається стаціонарною (нестаціонарною)?
- 4. Сформулюйте означення лінії та поверхні течії.
- Сформулюйте закон збереження мас та наведіть основні форми його запису.
- 6. Що таке масові сили та поверхневі сили, їхня робота?
- 7. Сформулюйте закон збереження енергії.
- 8. Запишіть закон кількості руху в диференціальній формі.
- 9. Сформулюйте закон моменту кількості руху.
- 10. Запишіть закон моменту кількості руху у різних формах.
- 11. Що таке система рівнянь Ейлера? Який рух вона описує?
- 12. Що таке система рівнянь Нав'є-Стокса? Який рух вона описує?
- 13. Сформулюйте задачу Куетта.

1.2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

В аеродинаміці важливе місце займає метод характеристик, який дає можливість обчислювати течію ідеального газу, визначати параметри обтікання профілів крил та корпусів літальних апаратів. Суть методу полягає у спрощенні складних диференціальних рівнянь, які описують процес, вздовж характеристичних напрямів, що значно полегшує процес розв'язання.

1.2.1. Елементарна задача методу характеристик

Перш ніж перейти до розгляду елементарної задачі, наведемо основні означення, терміни та рівняння, які пов'язані з нею.

Одновимірним нестаціонарним називають рух, при якому всі характеристики середовища залежать від часу та від відстані *x* до деякої площини (рух з *плоскими хвилями*), або від відстані *x* до деякої прямої – осі симетрії (рух з *циліндричними хвилями*) або від відстані до деякої точки – осі симетрії (рух із сферичними хвилями).

При вивченні одновимірних нестаціонарних рухів газу з Ейлерової точки зору шуканими функціями є одна компонента швидкості u (надалі такою компонентою буде v_x) і дві термодинамічні змінні, наприклад, тиск p і густина ρ , а незалежними – лінійна координата x і час t.

В одновимірних випадках зовнішня масова сила залежить тільки від *x* і *t* та має одну складову – в напрямі зміни *x*.

Для одновимірних рухів рівняння неперервності (закон збереження маси) і рівняння кількості руху мають вигляд:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha - 1) \frac{\rho u}{x} = 0,$$
(1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \tag{1.3}$$

де α – параметр розмірності простору ($\alpha = 1,2,3$ для рухів з плоскими, циліндричними та сферичними хвилями відповідно), *s* – ентропія частинки, *a* – швидкість звуку.

Система (1.1) – (1.3) лінійна відносно частинних похідних шуканих функцій u(x,t), p(x,t) та $\rho(x,t)$.

Характеристичними напрямами називають напрями диференціювання в площині x, t, які визначаються формулами $\frac{dx}{dt} = c_k$, де c_k – характеристичні швидкості (деякі функції незалежних змінних та шуканих величин).

А лінії, які відповідають рівнянням $\frac{dx}{dt} = c_k$, називають *характеристиками* вихідної системи рівнянь (в даному випадку це (1,1) - (1,3)).

Рівняннями в характеристичній формі називають рівняння, які пов'язують похідні шуканих функцій вздовж характеристичних напрямів.

Система рівнянь (1.1) – (1.3) в характеристичній формі має наступний вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial p}{\partial x}\right] + (\alpha - 1)\frac{au}{x} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial p}{\partial x}\right] - (\alpha - 1)\frac{au}{x} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \tag{1.6}$$

Із (1.4) – (1.6) випливає, що характеристичні напрями і характеристичні швидкості для одновимірних нестаціонарних рухів визначаються формулами

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{+} = c_{+} = u + a, \ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{-} = c_{-} = u - a, \ \left(\frac{dx}{dt}\right)_{0} = c_{0} = u.$$
(1.7)

Для кожного розв'язку рівнянь (1.1) – (1.3) в області площини x, t, де визначений розв'язок, можна побудувати три сімейства ліній – характеристик. У випадку неперервних рухів через кожну точку області проходить одна і тільки одна характеристика кожного сімейства.

Рівняння (1.7) визначають переміщення у фізичному просторі поверхонь з характеристичними швидкостями.

Звуковими (акустичними) характеристиками називають характеристики G^+ і G^- перших двох сімейств у площині x, t, a характеристики третього сімейства G^0 – контактними (ентропійними) характеристиками або траєкторіями.

Рівняння (1.4) – (1.6) можна представити у вигляді співвідношень між диференціалами шуканих функцій вздовж відповідних характеристичних напрямів, а саме:

$$du + \frac{d\rho}{\rho a} = -(\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \quad dx = (u + a)dt,$$

$$du - \frac{d\rho}{\rho a} = (\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \quad dx = (u - a)dt,$$

$$ds = 0, \quad dx = udt.$$
(1.8)

Деколи зручно розглядати рух не тільки в площині *x*, *t*, а й у площині *u*, *p*, зображаючи на ній лінії, які відповідають характеристикам. Ці лінії також називають *характеристиками*.

У випадку баротропних течій достатньо розглядати перші дві пари рівнянь (1.8) і записати їх у більш зручному вигляді, використовуючи умову, що $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a(\rho)$. Введемо функцію v,

яка має розмірність швидкості, за допомогою формули де межі інтегрування визначаються залежно від конкретного випадку з міркувань зручності представлення формул. За допомогою нових змінних r = u + v, l = u - v перші дві пари співвідношень (1.8) набудуть вигляду

$$dr = -(\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \ dx = (u + a)dt,$$
$$dl = (\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \ dx = (u - a)dt.$$

У цих рівняннях величини *u* та *a* – відомі функції від змінних *r* і *l*, причому $u = \frac{r+l}{2}$, $\upsilon(\rho(a)) = \frac{r-l}{2}$.

36
Змінні r та l називаються змінними Рімана або інваріантами Рімана.

Для знаходження розв'язків різних (конкретних) задач та аналізу залежності розв'язку від даних на межі області руху зручно використовувати рівняння одновимірних нестаціонарних рухів у формі співвідношень вздовж характеристик.

Спочатку розглянемо задачу, яку назвемо елементарною задачею методу характеристик (в тому сенсі, що розв'язок цієї задачі служить елементом розв'язку більш складних задач).



Рис. 2.1

Нехай на відрізку AB прямої $t = t_0 = const$ (якщо $\alpha = 2,3$, то $x_A > 0$) задані неперервно диференційовані розподіли значень шуканих величин u, p, s (причому тиск p і разом з ним швидкість звуку a ніде не рівні нулю). Не обмежуючи загальності, покладемо $t_0 = 0$. Відомо, що тоді в деякому інтервалі $0 < t \le t_1$ існує гладкий

розв'язок рівнянь (1.4) – (1.6), який задовольняє задані початкові умови. Візьмемо на відрізку AB дві достатньо близькі внутрішні точки P_+ і P_- (рис. 2.1). Якщо розв'язок відомий, то з точок P_+ і P_- можна (за умови, що в цих точках $a \neq 0$) провести акустичні характеристики різних сімейств до їх перетину в точці P. Далі в зворотному напрямі з точки P можна провести характеристику третього сімейства до її перетину з віссю Ox в деякій точці P_0 між P_+ і P_-

Якщо розв'язок при t > 0 завчасно невідомий, то визначити координати x_p , t_p точки P можна наближено, вважаючи що вздовж малих відрізків характеристик P_+P і P_-P характеристичні швидкості c_+ і c_- є сталими і рівними їхнім відомим значенням в точках P_+ і P_- відповідно.

Для цього потрібно розв'язати лінійні рівняння

 $x_p - x_{p_+} = (u + a)_{p_+} (t_p - t_{p_+}), \ x_p - x_{p_-} = (u - a)_{p_-} (t_p - t_{p_-}).$

Для знаходження значень *u* і *p* в точці *P* замінимо перші два диференціальні відношення вздовж характеристик лінійними скінченно-різницевими рівняннями

$$u_{P} - u_{P_{+}} + \frac{p_{P} - p_{P_{+}}}{(pa)_{P_{+}}} = -(\alpha - 1) \left(\frac{au}{x}\right)_{P_{+}} (t_{P} - t_{P_{+}}),$$
$$u_{P} - u_{P_{-}} - \left(\frac{p_{P} - p_{P_{-}}}{(pa)_{P_{-}}}\right) = (\alpha - 1) \left(\frac{au}{x}\right)_{P_{-}} (t_{P} - t_{P_{-}}).$$

Визначивши звідси u_p і p_p , знайдемо координату x_{P_0} точки P_0 , вважаючи на малому відрізку характеристики PP_0 характеристичну швидкість c_0 сталою і рівною її відомому значенню в точці P, або, що те ж саме, розв'язуючи лінійне рівняння $x_p - x_{P_0} = u_p(t_p - t_{P_0})$.

Для знаходження величини *s* в точці *P* скористаємося відношеннями

$$du + \frac{dp}{\rho a} = -(\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \quad dx = (u + a)dt,$$
$$du - \frac{dp}{\rho a} = (\alpha - 1)\frac{au}{x}dt, \quad dx = (u - a)dt,$$
$$ds = 0, \quad dx = udt,$$

вздовж характеристики третього сімейства, з якого після інтегрування отримаємо $s_P - s_{P0} = 0$. Значення s_{P0} відоме (якщо ж початкові умови задані в дискретних точках осі x, то воно може бути отримане наближено шляхом лінійної інтерполяції за значенням s в точках P_+ і $P_-: \frac{s_{P0} - s_{P+}}{x_{P0} - x_{P+}} = \frac{s_{P_-} - s_{P+}}{x_P - x_{P+}}$).

Описаний спосіб знаходження розв'язку в точці P за відомими при менших значеннях часу t («в минулому») даних в точках P_+ і P_- застосуємо в тому випадку, коли ці точки лежать не на лінії t = const, а належать відрізку кривої, в точках якого при заданих на ньому значеннях шуканих функцій акустичні

характеристики двох сімейств виходять при зростанні часу *t* в одну сторону від кривої.

Такі криві будемо називати просторово-подібними. Очевидно, що довільна лінія t = const є просторово-подібною. В іншому випадку, коли напрям кривої в кожній точці розділяє напрям акустичних характеристик обох сімейств, що виходять з точок прямої при dt > 0, крива називається тимчасово-подібною. Прикладом тимчасово-подібної кривої може служити характеристика третього сімейства (траєкторія), яка не є лінією вакууму (лінією, на якій p і a рівні нулю).

Для баротропних течій з плоскими хвилями елементарна задача методу характеристик може бути розв'язана з більш високою точністю, ніж у загальному випадку.

За відомими значеннями u і a в точках P_+ і P_- відповідні їм значення в точці P знаходяться із точних інтегралів r = const на характеристиці G^+ і l = const на характеристиці G^- :

$$r(u_{p}, a_{p}) = r(u_{p_{+}}, a_{p_{+}}), \ l(u_{p}, a_{p}) = l(u_{p_{-}}, a_{p_{-}}).$$
(1.9)

Положення точки P, як і раніше, знаходимо наближено з відповідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь. При фактичних обчисленнях, враховуючи відмінності значень u_P , a_P від їхніх значень в точках P_+ і P_- , співвідношення (1.9) також можна лінеаризувати. Для ідеального газу зі сталими теплоємностями дані співвідношення є лінійними відносно u_P і

$$a_{p}$$
, a came $u_{p}-u_{p_{+}}+\frac{2}{\gamma-1}(a_{p}-a_{p_{+}})=0$,

$$u_{P} - u_{P_{-}} - \frac{2}{\gamma - 1}(a_{P} - a_{P_{-}}) = 0$$

1.2.1.1. Задача Коші. Область залежності та область впливу. Слабкі розриви

Розглянемо наступну задачу. Нехай при t = 0 на деякому відрізку *AB* осі *Ox* (рис.2.2) задано початковий стан газу $u(x,0) = u_0(x)$, $p(x,0) = p_0(x)$, $s(x,0) = s_0(x)$. Знайдемо рух газу при *t* > 0, припускаючи існування неперервно диференційованого розв'язку цієї задачі в області його визначення.

Візьмемо на відрізку *AB*, крім його кінцевих точок, ще декілька достатньо густо розташованих. До кожної пари сусідніх точок можна застосувати процедуру, що використовувалась в елементарній задачі методу характеристик, тобто побудувати елементи акустичних характеристик різних сімейств, що виходять із вибраних на відрізку *AB* точок, і знайти розв'язок в точках перетину цих характеристик. Далі цю ж процедуру можна



застосувати до кожної пари знайденої системи точок, побудувавши наступні елементи характеристик та отримавши розв'язок в точках їх перетину, і так далі. В результаті наближено знаходиться гратка характеристик і значення шуканих функцій у вузлових точках цієї гратки в області, обмеженій відрізком *AB* осі *Ox* та акустичними

характеристиками першого і другого сімейств, що виходять з кінців цього відрізка.

У загальному випадку ця область являє собою криволінійний трикутник *АВС* (хоча за деяких спеціальних початкових умов межові характеристики можуть не перетинатися: точка *С* – нескінченність).

Доведено, що з існування неперервно диференційованого розв'язку описаної задачі випливає його єдиність; наближений розв'язок задачі, наведений вище, при менших відстанях між вузлами гратки більш точно апроксимує точний розв'язок у вузлах гратки.

Аналогічно до попереднього, розв'язок може бути знайдений і тоді, коли початкові значення шуканих функцій задані в площині *x*, *t* на відрізку *AB* просторово-подібної кривої (рис. 2.3).

Задачею Коші (задачею 1-го типу) називається задача про побудову розв'язку за значеннями трьох шуканих функцій на відрізку просторово-подібної кривої. Область, в якій знаходиться розв'язок за початковими даними, називається областю визначеності розв'язку цими початковими даними.

Використаємо розв'язок задачі Коші для аналізу питання про залежність розв'язку від початкових даних.

Візьмемо в середині області отриманого розв'язку (рис. 2.3) деяку точку P і проведемо через неї акустичні характеристики до їх перетину з початковою кривою в точках P_+ і P_- .



Областю залежності точки Pназивається відрізок початкової кривої між точками P_+ і P_- . За побудовою розв'язку зрозуміло, що в точці P він залежить тільки від початкових значень на відрізку P_+ і P_- ; зміна початкових значень поза цим відрізком не впливає на розв'язок у точці P (для неперервного

розв'язку).

Відсутність такого впливу є наслідком кінцевої швидкості поширення слабких збурень: збурення з області поза відрізком P_+P_- не встигають прийти в точку P, поширюючись в просторі з кінцевими характеристичними швидкостями u + a і u - a відповідно.

Якщо змінити початкові дані тільки на відрізку P_+P_- , то, як зрозуміло з побудови розв'язку, це вплине на зміну розв'язку між акустичними характеристиками P_+Q_+ і P_-Q_- . Саме тому область між цими характеристиками називається областю впливу відрізка P_+P_- . Характеристика P_+Q_+ , що поширюється з точки P_+ зі швидкістю звуку по частинках газу ліворуч, є, таким чином, лівим фронтом збурень, які викликані зміною умов на відрізку P_+P_- ; аналогічно характеристика P_-Q_- є правим фронтом цих збурень.

Існування областей визначення, залежності і впливу дає можливість в багатьох випадках проводити якісний аналіз одновимірних течій, не використовуючи розв'язки, що описують їх рівняння.

Нехай початкові дані на відрізку AB (рис. 2.3) такі, що визначений ними розв'язок в області ABC неперервно диференційований. Змінимо початкові дані на частині AP_+ відрізка AB зі збереженням їх неперервності в точці P_+ . Будемо вважати, що новий розв'язок задачі Коші, як і раніше, неперервний в області визначення. Розв'язок в області P_+BC_+ і на характеристиці P_+C_+ залишився після зміни початкових даних тим самим, оскільки він повністю визначений даними на P_+B . Розв'язок, який лівіше від характеристики P_+C_+ , змінився, оскільки ця частина області визначення розв'язку входить до області впливу відрізка AP_+ .

Таким чином, розв'язок в області P_+BC_+ може бути неперервно продовжений через характеристику P_+C_+ не однозначно.

Відмінність зміненого розв'язку від початкового може полягати в тому, що похідні від деяких шуканих функцій по нормалі до характеристики стануть різними при підході до неї з різних сторін (похідні по дотичній до характеристики з обох її сторін однакові завдяки неперервності розв'язку на характеристиці). Тоді кажуть, що на характеристиці шукані функції мають *слабкий розрив*.

Лінією слабкого розриву називається деяка гладка крива Γ в області визначення розв'язку, якщо розв'язок неперервний всюди, його перші похідні також неперервні поза кривою Γ і односторонньо неперервні на ній, але деякі похідні по нормалі до Γ мають в її точках розрив першого роду.

Із сказаного вище випливає, що характеристика може бути лінією слабкого розриву розв'язку. Покажемо, що якщо на деякій лінії розв'язок має слабкий розрив, то ця лінія обов'язково є характеристикою.

Справді, розглянемо рівняння (1.4) – (1.6). Нехай на деякій лінії Γ нормальна похідна довільної із функцій u, p чи s має розрив. Оскільки похідні по дотичній до Γ неперервні з обох її сторін, то можемо вважати, не обмежуючи загальності, що мають розрив похідні за x. Записуючи кожне з рівнянь (1.4) – (1.6) двічі – в точках при підході до кривої Γ з однієї і з іншої сторони – і віднімаючи їх почленно, отримаємо

$$\left[-\frac{\partial u}{\partial t}\right] + (u+a)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{\rho a}\left\{\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right] + (u+a)\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + (u-a) \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho a} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} \end{bmatrix} + (u-a) \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \end{bmatrix} \right\} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \end{bmatrix} = 0.$$

Знак [] означає стрибок значення відповідної величини з двох сторін кривої Г. Якщо x = x(t) – рівняння кривої Г, то із неперервності похідних вздовж Г з обох її сторін випливає, що

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \stackrel{\bullet}{x} = 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \stackrel{\bullet}{x} = 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \stackrel{\bullet}{x} = 0$$

Виключаючи з виписаних відношень стрибки похідних за часом, отримаємо

$$(u+a-x)\cdot\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{1}{\rho a}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\}=0,$$
$$(u-a-x)\cdot\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{1}{\rho a}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right\}=0,\ (u-x)\cdot\left[\frac{\partial s}{\partial x}\right]=0.$$

Звідси випливає, що слабкі розриви швидкості і тиску можуть бути тільки на акустичних характеристиках; слабкі розриви ентропії на них неможливі. Разом із тиском на акустичній характеристиці мають слабкий розрив і всі інші величини, залежні від тиску та ентропії: густина, температура та інші. На характеристиці G^+ слабкі розриви швидкості і тиску пов'язані відношенням $[u_x] - \frac{1}{\rho a} [p_x] = 0$, а на характеристиці G^- відношенням $[u_x] + \frac{1}{\rho a} [p_x] = 0$. Слабкий розрив ентропії можливий тільки на характеристиках G^0 – траєкторіях; слабких розривів швидкості і тиску на цих характеристиках бути не може.

1.2.2. ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Нехай два відрізки *ОА* і *ОВ*, що перетинаються в точці *О* (рис. 2.4), являють собою акустичні характеристики різних сімейств; нехай на кожному відрізку відомі значення трьох шуканих функцій (на кожній характеристиці ці значення пов'язані відповідним характеристичним співвідношенням, тож тільки дві із трьох функцій є незалежними). Припустимо також, що розподіли шуканих функцій на характеристиках неперервно обох диференційовані і що їх значення в точці О збігаються. Будемо шукати розв'язок кутовій області заланими в між характеристиками ОА та ОВ. Сформульована таким чином задача називається задачею з характеристичними початковими даними задачею Гурса. До її розв'язання застосуємо метод або характеристик. Для цього візьмемо на відрізках ОА і ОВ крім межових точок ще ряд проміжних точок. Для пари точок *P* і *P*, які є найближчими до кутової точки О і належать різним характеристичним відрізкам, застосувати процедуру можна розв'язання елементарної задачі методу характеристик, продовживши із цих точок в середину кута між відрізками ОА і *OB* елементи характеристик різних сімейств P_+P і P_-P до їх



перетину в точці P. Далі ця ж процедура застосовується до пар точок P'_+, P та P'_-, P і так далі доти, поки не буде побудовано розв'язок для вузлів характеристичної ґратки, які лежать на характеристиках різних сімейств, що виходять з точок P_+ і P_- . Процедура очевидним чином повторюється знову і знову

доти, поки не буде побудована гратка характеристик та знайдено розв'язок в її вузлових точках області, яка обмежена заданими відрізками характеристик і характеристиками різних сімейств, що виходять із кінцевих точок A і B. В загальному випадку ця область являє собою чотирикутник, проте за деяких спеціальних умов може бути і необмеженою.



Рис. 2.5

Розглянемо таку задачу. Нехай (рис. 2.5) на відрізку OA акустичної характеристики, наприклад, першого сімейства, задані значення шуканих функцій (знову із них тільки дві незалежні), і нехай на невідомій заздалегідь траєкторії частинки, яка проходить через точку O, заданий деякий зв'язок між шуканими функціями і, можливо, x та t (крім

заданого на ній сталого значення ентропії; останнє не виконується, якщо рух баротропний). Припустимо також, що початкові значення шуканих функцій на відрізку *OA* задовольняють в точці *O* накладеному на траєкторії *OL* зв'язку між ними та мають в цій точці теж значення ентропії. Потрібно знайти область визначення розв'язку і знайти розв'язок, зокрема, знайти форму траєкторії *OL*.

Як і в попередніх задачах, виділимо на відрізку ОА крім межових точок декілька проміжних точок. За допомогою початкових даних проведемо із точки О елемент траєкторії, а з точки *Р* елемент характеристики другого сімейства до їх перетину в точці Р. Для визначення двох параметрів течії в цій точці (третій - ентропія - відомий) маємо два співвідношення: заданий зв'язок між цими параметрами (його при фактичних обчисленнях можна лінеаризувати) і співвідношення вздовж характеристики другого сімейства РР. Після визначення таким чином параметрів течії в точці Р розв'яжемо елементарну задачу методу характеристик для точок Р і Р', в результаті чого знайдемо вузол пари характеристичної ґратки Р' і значення параметрів потоку в ньому. Повторюючи аналогічну процедуру, знайдемо розв'язок у вузлових точках Р" і т.д. характеристики першого сімейства, яка виходить з точки Р. Далі будуємо гратку характеристик і знаходимо розв'язок в її вузлових точках у всій області визначення розв'язку, що являє собою трикутник, сторонами якого є початковий відрізок характеристики ОА і відрізки вибудуваних у процесі розв'язання характеристик другого сімейства AL і траєкторії частинки (характеристики третього сімейства) ОL.

Розглянемо два частинних випадки даної задачі.

Перший випадок: нехай заданий на траєкторії зв'язок між шуканими функціями G(u, p; x, t) = 0 не містить p. Оскільки вздовж траєкторії dx/dt = u, то задання такого зв'язку еквівалентне заданню самої траєкторії в площині x, t, а відповідно, і значень швидкості u вздовж неї. Ця задача виникає при знаходженні руху газу, який викликаний рухом поршня за заданим законом.

Другий випадок: нехай, навпаки, зв'язок G(u, p; x, t) = 0 не містить u. Ця задача виникає при знаходженні руху газу, викликаного рухом поршня, тиск на якому змінюється заданим чином. Траєкторія поршня при цьому не задана і має бути визначена. Цікавим є той випадок, коли p = p(x,t) = const, тобто тиск на поршні чи в просторі, з яким межує газ, сталий; в такому випадку траєкторія є так званою *вільною межею*.

Підкреслимо, що опис розв'язання сформульованих вище задач припускає існування їх неперервно диференційованого розв'язку (в задачі Гурса траєкторія, що виходить із точки перетину характеристик, може бути лінією слабкого розриву ентропії).

Розглянемо межу області течії зі сторони менших t. Нехай ділянка цієї межі є просторово-подібна. Тоді можливі два випадки: характеристики G^+ , G^0 , G^- або всі виходять з точок межі в середину області течії, або всі вони спрямовані з цієї області назовні. У першому випадку на ділянці межі повинні бути задані значення всіх трьох величин, що визначаються, оскільки параметри течії у внутрішніх точках області течії в околі такої ділянки межі знаходяться із співвідношень вздовж характеристик, які виходять із точок межі; у другому випадку на межі не слід задавати ніяких умов, оскільки всі величини у внутрішніх точках області течії і на самій межі визначаються із співвідношень вздовж характеристик, які виходяться карактеристик, які визначаються з співвідношень вздовж характеристик, які межі не слід задавати ніяких з межі межі визначаються з співвідношень вздовж характеристик, які й дуть з області течії.

Якщо ділянка межі області течії є часово-подібна, то із неї в середину області течії можуть виходити або дві характеристики – одна акустична, наприклад G^+ , і ентропійна G^0 , або тільки акустична характеристика. Відповідно із області течії до межі підходить або тільки одна акустична характеристика, або ще й

ентропійна. На такій ділянці потрібно відповідно задавати або дві умови для шуканих функцій, або тільки одну, а параметри течії у внутрішніх точках області знаходять при цьому у першому випадку із двох співвідношень вздовж характеристик, які виходять із точок межі, і з одного — вздовж характеристики, яка йде з області течії при менших t, а в другому випадку — із одного співвідношення вздовж характеристики, яка виходить із точки межі, і з двох співвідношень — вздовж характеристик, що йдуть із області течії.

Підкреслимо, що характер кривої (просторово-подібна чи часово-подібна) пов'язаний із значеннями шуканих функцій на ній і тому не в усіх випадках заздалегідь означений. Згідно з цим, в процесі руху може змінюватися число умов, які необхідно задавати на межі для означення розв'язку.

При постановці межових умов корисно враховувати, що просторово-подібна межа в площині x, t відповідає зміщенню цієї межі з надзвуковою швидкістю відносно газу, а часово-подібна – з дозвуковою. При цьому крізь просторово-подібну межу газ втікає в середину області течії і витікає; крізь часово-подібну також або втікає (в першому випадку), або витікає (в другому), в проміжному випадку, коли межа збігається з характеристикою \mathcal{C}^0 (траєкторією), вона непроникна для газу.

Якщо при розв'язанні задачі знаходиться сама межа області течії, то число крайових умов на такій межі має бути на одиницю більшим, ніж це випливає із попереднього розгляду.

При знаходженні неперервних розв'язків задач, в яких межові значення функцій задані на відрізках кривих, що перетинаються, різних типів, умови узгодженості цих значень в точках перетину кривих мають виконуватись. В протилежному разі, в потоці з'являться розриви або інші особливості.

Зауважимо, що у багатьох випадках питання математичної коректності постановок задач з крайовими умовами різних типів до теперішнього часу не розв'язане.

1.2.2.1. Деякі задачі про поршень

Спочатку введемо поняття, необхідні при розгляді задач, що пов'язані з рухом поршня.

Розглянемо течію з плоскими хвилями, для якої справедливо

r = const при dx = (u+a)dt,

l = const при dx = (u - a)dt,

де r = u + v, l = u - v – інваріанти Рімана (див. 1.2.1). Нехай l – стала не тільки вздовж кожної характеристики другого сімейства, але й у всій області течії. Тоді вздовж кожної характеристики першого сімейства r і l сталі, а отже, відповідно і u + a. Звідки випливає, що в розглядуваній течії характеристики першого сімейства є прямими лініями, вздовж кожної з них всі газодинамічні величини сталі.

Інтеграли $l(u,a) = l_0$, x - (u+a)t = f(u) визначають у неявній формі залежність швидкості u і швидкості a від координати x та часу t. Течії, що описуються цими інтегралами, називаються *хвилями Рімана*.

Аналогічні інтеграли $r(u,a) = r_0$, x - (u-a)t = g(u) описують прості хвилі з прямолінійними характеристиками другого сімейства.

Назва «хвиля» для описаних рухів газу виправдана тим, що при таких рухах стан з незмінними значеннями параметрів – швидкості, тиску, густини, швидкості звуку – поширюється по частинках газу зі своєю сталою швидкістю звуку, випереджаючи частинки або відстаючи від них.



Рис. 2.6

Розглянемо задачу про поршень, яка формулюється таким чином (рис. 2.6). В момент часу t = 0 в області циліндричної труби x > 0 праворуч від рухомої межі – поршня знаходиться газ з відомими розподілами параметрів. При t > 0 заданий закон руху поршня x = X(t) (лінія *OL* на рис. 2.6). Необхідно визначити закон

руху газу при t > 0.

Обмежимось випадком, коли в початковому стані газ однорідний і нерухомий, швидкість поршня в початковий момент

рівна нулю $\dot{X}(0) = 0$ і $\ddot{X}(t) \le 0$, тобто швидкість поршня під час його висовування ліворуч росте за величиною.

У цьому випадку область I (рис. 2.6), обмежена зліва характеристикою OA, є областю нерухомого однорідного газу і характеристика OA прямолінійна. Справді, параметри газу в кожній точці області I визначаються значеннями інваріантів Рімана на характеристиках, які приходять в цю точку з кінців області її залежності на осі x; значення цих же інваріантів однакові в усіх точках осі x. Задача, яку треба розв'язати для визначення течії в області II між характеристикою OA – переднім фронтом збурень від поршня, що почав рухатись – і траєкторією поршня OL, з якою на підставі крайової умови $u(X,t) = \dot{X}(t)$ збігається траєкторія частинки, є частковий приклад задачі, яка розглядалась раніше. Оскільки область II межує з областю однорідного стану газу, то течія в цій області є хвилею Рімана

$$u - \upsilon(a) = -\upsilon(a_1), \ x - (u + a)t = f(u), \tag{2.1}$$

де a_1 – швидкість звуку в нерухомому газі. Константа в правій частині першого співвідношення визначена з умови неперервності значень u і a на характеристиці OA, вид функції f(u) можна визначити за відомим законом руху поршня x = X(t). Справді, представимо цей закон руху в параметричній формі, взявши за параметр швидкість поршня $u_n = \dot{X}(t)$, тобто будемо вважати на поршні $x = x_n(u)$, $t = t_n(u)$. Підставивши ці параметричні вирази для x і t в друге співвідношення (2.1), отримаємо $f(u) = x_n(u) - [u + a(u)]t_n(u)$.

Оскільки за умовою $\frac{du_n}{dt} < 0$ і у хвилі Рімана $du - \frac{dp}{\rho a} = 0$, то

при $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial p^2} > 0$ (тут υ – питомий об'єм) прямолінійні характеристики

в ній утворюють пучок, що розбігається.

Функція v монотонно спадає при зменшенні тиску чи густини. При адіабатичних рухах нормального газу вона стає обмеженою по модулю при перетворенні тиску чи густини в нуль. Для рухів з такими властивостями, задовольняти умову $u = u_n(t)$ при x = X(t) можна тільки, якщо $|u_n(t)|$ не більший за деяке граничне значення u_{max} , при якому тиск і густина газу біля поршня перетворюються в нуль.

Якщо після того, як тиск і густина газу біля поршня перетвориться в нуль, швидкість поршня продовжує зростати, умову на траєкторії межової частинки газу, яка вимагає, щоб швидкість частинки збігалась зі швидкістю поршня, слід замінити на p = 0 на межовій траєкторії. Тут ми зустрічаємось з випадком, коли задана початкова умова на межі області руху газу, починаючи з деякого моменту часу, не виконується і потребує заміни. Форма траєкторії, яка стає при цьому вільною межею, має визначатись із розв'язку. В розглядуваному випадку межова траєкторія частинки збігається з прямолінійною акустичною характеристикою першого сімейства, оскільки на останній a = 0. Між траєкторією поршня x = X(t) і переднім фронтом газу, що рухається, утворюється зона, де тиск рівний нулю і газу немає, тобто зона вакууму.

Значення швидкості на хвилі Рімана, що визначається першою формулою (2.1) при $\upsilon(a) = 0$, називається максимальною швидкістю нестаціонарного розширення газу або швидкістю

нестаціонарного виділення газу у вакуум $u_{\max} = \int_{0}^{p_1} \frac{dp}{\rho a}$.

Вивчаючи рух стаціонарного газу, важливим є поняття максимальної швидкості витікання газу V_{max} , яка може досягатись в соплі Лаваля при його необмеженому розширенні. В цих умовах

$$V_{\max}$$
 визначається формулою $\frac{V_{\max}^2}{2} = \int_0^{p_1} \frac{dp}{\rho}$.

Значення u_{max} і V_{max} залежать від типу зв'язку між густиною та тиском при течії газу.

При адіабатичному русі ідеального газу зі сталими теплоємностями $\upsilon = \frac{2a}{\gamma - 1}$. Тому граничне значення швидкості u_{max} визначається за формулою

$$u_{\max} = \frac{2a_1}{\gamma - 1}, \qquad (2.2)$$

причому значення V_{max} рівне $V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} a_1$, де a_1 швидкість

звуку в стаціонарному газі, відповідно в циліндричній трубі чи в резервуарі, звідки відбувається витікання. Як бачимо, максимальна швидкість розширення газу у вакуум із одного і того ж стану спокою залежить від умов витікання.

Розглянемо ту саму задачу про поршень, але припустимо, що поршень, поступово прискорюючись від нульової швидкості, висувається в область, що заповнена газом, тобто $X(0) = \dot{X}(0) = 0$, $\ddot{X}(t) \ge 0$ при $t \ge 0$. Тоді, знову, до області незбуреного стану прилягає вздовж прямолінійної характеристики *ОА* хвиля Рімана, звідки при $\frac{\partial^2 v^2}{\partial p^2}\Big|_s > 0$ характеристики першого сімейства в цій хвилі утворюють пучок, який розбігається, тож неперервний розв'язок цієї задачі про поршень, починаючи з деякого моменту часу, припиняє існувати.

Якщо перетин характеристик відбувається в початковий момент часу і якщо поршень зразу починає рухатись зі скінченною швидкістю $\dot{X}(0) > 0$, то неперервного розв'язку взагалі кажучи не існує ні при яких t > 0. При надзвуковій початковій швидкості поршня цей факт не очевидний, оскільки траєкторія поршня потрапляє при цьому в область, де розв'язок визначено початковими даними і не задовольняє крайову умову на поршні.

Тому слід розглядати розв'язки з розривами – ударними хвилями (хвилі, для яких справедливо $\upsilon_n \neq D$).

Спростимо задачу і припустимо, що поршень одразу починає рухатись зі скінченною швидкістю, яка надалі стала.

Розв'язок цієї задачі легко отримати в такий спосіб. Розглянемо стаціонарну ударну хвилю з набігаючим на неї зі швидкістю u_0 праворуч надзвуковим потоком (мал. 2.7 а); ударній хвилі відповідає x = 0, її швидкість D рівна нулю, u_1 означає величину швидкості зі стрибком. Якщо цю стаціонарну течію розглядати в системі координат, яка рухається разом з набігаючим потоком, то вона стане не стаціонарною ударною хвилею, яка поширюється зі сталою швидкістю $D = u_0$ праворуч по газові, що перебуває у спокої (рис. 2.7 б). Виберемо початок відліку *x* і *t* в новій системі координат так, щоб ударна хвиля пройшла через точку O(0,0), і розглянемо рух в кутовій області, що обмежена піввіссю Ox і траєкторією частинки, що проходить через точку O(межі цієї області заштриховані на рисунку 2.7 б). Якщо вважати траєкторію цієї частинки траєкторією поршня, то розглядуваний рух при t > 0 дає розв'язок поставленої задачі: при русі поршня з постійною швидкістю в область однорідного газу, що перебуває у спокої, по газу поширюється зі сталою швидкості ударна хвиля



Рис. 2.7

такої інтенсивності, що газ за нею набуває швидкість, яка рівна швидкості поршня.

Розв'язок цієї задачі автомодельний: параметри газу сталі на променях x/t = const.

Повернемось до задачі, коли поршень стискає однорідний газ, що спочатку був у стані спокою, поступово розганяючись від нульової швидкості.

Візьмемо за параметр, що має стале значення на прямолінійній характеристиці хвилі Рімана, той параметр часу τ , коли ця характеристика виходить із точки траєкторії поршня $t = \tau$,

 $x = X(\tau)$. Тоді інтеграли (2.1), що описують хвилю Рімана, набудуть вигляду

$$u - \upsilon(a) = -\upsilon(a_1), \ x = X(\tau) + (u + a)(t - \tau),$$
 (2.3)

причому u + a в другому виразі є на підставі першого інтегралу і того, що $u = \dot{X}(\tau)$, відома функція від τ : $u + a = \dot{X}(\tau) + a [\dot{X}(\tau)] = \sigma(\tau).$

Для хвилі Рімана, що біжить праворуч, $\frac{d(u+a)}{du} > 0$, тому при

 $\ddot{X} > 0$ похідна $\dot{\sigma} = \frac{d(u+a)}{du} \ddot{X} > 0$ при $\tau > 0$.

Знайдемо обвідну сімейства прямолінійних характеристик, позначивши координати її точок через x^0 і t^0 . Вздовж обвідної похідна від x за параметром τ у другому виразі (2.3) має перетворюватися в нуль так, що параметричне представлення обвідної має вигляд $t^0 = \tau + \frac{\sigma - \dot{X}}{\dot{\sigma}}, \ x^0 = x + \sigma \frac{\sigma - \dot{X}}{\dot{\sigma}}.$

З того, що $\dot{\sigma} > 0$ і $\sigma - \dot{X} = a(\tau) > 0$, випливає, що на обвідній $t > \tau$ $x > X(\tau)$; обвідна знаходиться в середині області течії; при $\ddot{X} \rightarrow 0$ обвідна прямує до нескінченності. Якщо $\ddot{X}(0) = 0$, то при $\tau = 0$ $x^0 = \infty$, $t^0 = \infty$; якщо потім при t > 0 $\ddot{X}(t) > 0$, то при $\tau \rightarrow \infty$ x^0 і t^0 необмежено зростають, тож x^0 і t^0 спочатку зменшуються, а потім збільшуються (мають спільний мінімум при якому $\tau = \tau_e$). При цьому обвідна має кутову точку, яка, виключаючи той випадок, коли в деякому інтервалі значень τ характеристики перетинаються в одній і тій самій точці, є точкою повернення.

Якщо прискорення поршня $\ddot{X}(0)$ скінченне, то $t^0(0) = \frac{a_1}{\dot{\sigma}(0)}$,

 $x^{0}(0) = \frac{a_{1}^{2}}{\dot{\sigma}(0)}$, тому обвідна в даному випадку починається на характеристиці $x = a_{1}t$, тобто на передньому фронті збурень, що йдуть від поршня. При зростанні початкового прискорення поршня

 $\ddot{X}(0)$ значення $t^{0}(0)$ зменшується і при $\ddot{X}(0) \to \infty$ $t^{0}(0) \to 0$, тож при нескінченному початковому прискоренні поршня обвідна виникає в початковий момент і неперервний рух не може існувати ні при яких t > 0.

Контрольні питання

- 1. Що таке одновимірний нестаціонарний рух?
- 2. Сформулюйте означення характеристичних напрямків.
- 3. Що таке характеристики та звукові характеристики?
- 4. Сформулюйте елементарну задачу методу характеристик.
- 5. Сформулюйте задачу Коші.
- 6. Наведіть означення області залежності точки.
- 7. Що таке область впливу?
- Сформулюйте означення слабкого розриву та лінії слабкого розриву.
- 9. Дайте означення поняття хвилі Рімана.
- 10. Сформулюйте задачу Гурса.
- 11. В якому випадку траєкторія є вільною межею?
- 12. Що таке часово- і просторово-подібні ділянки межі?
- 13. Що таке швидкість нестаціонарного виділення газу у вакуум?
- 14. Які типові задачі про поршень ви знаєте?

1.3. МЕТОД МАЛИХ ЗБУРЕНЬ

Одним із найбільш важливих наближених методів є метод або метод малих збурень. Можливість параметра малого використання та суть методу полягають в наступному. Нехай фізичний аналіз задачі показує, що в її формулюванні є параметр є такий, що властивості течії, які нас цікавлять, зберігаються при як завгодно малих його значеннях. Тоді на основі фізичних міркувань можна ввести масштаби $\gamma_i(\varepsilon)$, які залежать від ε , для різних величин, що входять у рівняння, та допоміжні умови і зробити перетворення, яке всі співвідношення зводить до змінних, що отримані діленням вихідних величин на їхні масштаби. В результаті істотні співвідношення будуть містити члени різного порядку малості при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зберігаючи в них члени до деякого порядку (наприклад, тільки головні члени, які залишаються при $\varepsilon = 0$), отримують наближене рівняння для опису розглядуваного класу задач. Лише в деяких випадках вдається довести, що точний розв'язок задачі прямує при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку наближених рівнянь (хоча б асимптотично).

1.3.1. Наближені моделі аеродинаміки

У багатьох випадках неможливо знайти точні розв'язки рухів газів. Тому v газовій линаміці рівнянь широко використовуються спрощення рівнянь, методи які лають можливість отримати наближені розв'язки. Як правило, таке спрощення відбувається за умови глибокого розуміння фізичних особливостей тієї чи іншої системи, ступеня впливу членів рівняння і додаткових умов, всього, що є вирішальним для розглядуваного класу рівнянь. Спрощені розв'язки обов'язково мають зберігати ті властивості точних розв'язків, які є істотними у ланій залачі.

Зрозуміло, що найпростішим розв'язком рівнянь газової динаміки є такий розв'язок, в якому вектор швидкості та параметри стану не залежать від часу, тобто

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = const, \quad p = p_1 = const, \quad \rho = \rho_1 = const.$$
 (1.1)

Однорідними потоками називають течії газу, що відповідають розв'язку (1.1).

Можна розглядати задачі про течії, які близькі до однорідного потоку, вважаючи їх збуренням однорідного потоку (1.1).

Нехай відхилення розглядуваної течії від однорідного потоку (1.1) характеризується значенням параметра ε (таких параметрів може бути декілька), причому значенню $\varepsilon = 0$ відповідає потік без збурень. Причини збурення основного потоку можуть бути різними. Надалі метод малих збурень буде використаний в основному для вивчення обтікання тіл необмеженим однорідним потоком газу в усьому діапазоні чисел Маха від 0 до нескінченності.

Розв'язок (1.1) точно описує обтікання довільної поверхні, яку можна утворити із ділянок поверхонь течії, що відповідає розв'язку (1.1) однорідної течії, – наприклад, обтікання плоскої пластинки довільної форми та нульової товщини, розташованої потоку, або обтікання таких пластин, вздовж двох шо перетинаються вздовж лінії основної течії. Тому збуренням однорідного потоку (1.1) можна вважати течію біля тіла, всі точки поверхні якого знаходяться на малій відстані від такої вихідної поверхні, яка обтікається. У задачі про обтікання такого тіла збурення основного однорідного потоку викликане відмінністю розташування та форми поверхні, яка обтікається, від вихідних, тобто зміною межових умов. Поряд із зміною тіла можна вважати, що на нескінченності перед тілом значення швидкості та тиску на різних лініях течії не дорівнюють заданим сталим v₁ та ρ_1 , а відомим чином мало відрізняються від них. Така зміна умов також є причиною збурення основного потоку.

При вивченні нестаціонарних рухів течія (1.1) може збурюватися внаслідок того, що початкова поверхня, яка обтікається, або утворене з неї тонке тіло здійснюють малі рухи як ціле або, в загальному випадку, зазнають деформацій, що залежать від часу. Деколи збурення можуть бути викликані і малою зміною самих рівнянь.

Надалі будемо розглядати лише збурення, виникані в однорідному потоці тілом, розташованим у ньому.

Нехай задані точні рівняння

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

grad $\frac{\mathbf{v}^2}{2} + 2(\omega \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \mathbf{v},$
 $T \frac{ds}{dt} = q,$

де $\omega = \frac{1}{2}$ rot **v**, *s* – функція стану (ентропія), *T* – температура, ρ – густина, *p* –тиск, **v** –швидкість. Вважаємо, що масові сили відсутні.

В адіабатичних течіях ці рівняння мають точні інтеграли $s(2, n) = S(\mathcal{L})$

$$s(\rho, p) = S(\mathcal{L}),$$

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} + h - U = h_0(\mathcal{L}),$$

де \mathcal{L} – лінія течії, $S(\mathcal{L})$ – стала, яка є різною в кожній точці лінії течії \mathcal{L} , $h = c + \frac{p}{\rho}$, які виражають сталість значень ентропії *s* і повної теплоємності h_0 вздовж ліній течії.

Оскільки потік на нескінченності перед тілом однорідний, то значення h_0 та *s* однакові на всіх лініях течії в області неперервності течії, а саме: при дозвуковій течії – скрізь, при надзвуковому набігаючому потоці поблизу тіла утворюються локальні надзвукові зони зі стрибками згущення, – тоді h_0 стала скрізь, а *s* стала тільки в області до стрибків згущення. На лініях течії, які проходять через стрибки, ентропія не однакова, оскільки інтенсивність стрибків різна. Тому потік завихрений.

Введемо позначення $\mathbf{v} = (u, v, w)$, тоді у декартовій системі координат рівняння неперервності можна записати у вигляді:

$$a^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \left(U + u\right)^{2} \frac{\partial u}{\partial x} + v^{2} \frac{\partial v}{\partial y} + w^{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(U + u\right) v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v w \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(U + u\right) w \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (1.2)$$

Вісь *х* вибрана в напрямі швидкості однорідного потоку, а буквою *U* позначена величина цієї швидкості. Величини *u*, *v*, *w* – збурення швидкості однорідного потоку. Величина a^2 в рівнянні (1.2) виражається через $(U+u)^2 + v^2 + w^2$ та ентропію *s*. Звідки інтеграл запишемо у вигляді:

$$h(a,s) = h_1 - \left(Uu + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right).$$
(1.3)

Індекс 1 відповідає параметрам однорідного потоку.

Для ідеального газу зі сталими теплоємностями цей вираз дає зв'язок між a^2 і збуреннями швидкості в явному вигляді

$$a^{2} = a_{1}^{2} - (\gamma - 1) \left(Uu + \frac{u^{2} + v^{2} + w^{2}}{2} \right).$$

Нехай є – малий параметр, що характеризує порядок кута відхилення збурень швидкості від напряму основного потоку. Тоді відношення величини поперечної складової швидкості до повздовжньої буде мати той самий порядок. У теорії малих збурень припускають, що збурення повздовжньої складової швидкості має той самий або вищий порядок.

Надалі будемо також вважати, що збурення швидкості малі не тільки в порівняні з величиною швидкості, але й з величиною швидкості звуку в газі. Це припущення виключає із розгляду так звані гіперзвукові течії, для яких виконується нерівність $M^2 \varepsilon^2 \ge 1$.

За умов зроблених припущень, зберігаючи в (1.2) лише головні члени, отримаємо таке рівняння:

$$\left[a^{2} - \left(U - u\right)^{2}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + a^{2}\frac{\partial v}{\partial y} + a^{2}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$
(1.4)

Причина збереження в коефіцієнті при $\frac{\partial u}{\partial x}$ величини *u*, малої порівняно з *U*, буде викладена нижче.

Якщо збурення течії скрізь дозвукове, то ентропія в усьому потоці стала і, відповідно, всі термодинамічні функції можна вважати залежними від одного параметра, наприклад, тиску чи ін. За наявності в потоці стрибків згущення (слабого сімейства) збільшення ентропії в них має третій порядок за кутом відхилення потоку в стрибку (для гіперзвукових течій це не вірно). Тому за наявності стрибків з точністю до членів порядку ε^2 ентропія стала в усьому потоці.

Вважаючи, що a^2 – функція від h та s, та обмежуючись головним членом розкладу, можна записати $a^2 = a_1^2 + \frac{\partial a^2}{\partial h} \left[(h - h_1) \right].$

Підставивши в це співвідношення величину $h - h_1$ із (2.3) і врахувавши $\frac{\partial a^2}{\partial h} = \Gamma - 1$, отримаємо

$$a^{2} = a_{1}^{2} - \left(\Gamma - 1\right) \left(Uu + \frac{u^{2} + v^{2} + w^{2}}{2}\right).$$
(1.5)

Для ідеального газу це співвідношення з $\Gamma = \gamma \epsilon$ точним; в загальному випадку його права частина ϵ головним членом асимптотичного представлення величини a^2 із співвідношення (1.3) при малих збурення швидкості.

Скористаємось виразом (1.5), перетворимо рівняння (2.4) до вигляду

$$\left[1 - M^2 - \left(\Gamma + 1\right)M^2 \frac{u}{U}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$
(1.6)

Рівняння (1.6) є основним в теорії течій газу з малими збуреннями швидкості. Воно буде корисним при всіх значеннях числа Маха основного потоку M і параметру збурень є, при яких $M \varepsilon \square 1$.

Із доведення рівняння (1.6) випливає, що перетворення в ньому на нуль коефіцієнта при $\frac{\partial u}{\partial x}$ відповідає з прийнятою точністю рівності швидкості газу і швидкості звуку. Тому при вивченні течій із швидкостями, близькими до звукових, останнім доданком у квадратній дужці не можна знехтувати порівняно з величиною $1-M^2$. Якщо ж швидкість у збуреному потоці ніде не дорівнює швидкості звуку або близька до неї, то таке наближення неможливе. При цьому рівняння (1.6) набуває ще простішої форми:

$$\left(1 - M^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$
(1.7)

Це рівняння, на відміну від рівняння (1.6), лінійне. Воно є основним в лінійній теорії малих збурень. Очевидно, що для можливості переходу від нелінійного рівняння (1.6) до (1.7) необхідне виконання додаткової умови

$$\frac{\left(\Gamma+1\right)M^2}{\left|1-M^2\right|}\frac{\left|u\right|_{\max}}{U} \square 1.$$
(1.8)

За тих припущень, при яких отримано рівняння (1.6), течія газу є безвихрова (h_0 і *s* сталі в усьому потоці), тому можна ввести потенціал збурень φ такий, що $\mathbf{v}(u, v, w) = \text{grad } \varphi$.

Використовуючи потенціал збурень, рівняння (1.6) і (1.7) набудуть вигляду

$$\left[1 - M^2 - (\Gamma + 1)M^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.9)$$

i

$$\left(1 - M^2\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$
(1.10)

Зв'язок між тиском в потоці і на поверхні тіл, що обтікаються, та потенціалом збурень визначається інтегралом Бернуллі $\frac{(U+u)^2 + v^2 + w^2}{2} + \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{\rho} = \frac{U^2}{2}$, що справедливий для

неперервних течій і, з прийнятою точністю, коли $\rho = \rho(p, s_1), - для$ течій зі стрибками, отримаємо

$$\frac{p-p_1}{\rho_1} = -\left(Uu + \frac{1}{2}\left(1-M^2\right)u^2 + \frac{v^2 + w^2}{2}\right).$$

Розподіл густини в лінійному наближенні визначається формулою

$$\rho - \rho_1 = \frac{1}{a_1^2} (p - p_1).$$

Покажемо, що при обтіканні профілів і крил скінченного розмаху збурення повздовжньої швидкості поблизу поверхні тіла, яке обтікається, має той самий порядок, що й величина v, тому в головному наближенні, що відповідає лінійній теорії збурень, тиск в потоці і на поверхні тіла визначається формулою

$$\frac{p-p_1}{\rho} = -Uu. \tag{1.11}$$

При обтіканні тіл обертання порядки збурень повздовжньої швидкості u і поперечної швидкості v поблизу тіла різні: u має порядок rv_r/L (L-довжина тіла). В цьому випадку формула головного наближення для збурення тиску на поверхні тіла має вигляд

$$\frac{p - p_1}{\rho} = -Uu - \frac{v_r^2}{2}.$$
 (1.12)

Розглянемо додаткові умови, яким мають задовольняти розв'язки рівнянь (1.6) і (1.7). При сталому обтіканні тіла його поверхня має бути поверхнею течії, тож у точках даної поверхні вектор швидкості і вектор нормалі до поверхні мають бути ортогональні. Якщо рівняння поверхні в неявній формі

$$F(x, y, z) = 0, (1.13)$$

то в точках цієї поверхні необхідне виконання умови

$$\left(U+u\right)\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$
(1.14)

Якщо ж рівняння (1.13) розв'язано відносно у, тобто

$$y = Y(x, z), \tag{1.15}$$

то умова (1.14) має вигляд

$$-(U+u)\frac{\partial Y}{\partial x} + v + w\frac{\partial Y}{\partial z} = 0.$$
(1.16)

Для замкненої поверхні, що обтікається, функція Yдвозначна: на верхній частині поверхні $Y = Y_+(x, z)$, на нижній Y = Y(x, z).

Для можливого використання теорії малих збурень необхідно, щоб величина $\partial Y_{\pm}/\partial x$ скрізь була малою – порядку є. Винятком може бути невеликий окіл затуплених переднього та заднього кінців тіла. У цьому випадку слід чекати в цих кінцевих областях появи особливостей у розв'язку, який отриманий методом малих збурень.

Умова (1.14) на поверхні (1.13) або умови (1.16) на обох частинах поверхні (1.15) є точними. У рамках теорії малих збурень для полегшення розв'язання рівнянь (1.6) і (1.7) ці крайові умови слід по можливості спростити, зберігаючи в них лише члени того ж порядку, що і в рівняннях. Перше очевидне спрощення умов (1.14) або (1.16) полягає у нехтуванні в першому доданку величиною u в порівнянні з U. Подальші спрощення різні для різних класів тіл, що обтікаються.

Розглянемо спочатку спрощення крайової умови (1.16) при обтіканні профілю. У цьому випадку Y = Y(x) і умова обтікання профілю має вигляд:

при
$$y = Y_{\pm}(x)$$
 $v = U \frac{dY_{\pm}}{dx}$. (1.17)

Вважаючи, що функція v(x, y) може бути при малих у представлена у вигляді розвинення виду $v(x, y) = v(x, \pm 0) + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=\pm 0} y + ...,$ замінимо в крайовій умові (1.17)

величину *v* головним членом цього розвинення. В результаті зведемо крайову умову обтікання профілю до вигляду

$$v(x,\pm 0) = U\frac{dY_{\pm}}{dx},$$
(1.18)

або, використовуючи потенціал збурень,

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = U \frac{dY_{\pm}}{dx}.$$
 (1.19)

Умова (1.18) або (1.19) задає нормальну складову швидкості на відрізку осі x, який відповідає проекції на цю вісь контуру профілю. Кажуть, що умова обтікання профілю (1.17) «знесена» на вісь x, спрямовану вздовж основного потоку.

Таке перенесення умови (1.17) на відрізок осі x означає, що на цьому відрізку лежать розподілені джерела з об'ємною втратою, яка визначається формулою (1.18) або (1.19). Взаємодія газу, що витікає з джерел, з набігаючим потоком формує лінію течії, яка наближено представляє контур профілю.

Аналогічно можна спростити крайову умову обтікання крила скінченного розмаху довільної форми в плані, всі точки поверхні якого мало відхиляються від площини y=0. У цьому випадку в умові (1.16) $\partial Y/\partial z \Box$ 1, тож після знесення цієї умови на проекцію поверхні крила на площину y=0 знову отримаємо, що на цій проекції

$$v(x,\pm 0,z) = U\frac{\partial Y_{\pm}}{\partial x},$$
(1.20)

або

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = U \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial x}.$$
(1.21)

У випадку тонкого тіла обертання з віссю симетрії, яка збігається з віссю x, крайова умова (1.16) спрощується інакше. Рівняння поверхні (1.13) запишемо у вигляді $y^2 + z^2 - R^2(x) = r^2 - \frac{S(x)}{\pi} = 0$, де r – відстань від осі симетрії, а R і S – відповідно радіус та площа перерізу тіла, який нормальний до його осі.

Умова обтікання (1.19) після відкидання величини *и* набуває вигляду:

при
$$r = R(x)$$
 $rv_r = \frac{U}{2\pi} \frac{dS}{dx} = UR \frac{dR}{dx}.$ (1.22)

Тут *v_r* – радіальна складова швидкості.

За необхідності крайова умова (1.22) може бути спрощена далі, за допомогою зносу її на вісь симетрії тіла. Для цього представимо добуток rv_r при r = R(x) у вигляді розвинення $rv_r = (rv_r)_{r=0} + \frac{\partial rv_r}{\partial r} \Big|_{r=0} R(x) + \dots$ і обмежимось знову головним його

членом. В результаті отримаємо

$$\left(rv_{r}\right)_{r=0} = \frac{U}{2\pi} \frac{dS}{dx} = UR \frac{dR}{dx}.$$
 (1.23)

Ця умова задає розподіл об'ємних джерел газу на відрізку осі x, який відповідає протяжності тіла. Взаємодія цих джерел з набігаючим потоком формує поверхню течії, яка наближено являє собою поверхню тіла обертання, яке обтікається.

Те, що при $r \to 0$ $v_r \to \infty$, суперечить припущенням теорії малих збурень. Проте треба пам'ятати, що ці значення швидкості виникають всередині об'єму, який займає тіло, тобто зовні області справжньої течії. В самій же області і на її межі припущення теорії виконуються.

Розглянемо тепер умову на нескінченності.

При обтіканні тіла необмеженим однорідним потоком на нескінченності перед тілом збурення швидкості мають затухати, тобто, при $x \to -\infty$ v = grad $\phi \to 0$, або, оскільки потенціал визначений з точністю до сталої, то можна покласти, що

при
$$x \to -\infty \quad \phi \to 0.$$
 (1.24)

Розглянемо деякі прості розв'язки рівняння (1.10), які будуть використовуватись далі.

Спочатку розглянемо таку задачу. Однорідний потік газу рухається зі сталою швидкістю U в напрямі осі x. У цьому потоці в момент часу t = 0 починає діяти сферичне джерело, яке рухається разом із газом. Опишемо якісно течію, яка виникає. Від джерела по газу, що рухається, поширюється з постійною швидкістю звуку a збурення у вигляді сферичної хвилі. В нерухомій системі відліку збурена сферична область зноситься газом в напрямку його руху зі швидкістю U. При швидкості потоку U, яка менша швидкості звуку a в газі, U < a, збурена область деякий час після початку дії джерела займе положення, я на рис. 3.1 а. Точка O – місце початку дії джерела залишається в середині збуреної області, що розширюється в усіх напрямках. При надзвуковій швидкості потоку, U > a, картина руху буде така, як на рис. 3.1 б. Початок координат – точка O залишається вниз за потоком все далі від точки O.

Якщо в точці *О* відбувається непоодиноке періодичне вмикання джерела в газі, який рухається, то фронти збурень від цих джерел, що послідовно вмикаються, будуть розташовані так, як на рис. 3.1. а і б зображено тонкими лініями (послідовні збурення поширюються не залежачи, не взаємодіючи між собою, оскільки рівняння, яке їх описує, лінійне).



Рис. 3.1.

З часом збурення в першому випадку (U < a) пошириться як завгодно далеко вгору за потоком; в другому (U > a) збурення залишається зосередженим в середині конічної області, яка обернена вниз за потоком, з півкругом при вершині μ , який визначається формулою $\sin \mu = \frac{a}{U}$, де μ – кут Маха. Конус з півкутом при вершині, рівним μ , і з віссю, яка паралельна швидкості газу набігаючого потоку, назвемо *конусом Маха*.

65

а

Рисунок 3.1. пояснює так званий ефект Доплера. Якщо спостерігач нерухомий відносно джерела звуку (звук – періодичні збурення тиску достатньо високої частоти), то частота збурень, що сприймаються ним, та ж сама, що і частота збурень, які випускає джерело. При наближенні джерела звуку до спостерігача з дозвуковою швидкістю U частота збурень, що сприймаються спостерігачем, зростає у відношенні 1: (1-U/a). Якщо швидкість наближення надзвукова, то аж до моменту приходу джерела в точку спостерігача – джерело «не попереджає» про своє наближення.

Повернемося до рівняння (1.10). При M < 1 після введення змінних $\overline{y} = y\sqrt{1-M^2}$, $\overline{z} = z\sqrt{1-M^2}$, це рівняння переходить рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}^2} = 0$. Воно описує потенціальну течію нестисливої рідини та має фундаментальний розв'язок $\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2}}$, який відповідає точковому джерелу з

об'ємною потужністю (витратою) *q*. Після переходу до початкових змінних отримаємо розв'язок рівняння (1.10) у вигляді

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + (1 - M^2)(y^2 + z^2)}}.$$
(1.25)

Цей розв'язок задовольняє рівняння (1.10) не тільки при дозвуковій швидкості потоку, але й при надзвуковій, коли M > 1 і рівняння (1.10) не зводиться до рівняння Лапласа, а має гіперболічний тип. При M > 1 розв'язок (1.25) існує тільки в середині конуса Маха $x^2 - (M^2 - 1)(x^2 + z^2) = 0$.

Фундаментальний розв'язок (1.25) дає можливість отримати більш складні розв'язки для потенціалу збурень і розв'язки з особливостями інших типів.

Візьмемо розв'язок (1.25) в більш загальному вигляді, розташувавши джерело в точку з координатами ξ, η, ζ:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2 + (1-M^2)((y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}}.$$
 (1.26)

Вважаючи ξ , η , ζ параметрами, можна отримати нові розв'язки для потенціалу φ диференціюванням (1.26) по цих параметрах; вважаючи величину q функцією параметрів ξ , η , ζ можна отримати різні розв'язки для φ інтегруванням виразу (1.26) по деякій області зміни цих параметрів – по лінії, поверхні. Якщо швидкість U надзвукова, то інтегрування треба проводити лише по тій частині джерел, яка потрапляє в область залежності точки P, тобто всередину конуса Маха, який обернений від точки P.

Диференціюючи праву частину (1.26) по ξ, отримаємо для потенціалу збурень новий розв'язок

$$\varphi = \frac{q(x-\xi)}{4\pi \left((x-\xi)^2 + \left(1-M^2\right) \left((y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \right) \right)^{3/2}}$$

Він в точці ξ , η , ζ має особливість типу циліндричносиметричного диполя з віссю, паралельною осі x.

Розташуємо такі диполі неперервно вздовж прямої, паралельної осі z ($\xi = const$, $\eta = const$), обчислюючи їх інтенсивність на одиницю довжини q сталою величиною, і проінтегруємо по ζ . Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\xi = \eta = 0$, отримаємо потенціал збурень у вигляді

$$\varphi = \int \frac{qxd\zeta}{4\pi \left(x^2 + \left(1 - M^2\right)\left(y^2 + (z - \zeta)^2\right)\right)^{3/2}}.$$
 (1.27)

Для випадку, коли M < 1інтегрування проводимо по ζ вздовж всієї прямої. Покладемо $1 - M^2 = m^2$ та отримаємо

$$\varphi = \frac{q(x-\xi)}{4\pi m \left((x-\xi)^2 + m^2 (y-\eta)^2 \right)}.$$
 (1.28)

При *M* >1 потенціал (1.27) від розподілених на осі циліндричних диполів відмінний від нуля в точках в середині

області впливу цих диполів, тобто в точках, розташованих при x > 0 в середині між площинами $y = \pm x$ tg μ . В точках поза даним кутом потенціал рівний нулю. Покладемо $1 - M^2 = m^2$ та отримаємо

$$\varphi = \frac{q(x-\xi)}{4\pi m \left((x-\xi)^2 - m^2 (y-\eta)^2 \right)}.$$

Для отримання потенціалу диполя в плоскому полі будемо вважати потенціал (1.28) похідною нового потенціалу по параметру ξ чи по η . Інтегруючи праву частину виразу (1.28) по ξ , отримаємо потенціал джерела в плоскому потоці

$$\varphi = \frac{q}{2\pi m} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + m^2 (y-\eta)^2}.$$
 (1.29)

Цей вираз має зміст в дозвуковому та надзвуковому потоках. При інтегруванні правої частини (1.28) по η слід розрізняти випадки M < 1 та M > 1. При дозвуковій швидкості маємо

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{m(y-\eta)}{x-\xi}.$$
 (1.30)

Даний потенціал відповідає плоскій течії від вихру в точці ξ , η в площині x, y з циркуляцією Γ (течія проходить по кругових траєкторіях зі зміною при M > 0 швидкості по куту).

При надзвуковій швидкості маємо

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi m^2} \ln \sqrt{\frac{(x-\xi)^2 - m^2(y-\eta)^2}{x-\xi}}$$

де $m^2 = M^2 - 1$. Рух проходить по відрізках кругових траєкторії, які лежать між характеристиками

$$y - \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} (x - \xi).$$

1.3.2. Метод малих збурень у лінійній теорії плоских течій газу



Як простий приклад використання методу малих збурень розглянемо двовимірну дозвукову чи надзвукову течію біля стінки з хвилеподібною поверхнею (рис.3.2), форма якої визначається рівнянням:

$$y = Y(x) = \varepsilon \sin \alpha x. \tag{2.1}$$

Тут є – амплітуда, $l = 2\pi/\alpha$ – довжина хвилі збурення форми стінки. При є = 0 стінка є площиною y = 0, а течія біля неї – однорідний потік зі швидкістю U вздовж осі Ox.

Рівняння потенціалу збурень цього однорідного основного потоку при $\varepsilon \neq 0$ має вигляд

$$(1 - M^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$
 (2.2)

Розв'язок рівняння (2.2) має задовольняти умову обтікання:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \frac{dY}{dx} = U \varepsilon \alpha \cos \alpha x$$
 при $y = 0$. (2.3)

Оскільки хвилеподібна стінка простягається вздовж осі Ox на нескінченність в обидва боки, то за умову на нескінченності візьмемо обмеженість збурень, які є складовими:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$
 і $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ при $y \to \infty$.

Спочатку розглянемо випадок дозвукової швидкості основного потоку, коли $1-M^2 > 0$. Будемо шукати розв'язок рівняння (2.2) методом розподілу змінних, покладаючи $\varphi = F(x)G(y)$. Підставимо вираз для потенціалу φ в рівняння (2.2) і з допомогою звичайних обчислень отримаємо

$$\frac{F''}{F} = \frac{-G''}{(1-M^2)G} = -\lambda^2 \quad . \tag{2.4}$$

Знак біля сталої λ^2 (λ вважаємо дійсною додатною величиною) вибраний так, щоб F можна було виразити через тригонометричні функції та задовольнялась крайова умова (2.3). Розв'язок рівнянь (2.4) задається формулами

$$F = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$
$$G = A_1 e^{-\sqrt{1-M^2}\lambda y} + B_1 e^{\sqrt{1-M^2}\lambda y}$$

3 умови обмеженості розв'язку при $y \to \infty$ випливає, що $B_1 = 0$, а з крайової умови (2.3) -A = 0, $\lambda = a$ і $-A_1 B \sqrt{1 - M^2} = U \varepsilon$.

Таким чином, потенціал збурень швидкості при дозвуковому обтіканні хвилеподібної стінки має вигляд

$$\varphi = -\frac{U\varepsilon}{\sqrt{1-M^2}} e^{-y\alpha\sqrt{1-M^2}} \cos\alpha x \,. \tag{2.5}$$

Звідки для збурень швидкості $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ і тиску

отримуємо вирази

$$u = \frac{U\varepsilon\alpha}{\sqrt{1 - M^2}} e^{-y\alpha\sqrt{1 - M^2}} \sin \alpha x,$$

$$v = U\varepsilon\alpha e^{-y\alpha\sqrt{1 - M^2}} \cos \alpha x,$$

$$p - p_1 = \Delta p = -\frac{\rho U^2\varepsilon\alpha}{\sqrt{1 - M^2}} e^{-y\alpha\sqrt{1 - M^2}} \sin \alpha x$$

(2.6)

Отриманий розв'язок показує, що збурення основного потоку мають найбільшу амплітуду біля стінки й експоненціально затухають при віддаленні від неї. Швидкість затухання збурень залежить від числа Маха основного потоку: чим ближче це число до одиниці, тим повільніше затухають збурення. Значення *u*, *v* і Δp на стінці з прийнятою точністю, покладаючи у виразах (2.6) *y* = 0. Тиск на стінці визначиться за формулою $\Delta p = -\frac{\rho U^2 \epsilon \alpha \sin \alpha x}{\sqrt{1-M^2}}$.

Згідно з цією формулою тиск на стінці змінюється за тим самим законом, що й ордината контуру стінки (2.1) (збурення тиску і збурення форми стінки знаходяться «у фазі»). Внаслідок чого, опір стінки (тобто сила, що діє в напрямку руху основного потоку на один період хвилі стінки) дорівнює нулю.

Коефіцієнт тиску $c_p = \Delta p / (\frac{1}{2}\rho U^2)$ на стінці змінюється при числі Маха основного потоку пропорційно $1/\sqrt{1-M^2}$, те ж саме стосується і величини відносного збурення повздовжньої

швидкості u_{II} .

При доведенні рівнянь малих збурень припускалось, що u/U, $v/U \le 1$. Із отриманого розв'язку (2.6) випливає, що ці умови задовольняються при виконанні нерівності

$$\frac{\varepsilon\alpha}{\sqrt{1-M^2}} \le 1.$$

Величина є α — найбільший кут, що утворює стінка з напрямом основного потоку. Ця величина має бути малою; при наближенні числа Маха M до одиниці допустимі значення є α стають все меншими.

Друга умова, за якої рівняння для збурень швидкості можна замінити лінійним рівнянням, має вигляд $(\Gamma + 1)M^2 \frac{|u|}{T^2} \le |1 - M^2|$.

Для виконання цієї умови у розглядуваному випадку необхідно, щоб $\frac{(\Gamma+1)M^2 \epsilon \alpha}{(1-M^2)^{3/2}} \leq 1.$

Нагадаємо, що ліва частина цього співвідношення перетворюється на одиницю, якщо максимальне значення швидкості на стінці в даному наближенні дорівнює швидкості звуку, тому розв'язком лінійного рівняння можна користуватись лише при таких значеннях параметрів, за яких швидкість газу ніде не наближається до швидкості звуку. При наближенні числа Маха M до одиниці друга із описаних умов накладає на є α більш сильне обмеження, ніж перша.

Нехай тепер швидкість основного потоку надзвукова, тобто M > 1. Рівняння (2.2) для потенціалу збурень в даному випадку має загальний розв'язок у вигляді суми двох довільних функцій одного

$$\varphi = F(x - \sqrt{M^2 - 1}y) + G(x + \sqrt{M^2 - 1}y).$$
 (2.7)

Прямі лінії $x - \sqrt{M^2 - 1}y = const$ і $x + \sqrt{M^2 - 1}y = const$ є акустичними характеристиками рівняння (2.2) і не залежать від конкретного розв'язку цього рівняння. виглялу Взловж характеристик першої сім'ї, які поширюються від стінки вниз за зберігаються значення ϕ ункції F, потоком, а вздовж характеристик другої сім'ї, які йдуть від нескінченності вниз за потоком до стінки, зберігаються значення функції G. Оскільки за умовою потік над стінкою необмежений в напрямку зростання у та із нескінченності до стінки не йдуть ніякі збурення, то в розв'язку (2.7) слід покласти G = 0.

Крайова умова на стінці

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\sqrt{M^2 - 1}F'(x) = U\frac{dY}{dx} = U\varepsilon\alpha\cos\alpha x$$

дає змогу означити функцію $F: F(x) = -\frac{|U_{\varepsilon}|}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin \alpha x$.

Таким чином, потенціал збурень має вигляд

$$\varphi = -\frac{U\varepsilon'}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin[\alpha(x - \sqrt{M^2 - 1}y)].$$

Звідки

$$u = -\frac{U\varepsilon\alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} \cos[\alpha(x - \sqrt{M^2 - 1}y)],$$
$$v = U\varepsilon\alpha \cos[\alpha(x - \sqrt{M^2 - 1}y)],$$
$$\Delta p = \frac{\rho U^2 \varepsilon \alpha}{\sqrt{M^2 - 1}} \cos[\alpha (x - \sqrt{M^2 - 1}y)].$$

На відміну від дозвукової течії, при надзвуковій швидкості потоку згідно з отриманим розв'язком збурення не затихають при віддаленні від стінки, а зберігають постійні значення вздовж характеристик $x - \sqrt{M^2 - 1}y = const$.

Числа *y* ізобар відповідають значенням Δp , які відносяться до $\rho U^2 \varepsilon \alpha / \sqrt{M^2 - 1}$. При зміні напряму основного потоку на зворотній зображена картинка зміниться: збурення в цьому випадку будуть поширюватись від стінки вздовж характеристик $x + \sqrt{M^2 - 1}y = const$.

Збурення тиску на стінці $\Delta p = \rho \frac{U^2 \epsilon \alpha \cos \alpha x}{\sqrt{M^2 - 1}}$ знаходиться «в протифазі» зі збуренням форми стінки. Тому при надзвуковій

протифазі» зі збуренням форми стінки. Тому при надзвуковій швидкості опір стінки відмінний від нуля. На один період хвилі стінки діють у напрямку основного потоку сили опору

$$X = \int_{0}^{l} \Delta p \frac{dY}{dx} dx = \frac{\rho U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_{0}^{l} (\varepsilon \alpha \cos \alpha x)^2 dx .$$

Сила опору квадратично залежить від середнього за періодом хвилі кута нахилу поверхні стінки до напрямку основного потоку і змінюється (як і $\Delta p / (\rho U^2)$, і u / U) при зміні числа Маха основного потоку як $1 / \sqrt{M^2 - 1}$.

Оцінки застосовності отриманого розв'язку при M > 1 такі ж, як і при M < 1.

Даний приклад дає можливість зрозуміти характер поведінки збурень потоку в наближенні лінійної теорії і встановлює істотні відмінності властивостей дозвукових і надзвукових течій. Отримані властивості зберігаються і при обтіканні стінок іншої форми, оскільки в рамках лінійної теорії розв'язок таких задач можна отримати шляхом суперпозиції розв'язків задачі про обтікання хвилеподібної стінки при розвиненні функції, яка описує форму стінки, в ряд Фур'є. Відзначимо ще одну властивість отриманих розв'язків, що притаманна в рамках лінійної теорії і течіям більш загального виду.

У точному нелінійному формулюванні розв'язок задачі про обтікання хвилеподібної стінки, наприклад, при дозвуковій швидкості, коли в потоці не виникають стрибки ущільнення, після переходу до необмежених величин має вигляд $\varphi = U\varepsilon \Phi(M, \gamma, \alpha \varepsilon, \alpha x, \alpha y).$

В лінійному наближенні (див. (2.5)):

$$\varphi = \frac{U_{\varepsilon}}{\sqrt{1-M^2}} \Phi_1(\alpha x, \alpha y \sqrt{1-M^2}) .$$

Порівняння двох виразів для потенціалу φ показує, що замість п'яти істотних аргументів у функції Φ в точному розв'язку функція має лише два аргументи (змінних). Це свідчить про те, що всі дозвукові течії біля хвилеподібної стінки з різним вибором параметрів, що їх визначають, в лінійному наближенні подібні, тобто розподіли параметрів однієї течії можуть бути отримані простим перерахунком (зміною масштабів величин) із розподілів параметрів в іншій. При цьому параметр Г (γ – для ідеального газу), виявляється, взагалі не впливає на розподіл швидкостей та тиску.

Розглянемо тепер в рамках лінійної теорії малих збурень задачу про обтікання одиночного профілю, що розташований в однорідному набігаючому потоці.

Нехай у системі координат, в якій однорідний потік із швидкістю U спрямований вздовж осі Ox, контур профілю задано рівняннями

$$y = \varepsilon Y_+(x)$$
 при $0 \le x \le L$, (2.8)

де $\varepsilon Y_+(x)$ і $\varepsilon Y_-(x)$ – верхня та нижня сторони контуру відповідно. Введемо потенціал збурень φ , що задовольняє рівняння (2.2).

Вимога обтікання контуру приводить до крайової умови

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \varepsilon Y'_{\pm}(x)$$
 при $y = \pm 0, \ 0 \le x \le L$. (2.9)

На нескінченності перед тілом похідні від потенціалу збурень повинні прямувати до нуля так, що виконується умова

 $\varphi \to 0$ при $x \to -\infty$. (2.10)

Таким чином, задача про знаходження поля збурень швидкості і тиску при обтіканні профілю зведена до математичної задачі про знаходження рівняння (2.2) із функції φ , яка задовольняє умову (2.10) і такій, що при переході до перерізу (0,*L*) на осі *Ox* з двох його сторін нормальна похідна функції φ набуває заданих згідно з (2.9) значень.

При виведенні рівнянь теорії малих збурень ми припускали, що при малих значеннях є величина збурень швидкості також мала порівняно із швидкістю потоку, який не збурюється. Проте, якщо профіль з як завгодно малим значенням є обтікається дозвуковим потоком, то на профілі в загальному випадку існує дві критичні точки, швидкість в яких перетворюється на нуль. Збурення швидкості поблизу цих точок зберігається скінченим при $\varepsilon \rightarrow 0$, так що дозвукова течія біля профілю прямує при $\varepsilon \rightarrow 0$ до однорідного потоку нерівномірно: в околах передньої та задньої критичних точок профілю збурення швидкості не малі. Те ж саме справедливо і при надзвуковому обтіканні затупленого спереду профілю, коли в дозвуковому потоці за відокремленим стрибком ущільнення існує критична точка на поверхні профілю. Тому в таких випадках при застосуванні методу малих збурень слід чекати появи в деяких точках особливостей розподілу параметрів течії. надзвуковому обтіканні загострених спереду При профілів критичної точки на профілі немає і прямування до граничної однорідної течії при $\varepsilon \rightarrow 0$ буде рівномірним.

У формулюванні задачі про визначення потенціалу φ параметр є входить лише в умову (2.9). Оскільки два інших співвідношення, які визначають φ , – рівняння (2.2) та умова (2.10) є однорідними відносно φ , то зрозуміло, що потенціал збурень φ , а разом із ним збурення швидкості і тиску, пропорційні ε .

Лінії течії при обтіканні всіх афінноподібних профілів (2.8) з одним і тим самим числом M утворюють афінноподібні. Такий закон подібності випливає із лінеаризації за параметром є всіх співвідношень при постановці задачі. Як вже було зауважено, при наближеному формулюванні задачі із числа параметрів, від яких залежать поля збурень швидкості і тиску, випала і величина Γ_1 так, що у взятому наближенні ці поля для всіх газів однакові. Покажемо, що, як і у випадку обтікання хвилеподібної стінки, наближена постановка задачі дає змогу формулювати закон подібності течії з різними значеннями числа M біля афінноподібних профілів. Розглянемо спочатку випадок дозвукової швидкості потоку, який набігає, M < 1. Введемо «деформовану» координату \overline{y} таку, що $\overline{y} = y\sqrt{1-M^2}$ і функцію

$$\overline{\varphi} = \frac{\varphi \sqrt{1 - M^2}}{\varepsilon U} \,.$$

У нових змінних рівняння (2.2) і крайові умови (2.9) і (2.10) матимуть вигляд:

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}^2} = Y'_{\pm}(x), \quad (2.11)$$
$$\overline{y} = 0, \quad \overline{\varphi} \to 0, \quad x \to -\infty.$$

У даній задачі немає ніяких параметрів.

Таким чином, поля збурень швидкості і тиску при обтіканні довільного профілю із сімейства (2.8) потоком газу з довільним значенням показника адіабати y і з довільним значенням числа M < 1 подібні між собою. А саме:

$$u = \varepsilon \frac{U}{\sqrt{1 - M^2}} \overline{\varphi}_x(x, y\sqrt{1 - M^2}),$$

$$v = \varepsilon U \ \overline{\varphi}_{\overline{y}}(x, y\sqrt{1 - M^2}),$$

$$\Delta p = -\varepsilon \frac{\rho U^2}{\sqrt{1 - M^2}} \overline{\varphi}_x(x, y\sqrt{1 - M^2}),$$

(2.12)

де ϕ_x , $\overline{\phi}_y$ – функції двох аргументів *x* і *y*, одинакові для всіх профілів сімейства (2.8) та не залежні від γ і *M*.

Надлишковий тиск на профілі з прийнятою точністю виражається формулою

$$\Delta p = -\varepsilon \frac{\rho U^2}{\sqrt{1-M^2}} \overline{\varphi}_x(x,0) \, .$$

Звідки випливає, що коефіцієнт тиску c_{p_1} при обтіканні профілю з відносною товщиною ε_1 потоком з числом Маха M_1 і коефіцієнт тиску c_{p_2} при обтіканні профілю з відносною товщиною ε_2 потоком з числом Маха M_2 пов'язані співвідношенням

$$c_{p_2} = c_{p_1} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{1 - M_1^2}}{\varepsilon_1 \sqrt{1 - M_2^2}}.$$
 (2.13)

Подібність розподілу тиску на профілях різної відносної товщини, яка виражається даним співвідношенням, називається законом подібності Прандтля-Глауерта.

Згідно з цим законом, знаючи розподіл тиску на одному тонкому профілі при єдиному значені $M = M_1 < 1$, можна простою і відомою зміною масштабу отримати розподіл тиску на довільному іншому профілі, який афінноподібний даному, при довільному іншому значені числа $M = M_2 < 1$ (причому цей розподіл не залежить від термодинамічних властивостей газу, тобто від величини Γ_1).

Число M_1 може в деяких випадках дорівнювати нулю, що відповідає течії нестисливої рідини. В цьому випадку для одного і того ж профілю ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) в нестисливій рідині, тобто при M = 0, і в газі при числі Маха M > 0 отримаємо зв'язок між тисками

$$\Delta p_{\Gamma} = \frac{\Delta p_{H}}{\sqrt{1 - M^{2}}}$$

або між коефіцієнтами тиску

$$c_{p\Gamma} = \frac{c_{pH}}{\sqrt{1-M^2}} \, . \label{eq:cpg}$$

Це формула Прандтля-Глауерта, вже отримана нами раніше. При M > 1 можна ввести координату \overline{y} і функцію $\overline{\phi}$ за формулами

$$\overline{y} = y\sqrt{M^2 - 1}, \ \overline{\varphi} = \frac{\varphi\sqrt{M^2 - 1}}{\varepsilon U}$$
 (2.14)

та отримати систему, яка аналогічна системі (2.11) з іншим рівнянням потенціалу, а саме

$$\frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\phi}}{\partial \overline{y}^2} = 0.$$
 (2.15)

У цьому випадку поля збурень швидкості і тиску визначаються формулами

$$u = \varepsilon \frac{U}{\sqrt{1 - M^2}} \overline{\varphi}_x(x, y\sqrt{1 - M^2}),$$

$$v = \varepsilon U \overline{\varphi}_{\overline{y}}(x, y\sqrt{1 - M^2}),$$

$$\Delta p = -\varepsilon \frac{\rho U^2}{\sqrt{1 - M^2}} \overline{\varphi}_x(x, y\sqrt{1 - M^2}).$$

(2.16)

При одних і тих самих функціях $Y_+(x)$ і $Y_-(x)$ (для одного і того ж сімейства профілів) функція $\phi(x, y)$ при M > 1 буде відрізнятися від виразів (2.12).

Аналогічно до закону подібності Прандтля-Глауерта при дозвуковій швидкості потоку, при M > 1 справедливо співвідношення

$$c_{p2} = c_{p1} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{M_1^2 - 1}}{\varepsilon_1 \sqrt{M_2^2 - 1}},$$

яке називають законом подібності Аккерета.

Перейдемо тепер до способів теоретичного визначення функції $\phi(x, v)$.

Розглянемо спочатку обтікання тонкого профілю дозвуковим потоком. Почнемо із задачі симетричного обтікання профілю

$$y = \pm \varepsilon Y(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Для її розв'язання застосуємо метод джерел та стоків. Розподілимо джерела, потенціал яких визначається формулою на відрізку осі *Ox*, що зайнятий профілем (довжину цього відрізка покладемо рівною 1): $\eta = 0$, $0 \le \xi \le 1$. Інтенсивність джерел $dq(\xi)$ відповідає тому, що із відрізка $d\xi$ витікає об'ємна витрата газу $dq(\xi)$.

Позначимо через $v(\xi,+0)$ і $v(\xi,-0)$ нормальну до осі Ox складову швидкості при підході до осі згори і знизу відповідно.

Зрозуміло, що

$$v(\xi, -0) = -v(\xi, +0)$$

i

$$dq(\xi) = v(\xi, +0)d\xi - v(\xi, -0)d\xi = 2v(\xi, +0)d\xi.$$

Потенціал швидкості течії з усіх джерел, що розташовані на відрізку $0 \le \xi \le 1$, виражається з допомогою інтегралу

$$\varphi = \frac{1}{\pi m} \int_{0}^{1} v(\xi, +0) d\xi - v(\xi, -0) d\xi = 2v(\xi, +0) d\xi, \qquad (2.17)$$

а складові швидкості – формулами:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\pi m} \int_{0}^{1} \frac{v(\xi, +0)(x-\xi)}{(x-\xi)^{2} + m^{2}y^{2}} d\xi,$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{v(\xi, +0)my}{(x-\xi)^{2} + m^{2}y^{2}} d\xi.$$
 (2.18)

Покажемо, що права частина виразу для v при $y \to 0$ дає значення $v(\xi, +0)$. Справді, при $0 < my = \delta$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{0}^{1} v(\xi, +0) \frac{\delta}{(x-\xi)^{2}+\delta^{2}} d\xi = \frac{1}{\pi} v(\xi, +0) \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{(x-\xi)^{2}+\delta^{2}} d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi} v(\xi, +0) \lim_{\delta \to 0} \left| \arctan \frac{\xi-x}{\delta} \right|_{0}^{1} = \frac{1}{\pi} v(\xi, +0) \lim_{\delta \to 0} \left| \arctan \frac{\xi-x}{\delta} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\delta} \right|.$$

Вираз в дужках у границі при $\delta \rightarrow 0$ дорівнює π для 0 < x < 1 і нулеві для всіх x зовні цього інтервалу. Чим і доведено дане твердження.

Функція $v(\xi,+0)$, яка визначає розв'язок (2.17) – (2.18), знаходиться із крайової умови обтікання профілю

$$v(\xi, +0) = \varepsilon U Y'(x)$$
. (2.19)

Для обчислення тиску на профілі, за формулою $\Delta p(x,0) = -\rho U u(x,0)$ знайдемо величину u(x,y) при y = 0. У виразі для *u* при y = 0

$$u(x,0) = \frac{\varepsilon U}{\pi m} \int_{0}^{1} \frac{Y'(\xi)}{x-\xi} d\xi.$$
 (2.20)

Інтеграл розбігається при $\xi = x$, тобто є невласним при 0 < x < 1, і його слід розуміти в сенсі головного значення.

Очевидно, що вираз для тиску на профілі

$$\Delta p = -\frac{\rho U^2 \varepsilon}{\pi \sqrt{1 - M^2}} \int_0^1 \frac{Y'(\xi)}{x - \xi} d\xi$$

задовольняє закону подібності Прандтля-Глауерта.

Зазначимо, що біля передньої та задньої меж профілю (за умови, що $Y'(x) \neq 0$) обчислене збурення швидкості прямує за логарифмічним законом до нескінченності. Як вже було сказано, це є відображенням особливості лінійного розв'язку, яка виникає там, де збурення швидкості при $\varepsilon \to 0$ не прямують до нуля.

У розглядуваному випадку симетричного відносно осі *х* профілю підйомна сила відсутня.

Опір профілю

$$X = 2\int_{0}^{1} \Delta p \varepsilon Y'(x) dx = -\frac{2\rho U^{2} \varepsilon^{2}}{\pi m} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \frac{Y'(\xi)Y'(x)d\xi dx}{x-\xi}$$

дорівнює нулю, так і має бути згідно з парадоксом Ейлера-Даламбера, оскільки підінтегральна функція антисиметрична відносно діагоналі квадрата, по площі якого проводиться інтегрування.

Перейдемо тепер до більш складного випадку несиметричного обтікання профілю, тимчасово замінивши лінією (дужкою) $y = \varepsilon Y(x)$.

На відміну від симетричної відносно осі x течії від джерел, розташованих в точках цієї осі, течія від вихру, що знаходиться на осі x і її легко отримати із формули (1.30) при $\eta = 0$, несиметрична: компонента швидкості v зберігається при переході через вісь x, компонента u змінює знак.

Розташувавши вихори неперервно вздовж відрізка 0 ≤ ξ ≤1 осі *x* і покладаючи

$$d\Gamma(\xi) = -u(\xi, +0)d\xi + u(\xi, -0)d\xi = -2u(\xi, +0)d\xi,$$

знайдемо потенціал ф у вигляді

$$\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} u(\xi, +0) \operatorname{arctg} \frac{my}{x-\xi} d\xi.$$
 (2.21)

Компоненти швидкості виражаються формулами

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} u(\xi, +0) \frac{my}{(x-\xi)^{2} + m^{2}y^{2}} d\xi,$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{m}{\pi} \int_{0}^{1} u(\xi, +0) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^{2} + m^{2}y^{2}} d\xi.$$
 (2.22)

При у = 0 отримаємо

$$v(x,0) = -\frac{m}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{u(\xi,+0)}{x-\xi} d\xi,$$
(2.23)

причому інтеграл у правій частині при 0 < x < 1 треба знову розуміти в сенсі його головного значення.

У випадку симетричного обтікання функція $v(\xi,+0)$ знаходилась безпосередньо із межової умови на профілі. У розглядуваному несиметричному розв'язку (2.21) – (2.22) функція $v(\xi,+0)$ не означена межовою умовою обтікання. Вона відома, якщо розв'язується обернена задача знаходження форми профілю за розподілом тиску, який заданий на ньому.

При розв'язувані прямої задачі функція *v*(ξ,+0) може бути отримана з інтегрального рівняння

$$u(x,+0) = \frac{\pi C}{m\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{m\sqrt{x(1-x)}} \int_{0}^{1} U\varepsilon Y'(t) \frac{\sqrt{t(1-t)}}{t-x} dt, \quad (2.24)$$

в яке перетворюється формула (2.22).

Розв'язок визначений із точністю до константи С, яка відповідає різним значенням циркуляції швидкості навколо профілю. За допомогою цієї константи можна задовольнити умову Жуковського-Чаплигіна сходу лінії течії із задньої межі профілю.

Із умови обмеженості u(x,+0) при $x \to 1$ отримаємо

$$\pi C + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} U \varepsilon Y'(t) \frac{\sqrt{t(1-t)}}{t-x} dt = 0 ,$$

тож розв'язок, який задовольняє умові Жуковського-Чаплигіна, має вигляд

$$u(x,+0) = \frac{U\varepsilon}{\pi m} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_{0}^{1} Y'(t) \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{dt}{t-x}.$$
 (2.25)

Як приклад розглянемо нижню пластинку під кутом атаки α . В цьому випадку $\epsilon Y'(x) = -\alpha$ і формула (2.25) матиме вигляд:

$$u(x,+0) = -\frac{U\alpha}{\pi m} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{dt}{t-x}.$$

На нижній стороні пластинки u(x,-0) = -u(x,+0).

Таким чином, тиск на нижній стороні вищий, а на верхній — нижчий, ніж в набігаючому потоці. Нормальна сила, яка діє на пластину, і рівна їй з прийнятою точністю підйомна сила Y визначається виразом

$$Y = \int_{0}^{1} (\Delta p_H - \Delta p_B) = \frac{2\rho U^2 \alpha}{m} \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = \frac{2\rho U^2 \alpha}{m}$$

Звідки для коефіцієнту підйомної сили знаходимо

$$C_{Y} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1 - M^{2}}}.$$
 (2.26)

Відповідно до парадоксу Ейлера-Даламбера, сила опору, що діє на пластинку, дорівнює нулю. Проте, проектуючи нормальну до пластинки силу на напрям набігаючого потоку, отримаємо відмінну

від нуля величину $\frac{\pi \rho U^2 \alpha^2}{m}$

Розв'язання цієї суперечності в тому, що згідно з формулюванням (2.11) в лінійному наближенні задача дозвукового обтікання профілю газом ідентична задачі про його обтікання нестисливою рідиною або газом. Тому при обтіканні газом передньої кромки пластини виникає підсмоктуюча сила, як і в нестисливій рідині.

Використовуючи формулу Аккерета $\Delta p = \frac{\rho U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \theta$, де θ –

кут відхилення стінки від напряму набігаючого потоку, яка дає надзвичайно простий зв'язок між тиском в точці на профілі і значенням кута нахилу контуру профілю до напряму набігаючого потоку, отримуємо в загальному випадку вирази для сил, що діють на профіль.

Розглянемо профіль із загостреними кромками, що розташований під кутом атаки α .

Для сил X та Y, що діють в напрямі осей x та y, маємо

$$dX = \Delta p_+ dY_+ - \Delta p_- dY_-, \ dY = (-\Delta p_+ + \Delta p_-)dx$$

Звідки

$$X = \frac{\rho U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^L \left[\left(\frac{dY_+}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY_-}{dx} \right)^2 \right] dx ,$$

$$Y = \frac{\rho U^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^L \left[-\frac{dY_+}{dx} - \frac{dY_-}{dx} \right] dx.$$

Представимо рівняння контуру профілю у вигляді $y = \pm \tau Y_o(x) + \varepsilon Y_s(x) - \alpha x$, де 2τ – найбільше значення відносної товщини профілю, ε – найбільше значення відносного прогину середньої лінії. Тоді

$$X = \frac{2\rho U^2 L}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\tau^2 \overline{Y_0'^2} + \epsilon^2 \overline{Y_s'^2} + \alpha^2 \right)$$
$$Y = \frac{2\rho U^2 L}{\sqrt{M^2 - 1}} \alpha, \qquad (2.27)$$

де $\overline{Y'_0}^2$ и $\overline{Y'_s}^2$ – середні за довжиною профілю Y'_0^2 і Y'_s^2 .

Для коефіцієнтів сили опору і підйомної сили отримаємо вирази

$$c_{X} = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho U^{2}L} = \frac{4}{\sqrt{M^{2}-1}} \left(\tau^{2} \overline{Y_{0}^{\prime 2}} + \varepsilon^{2} \overline{Y_{s}^{\prime 2}} + \alpha^{2}\right),$$

$$c_{Y} = \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho U^{2}L} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M^{2}-1}}.$$
(2.28)

Згідно з формулами (2.27), опір профілю в надзвуковому потоці завжди відмінний від нуля (якщо тільки профіль не є плоскою пластиною з нульовим кутом атаки); цей опір прийнято називати хвильовим. Хвильовий опір профілю являє собою суму трьох складових: опору, пов'язаного з товщиною профілю, опору, який пов'язаний з викривленням його середньої лінії, та опору, зумовленого наявністю кута атаки. Можливість такого поділу опору на три незалежних доданки і є наслідком лінійності задачі.

Важливою характеристикою профілю є його аеродинамічна

якість – відношення $K = \frac{c_Y}{c_x}$.

Хвильовий опір одиночного профілю можна зменшити тільки шляхом зменшення окремо кожної із трьох складових опору. Проте у випадку більш складних просторових конфігурацій загальний опір може бути меншим за суму опорів, які складають конфігурацію елементів, внаслідок їх взаємодії. Це явище називають корисною інтерференцією тіл при їх обтіканні. Простішим чудовим прикладом такої інтерференції є біплан Буземана [3, ст. 365].

Контрольні питання

- 1. У чому полягає суть методу малих збурень?
- 2. Які основні відмінності між властивостями дозвукових та надзвукових течій?
- 3. Від чого залежить швидкість затухання збурень?
- Сформулюйте задачу симетричного обтікання профілю. Що є її розв'язком?

1.4. МЕТОД ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Даний метод широко застосовується у задачах опису плоских усталених течій, обтікання циліндрів довільної, зокрема кругової форми, пластинок, як безциркулярним так і потоком з циркуляцією, а також для обчислення руху циліндра в газі, що перебуває у стані спокою на нескінченності.

Ефективність методу полягає у переході від функції течії, яка залежить від дійсних змінних, до комплексних потенціалів та швидкостей, які з математичної точки зору є деякими конформними відображеннями, що вивчаються у курсі теорії функцій комплексної змінної.

1.4.1. Плоскі усталені течії ідеального нестисливої рідини

Плоскою течісю називається така течія, що всі її частини рухаються паралельно деякій площині, причому швидкості частин у відповідних точках площин однакові за величиною та напрямком. Зрозуміло, що в цьому випадку достатньо розглянути течію в одній площині, яку можна прийняти за xOy, і всі величини будуть залежати від координат x та y. Це означає, що $v_z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, де $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ вектор швидкості, а оскільки течію в площині, ми фактично розглядаємо течію в шарі між площинами xOy та їй паралельною.

Оскільки рідина нестислива, то густина стала та відома $\rho = \rho_0$. Шукані функції $v_x = v_x(x, y)$, $v_y = v_y(x, y)$, p = p(x, y), E = E(x, y). Рівняннями плоскої задачі є рівняння неперервності, рівняння Ейлера в проекціях на осі Ox та Oy та рівняння енергії. Для нестисливої рідини, рівняння неперервності матиме вигляд

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$
(1.1)

Будемо вважати, що масові сили консервативні або відсутні, тоді справедливим є інтеграл Ейлера-Бернуллі. Для плоского руху

умова відсутності вихру гот $\mathbf{v} = 0$, коли $\Omega = k\Omega_z$, приводить до рівності $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$. Звідки інтеграл Ейлера-Бернуллі має вигляд

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{p}{\rho} + V = C.$$

З рівняння енергії для нестисливої рідини у випадку, коли немає притоку тепла, отримуємо $\frac{dE}{dt} = 0$, тобто енергія в частинці зберігається.

За умови відсутності вихру випливає, що існує функція $\varphi(x, y)$ така, що $d\varphi = v_x dx + v_y dy$ і

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$
 (1.2)

Потенціал швидкостей нестисливої рідини, на підставі рівняння неперервності (1.1) задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$
(1.3)

Розв'язок даного рівняння має задовольняти межові умови. У випадку обтікання тіл однорідним необмеженим потоком рівняння має задовольняти умови: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{\infty} = v_{\infty x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{\infty} = v_{\infty y}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{s} = 0.$

Задачею Неймана називається задача знаходження розв'язку рівняння Лапласа за заданим значенням нормальної похідної на межі.

Із рівняння неперервності (1.1) випливає

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}.$$
(1.4)

Рівність (1.4) — умова того, що диференціальна форма $v_x dy - v_y dx$ є повним диференціалом деякої функції $\psi(x, y)$ такої, що

$$v_x dy - v_y dx = d\psi, \tag{1.5}$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \ v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$
 (1.6)

Для плоских течій нестисливої рідини (вихрових та безвихрових) на підставі (1.4) завжди існує функція $\psi(x, y)$. Рівняння ліній течії для плоского випадку має вигляд $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$,

звідки випливає:

$$v_x dy - v_y dx = 0.$$
 (1.7)

Порівнюючи (1.5) і (1.7), легко побачити, що вздовж ліній течії $d\psi = 0$ і $\psi = const$.

 Φ ункцією течії називають функцію $\psi(x, y)$, а рівність $d\psi = const$ дає рівняння лінії течії. Різні значення сталої відповідають різним лініям течії.

У випадку безвихрового руху функцію течії $\psi(x, y)$ можна знайти як розв'язок рівняння Лапласа $\Delta \psi = 0$, що задовольняє межові умови на нескінченості та на поверхні тіла:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\Big|_{\infty} = -v_{\infty y}, \ \frac{\partial \Psi}{\partial y}\Big|_{\infty} = v_{\infty x}, \ \Psi(x, y)\Big|_{S} = C.$$

Задачею Діріхле називається задача знаходження розв'язку рівняння Лапласа за заданим значенням функції на межі. Якщо потенціал швидкостей існує лише у випадку, коли рух безвихровий, то функція течії завжди існує. При безвихровому русі функція течії задовольняє рівняння Лапласа.

1.4.1.1. Комплексний потенціал та комплексна швидкість

Ми отримали вирази (1.2) і (1.6) для проекцій швидкості через похідні функцій φ та ψ . Порівнюючи їх, отримаємо рівняння зв'язку між потенціалом швидкостей і функцію течії

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Це відомі з теорії функцій комплексної змінної умови Коші-Рімана, які гарантують, що функція $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ є аналітичною в області, де функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ є однозначними. І навпаки, якщо ми припустимо, що w є аналітичною функцією змінної z, то $\varphi(x, y)$ – потенціал швидкостей, а $\psi(x, y)$ – функція течії деякого двовимірного безвихрового руху газу.

З математичної точки зору комплексний потенціал у формі w = f(z) – конформне відображення площини z на площину w.

Диференціюючи комплексний потенціал $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, отримаємо $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$. За означенням $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, звідки має місце рівність

$$\mathbf{u} = u - i\mathbf{v} = -\frac{dw}{dz}.\tag{1.8}$$

Комплексною швидкістю називається вираз u - iv. Зазначимо, що комплексну швидкість можна знайти за формулою (1.8) безпосередньо із комплексного потенціалу. Наведемо деякі приклади обчислення означених вище понять.

Приклад 1. Нехай

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \qquad (1.9)$$

де q дійсне.

Для зручності перейдемо до полярних координат r, θ . Нагадаємо, що $z = x + iy = re^{i\theta}$, r = |z|, $\theta = \arg z$. Тоді

$$w(z) = \varphi + i\psi = \frac{q}{2\pi} (\ln r + i\theta), \quad \varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta.$$

Лінії течії $\psi = const$ будуть променями, які виходять з початку координат. Лінії рівного потенціалу $\phi = const - кола$ r = const (рис. 4.1).

Зробимо кілька зауважень щодо обчислення швидкостей потенціального потоку в криволінійних координатах. Нехай маємо потенціал швидкостей ф. Тоді

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \, \varphi,$$
$$v_l = \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\overline{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\overline{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\overline{l}, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial l}.$$



Нехай q_1, q_2, q_3 — криволінійні ортогональні координати. Елементи дуг ds_i , що відповідають приросту координати q_i , рівні $ds_i = H_i dq_i$, де H_i — коефіцієнти Ламе. Тоді проекції швидкостей обчислюються за формулами $v_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$.

Для циліндричних координат $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$, а коефіцієнти Ламе дорівнюють $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$. Звідки проекції швидкостей

Рис.4.1

запишемо у вигляді

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \ v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Повернемось до розгляду течії, яка визначається комплексним потенціалом (1.9). Проекції швидкостей на осі полярних координат рівні $v_r = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r}$, $v_{\theta} = 0$. Звідки випливає, що швидкість стала за величиною на кожному колі з центром в початку координат, спрямована по радіусу і спадає із збільшенням величини r. При q > 0 швидкість спрямована від центру $(v_r > 0)$, при q < 0 — до центру $(v_r < 0)$. Формула (1.9) дає комплексний потенціал течії від джерела, яке розташоване в початку координат.

З'ясуємо зміст величини q. Обчислимо витрати газу Q через контур, який містить початок координат. Запишемо інтеграл по замкненому контуру як інтеграл від A до B, де A і B – точки контуру, що співпадають, та отримаємо

$$Q = \prod_{A} v_n ds = \int_{A}^{B} d\psi = \psi_B - \psi_A = \frac{q}{2\pi} 2\pi = q.$$

Таким чином, q – інтенсивність джерела. При q > 0 маємо джерело, при q < 0 – сток (джерело негативної інтенсивності). Якщо джерело розташоване не в початку координат, а в точці z = a, то комплексний потенціал матиме вигляд $w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - a)$.



Приклад 2. Нехай в точці Aплощини (x, y) розташоване джерело інтенсивності q, а в точці B – джерело інтенсивності -q(сток), при чому комплексні координати точок $z_A = \frac{l}{2}e^{i\alpha}$,

Рис. 4.2

течії, який породжується кожним із джерел, має вигляд

 $z_{B} = -\frac{l}{2}e^{i\alpha}$. Комплексний потенціал

$$w_A(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - \frac{l}{2}e^{i\alpha}), \quad w_B(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln(z + \frac{l}{2}e^{i\alpha}).$$

Комплексний потенціал сумарної течії

$$w(z) = w_A(z) + w_B(z), \quad w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - \frac{l}{2}e^{i\alpha}}{z + \frac{l}{2}e^{i\alpha}}.$$

Припустимо, що точка z така, що $|z| \square l$. Розвинемо логарифми в ряди за степенями $\frac{l}{z}$ та отримаємо

$$w(z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{l}{z} e^{i\alpha} + \dots$$

Нехай $l \to 0$, а інтенсивність $q \to \infty$ така, що добуток ql залишається сталим: ql = M. Тоді для такої граничної течії комплексний потенціал матиме вигляд

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi z} e^{i\alpha}.$$
 (1.10)

Формула (1.10) — комплексний потенціал течії від розташованого в початку координат диполя з моментом M і віссю диполя, яка утворює кут α з віссю Ox. Вісь диполя прийнято спрямовувати від стоку (виходу) до джерела.

Розглянемо детальніше картину течії від диполя.

Не обмежуючи загальності, покладемо $\alpha = 0$, тобто розглянемо диполь, який розташований в початку координат, вісь якого збігається з віссю *Ox*.

Функції w(z), ϕ , ψ мають вигляд

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi z}, \quad \varphi + i\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$
$$\varphi = -\frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$
(1.11)

Лінії течії $\psi = const \in \pi$ лініями, на яких

$$\frac{1}{2c} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Лінії течії – кола, які проходять через початок координат, центри яких лежать на осі *Oy*. Аналогічно лінії рівного потенціалу $\varphi = const - кола (x - \tilde{c})^2 + y^2 = \tilde{c}^2$, які проходять через початок координат з центрами на осі *Ox* (рис. 4.2). Швидкості легко обчислити, використовуючи (1.11). Якщо $\alpha \neq 0$, то вся картина повертається на кут α . Якщо диполь розташований в точці z = a, то

$$w(z) = -\frac{Me^{i\alpha}}{2\pi(z-a)}$$

Приклад 3. Нехай

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \,. \tag{1.12}$$

В полярних координатах

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Лінії течії $\psi = const$ — кола з центром в початку координат, лінії $\phi = const$ — промені $\theta = const$.

Частинки газу рухаються по колах зі швидкостями

$$v_{\theta} = v_s = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Початок координат r = 0 (центр кіл) є особливою точкою. Швидкість $v_{\theta} > 0$ при $\Gamma > 0$, іншими словами, додатному значенню циркуляції відповідає рух по колу проти годинникової стрілки. Іноді говорять про «напрям циркуляції», розуміючи під цим напрям руху газу ($\Gamma > 0$ – проти годинникової стрілки, $\Gamma < 0$ – за годинниковою стрілкою).

Встановимо зміст величини Г. Візьмемо контур *l*, який охоплює початок координат, та обчислимо циркуляцію швидкості

$$\gamma$$
 по цьому контуру: $\gamma = \iint v_s ds = \oiint d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta = \Gamma.$

Таким чином, Г – циркуляція швидкості по замкненому контуру, який охоплює початок координат.

Течія, яка означена рівністю (1.12), є течією від вихору. Якщо вихор розташований в точці z = a, то комплексний потенціал

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-a).$$

Приклад 4. Розглянемо течію, яка обумовлена наявністю в початку координат джерела та вихору:

$$w_{1}(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \quad w_{2}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

$$w(z) = w_{1}(z) + w_{2}(z) = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$
 (1.13)

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

Течію, яка описується комплексним потенціалом (1.13), називають течією від вихроджерела. Знайдемо лінії течії:

$$\varphi + i\psi = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta), \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} (q \ln r + \Gamma\theta), \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} (q\theta - \Gamma \ln r).$$

Лінії течії $\psi = const$ є лініями, на яких $q\theta - \Gamma \ln r = const$. Позначимо сталу через $\Gamma \ln c$, тоді $q\theta = \Gamma \ln \frac{r}{c}$, $r = ce^{\frac{q}{\Gamma}\theta}$. Отримаємо, що лінії течії – логарифмічні спіралі. Лінії $\varphi = const$ – також логарифмічні спіралі, ортогональні до ліній $\psi = const$. Якщо вихроджерело розташоване в точці *a*, то

$$w(z) = \frac{q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - a).$$

1.4.1.2. Потенціальне обтікання кругового циліндра потоком ідеальної нестисливої рідини

Нехай круговий циліндр радіуса R рухається зі швидкістю **U** в потоці газу, який на нескінченності має задану швидкість **V**, причому швидкості **U** і **V** перпендикулярні до осі циліндра. Площину xOy виберемо так, щоб вона була перпендикулярною до твірних циліндра, та отримаємо плоску задачу про течію газу поза кругом, що рухається зі швидкістю $U(U_x, U_y, 0)$ в потоці, який на нескінченності має швидкість $V(V_x, V_y, 0)$.

Нехай в початковий момент часу вісь циліндра проходить через початок координат. Оскільки рух плоский, то існують комплексний потенціал w(z) та комплексна швидкість $\overline{v}(z) = \frac{\partial w}{\partial z}$.

Із фізичних міркувань зрозуміло, що функція $\overline{v}(z) = v_x - iv_y \in$ визначена в усіх точках площини xOy зовні круга радіуса R. Також вона має бути скрізь однозначною, обмеженою та приймати на нескінченності задані значення. Така функція комплексної змінної може бути розвинена в ряд Лорана за недодатними степенями z:

$$\overline{v}(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c_1'}{z^2} + \frac{c_2'}{z^3} + \dots$$
(1.14)

Перший член ряду легко можна знайти з умови в нескінченно віддаленій точці $\overline{v}(z)|_{\infty} = \overline{V} = V_x - iV_y$. При $z = \infty$ із (1.14) слідує

$$V_x - iV_y = c_0. (1.15)$$

Підставляючи (1.15) в (1.14), отримаємо

$$\overline{v}(z) = V_x - iV_y + \frac{c}{z} + \frac{c_1'}{z^2} + \dots$$
 (1.16)

Проінтегруємо (1.16) по z та отримаємо потенціал

$$w(z) = (V_x - iV_y)z + c\ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},$$
(1.17)

який забезпечує виконання умов на нескінченності при довільних значення $c, c_1, ..., c_n, ...$ Ці сталі треба означити так, щоб виконувалась умова обтікання циліндра $v_n|_s = U_n$. Оскільки рух потенціальний, то $v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ і дана умова в полярних координатах (r, θ) на поверхні циліндра r = R буде мати вигляд

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta \,. \tag{1.18}$$

Для того, щоб знайти сталі, що входять у вираз w(z), зручно у виразі (1.17) перейти до полярних координат, означити дійсну та уявну частини φ і ψ та, продиференціювавши φ по r, підставити $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ у вираз (1.18). З отриманої рівності знайдемо $c, c_1, ..., c_n, ...$ Невідомі коефіцієнти, взагалі кажучи, будуть комплексними.

Покладемо c = A + iB, $c_n = A_n + iB_n$, $z = re^{i\theta}$ та запишемо (1.17) у вигляді

$$w(z) = (V_x - iV_y)r(\cos\theta + i\sin\theta) + (A + iB)(\ln r + i\theta) +$$

$$+ (A_1 + iB_1) \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) +$$

+
$$\sum_{n=2}^{\infty} (A_n + iB_n) \frac{1}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta), \qquad (1.19)$$

звідки можна отримати вирази для φ та ψ . Випишемо вирази для функції φ та її похідної $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$:

$$\varphi = \left(V_x r + \frac{A_1}{r}\right) \cos\theta + \left(V_y r + \frac{B_1}{r}\right) \sin\theta + A \ln r - B\theta + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(V_x - \frac{A_1}{r^2}\right) \cos\theta + \left(V_y - \frac{B_1}{r^2}\right) \sin\theta + \frac{A}{r} - \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right).$$

В останній рівності покладемо r = R і, підставивши $\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=R}$ в умову обтікання (1.18), будемо мати

$$\left(V_x - \frac{A_1}{R^2}\right)\cos\theta + \left(V_y - \frac{B_1}{R^2}\right)\sin\theta + \frac{A}{R} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right) =$$

Праворуч і ліворуч в (1.20) стоять ряди Фур'є. Порівнюючи відповідні коефіцієнти, отримаємо

A = 0, $A_1 = (V_x - U_x)R^2$, $B_1 = (V_y - U_y)R^2$, $A_k = B_k = 0$, k = 2,3,...Коефіцієнт *В* залишився невизначеним. Введемо для нього нову сталу Γ і покладемо

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Підставляючи отримані коефіцієнти в (1.19), отримаємо вираз для комплексного потенціалу

$$w(z) = \left(V_x - iV_y\right)z + \frac{\Gamma}{2\pi} + \frac{\left(V_x - U_x\right)R^2 + i\left(V_y - U_y\right)R^2}{z}.$$
 (1.21)

Введемо позначення $\overline{V_{\infty}} = V_x - iV_y$, $\overline{V} = V_x + iV_y$, $U = U_x + iU_y$ та, використовуючи (1.21), запишемо загальний вигляд комплексного потенціалу обтікання кругового циліндра:

$$w(z) = \overline{V}_{\infty} z + (V_{\infty} - U) \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z ,$$

що являє собою суму трьох доданків, з яких $\overline{V}_{\infty}z$ – комплексний потенціал поступального потоку, другий – комплексний потенціал течії від диполя, третій – потенціал течії від точкового вихру. Таким чином, течію біля циліндру можна розглядати як течію, отриману накладанням поступального потоку на потік від диполя і від вихру. Стала Г має зміст інтенсивності вихру і входить у розв'язок як параметр.

1. Нехай обтікається нерухомий циліндр. Тоді U = 0 і

$$w_1(z) = \overline{V}_{\infty} z + V_{\infty} \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z .$$

2. Нехай циліндр рухається в газі, який перебуває в стані спокою на нескінченності. Тоді $\overline{V_{\infty}} = V_{\infty} = 0$ і

$$w_2(z) = -U\frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \; .$$

3. Нехай циліндр нерухомий і швидкість потоку в нескінченно віддаленій точці рівна нулю. Якщо U = 0, $\overline{V}_{\infty} = V_{\infty} = 0$,

то $w_3(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$. Маємо чисто циркулярне обтікання циліндра.

Обтікання нерухомого циліндра. Перейдемо до аналізу картини течії навколо кругового циліндра. Припустимо, що U = 0, тобто циліндр нерухомий і потік на нескінченності спрямований уздовж осі x (вісь x завжди можна спрямувати за напрямком

швидкості на нескінченності). Комплексний потенціал при $V_x = V$, $V_y = 0$ набуває вигляду

$$w(z) = V\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z . \qquad (1.22)$$

Розглянемо два випадки.

1. Безциркулярне обтікання циліндра
$$\Gamma = 0$$
. У цьому випадку

$$w(z) = V\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$
. Звідки $\varphi = V_x\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)$ і $\psi = V_y\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)$.

2. Обтікання циліндра потоком з циркуляцією. У цьому випадку w(z) має вигляд (1.22). Комплексна швидкість $\overline{v}(z) = V\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z}$. Знайдемо критичні точки потоку, в яких

 $v_x = v_y = 0$, та отримаємо квадратне рівняння $Vz^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i}z - VR^2 = 0$, корені якого будуть координатами критичних точок:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2V} \left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2 R^2} \right).$$

Тут можливі три різні випадки:

а) $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 > 0$ – критичні точки розташовані на циліндрі $|z_{1,2}| = R$, що обтікається, симетрично відносно осі *у* Im $z_1 = \text{Im } z_2$ i Re $z_1 = -\text{Re } z_2$;

б) $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 = 0$ – критичні точки зливаються в одну, що

розташована на уявній осі : $|z_{1,2}| = R$, $z_1 = z_2 = \frac{\Gamma}{4\pi V}i$;

в) – $\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$ + $4V^2R^2 < 0$ – два корені уявні, причому $|z_1| < R$, $|z_2| > R$. В області течії є одна критична точка, яка лежить поза циліндром і на уявній осі.

Ілюстрація течії зображена на рисунку 4.3, якщо припустити, що $\Gamma > 0$.

У розглядуваному випадку обтікання циліндра з циркуляцією лінії току симетричні відносно осі y. Тиски в точках циліндра, симетричних відносно осі y, однакові за величиною. Симетрії течії відносно осі x немає. Тому виникає сила, що діє на циліндр в напрямку осі y. Сила в напрямку осі x, як і в першому випадку, рівна нулю.

Результат, який полягає в тому, що тіло, яке обтікається потоком ідеального газу, не має опору, носить назву *парадокса* Даламбера.

Якщо у випадку в) величину Γ збільшувати так, щоб $4V^2R^2 \Box \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$, то критична точка по уявній осі буде віддалятись від циліндра, і в границі ми отримаємо чисто циркуляційну течію.



98

1.4.2. Метод конформних відображень

Розглянемо задачу обтікання газом циліндра довільної форми. Нехай площина, в якій розташований контур l, збігається з площиною комплексної змінної z = x + iy. Одночасно з площиною z розглянемо площину $\zeta = \xi + i\eta$ і коло радіуса R. Область площини z зовні контуру l позначимо через D, а область площини ζ зовні кола l' радіуса R позначимо через D' (рис. 4.4).



Рис. 4.4

Згідно з теоремою Рімана про конформне відображення, існує аналітична функція $z = f(\zeta)$, яка перетворює область D' в область D так, що точки контуру l' переходять в точки l і будьяка наперед задана точка $A' \in D'$ переходить в задану точку $A \in D$. Ця функція єдина, якщо в точці A' заданий агд $f'(\zeta_{A'}) = \varphi_0$. В ролі точок A та A' візьмемо нескінченно віддалені точки площин z і ζ та скористаємось цією теоремою, припустивши, що $\varphi_0 = 0$. А це означає, що функція $z = f(\zeta)$, така, що перетворює нескінченно віддалену точку площини ζ у нескінченно віддалену точку площини z та не змінює напрямів у цій точці. Для цієї функції в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ похідна $\frac{df}{d\zeta}$ є дійсним додатним числом.

Згідно з теоремою Рімана, існує й обернене перетворення $\zeta = F(z)$. Припустимо, що нам відомі функції

$$z = f(\zeta), \ \zeta = F(z). \tag{2.1}$$

Будемо розглядати задачу про обтікання контуру *l* потенціальним потоком, швидкість якого на нескінченності задана:

$$v_{\infty} = v_{\infty x} + i v_{\infty y}.$$

Нехай w(z) – комплексний потенціал, що відповідає цій течії. В w(z) виразимо z через ζ за допомогою (2.1):

$$w(z) = w[f(\zeta)] = W(\zeta).$$
(2.2)

Оскільки функція w(z) визначена в усіх точках області Dзовні l, то $W(\zeta)$ визначена в точках D' зовні l'. Аналітичну функцію $W(\zeta)$ можна розглядати як комплексний потенціал деякої течії на площині ζ . Кожній течії на площині z можна поставити у відповідність течію на площині ζ , комплексний потенціал якої отримаємо за формулою (2.2). Знайдемо цю течію. Покладемо

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

$$W(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta).$$

У відповідних точках площин z і ζ має місце рівність (2.2), тобто $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta).$

Звідки у відповідних точках

$$\varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta), \ \psi(x, y) = \Psi(\xi, \eta).$$
 (2.3)

Функція w(z) є комплексним потенціалом обтікання нерухомого контуру l на площині z. Тому функція течії $\psi(x, y)$ на контурі l стала. Контуру l відповідає коло l' на площині ζ , отже, в силу (2.3) на l' функція $\overline{\psi}(x, y)$ буде також сталою (коло – лінія течії, комплексний потенціал якої $W(\zeta)$). З'ясуємо умови на нескінченності для цієї течії. Комплексна швидкість

$$\overline{V}(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\zeta} = \overline{v}(z)\frac{dz}{d\zeta}.$$

На площині z у нескінченно віддаленій точці швидкість відома. З побудови функції (2.1) похідна $\frac{dz}{d\zeta}$ на нескінченності додатна:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\infty} = \overline{v}_{\infty} = v_{\infty x} - iv_{\infty y}, \quad \frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\infty} = k > 0.$$

Отже,

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\infty} = \overline{V}_{\infty} = k\overline{v}_{\infty}.$$

Таким чином, $W(\zeta)$ визначає на площині ζ течію зовні кола, причому швидкість потоку на нескінченності рівна kv_{∞} . Але комплексний потенціал обтікання кругового циліндра відомий, він має вигляд

$$W(\zeta) = k\overline{v}_{\infty}\zeta + \frac{kv_{\infty}R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$
 (2.4)

Використовуючи (2.4), замінимо ζ на F(z) та отримаємо

$$w(z) = k\overline{v}_{\infty}F(z) + \frac{kv_{\infty}R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln F(z).$$
(2.5)

Формула (2.5) – розв'язок задачі обтікання довільного контуру потенціальним потоком, якщо відома функція $\zeta = F(z)$. Величина k знаходиться за формулою $k = \frac{dz}{d\zeta}\Big|_{\infty} = \left(\frac{d\zeta}{dz}\Big|_{\infty}\right)^{-1} = [F'(z)_{\infty}]^{-1}.$

У розв'язку (2.5) циркуляція Г залишається невизначеною.

1.4.2.1. Обтікання еліптичного циліндра

Нехай у площині z задано еліпс з півосями a і b. Задача про обтікання еліпса поступальним потоком, що має швидкість v_{∞} , буде розв'язана, якщо буде відомий комплексний потенціал w(z). Для цього необхідно побудувати функцію $\zeta = F(z)$, яка відображатиме зовнішність еліпса на зовнішність круга. Одночасно з площиною z розглянемо площину ζ (рис. 4.5). Нехай задано перетворення Жуковського

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \tag{2.6}$$

Підберемо c таким чином, щоб формула (2.6) задавала перетворення області площини ζ поза контуром радіуса R в області площини z зовні еліпса. На колі

$$\zeta = Re^{i\theta} = R(\cos\theta - i\sin\theta). \tag{2.7}$$

Підставляючи (2.7) в (2.6) та відокремлюючи дійсну та уявну



Рис. 4.5

частини, отримаємо:

$$x = \left(R + \frac{c^2}{R}\right)\cos\theta, \quad y = \left(R - \frac{c^2}{R}\right)\sin\theta.$$
(2.8)

Рівняння (2.8) – параметричне рівняння еліпса з півосями:

$$a = R + \frac{c^2}{R}, \quad b = R - \frac{c^2}{R}.$$

Функція (2.6) задає відображення кола на еліпс із заданими півосями *a* і *b*, якщо припустити, що

$$R = \frac{1}{2}(a+b), \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}(a-b)R} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

При цьому перетворення (2.6) набуде вигляду

$$z = \zeta + \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{\zeta}.$$
 (2.9)

Отримаємо перетворення, яке обернене до (2.9) , тобто функцію $\zeta = F(z)$. Згідно з (2.9)

$$\zeta^{2} - \zeta z + \frac{1}{4} \left(a^{2} - b^{2} \right) = 0, \quad \zeta = \frac{z \pm \sqrt{z^{2} - (a^{2} - b^{2})}}{2}.$$
 (2.10)

Обернене перетворення не є однозначним. Вибираємо таку гілку кореня, щоб зовнішність еліпса перейшла у зовнішність кола. Для цього в (2.10) виберемо знак плюс. Справді, при достатньо великому значенні z отримаємо $\zeta = z - \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{z} + ...$

Таким чином,

$$\zeta = F(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2}, \quad R = \frac{a + b}{2}, \quad k = 1.$$

Комплексний потенціал обтікання еліптичного циліндра буде мати вигляд:

$$w(z) = \frac{1}{2}\overline{v}_{\infty}\left(z + \sqrt{z^{2} - (a^{2} - b^{2})}\right) + \frac{1}{2}v_{\infty}\frac{a+b}{a-b}\left(z - \sqrt{z^{2} - (a^{2} - b^{2})}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(z + \sqrt{z^{2} - (a^{2} - b^{2})}\right).$$

1.4.2.2. Постулат Чаплигіна-Жуковського

Нехай в площині z існує профіль з однією кутовою точкою, де кут $\delta < \pi$. Введемо допоміжну площину ζ . Нехай функція $z = f(\zeta)$ відображає область площини ζ поза радіусом кола R з контуром l' на зовнішність профілю.

Розглянемо задачу обчислення швидкості в кутовій точці A. Точка A при відображенні переходить в точку A' кола l'. Комплексна швидкість в точці A може бути представлена у вигляді:

$$v_{A}^{\prime} = \frac{dw(\zeta)}{dz}\Big|_{A} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{A^{\prime}}\frac{d\zeta}{dz}\Big|_{A} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{A^{\prime}}\frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}}\Big|_{A^{\prime}}.$$
 (2.11)

Функція $z = f(\zeta)$ переводить кут π в точці A' в кут $2\pi - \delta$ в точці A. Тому, в околі точки A відображення не є конформним і функція $z(\zeta)$ має розвинення виду

$$z - z_A = M(\zeta - \zeta_{A'})\frac{2\pi - \delta}{\pi} + \dots$$

Звідки

$$\frac{dz}{d\zeta}\Big|_{A'} = \frac{2\pi - \delta}{\pi} M(\zeta - \zeta_{A'})^{\frac{\pi - \delta}{\pi}|_{\zeta = \zeta_A}} = 0.$$
 (2.12)

Розглянемо рівність (2.11), при $\zeta = \zeta_{A'}$ другий множник на підставі рівності (2.12) перетворюється у нескінченність. Якщо швидкість $\frac{dW}{d\zeta}\Big|_{A'}$ не дорівнює нулю, то швидкість v_A у кутовій

точці профілю буде нескінченно великою, що фізично неможливо.

Вимога, щоб швидкість у задній гострій кромці була сталою, складає зміст постулату Чаплигіна-Жуковського. Виконання даного постулату можливе тільки за умови, що швидкість $\frac{dW}{d\zeta}$ в точці A' дорівнює нулю, або, що те саме, коли точка A' є критичною в потоці, що обтікає циліндр. Положення точки A'залежить від величини циркуляції.

Звідси випливає друге формулювання постулату Чаплигіна-Жуковського: циркуляція при обтіканні профілю з гострою кромкою A має бути такою, що точка A' кола, в яку переходить при конформному відображенні точка A, має бути критичною в потоці, що обтікає циліндр.

У критичній точці A' збігаються струмені потоку, що обтікають циліндр. Оскільки лінії течії площини ζ при відображенні переходять у лінії течії площини z, то точка А профілю також має бути точкою збіжності струменів. Звідки випливає третє формулювання постулату: циркуляція при

обтіканні контуру з гострою кромкою така, що ця кромка є точкою збіжності струменів.

Постулат Чаплигіна-Жуковського дозволяє обчислити значення циркуляції Г. Для комплексного потенціалу $W(\zeta)$ маємо формулу (2.5):

$$W(\zeta) = k\overline{\nu}_{\infty}\zeta + k\frac{\nu_{\infty}R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$

Комплексна швидкість буде рівна

$$\frac{dW}{d\zeta} = k\overline{v}_{\infty} - \frac{kv_{\infty}R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta}.$$
(2.13)

Нехай потік, що набігає на профіль, нахилено під кутом α до осі x, тобто

$$\overline{v}_{\infty} = |v_{\infty}| e^{-i\alpha}, v_{\infty} = |v_{\infty}| e^{i\alpha}, \qquad (2.14)$$

Покладемо в (2.13) $\zeta = \zeta_A$. Тоді згідно з постулатом

$$\frac{dW}{d\zeta}\Big|_{A'} = k\overline{v}_{\infty} - \frac{kv_{\infty}R^2}{\zeta^2_{A'}} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{\zeta_{A'}} = 0.$$

Звідки

$$\Gamma = 2\pi i k \left(\frac{v_{\infty} R^2}{\zeta_{A'}} - \overline{v}_{\infty} \zeta_{A'} \right).$$
(2.15)

Враховуючи (2.14) та припускаючи в (2.15) $\zeta_{A'} = Re^{i\theta_0}$, отримаємо

$$\Gamma = 2\pi i k R |v_{\infty}| (e^{i(\alpha - \theta_0)} - e^{-i(\alpha - \theta_0)})$$

$$\Gamma = 4\pi k R |v_{\infty}| \sin(\alpha - \theta_0)$$
(2.16)

Кутом атаки називається кут $(\alpha - \theta_0)$, де θ_0 – кут, що визначає положення точки A' кола l' площини ζ .

Циркуляція Γ перетворюється в нуль, коли $(\alpha - \theta_0) = 0$.

У формулі (2.16) усі величини відомі, якщо відоме конформне відображення профілю на коло. Якщо величина Г відома, то для комплексного потенціалу формула (2.5) буде давати єдиний розв'язок задачі обтікання довільного контуру з однією кутовою точкою. Тоді можна поставити питання про обчислення сил, що діють на профіль з боку потоку.

Зауваження. Якщо контур гладкий або має кут $\delta > \pi$, або декілька кутових точок, то задача про циркуляцію не може бути розв'язана без деяких додаткових міркувань.

1.4.2.3. Формули Чаплигіна-Блазіуса

Отримаємо загальні вирази для головного вектора та головного моменту сил тиску, які діють на профіль, що обтікається безвідривним сталим потоком ідеальної нестисливої рідини. Ми будемо говорити про обтікання контуру *l*, маючи на увазі обтікання нескінченного циліндра, та про силу, яка діє на контур, маючи на увазі силу, що діє на елемент циліндра одиничної висоти.

Головний вектор сил, що діють на профіль має вигляд

$$\mathbf{F} = - \prod_{l} p \mathbf{n} dl.$$

Проекції на осі координат

$$F_{x} = - \bigoplus_{l} p \cos(\overline{n}, x) dl = - \bigoplus_{l} p dy, \qquad (2.17)$$
$$F_{y} = \bigoplus_{l} p \cos(\overline{n}, y) dl = \bigoplus_{l} p dx.$$

Покладемо $\overline{R} = F_x - iF_y$, звідки, використовуючи (2.17), отримаємо

$$\overline{R} = -i \bigoplus_{l} p d\overline{z}.$$
(2.18)

Вздовж контуру *l* (контур – лінія течії) справедливим є інтеграл Бернуллі. Припускаючи, що масові сили відсутні, маємо

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C, \quad p = \rho C - \rho \frac{v^2}{2}.$$
 (2.19)

Підставляючи (2.19) в (2.18), отримаємо

$$\overline{R} = - \prod_{l} \rho C d\overline{z} + i \frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 d\overline{z} = i \frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 d\overline{z}$$
(2.20)

Розглянемо елемент контуру *dl*. Нехай θ – кут між дотичною до контуру та віссю *x*. Тоді

$$dz = dle^{i\theta}, \ d\overline{z} = dle^{-i\theta}, \ d\overline{z} = e^{-2i\theta}dz$$
 (2.21)

і формулу (2.20) можна записати у вигляді

$$\overline{R} = i \frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 e^{-2i\theta} dz.$$
(2.22)

При безвідривному обтіканні швидкість в точках контуру *l* спрямована по дотичній до нього (рис. 4.6):

$$ve^{-i\theta} = v\cos\theta - iv\sin\theta = v_x - iv_y = \overline{v}.$$
 (2.23)

Тому (2.22) набуває вигляду:

$$\overline{R} = i \frac{\rho}{2} \prod_{l} \overline{v}^2 dz.$$
(2.24)

Формула (2.24) – перша формула Чаплигіна-Блазіуса.

Якщо рух безвихровий, то існує комплексний потенціал w(z) і формула Чаплигіна-Блазіуса для цього випадку набуває вигляду

$$\overline{R} = i \frac{\rho}{2} \prod_{l} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \qquad (2.25)$$

Рис. 4.6

Знайдемо вираз для головного моменту сил тиску.

До елемента контуру dl прикладена сила, проекції якої $dF_x = -pdy$, $dF_y = -pdx$. Момент dL цієї сили відносно початку координат буде мати вигляд

$$dL = dF_{v}x - dF_{x}y = p(xdx + ydy),$$

звідки момент сил, що діють на профіль, отримаємо у вигляді

$$L = \prod_{i} p(xdx + ydy) \, .$$

Використаємо інтеграл Бернуллі (2.19) та отримаємо

$$L = C\rho \prod_{l} (xdx + ydy) - \frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 (xdx + ydy) = -\frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 (xdx + ydy).$$



Розглянемо вираз $zd\overline{z} = xdx + ydy + i(ydx - xdy)$, звідки випливає, що $xdx + ydy = \operatorname{Re} zd\overline{z}$. Як наслідок,

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 z d\overline{z}\right).$$
 (2.26)

Застосовуючи (2.21), перепишемо (2.26) у вигляді

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \prod_{l} v^2 e^{-2i\theta} z dz\right).$$

Згідно з (2.23), отримаємо другу формулу Чаплигіна-Блазіуса

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \prod_{l} \overline{v}^{2} z dz\right).$$

У випадку безвихрового руху

$$L = \operatorname{Re}\left(-\frac{\rho}{2} \prod_{l} \left(\frac{dw}{dz}\right)^{2} z dz\right).$$
 (2.27)

У формулах (2.25) та (2.26) інтегрування можна вести по довільному контуру, що охоплює контур *l* тіла, що обтікається.

Вектором сили (силою) називають величину $R = F_x + iF_y$, яка діє на профіль, а величину $\overline{R} = F_x - iF_y$ називають спряженою комплексною силою.

1.4.2.4. Інтеграл від комплексної швидкості

Розглянемо криволінійний інтеграл

$$I = \prod_{l} \overline{v} dz. \tag{2.28}$$

Припустимо, що рух потенціальний, тобто існує w(z). Тоді

$$\overline{v} = \frac{dw}{dz}$$
 i $I = \prod_{l} dw = \prod_{l} (d\varphi + id\psi) = \Delta \varphi + i\Delta \psi.$

Тут $\Delta \phi$, $\Delta \psi$ – приріст функцій ϕ і ψ відповідно, при обтіканні контуру. Розглянемо кожний інтеграл окремо. Вздовж контуру *l*
$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial l} dl$, де $\frac{\partial \phi}{\partial l}$ – проекція швидкості на елемент контуру dl. Тому $\prod_{l} d\phi = \prod_{l} (v_x dx + v_y dy) = \Gamma$.

Таким чином, перший інтеграл дорівнює циркуляції швидкості до контуру. Другий інтеграл чисельно дає втрату газу через контур $\Delta \psi = \iint d\psi = Q$.

Тому при обтіканні замкнутого контуру $\Delta w = \Gamma + iQ$, звідки інтеграл від комплексної швидкості дорівнює

$$\oint_{l} \overline{v} dz = \Gamma + iQ.$$
 (2.29)

Комплексна швидкість $\overline{v}(z)$ є функцією комплексної змінної, яка може мати особливості в точках в середині області, яка обмежена контуром l. Нехай $z_1, z_2, ..., z_k, ...$ – особливі точки функції $\overline{v}(z)$ у внутрішній області, що обмежена контуром l. Позначимо через γ_k лишки функції в даних точках. Згідно з теоремою про лишки інтеграл по замкнутому контуру дорівнює $\iint_l \overline{v} dz = 2\pi i \sum_k \gamma_k$, де $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$. Звідки отримаємо

$$\Gamma = -2\pi \sum_{k} \beta_{k}, \quad Q = 2\pi \sum_{k} \alpha_{k}.$$

1.4.2.5. Теорема Жуковського. Формула для моменту

Розглянемо обтікання деякого профілю *l* безвихровим потоком ідеальної нестисливої рідини. Такому обтіканню відповідає комплексний потенціал *w*(*z*).

Обчислимо комплексну силу \overline{R} за першою формулою Чаплигіна-Блазіуса:

$$\overline{R} = \frac{i\rho}{2} \iint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

В ролі контуру інтегрування візьмемо коло C з центром в початку координат, що охоплює контур l. Зовні C та на ньому комплексна швидкість може бути розвинена в ряд Лорана:

$$\overline{v}(z) = \frac{dw}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$
(2.30)

Знайдемо коефіцієнти A_0 і A_1 . Покладаючи $z = \infty$, знайдемо, що $A_0 = \overline{v}_{\infty}$.

Розглянемо криволінійний інтеграл від комплексної швидкості. Оскільки \overline{v} зовні контуру обмежена і не має особливостей у всій зовнішній відносно l частині площини z, включаючи і точку $z = \infty$, то для обчислення інтегралу достатньо знайти лишок підінтегральної функції у нескінченно віддаленій точці. За теоремою про лишки, використовуючи розвинення в ряд (2.30), отримаємо $\iint \frac{dw}{dz} dz = 2\pi i A_1$.

Згідно з (2.29), $\iint \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + iQ$. Оскільки крізь профіль не можна проникнути і в потоці немає джерел, то Q = 0. Звідки випливає, що $\Gamma = 2\pi iA_1$, $A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$. Підставляючи вирази, що отримані для коефіцієнтів у рівності (2.30), одержимо

$$\overline{v}(z) = \frac{dw}{dz} = \overline{v}_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

Для того, щоб скористатись формулою (2.28), обчислимо

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = (\overline{v}_{\infty})^2 + 2\overline{v}_{\infty}\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} + \left(2\overline{v}_{\infty}A_2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\right)\frac{1}{z^2} + \dots \quad (2.31)$$

Згідно з теоремою про лишки, $\iint \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\overline{v}_{\infty}\Gamma$. Для комплексної сили \overline{R} отримаємо формулу $\overline{R} = i\rho\overline{v}_{\infty}\Gamma$, де $\overline{R} = F_x - iF_y$, $\overline{v}_{\infty} = v_{x\infty} - iv_{y\infty}$.

Якщо скористатись (2.29) і перейти до комплексноспряжених величин R і v_{∞} , то прийдемо до формули (теореми) Жуковського:

$$R = -i\rho \overline{v}_{\infty} \Gamma$$

де $R = F_x + iF_y$, $v_\infty = v_{x\infty} + iv_{y\infty}$.

Теорема Жуковського. Головний вектор сил тиску, що діють на профіль, чисельно рівний добутку щільності та абсолютних величин швидкості і циркуляції та має напрям, який отриманий шляхом повороту вектора швидкості v_{∞} на кут $\frac{\pi}{2}$ в сторону, протилежну до циркуляції.

Таким чином, для величини сили Жуковського маємо формулу

$$|R| = \rho |v_{\infty}| \cdot |\Gamma|. \tag{2.32}$$

Принциповим є те, що головний вектор сил перпендикулярний напряму швидкості на нескінченності.

Підйомною силою називають силу, яка перпендикулярна швидкості v_{∞} ; силу в напрямі потоку – лобовим опором.

Із теореми Жуковського випливає, що при плоскому потенціальному обтіканні виникає тільки підйомна сила, яка можлива лише за наявності циркуляції, для якої ми отримали формулу (2.16). Підставимо вираз для Γ в (2.31) (радіус круга позначимо через \tilde{R}) та отримаємо

$$|R| = 4\pi k \tilde{R} \rho |v_{\infty}|^{2} |\sin(\theta_{0} - \alpha)|.$$

Оскільки зазвичай вісь Ox спрямовують вздовж швидкості v_{∞} , то підйомну силу позначають через R_x , силу опору через R_y . В реальному обтіканні виникає як підйомна сила, так і сила опору. Прийнято замість R_y та R_y досліджувати так звані коефіцієнти

опору
$$C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 S}$$
 та $C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 S}$. Тут S – площа характерного

перерізу тіла, яке обтікається. Для ідеального газу $C_x = 0$ ($R_x = 0 - парадокс Даламбера).$

Для того, щоб теоретично обчислити опір, треба відмовитись або від припущення про потенціальність течії, або від безвідривності обтікання, або припустити, що газ в'язкий.

При безвідривному обтіканні крила формула для C_y , де R_y обчислюється за формулою Жуковського, підтверджується експериментально.

Використовуючи другу формулу Чаплигіна-Блазіуса (2.27), розклад (2.31) та теорему про лишки, запишемо

$$L = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2}2\pi i \left(2A_{2}\overline{v}_{\infty} - \frac{\Gamma^{2}}{4\pi^{2}}\right)\right] \text{ afo } \Gamma = -\operatorname{Re}(2\pi i \rho \overline{v}_{\infty}A_{2}).$$

Проте момент може бути обчислений за даною формулою, якщо відомий коефіцієнт A_2 .

Часто користуються формулою

$$L = \operatorname{Re}\left[-k_0 \rho \overline{v}_{\infty} \Gamma - 2\pi i k k_1 \rho \overline{v}_{\infty}^2\right],$$

де k_0 , k, k_1 , k_2 – невідомі коефіцієнти в розвиненні функції $z = f(\zeta)$ в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, тобто $z = k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + ...$ (детальне доведення в [1, ст.157-158]).

1.4.2.6. Обтікання пластинки

Нехай у площині xOy задано деякий відрізок [-a,a], який розташований вздовж осі Ox. На цей відрізок під кутом α набігає поступальний потік, швидкість якого на нескінченності рівна v_{∞} .

Нам відомий розв'язок задачі про обтікання круглого циліндра. Для того, щоб ним скористатись, треба знати конформне відображення області зовні круга на область зовні відрізка [-*a*,*a*]. Перетворення Жуковського

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \tag{2.33}$$

відображає круг одиничного радіуса в площині ζ у відрізок прямої у площині z = x + iy (рис. 4.7).



Рис. 4.7

Отримаємо перетворення, яке обернене до (2.33), тобто функцію $\zeta = F(z)$. Згідно з (2.33), запишемо

$$a\zeta^{2} - 2z\zeta + a = 0, \ \zeta = \frac{z \pm \sqrt{z^{2} - a^{2}}}{a}.$$
 (2.34)

Для того, щоб перетворення $\zeta = F(z)$ відображало зовнішність відрізка у зовнішність круга, треба у (2.34) вибрати знак плюс. Таким чином, обернене перетворення має вигляд

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$
 (2.35)

Згідно з (7.3) та враховуючи, що в нашому випадку

$$k = \frac{a}{2}, k_0 = 0, k_1 = \frac{a}{2}, R = 1,$$
 (2.36)

отримаємо

$$w(z) = \frac{1}{2} \overline{v}_{\infty} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + \frac{1}{2} v_{\infty} \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right). \quad (2.37)$$

У формулу (2.37) входить циркуляція Г. Для її знаходження використовуємо постулат Чаплигіна-Жуковського. Його безпосереднє застосування є неможливим, оскільки у пластинки є дві гострі кромки. Нас цікавить пластинка як модель заокругленого спереду тонкого профілю із задньою гострою кромкою. Швидкість в задній гострій кромці буде скінченна, якщо відповідно до постулату Чаплигіна-Жуковського циркуляцію означимо за формулою (2.16):

$$\Gamma = 4\pi k R |v_{\infty}| \sin(\alpha - \theta_0),$$

де α – кут, утворений напрямом незбуреного потоку з віссю x, θ_0 – кут, який визначає положення в площині ζ точки A', в яку переходить задня кромка A.

У нашому випадку $\theta_0 = 0, \ k = \frac{a}{2}, \ R = 1$, тоді вираз для циркуляції набуває вигляду

$$\Gamma = -2\pi a \left| v_{\infty} \right| \sin \alpha. \tag{2.38}$$

Відповідно вираз для комплексного потенціалу можна записати у вигляді

$$w(z) = \frac{1}{2} \overline{v}_{\infty} \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right) + \frac{1}{2} v_{\infty} \left(z - \sqrt{z^2 - a^2} \right) + ia |v_{\infty}| \sin \alpha \ln \left(z + \sqrt{z^2 - a^2} \right).$$

Тут $\overline{v}_{\infty} = |v_{\infty}|e^{-i\alpha}$, $v_{\infty} = |v_{\infty}|e^{i\alpha}$. Якщо відомий комплексний потенціал, то ми можемо знайти комплексну швидкість \overline{v} та її складові v_x і v_y в точках пластини.

Означимо силу, яка діє на пластинку, використовуючи формулу (2.38). За теоремою Жуковського

$$\overline{R} = -2\pi i \rho a \left| v_{\infty} \right|^2 e^{-i\alpha} \sin \alpha.$$

Звідки

$$R_x = -2\pi\rho a |v_{\infty}|^2 \sin^2 \alpha, \ R_y = 2\pi\rho a |v_{\infty}|^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$
 (2.39)

Зауважимо таке. Хоча в ідеальному газі всі елементарні напруги нормальні до пластинки, виникає результуюча сила R_x , спрямована по дотичній до неї. Це пов'язано з тим, що постулат Чаплигіна-Жуковського накладає обмеження на величину швидкості лише біля задньої гострої кромки. Якщо уявити собі передню кромку заокругленою, тобто такою, що має малий радіус кривизни, то швидкості поблизу носової частини будуть дуже

великі, а тиск, згідно з рівнянням Бернуллі, малим. Різниця тисків між кормовою та носовою частинами приводить до появи деякої, так званої «підсмоктуючої» сили, що паралельна осі Ox. Якщо радіус кривизни заокруглення прямує до нуля, то швидкість поблизу передньої кромки буде необмежено зростати, а тиск — падати. Безпосереднім обчисленням можна показати, що при цьому «підсмоктуюча» сила буде прямувати до деякої граничної величини, яка збігається зі значенням R_x із (2.39). Величина сили Жуковського для пластинки

$$P = |R| = 2\pi a \rho |v_{\infty}|^2 \sin \alpha. \qquad (2.40)$$

Часто розглядають коефіцієнт підйомної сили

$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho \left| v_{\infty} \right|^2 S}$$

У випадку плоскої течії в ролі S беруть добуток хорди на одиницю розмаху крила. В нашому випадку S = 2a і

$$C_p = 2\pi \sin \alpha$$
.

Враховуючи (2.36), отримаємо вираз для моменту сил, що діють на пластинку, у вигляді

$$L = -\operatorname{Re}\left(2\pi i\rho |v_{\infty}|^{2} \frac{a^{2}}{4}e^{-i\alpha}\right) = -\frac{\pi a^{2}}{2}\rho |v_{\infty}|^{2}\sin 2\alpha.$$

Беручи до уваги (2.40), вираз для L можна записати у вигляді

$$L = -\frac{a}{2}\cos\alpha P. \tag{2.41}$$

Із (2.41) випливає, що точка прикладання рівнодіючої сили розташована на відстані $\frac{1}{4}$ частини хорди від передньої кромки.

Зауваження. Для розрахунку обтікання профілю довільної форми існують різні методи, що базуються на ідеї наближеного конформного відображення зовнішності заданого профілю на зовнішність круга: методи Теодорсена, Симонова, Серебрійського, Нужина. У [1, ст.167-172] детально розглянуто метод Нужина, в якому доведена збіжність процедури послідовних наближень.

Контрольні питання

- 1. Яка течія називається плоскою?
- 2. Сформулюйте задачу Неймана.
- 3. Що таке функція течії?
- 4. Сформулюйте задачу Діріхле.
- 5. Наведіть означення комплексного потенціалу та комплексної швидкості.
- 6. Сформулюйте задачу обтікання нерухомого циліндра.
- 7. Поясніть, в чому суть парадоксу Даламбера.
- 8. Сформулюйте задачу про безциркулярне обтікання циліндра.
- 9. Сформулюйте задачу про обтікання циліндра потоком з циркуляцією.
- 10. Сформулюйте задачу про обтікання еліптичного циліндра.
- 11. В чому полягає суть постулату Чаплигіна-Жуковського? Наведіть декілька його формулювань.
- 12. Що таке кут атаки?
- 13. Сформулюйте задачу про обтікання пластинки.
- 14. Що таке вектор сили?
- 15. Сформулюйте теорему Жуковського.
- 16. Що таке підйомна сила?

Розділ 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В АЕРОДИНАМІЦІ

2.1. МЕТОДИ КОНСТРУЮВАННЯ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ

Найефективнішими методами дослідження задач газової динаміки є чисельні методи. Серед відомих чисельних методів найбільш дослідженим є метод скінчених різниць.

Суть методу скінчених різниць полягає в такому. В області простору, що розглядається, замість неперервного середовища, стан якого можна описати функціями неперервного аргументу, вводиться його різницевий аналог. Цю дискретну модель середовища можна описати функціями дискретного аргументу, які визначені на скінченому числі точок на сітці. Диференціальні рівняння, тобто закони, відповідно до яких еволюціонує неперервне середовище, замінюють відповідними алгебраїчними скінченнорізницевими співвідношеннями. В результаті диференціальна задача заміняється (апроксимується) системою різницевих рівнянь – різницевою схемою.

2.1.1. Основні поняття теорії різницевих схем

Першим кроком у побудові різницевих схем є заміна області неперервної зміни аргументу деяким скінченним числом точок, що лежать в цій області. Ця множина є областю визначення функції дискретного аргументу. Вона називається *різницевою сіткою*. Відповідно функції дискретного аргументу, визначені на цій сітці, називаються *сітковими функціями*.

Для одновимірної задачі найпростішим прикладом просторової різницевої схеми є рівномірне розбиття відрізку [0, M] на Nрівних частин, довжина яких h = M / N (рівномірна різницева сітка). Відрізок [0, M] можна розглядати, наприклад, як область зміни лагранжевої масової змінної в просторовій одновимірній задачі, де M – маса газу, що розглядається.

Точки поділу s_i , $0 \le i \le N$, відрізка, число яких складає в даному випадку N+1, називають *вузлами сітки*. Відстані між вузлами $s_{i+1} - s_i = h$ – це кроки сітки (по масі), величину h часто назива-

ють *масовим інтервалом*. Сукупність вузлів складає множину точок ω_{*h*}, де визначаються сіткові функції:

$$\omega_h = \{s_i = ih, i = 0, ..., N\}.$$

Разом із вузлами, що називаються цілими точками, часто розглядають так названі «напівцілі точки» $s_{i+1/2} = s_i + 0, 5h$. Множину напівцілих точок також можна використовувати як область визначення сіткових функцій.

Велике значення має вибір кількості вузлів сітки. Вважається, що чим більша кількість вузлів сітки, тим точніша буде різницева схема. Проте, з іншого боку, через обмеженість швидкодії та об'єму пам'яті ЕОМ кількість вузлів повинна бути невеликою. Сітки з невеликою кількістю вузлів в подальшому називатимемо «грубими» або «реальними».

У випадках, коли відома апріорна інформація про розв'язок, наприклад, коли відомо розміщення деяких особливостей розв'язку, для яких необхідна дрібніша сітка, природно, не збільшуючи числа вузлів, ущільнити сітку в околі особливостей. В областях гладкості розв'язку сітку можна зробити рідкою.

Крок такої нерівномірної сітки $h_i = s_{i+1} - s_i$, $\sum_i h_i = M$, вибирають так, щоб найкращим чином передати пік розв'язку u(s). Такий прийом не є універсальним у випадках, коли особливість розв'язку переміщується по сітці, причому закон її переміщення є наперед невідомим.

Аналогічно до різницевої схеми в просторі визначається сітка по часовій змінній:

$$\omega_{\tau} = \left\{ t_j, \ j = 0, 1, 2, ...; \ t_{j+1} - t_j = \tau_j \right\},$$

де τ_j – крок сітки за часом, який в загальному випадку залежить від номера кроку. Добуток сіток

$$\omega = \omega_h \times \omega_\tau = \left\{ (s_i, t_j), \ s_{i+1} = s_i + h_i, \ t_{j+1} = t_j + \tau_j \right\},\$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad s_0 = 0, \ s_N = M, \quad t_0 = 0,$$

дає просторово-часову різницеву сітку для чисельного розв'язання одновимірної нестаціонарної задачі.

Набір вузлів (s_i, t_j) при $0 \le i \le N$ і фіксованому *j* називають *j*-м часовим шаром сітки ω . Інколи розглядають напівцілі шари $t_{j+1/2} = t_j + 0,5\tau_j$. Вузли, розміщені на вертикальних прямих i = 0 та i = N, називаються межовими.

Значення сіткової функції *у* в деякому вузлі сітки (s_i, t_j) будемо позначати через y_i^j або $y : y(s_i, t_j) = y_i^j = y$. Відповідно $y(s_{i+1}, t_j) = y_{i+1}^j = y(\pm 1)$ і $y(s_i, t_{j+1}) = y_i^{j+1} = \hat{y}$.

У напівцілих точках:

$$y(s_i + \frac{1}{2}h, t_j) = y_{i+1/2}^j = \overline{y}_i^j = \overline{y}.$$

Головну увагу при постановці різницевої задачі приділяють переходу від диференціальних рівнянь до відповідних співвідношень для сіткових функцій.

У класичному аналізі похідна від функції неперервного аргументу визначається таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(s + \Delta s, t) - u(s, t)}{\Delta s} \,. \tag{1.1}$$

При визначені різницевої похідної відношення нескінченно малих замінюють відношеннями скінченних різниць. Нехай s_{i-1}, s_i, s_{i+1} – три послідовних вузла рівномірної різницевої сітки по простору з кроком $h = s_{i+1} - s_i = s_i - s_{i-1}$.

Для апроксимації похідної (1.1) у вузлі *s_i* (на *j*-му часовому шарі) можна використовувати такі співвідношення:

$$y_{s} = \frac{y(s_{i+1}, t_{j}) - y(s_{i}, t_{j})}{s_{i+1} - s_{i}} = \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i}^{j}}{h} = \frac{y(+1) - y}{h},$$
 (1.2)

$$y_{\bar{s}} = \frac{y(s_i, t_j) - y(s_{i-1}, t_j)}{s_i - s_{i-1}} = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = \frac{y - y(-1)}{h}.$$
 (1.3)

Вирази (1.2), (1.3) називаються односторонніми різницевими похідними, y_s – це права похідна (похідна вперед), $y_{\bar{s}}$ – це ліва похідна (похідна назад).

Очевидно, що права похідна у вузлі *i* є лівою у вузлі *i*+1, тобто $y_s = y_{\bar{s}}(+1)$. Аналогічно, $y_{\bar{s}} = y_s(-1)$.

Крім співвідношень (1.2), (1.3), використовують також центральну (двосторонню) різницеву похідну:

$$y_{s} = \frac{y(s_{i+1}, t_{j}) - y(s_{i-1}, t_{j})}{s_{i+1} - s_{i-1}} = \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i-1}^{j}}{2h} = \frac{y(+1) - y(-1)}{2h}.$$
 (1.4)

Очевидно, що $y_s = 0,5(y_s + y_{\bar{s}})$. Аналогічно визначається похідна за часом:

$$y_{t} = \frac{y(s_{i}, t_{j+1}) - y(s_{i-1}, t_{j})}{t_{j+1} - t_{j}} = \frac{y_{i}^{j+1} - y_{i}^{j}}{\tau} = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$
 (1.5)

Друга різницева похідна визначається так:

$$y_{s\bar{s}} = \frac{y(s_{i+1}, t_j) - 2y(s_i, t_j) + y(s_{i-1}, t_j)}{h^2} = \frac{y(+1) - 2y + y(-1)}{h^2}.$$
 (1.6)

Для різницевої апроксимації диференціального рівняння на двох часових шарах використовують лінійну комбінацію

$$y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y, \qquad (1.7)$$

де σ – ваговий множник. Формула переходу від однієї ваги до іншої така:

$$y^{(\alpha)} = y^{(\beta)} + (\alpha - \beta)\tau y_t.$$
(1.8)

Для добутку сіткових функцій мають місце такі формули різницевого диференціювання:

$$(yv)_s = y(+1)v_s + vy_s, \quad (yv)_{\overline{s}} = y(-1)v_{\overline{s}} + vy_{\overline{s}}.$$
 (1.9)

Постановка диференціальної задачі в газовій динаміці окрім самих рівнянь включає формулювання крайових умов і початкових даних, які забезпечують виділення з сукупності всіх можливих

розв'язків єдиного. Ті ж елементи повинна містити і різницева постановка завдання.

Способи апроксимації деяких диференціальних виразів різницевими були розібрані вище (формули (1.2)–(1.9)). Характер різницевої апроксимації граничних і початкових умов залежить від конкретного виду задачі.

Як приклад розглянемо задачу витоку газу у вакуумі. Ліворуч газ межує з нерухомою стінкою, тому ліва крайова умова виглядає таким чином:

$$v(0,t) = 0$$
, $t > 0$.

Права крайова умова на межі газу з вакуумом має вигляд

$$p(M,t)=0, \quad t>0,$$

де М – маса газу, що знаходиться в одиничному паралелепіпеді.

Початкові умови такі: газ однорідний і перебуває в спокої, тому

$$v(s,0) = v_0 = 0, \ p(s,0) = p_0, \ \rho(s,0) = \rho_0, \ 0 < s < M$$
.

У цій найпростішій задачі різницева апроксимація крайових і початкових умов досить проста і має вигляд:

$$v_0^j = 0, \ p_N^j = 0, \ j = 1, 2, \dots,$$

 $v_i^0 = 0, \ p_i^0 = p_0, \ \rho_i^0 = \rho_0, \ i = 1, 2, \dots, N-1.$

Тут для простоти розглянуто випадок, коли всі сіткові функції обчислюються в цілих точках сітки.

Різницеві рівняння в сукупності з різницевою апроксимацією граничних і початкових умов складають *різницеву схему*. Різницева схема є системою алгебраїчних співвідношень, методи розв'язання яких являють собою самостійну проблему.

Надалі будемо скорочено називати також різницевою схемою одну лише систему різницевих рівнянь, маючі на увазі при цьому, що в конкретному завданні до неї додається різницевий запис початкових і крайових умов. Наведемо більш складний приклад різницевих схем. Виберемо такий вигляд системи диференціальних рівнянь газової динаміки в змінних Лагранжа:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s},\qquad(1.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s} , \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad (1.13)$$

$$p = \rho RT, \ \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1}T$$
 (1.14)

У даному випадку рівняння стану (1.14) описують ідеальний газ, проте, з точки зору побудови різницевих схем, це не є принциповим. Тому в подальшому при записі різницевої схеми рівняння стану будемо опускати.

Система рівнянь (1.11) – (1.14) розв'язується в області $\Omega = \{0 < s < M, t > 0\}$. В цю область введемо рівномірну сітку

$$\omega = \{ (s_i, t_j), (s_{i+1/2}, t_j), s_{i+1} = s_i + h, s_{i+1/2} = s_i + 0, 5h \},\$$

$$i = 0, 1, \dots, N - 1, s_0 = 0, s_N = M, hN = M, t_{j+1} = t_j + \tau_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

До вузлів сітки (s_i, t_j) будемо відносити сіткові функції швидкості v_i^j та ейлеревої змінної x_i^j , до «напівцілих» точок $(s_{i+1/2}, t_j)$ – сіткові функції тиску, густини, внутрішньої енергії і температури: $p_{i+1/2}^j = \overline{p}_i^j$, $\rho_{i+1/2}^j = \overline{\rho}_i^j$, $\varepsilon_{i+1/2}^j = \overline{\varepsilon}_i^j$, $T_{i+1/2}^j = \overline{T}_i^j$.

Після апроксимування диференціальних рівнянь газодинаміки (1.10)–(1.14) отримаємо наступну різницеву схему:

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -\frac{p_{i+1/2}^j - p_{i-1/2}^j}{h} , \qquad (1.15)$$

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{\tau} = v_i^{j+1}, \qquad (1.16)$$

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{p_{i+1/2}^{j+1}} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j}} \right) = \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_{i}^{j+1}}{h}, \qquad (1.17)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \varepsilon_{i+1/2}^{j}}{\tau} = -p_{i+1/2}^{j+1} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_{i}^{j+1}}{h}, \qquad (1.18)$$

$$p_{i+1/2}^{j+1} = \rho_{i+1/2}^{j+1} R T_{i+1/2}^{j+1}, \quad \varepsilon_{i+1/2}^{j+1} = \frac{R}{\gamma - 1} T_{i+1/2}^{j+1}.$$
(1.19)

Локальні похибки апроксимацій окремих диференціальних рівнянь системи (1.10) - (1.14) різницевими співвідношеннями (1.15) - (1.19) мають порядок $O(\tau + h^2)$.

Зазначимо, що при записі цієї схеми не довелося користуватися будь-якими просторовими інтерполяціями сіткових функцій, оскільки динамічні функції v, x і термодинамічні функції p, ρ, ε, T віднесені до різних (цілих і «напівцілих») точок сітки. Схеми, подібні до цієї, описані в літературі і достатньо широко застосовуються на практиці (див., наприклад, [9]). Вони ведуть свій початок від відомої схеми «хрест», запропонованої спочатку для рівняння акустики.

Перевагою схеми (1.15)–(1.19) є те, що вона розв'язується явним способом. Для цього слід розглядати рівняння схеми в зазначеному порядку. Тоді з (1.15) за відомим з попереднього *j*-го шару профілю тиском $p_{i+1/2}^{j}$ обчислюються значення швидкості v_i^{j+1} , з (1.16) і (1.17) за знайденою швидкістю v_i^{j} визначаються x_i^{j+1} та $\rho_{i+1/2}^{j+1}$, далі рівняння (1.18) разом із рівнянням (1.19) дає $T_{i+1/2}^{j+1}$, $\varepsilon_{i+1/2}^{j+1}$ і $p_{i+1/2}^{j+1}$.

Перепишемо побудовану різницеву схему в безіндексній формі, опустивши риску над функціями (для уникнення громіздких позначень), маючи на увазі, що вони відносяться до напівцілих точок сітки. Тоді схема (1.15)–(1.19) матиме вигляд:

$$v_t = -p_{\bar{s}},$$
 (1.15*)

$$x_t = \hat{v}, \qquad (1.16^*)$$

$$(1/\rho)_t = \hat{v}_s$$
, (1.17*)

$$\varepsilon_t = -\hat{p}\hat{v}_s, \qquad (1.18^*)$$

$$\hat{p} = R\hat{\rho}\hat{T}, \quad \hat{\varepsilon} = R\hat{T}/(\gamma - 1).$$
 (1.19*)

2.1.2. Консервативні різницеві схеми

Різницева схема повинна відображати основні властивості неперервного середовища. Тому природною є умова виконання аналогів основних законів збереження. Різницеві схеми, що наділені такими властивостями, називаються консервативними.

На важливість вимоги консервативності схеми звернули увагу на початку 50-х років XX століття А.М. Тихонов та О.А. Самарський. Вони запропонували інтегро-інтерполяційний метод для конструювання консервативних різницевих схем і побудували приклад, коли неконсервативна різницева схема, що забезпечує другий порядок точності в класі достатньо гладких коефіцієнтів, розбігається в класі розривних коефіцієнтів.

Прикладом задачі такого типу є задача для стаціонарного рівняння теплопровідності:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad x \neq \xi,$$
$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \quad k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1. \end{cases}$$

Коефіцієнт теплопровідності k(x) має розрив в точці $x = \xi$. Тому диференціальне рівняння розглядається тільки в областях гладкості $0 < x < \xi$ і $\xi < x < 1$. На розриві повинні виконуватись додаткові умови, необхідні з фізичної точки зору, які виражають неперервність температури і теплового потоку:

$$\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = u(\xi + 0) - u(\xi - 0) = 0,$$
$$\begin{bmatrix} k \frac{du}{dx} \end{bmatrix} = k \frac{du}{dx} \Big|_{x=\xi+0} - k \frac{du}{dx} \Big|_{x=\xi-0} = 0.$$

Ці умови, в сукупності з граничними умовами, виділяють єдиний розв'язок – кусково-лінійну функцію u(x):

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha x, & 0 \le x \le \xi, \\ \beta(1 - x), & \xi < x \le 1, \end{cases}$$
$$\alpha = k_2 \Delta, \quad \beta = k_1 \Delta, \quad \Delta = \left[\xi k_2 + (1 - \xi)k_1\right]^{-1}.$$

Зауважимо, що вихідне диференціальне рівняння можна записати у недивергентній формі:

$$k\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{dk}{dx}\frac{du}{dx} = 0.$$

В області $0 \le x \le 1$ введемо рівномірну сітку $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, ..., N, h = 1/N\}$. Припускаємо, що точка розриву $x = \xi$ коефіцієнта k(x) потрапила в інтервал між n-м та (n+1)м вузлами: $\xi = x_n + \theta h$, $0 < \theta < 1$.

Замінимо диференціальну задачу різницевою схемою, причому апроксимувати будемо недивергентну форму рівняння:

$$k_{i} \frac{y_{i+1} - 2y_{i} + y_{i-1}}{h^{2}} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1, \ y_{0} = 1, \ y_{N} = 0.$$

Перетворимо різницеве рівняння в такий спосіб:

$$\frac{1}{h^2} [b_i(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] = 0,$$

де $a_i = k_i - \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}), \quad b_i = k_i + \frac{1}{4}(k_{i+1} - k_{i-1}).$ Очевидно, що побу-

дована різницева схема не є консервативною. Умовою консервативності є рівність $a_{i+1} = b_i$, при виконанні якої записане різницеве рівняння набуває дивергентного вигляду:

$$\frac{1}{h} \left[b_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - b_{i-1} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \left(by_{\bar{x}} \right)_x = 0,$$

125

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

що свідчить про виконання закону збереження тепла. Однак умову $a_{i+1} = b_i$ при $k_1 \neq k_2$ порушено в найближчих до точки розриву $x = \xi$ вузлах ($x = x_n$ i $x = x_{n+1}$).

Члени, що порушують консервативність, можна трактувати як деякі фіктивні джерела тепла, розміщені в цих вузлах. Їхня потужність прямо пропорційна різниці коефіцієнтів теплопровідності $k_1 - k_2$ та обернено пропорційна величині кроку сітки h.

Розв'язок системи різницевих рівнянь шукають у явному вигляді. При подрібненні сітки ($h \rightarrow 0$) він збігається до деякої функції $\tilde{u}(x)$, що є розв'язком такої диференціальної задачі:

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{d\tilde{u}}{dx}] = 0, \quad 0 < x < 1, \quad x \neq \xi, \quad \tilde{u}(0) = 1, \quad \tilde{u}(1) = 0,$$

і задовольняє додаткові співвідношення в точці $x = \xi$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} k \frac{d\tilde{u}}{dx} \end{bmatrix} = -q,$$

де $q = q(\xi, k_1, k_2, h) - \phi$ іктивне джерело тепла в точці розриву коефіцієнта k(x). Величина q може змінюватись у межах від $-\infty$ до $+\infty$; зокрема, q = 0 ($\tilde{u}(x) \equiv u(x)$) лише при $k_1 = k_2$.

Чисельні експерименти свідчать, що побудована неконсервативна схема розбігається, в той час як будь-яка консервативна схема для даної задачі є збіжною. Зазначимо, що для широкого класу задач властивість консервативності є необхідною умовою збіжності.

2.1.3. Інтегро-інтерполяційний метод

Суть цього методу полягає в тому, що різницеві рівняння будуються на основі інтегральних співвідношень, які виражають закони збереження для елементарної комірки сітки. При цьому на сітці вводиться певна інтерполяція шуканого розв'язку і коефіцієнтів рівняння, змінюючи яку можна отримати різні різницеві схеми.

Пояснимо сказане на прикладі рівняння енергії. Запишемо різницеве рівняння, яке апроксимує інтегральне рівняння енергії:

$$\iint \left(\varepsilon + v^2 / 2\right) ds - pv dt = 0,$$

для прямокутного контуру. Приймемо таку апроксимацію окремих контурних інтегралів, які входять у це рівняння:

$$\int_{s_{i}}^{s_{i+1}} \varepsilon(s,t_{j}) ds = \varepsilon_{i+1/2}^{j} h,$$

$$\frac{1}{2} \int_{s_{i}}^{s_{i+1}} v^{2}(s,t_{j}) ds = \frac{1}{4} \Big[\left(v_{i+1}^{j} \right)^{2} + \left(v_{i}^{j} \right)^{2} \Big] h, \qquad (3.1)$$

$$\int_{t_{j}}^{t_{j+1}} p(s_{i},t) v(s_{i},t) dt = \frac{1}{2} \Big(p_{i+1/2}^{j+1} + p_{i-1/2}^{j+1} \Big) v_{i}^{j+1} \tau.$$

Тоді інтегральне рівняння енергії породжує таке різницеве дивергентне рівняння:

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+1} - \varepsilon_{i+1/2}^{j}}{\tau} + \frac{1}{4} \frac{\left(v_{i+1}^{j+1}\right)^{2} + \left(v_{i}^{j+1}\right)^{2} - \left(v_{i+1}^{j}\right)^{2} - \left(v_{i}^{j}\right)^{2}}{\tau} = -\frac{1}{2h} \left[\left(p_{i+3/2}^{j+1} + p_{i+1/2}^{j+1}\right) v_{i+1}^{j+1} - \left(p_{i+1/2}^{j+1} + p_{i-1/2}^{j+1}\right) v_{i}^{j+1} \right].$$

Скориставшись позначеннями (1.2)–(1.5) та формулою лінійної інтерполяції на рівномірній сітці сіткової функції тиску в цілу точку:

$$p_* = 0.5(p + p(-1)) = 0.5(p_{i+1/2}^j + p_{i-1/2}^j),$$

маємо:

$$\left[\varepsilon + 0, 25(v^2(+1) + v^2)\right]_t = -(\hat{p}_*\hat{v})_s.$$
(3.2)

Використовуючи аналогічно інші рівняння газодинаміки, можна побудувати, наприклад, таку різницеву схему:

$$v_{t} = -p_{\bar{s}}, \quad x_{t} = \hat{v}, \quad (1/\rho)_{t} = \hat{v}_{s},$$

$$\left[\epsilon + 0,25(v^{2}(+1) + v^{2})\right]_{t} = -(\hat{p}_{*}\hat{v})_{s}.$$
(3.3)

Змінюючи характер інтерполяції (3.1), отримаємо сімейство схем, причому всі вони будуть консервативними, тобто для них виконуватимуться сіткові аналоги законів збереження маси, імпульсу та енергії. Справді, наприклад, у схемі (3.3) рівняння енергії, що має дивергентний вигляд, фактично виражає різницевий закон збереження енергії для одного масового інтервалу h за один крок τ за часом. Сумування цього рівняння по сітці дає інтегральний сітковий закон збереження енергії.

Зупинимося детально на схемі (3.3) і з'ясуємо, як змінюється в ній внутрішня енергія. Перетворимо праву частину (3.2) таким чином

$$\left(\hat{p}_{*}\hat{v}\right)_{s} = \left[\left(p_{*} + \tau(p_{*})_{t}\right)\left(v^{(0,5)} + 0, 5\tau v_{t}\right)\right]_{s} = \left(p_{*}v^{(0,5)}\right)_{s} - \delta\tilde{E},$$

де $\delta \tilde{E} = -\tau (0, 5p_*v_t + \hat{v}(p_*)_t)_s$. В результаті приходимо до рівняння $\varepsilon_t = -pv_s^{(0,5)} + \delta \tilde{E}$.

Таким чином, у схемі (3.3) внутрішня енергія газу змінюється не тільки за рахунок роботи сил тиску, як це зумовлено фізичним змістом процесу. Додатковий внесок вносять фіктивні джерела $\delta \tilde{E}$, причина появи яких має різницеву природу і полягає в неузгодженості окремих рівнянь різницевої схеми. Величина дисбалансу $\delta \tilde{E}$ має порядок $O(\tau)$, практично не залежить від кроку сітки по масі hі, таким чином, може бути зменшена в даній схемі лише за рахунок подрібнення часового кроку сітки.

У схемі (3.3) дотримано закон збереження повної енергії (внутрішньої плюс кінетичної), проте порушений баланс теплової енергії. Такий дефект схеми здатний спотворити внутрішню енергію, температуру та інші функції. Він не менш небезпечний, ніж порушення закону збереження енергії у неконсервативних схемах, особливо в задачах, де процеси дуже залежать від температури, приміром, як електропровідність, теплопровідність тощо.

2.1.4. Повністю консервативні різницеві схеми

Ми переконалися, що розглянуті в попередньому пункті різницеві схеми адекватно описують поведінку неперервної газодинамічної моделі лише при нескінченному подрібненні кроку різни-

цевої сітки за часом, коли вплив дисбалансних членів сходить нанівець. На реальних сітках при кроці скінченної величини і задачах, розв'язки яких є функціями, що швидко змінюються в часі і просторі, такі різницеві схеми через наявність в них фіктивних джерел енергії можуть істотно спотворити явище, що вивчається.

Водночас обчислювальна практика змушує проводити розрахунки на грубих сітках. Під такими сітками розуміємо сітки, у яких крок не малий, наприклад, крок по часу має ту ж саму величину, що і τ_k в умові стійкості:

$$\tau_k = h/(\rho c),$$

де c – швидкість звуку, а τ_k – деяка критична величина часового кроку τ , тобто $\tau \le \tau_k$. При цьому все ж таки бажано, щоб точність розрахунків була не дуже малою.

Таким чином, виникає проблема побудови різницевих схем, які б забезпечували задану точність на реально грубих сітках.

Пошук таких схем будемо проводити в деякому вихідному сімействі різницевих схем, заданих на сітці

$$\omega = \left\{ s_i = ih, \ s_{i+1/2} = (i+1/2)h, \ i = 0, 1, \dots, N; \ t_j = j\tau, \ j = 0, 1, \dots \right\}.$$

Сіткові функції $v_i^j = v$, $x_i^j = x$, як і раніше, віднесені до вузлів (s_i, t_j) , функції $p_{i+1/2}^j = \overline{p}_i^j = p$, $\rho_{i+1/2}^j = \overline{\rho}_i^j = \rho$, $\varepsilon_{i+1/2}^j = \overline{\varepsilon}_i^j = \varepsilon$ – до напівцілих точок $(s_{i+1/2}, t_j)$. Тут риска над функціями означає зсув на півкроку по просторовому індексу.

Отже, розглянемо багатопараметричне сімейство різницевих схем, що апроксимують систему рівнянь газової динаміки у вигляді (1.10)–(1.13) з недивергентними рівняннями енергії:

$$v_t = -p_{\overline{s}}^{(\sigma_1)}, \qquad (4.1)$$

$$x_t = v^{(\sigma_2)}, \tag{4.2}$$

$$(1/\rho)_t = v_s^{(\sigma_3)},$$
 (4.3)

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_4)} v_s^{(\sigma_5)} \,. \tag{4.4}$$

Ваги $0 \le \sigma_k \le 1$, k = 1, 2, ..., 5, є параметрами схеми. Змінюючи їх, можна отримати різні схеми, від чисто явної ($\sigma_k = 0$) до чисто явної ($\sigma_k = 1$).

Виберемо із сімейства схем (4.1)-(4.4) ті, які правильно відображають енергетичні співвідношення навіть на грубих сітках.

З'ясуємо, чи має місце закон збереження енергії в схемах (4.1)–(4.4). Для цього помножимо рівняння (4.1) на $v^{(0.5)}$ і складемо отримане при цьому співвідношення $0,5(v^2)_t = -v^{(0.5)}p_{\overline{s}}^{(\sigma_1)}$ з рівнянням енергії (4.4), праву частину якого представимо з допомогою формули (1.8) у вигляді:

$$p^{(\sigma_4)}v_s^{(\sigma_5)} = \left(p^{(\sigma_1)} + (\sigma_4 - \sigma_1)\tau p_t\right) \left(v^{(0.5)} + (\sigma_5 - 0.5)\tau v_t\right)_s = p^{(\sigma_1)}v_s^{(0.5)} + \delta E,$$

$$\delta E = -\tau [(\sigma_5 - 0.5)p^{(\sigma_1)}v_{ts} - (\sigma_4 - \sigma_1)p_t v_s^{(\sigma_5)}].$$

Остаточно приходимо до рівності

$$(\varepsilon + 0, 5v^2)_t = -(p^{(\sigma_1)}(-1)v^{(0,5)})_s + \delta E$$
.

Це рівняння є різницевим аналогом закону збереження енергії на сітці для одного інтервалу h за крок τ . Як бачимо, в загальному випадку у схемах з недивергентними рівняннями енергії цей закон порушується за рахунок фіктивних джерел енергії δE , що мають чисто різницеве походження. Потужність цих джерел має на гладких розв'язках перший порядок по τ (величину $O(\tau)$) і практично не залежить від кроку сітки по масі h.

Із структури дисбалансу
 δE випливає, що в окремому випадку при

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \alpha , \quad \sigma_5 = 0,5 \tag{4.5}$$

(α – параметр) він тотожно дорівнює нулю.

Таким чином, при виконанні умов (4.5) різницева схема (4.1)–(4.4) має чудову властивість, аналогічну диференціальному випадку: недивергентне рівняння енергії (4.4) за допомогою тотожних алгебраїчних перетворень зводиться до дивергентного вигляду

$$(\varepsilon + 0, 5v^2)_t = -(p^{(\alpha)}(-1)v^{(0,5)})_s.$$
 (4.6)

Очевидно, в цьому випадку в схемі виконані як закон збереження повної енергії, так і баланси по окремих видах енергії (внутрішньої та кінетичної). Причому ця властивість не залежить від величини кроків різницевої сітки.

Цікаво відзначити, що за умови (4.5) рівняння (4.4) еквівалентне ще одній дивергентній формі

$$(\varepsilon + 0, 5v^2(+1))_t = -(p^{(\alpha)}v^{(0,5)})_s.$$
 (4.7)

Напівсума (4.6) і (4.7) дає ще один вигляд

$$\left(\varepsilon + 0, 25(v^2 + v^2(+1))\right)_t = -\left(p_*^{(\alpha)}v^{(0,5)}\right)_s.$$
(4.8)

У даній схемі справедливі три різновиди дивергентного рівняння енергії і тим самим *три різні форми закону збереження повної енергії*. Вони відрізняються способом запису кінетичної енергії і роботи сил тиску. Таким чином, кожна з цих форм визначає свою дискретну модель явища.

Відзначимо, що рівняння (4.6) і (4.7) через еквівалентність рівнянню (4.4) мають другий порядок апроксимації по простору. В той же час окремі члени цих рівнянь апроксимовані з першим порядком. За додаткової умови

$$\sigma_3 = \sigma_5, \qquad (4.9)$$

рівняння енергії з урахуванням рівняння неперервності (4.3) зводиться до такого недивергентного співвідношення:

$$\varepsilon_t + p^{(\alpha)} \left(1/\rho \right)_t = 0 , \qquad (4.10)$$

яке апроксимує диференціальне «ентропійне» рівняння енергії

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} (1/\rho) = 0.$$

Отже, за сформульованих умов (4.5), (4.9) схема (4.1)–(4.4) одночасно апроксимує різні види диференціальних рівнянь енергії, кожне з яких має безпосередній фізичний сенс.

У схемі виконаний і закон збереження імпульсу, що випливає із дивергентності рівняння руху (4.1), яке фактично виражає це для одного інтервалу сітки h з кроком за часом τ :

$$hv_i^{j+1} - hv_i^j = -(p_{i+1/2}^{(\alpha)} - p_{i-1/2}^{(\alpha)})\tau$$
.

Звернемося тепер до рівняння неперервності. У диференціальному випадку воно допускає різні форми запису, еквівалентні математично, але які мають різну фізичну інтерпретацію. Проаналізуємо з цього погляду дискретний випадок. Перетворимо праву частину рівняння (4.3):

$$v_s^{(\sigma_2)} = \left(v^{(\sigma_2)} + \left(\sigma_3 - \sigma_2\right)\tau v_t\right)_s = \left(x_t + \left(\sigma_3 - \sigma_2\right)\tau v_t\right)_s = x_{ts} + \delta V,$$

$$\delta V = \left(\sigma_3 - \sigma_2\right)\tau v_{ts}.$$

Звідси випливає, що лише за умови

$$\sigma_3 = \sigma_2, \qquad (4.11)$$

коли δV тотожно перетворюється на нуль, у схемі (4.1)–(4.4) виконано співвідношення

$$1/\rho = x_s, \qquad (4.12)$$

або, в індексній формі,

$$h/\rho_{i+1/2}^{j} = x_{i+1}^{j} - x_{i}^{j}$$
. (4.12*)

Рівність (4.12) апроксимує диференціальне рівняння неперервності у формі «закону зміни об'єму». Співвідношення (4.12*) наочно ілюструє сенс цього закону стосовно масового інтервалу сітки. Воно часто використовується в розрахунках замість рівняння неперервності (4.3). При невиконанні умови (4.11) зазначене різницеве співвідношення для об'єму порушується.

Зауважимо, що закон збереження маси в схемі (4.1)–(4.4), яка записана в лагранжевих масових координатах, виконується тривіальним чином. Сформульовані умови (4.5), (4.9), (4.11), які ми перепишемо ще раз у вигляді

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \alpha$$
, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0.5$, (4.13)

виділяють із загального сімейства схем (4.1)–(4.4) однопараметричне сімейство (вільний параметр α):

$$v_t = -p_{\overline{s}}^{(\alpha)}, \quad x_t = v^{(0,5)}, \quad (1/\rho)_t = v_s^{(0,5)}, \quad \varepsilon_t = -p^{(\alpha)}v_s^{(0,5)}.$$
 (4.14)

Як було показано вище, рівняння енергії в цій схемі шляхом рівносильних перетворень може бути зведене до недивергентного вигляду

$$\varepsilon_t + p^{(\alpha)} (1/\rho)_t = 0 ,$$

або до дивергентного вигляду (симетрична форма)

$$\left(\varepsilon+0,25(v^2+v^2(+1))\right)_t=-\left(p_*^{(\alpha)}v^{(0,5)}\right)_s,$$

а рівняння неперервності – до співвідношення

$$1/\rho = x_s$$

Для побудованого сімейства схем виконані не тільки різницеві аналоги основних законів збереження (маси, імпульсу і повної енергії), як для класичних консервативних схем, але також ряд додаткових сіткових співвідношень, необхідність яких продиктоване фізичними міркуваннями. Схеми такого типу були названі *повністю консервативними*.

Порушення умов повної консервативності (4.13) породжує різні дисбаланси, які на грубих сітках для негладких розв'язків досягають значної величини, і приводить до того, що різницева схема погано моделює в дискретному випадку процеси, що мають місце в неперервному середовищі.

2.1.5. Аналіз сімейства консервативних схем

Ми побудували повністю консервативну схему (4.14), виходячи з сімейства схем (4.1) – (4.4) з недивергентним рівнянням енергії. Подібні схеми ми можемо будувати і на основі схем з дивергентним рівнянням енергії (консервативних схем).

Виникає питання, чи не буде виходити в цьому випадку інший тип повністю консервативних схем.

Розглянемо таке багатопараметричне сімейство:

$$v_t = -p_{\overline{s}}^{(\sigma_1)}, \qquad (5.1)$$

$$x_t = v^{(\sigma_2)}, \tag{5.2}$$

$$(1/\rho)_t = v_s^{(\sigma_3)},$$
 (5.3)

$$\left(\varepsilon + 0, 25(v^2 + v^2(+1))\right)_t = -\left(p_*^{(\sigma_4)}v^{(\sigma_5)}\right)_s.$$
 (5.4)

Воно відрізняється від сімейства (4.1)–(4.4) рівнянням енергії, яке, в даному випадку, забезпечує виконання закону збереження енергії.

З'ясуємо, за яких умов в цій схемі дотримується баланс внутрішньої енергії. Для чого зведемо рівняння (5.4) до недивергентного вигляду:

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)} v_s^{(0,5)} + \delta \tilde{E} , \qquad (5.5)$$

$$\delta \tilde{E} = -\tau [(\sigma_5 - 0.5) p_*^{(\sigma_1)} v_t - (\sigma_1 - \sigma_4) (p_*)_t v^{(\sigma_5)}]_s.$$
(5.6)

Звідси випливає, що в консервативній схемі (5.1) - (5.4) при дотриманні закону збереження повної енергії порушений баланс внутрішньої енергії. Теплова енергія газу є тут змінюється не тільки за рахунок робіт сил тиску, але також через фіктивні джерела енергії. Дисбаланс $\delta \tilde{E}$, що виникає внаслідок неузгодженості окремих рівнянь схеми, має на гладких розв'язках порядок $O(\tau)$. Його структура аналогічна до структури дисбалансного члена δE п. 2.1.4, за винятком однієї обставини: величина $\delta \tilde{E}$, що задана формулою (5.6), має дивергентний характер, оскільки вона є різницевою похідною деякого виразу.

Умови, за яких $\delta \tilde{E}$ перетворюється на нуль, збігаються з умовами (4.5), що забезпечують рівність нулю члена δE . При цьому, як неважко перевірити, дивергентне рівняння (5.4) еквівалентне недивергентному рівнянню (4.14).

Подальші перетворення на шляху виділення з сімейства (5.1)–(5.4) повністю консервативних схем, аналогічні до тих, які були проведені в попередньому пункті. Вони знову приводять до умов (4.13) і тієї ж схеми (4.14).

Таким чином, однопараметричне сімейство схем (4.14) включає всі можливі повністю консервативні різницеві схеми, що апроксимують на заданому шаблоні систему одновимірних нестаціонарних рівнянь газової динаміки в лагранжевих масових координатах. На практиці, як правило, зручніше користуватися повністю консервативними схемами з недивергентними рівняннями.

Повністю консервативні схеми є звуженням класу звичайних консервативних схем. Очевидно, для отримання повністю кон-

сервативних схем можна використовувати ті ж прийоми, що і при побудові консервативних схем, наприклад, описаний вище інтегроінтерполяційний метод. При цьому слід дотримуватися такого формального правила відбору: *різницева схема повинна одночасно* апроксимувати різні види запису початкової диференціальної системи рівнянь, що мають безпосередній фізичний сенс. Іншими словами, окремі різницеві рівняння схеми мають бути сформульовані так, щоб вони допускали перетворення, аналогічні диференціальному випадку.

Побудоване однопараметричне сімейство повністю консервативних схем на гладких розв'язках має порядок апроксимації $O(h^2 + \tau)$. В окремому випадку при $\alpha = 0,5$ маємо єдину повністю консервативну різницеву схему другого порядку апроксимації.

Отже, усунувши невизначеність в початковому багатопараметричному сімействі схем, ми виділили такі значення вільних параметрів (ваг σ_k), за яких схема на довільній сітці задовольняє деякий комплекс розумних з фізичної точки зору вимог.

Зауважимо, що при побудові повністю консервативних схем було неявно введено ряд обмежень, що звузило початкове сімейство схем з потрібними властивостями: розглядався лише клас двошарових схем (що, втім, природно для систем рівнянь, які містять лише першу похідну за часом), а крім того, було виключено з розгляду схеми, в яких різницева апроксимація кінетичної енергії містить два або більше часових шарів.

2.1.6. Повністю консервативна схема для одновимірних циліндричних і сферичних задач

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь для одновимірних циліндричних і сферичних симетричних задач:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -r^n \frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(r^n v\right), \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial s} \left(r^n v\right),$$

де n = 0, 1, 2 для плоского, циліндричного і сферичного випадків відповідно. В області, що розглядається $\{0 \le s \le M, t > 0\}$, введемо нерівномірну сітку

$$\omega = \left\{ (s_i, t_j), (s_{i+1/2}, t_j), s_{i+1} = s_i + h_i, s_{i+1/2} = s_i + 0, 5h_i, t_{j+1} = t_j + \tau_j \right\},$$

$$s_0 = 0, s_N = M, t_0 = 0, i = 0, 1, \dots, N - 1, j = 0, 1, 2, \dots.$$

До цілих точок сітки (s_i, t_j) будемо відносити сіткові функції радіуса $r_i^j = r$ і швидкості $v_i^j = v$; до напівцілих $(s_{i+1/2}, t_j)$ – сіткові функції тисків $p_{i+1/2}^j = \overline{p}_i^j = \overline{p}$, густини $\rho_{i+1/2}^j = \overline{\rho}_i^j = \overline{\rho}$ і внутрішньої енергії $\varepsilon_{i+1/2}^j = \overline{\varepsilon}_i^j = \varepsilon$. Як і раніше, риски над функціями, що віднесені до напівцілих точок, будемо опускати.

Систему різницевих рівнянь записуємо так:

$$v_t = -Rp_{\bar{s}}^{(\alpha)}, \tag{6.1}$$

$$r_t = v^{(0,5)}, (6.2)$$

$$(1/\rho)_t = (Rv^{(0,5)})_s,$$
 (6.3)

$$\varepsilon_t = -p^{(\alpha)} \left(R \nu^{(0.5)} \right)_s, \tag{6.4}$$

де R = 1 для плоского випадку, $R = r^{(0,5)} - для$ випадку циліндричної симетрії, $R = (\hat{r}^2 + \hat{r}r + r^2)/3 - для$ випадку сферичної симетрії, $0 \le \alpha \le 1 -$ вільний параметр.

У формулі (6.1) через $y_{\bar{s}}$ позначена похідна назад на нерівномірній сітці від сіткової функції, визначеної в напівцілих точках:

$$y_{\bar{s}} = \frac{y_{i+1/2}^{j} - y_{i-1/2}^{j}}{0,5(h_{i} + h_{i-1})} = \frac{y - y(-1)}{\hbar}, \quad \hbar = \frac{1}{2}(h_{i} + h_{i-1}).$$

Різницева схема (6.1)–(6.4) апроксимує систему рівнянь газової динаміки з порядком $O(\tau + h^2)$, при $\alpha = 0,5$ порядок є $O(\tau^2 + h^2)$.

У схемі (6.1)-(6.4) виконуються локальні закони збереження. Закон збереження об'єму (закон збереження маси виконується автоматично):

$$\frac{h}{\rho_{i+1/2}^{j}} = r_{i+1}^{j} - r_{i}^{j} -$$
плоский випадок,
$$\frac{h}{\rho_{i+1/2}^{j}} = [(r_{i+1}^{j})^{2} - (r_{i}^{j})^{2}]/2 -$$
циліндричний випадок,

 $\frac{h}{\rho_{i+1/2}^{j}} = [(r_{i+1}^{j})^{3} - (r_{i}^{j})^{3}]/3$ – сферичний випадок.

Нагадаємо, що маса віднесена до одного радіана у циліндричному випадку і до одиниці «тілесного» кута – у сферичному.

Закон збереження енергії виконується у вигляді:

$$\left(\varepsilon + \frac{1}{4} \left(v^2 + v^2(+1)\right)\right)_t = -\left(p_*^{(\alpha)} R v^{(0.5)}\right)_s,$$

де $p_* = \frac{h_i p_{i-1/2}^j + h_{i-1} p_{i+1/2}^j}{h_i + h_{i-1}}$ – інтерполяція сіткової функції тиску в

цілу точку для нерівномірної сітки.

Контрольні питання

- 1. Як здійснюється перехід від диференціальних рівнянь до різницевої задачі?
- Означення консервативної різницевої схеми. Чим відрізняються консервативні різницеві схеми від повністю консервативних різницевих схем?
- 3. Суть інтегро-інтерполяційного методу побудови консервативних різницевих схем.
- 4. Дивергентні та недивергентні форми запису диференціальних рівнянь і різницевих схем.
- 5. У чому особливість побудови повністю консервативних різницевих схем для одновимірних циліндричних і сферичних задач?
- 6. Побудувати різницеву схему для рівнянь газової динаміки в безіндексній формі.
- 7. Способи апроксимації диференціальних виразів.

2.2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАР-НИХ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ АЕРОДИНАМІКИ В ЛАГРАНЖЕВИХ КООРДИНАТАХ

2.2.1. Система диференціальних рівнянь газодинаміки в лагранжевих змінних та її властивості

Загальний вигляд системи рівнянь. Загальна система рівнянь газодинаміки за відсутності дисипативних процесів, зовнішніх сил та джерел може бути записана у вигляді:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \qquad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad}(p), \tag{1.2}$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \operatorname{div}(\mathbf{v}), \qquad (1.3)$$

$$p = P(p,T), \quad \varepsilon = E(p,T).$$
 (1.4)

У рівняннях (1.1)-(1.4) похідна за часом. Розглянемо двовимірні плоскі течії у декартових змінних *x*, *y*. Будемо також вважати, що вектор швидкості **v** має дві компоненти *u* та *v*. Тоді рівняння (1.1)-(1.4) можна переписати таким чином:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \qquad (1.5)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x},\tag{1.6}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y},\tag{1.7}$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \tag{1.8}$$

Повністю консервативні різницеві схеми для двовимірного випадку будемо будувати у лагранжевих змінних. Однак, на відміну від одновимірного випадку, неможливо ввести лагранжеві масові координати; тому як лагранжеві змінні оберемо ейлерові координати початкового положення частинок при t = 0:

$$a = x(0), \quad b = y(0).$$
 (1.9)

Щоб записати систему рівнянь (1.5)–(1.8) у лагранжевих змінних, необхідно виразити похідні $\partial/\partial x$ та $\partial/\partial y$ через $\partial/\partial a$ та $\partial/\partial b$. Це робиться за стандартними формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (f, y)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial (f, y)}{\partial (a, b)},$$
(1.10)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x, f)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(x, f)}{\partial(a, b)}, \qquad (1.11)$$

де використано позначення:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial f}{\partial\xi} \frac{\partial g}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\eta} \frac{\partial g}{\partial\xi}, \qquad (1.12)$$

а Δ – якобіан перетворення просторових змінних *x*, *y* до *a*, *b*:

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}.$$
 (1.13)

З урахуванням наведеного вище, система (1.5)–(1.8) набуває такої форми:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial(p, y)}{\partial(a, b)}, \qquad (1.14)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial(x, p)}{\partial(a, b)},$$
(1.15)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho}{\Delta} \left[\frac{\partial(u, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(a, b)} \right], \quad (1.16)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{p}{\Delta} \left[\frac{\partial(u, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(a, b)} \right].$$
(1.17)

Властивості еквівалентності системи диференціальних рівнянь. Відомо [9], що повністю консервативні схеми формально задовольняють перетворення еквівалентності, аналогічно до тих, які мають місце для диференційного випадку. Тому дослідимо, які

співвідношення еквівалентності мають місце у двовимірному випадку для системи рівнянь (1.14)–(1.17).

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись у справедливості рівності

$$\frac{\partial(u, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial \Delta}{\partial t},$$
(1.18)

зіставлення якої з рівнянням неперервності дає

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial T},\qquad(1.19)$$

звідки випливає рівність

$$\rho\Delta = \rho_0 \Delta_0 = const, \qquad (1.20)$$

де ρ_0 , Δ_0 – значення величин ρ та Δ в початковий момент часу t = 0. Тому рівняння руху (1.14), (1.15) та енергії (1.17) можна переписати у вигляді

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(p, y)}{\partial(a, b)} = -\left[\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right],\tag{1.21}$$

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(x, p)}{\partial(a, b)} = -\left[\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\right],\tag{1.22}$$

$$\rho_{0}\Delta_{0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -p\left[\frac{\partial(u,y)}{\partial(a,b)} + \frac{\partial(x,v)}{\partial(a,b)}\right] = \\ = -p\left[\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial a}\right)\right]. \quad (1.23)$$

Крім того, для цих рівнянь існує дивергентний запис виразів, які стоять у квадратних дужках у правих частинах (1.21)–(1.23):

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial a} \left(p \frac{\partial y}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(p \frac{\partial y}{\partial a}\right)\right], \quad (1.21^*)$$

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial a} \left(p \frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(p \frac{\partial x}{\partial a}\right)\right], \qquad (1.22^*)$$

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p\left[\frac{\partial}{\partial a} \left(u \frac{\partial y}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(u \frac{\partial y}{\partial a}\right)\right] -$$

$$-p\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(v\frac{\partial x}{\partial a}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(v\frac{\partial x}{\partial b}\right)\right]. \tag{1.23*}$$

Інтегрування рівнянь руху по лагранжевих змінних a, b безпосередньо призводить до інтегрального закону збереження імпульсу. Комбінуючи співвідношення (1.19) і (1.20), можна переписати рівняння неперервності у формі

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$
 (1.24)

Як відомо, якобіан перетворення Δ має сенс співвідношення елементів площ на площинах, пов'язаних цим перетворенням. Тому рівняння (1.24) можна розглядати як узагальнення «закону зміни об'єму» для випадку двох змінних. Після інтегрування по *t* та змінних *a*, *b* (1.24) дає інтегральний вираз цього закону.

Зауважимо також, що, порівнюючи (1.17), (1.18), (1.20) і (1.24), можна переписати рівняння енергії в одній із форм:

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial \Delta}{\partial t} \tag{1.25}$$

або

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right). \tag{1.26}$$

Крім того, недивергентне рівняння енергії (1.23), яке виражає баланс внутрішньої енергії, після сумування з рівняннями руху (1.21*), (1.22*), що попередньо помножені на складові швидкості u і v відповідно, може бути приведене до вигляду:

$$\rho_{0}\Delta_{0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{u^{2} + v^{2}}{2}\right) = \\ = -\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(pu\frac{\partial y}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(pu\frac{\partial y}{\partial a}\right)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial b}\left(pv\frac{\partial x}{\partial a}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(pv\frac{\partial x}{\partial b}\right)\right]\right\}. (1.27)$$

Це дивергентне рівняння являє собою запис закону збереження повної енергії.

До системи рівнянь руху, неперервності та енергії слід приєднати також рівняння, які визначають траєкторії частинок:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v.$$
 (1.28)

Наведені вище форми запису двовимірних диференціальних рівнянь аеродинаміки еквівалентні та зводяться одне до одного за допомогою рівносильних перетворень, так само, як це має місце в одновимірному випадку. Наша мета полягає у визначенні класу різницевих схем для двовимірних нестаціонарних рівнянь аеродинаміки в лагранжевих змінних, для яких би виконувались аналогічні співвідношення еквівалентності. Очевидно, це забезпечить для шуканого класу схем виконання властивості повної консервативності.

2.2.2. Сімейство несиметричних різницевих схем

Різницева сітка та деякі позначення. Будемо розглядати розв'язок сформульованої вище системи рівнянь в прямокутній просторовій області $D: \{0 \le a \le l_a, 0 \le b \le l_b\}$ при t > 0. Введемо в D сітку, для простоти рівномірну по кожному напрямку:

$$\omega_h = \left\{ (a_i, b_i) : a_i = a_{i-1} + h_a, b_j = b_{j-1} + h_b \right\},\a_0 = 0, \ i = 1, \dots, N_a, \ b_0 = 0, \ j = 1, \dots, N_b.$$

Сітку за часовою змінною t визначимо звичайним чином:

$$\omega_t = \{t_k : t_{k+1} = t_k + \tau, t_0 = 0, k = 0, 1, ...\}.$$

Систему диференціальних рівнянь газодинаміки будемо апроксимувати на просторово-часовій сітці $\omega = \omega_h \times \omega_t$. Сіткові функції компонент швидкості та ейлеревих змінних будемо відносити до вузлів сітки (i, j): x_{ij}^k , y_{ij}^k , u_{ij}^k , v_{ij}^k , а сіткові термодинамічні функції до «півцілих» точок $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, які являють собою перетин діагоналей прямокутних комірок на площині (a,b): $p_{i+1/2,j+1/2}^k$, $\rho_{i+1/2,j+1/2}^k$, $\varepsilon_{i+1/2,j+1/2}^k$, $T_{i+1/2,j+1/2}^k$ (див. рис. 2.1).

Зазначимо, що різницева сітка ω введена у площині лагранжевих змінних a, b (початкових положень частинок). З часом через переміщення частинок середовища картина розміщення вузлів сітки в ейлеревому (фізичному) просторі спотворюється (рис. 2.1, б). Однак у змінних Лагранжа, де будується різницева схема, сітка не змінює свою конфігурацію.



У подальшому подібно до одновимірного випадку будемо використовувати для сіткових функцій компактні позначення без індексів:

$$y(a_{i},b_{j},t_{k}) = y_{ij}^{k} = y,$$

$$y(a_{i+1/2},b_{j+1/2},t_{k}) = y_{i+1/2,j+1/2}^{k} = \overline{y},$$

$$y(a_{i},b_{j},t_{k+1}) = y_{ij}^{k+1} = \hat{y},$$

$$y(a_{i\pm 1},b_{j\pm 1},t_{k}) = y_{i\pm 1,j\pm 1}^{k} = y(\pm 1_{1},\pm 1_{2}),$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y.$$
(2.1)

Для різницевого диференціального рівняння будемо також застосовувати позначення без індексів

$$y_{a} = \frac{y_{i+1,j}^{k} - y_{ij}^{k}}{h_{a}} = \frac{y(+1_{1}) - y}{h_{a}},$$

$$y_{\overline{a}} = \frac{y_{i,j}^{k} - y_{i-1,j}^{k}}{h_{a}} = \frac{y - y(-1_{1})}{h_{a}},$$

$$y_{t} = \frac{y_{i,j}^{k+1} - y_{i,j}^{k}}{\tau} = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$

(2.2)

Аналогічно визначаються похідні за змінною $b: y_b$ та $y_{\bar{b}}$.

Несиметричні схеми та їхні властивості. Побудова повністю консервативних схем для одновимірного випадку була виконана в § 2.1. на основі «методу ваг», за допомогою якого підбиралась потрібна інтерполяція за часом правих частин різницевих рівнянь газодинаміки, які містять просторові похідні. У двовимірному випадку, окрім цього, грає роль також правильний підбір просторової інтерполяції сіткових функцій.

Для більшої наочності покладемо рівною нулю одну з компонент швидкості $v \equiv 0$; більшість принципових питань можна розглянути на цьому спрощеному прикладі. Зауважимо, що одним із принципів побудови схем є така вимога: двовимірна схема в окремому випадку одновимірної течії (за змінною x або y) повинна перетворюватися до відомих консервативних одновимірних схем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь газової динаміки при $v \equiv 0$ у такій формі:

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\left[\frac{\partial p}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a}\right],\tag{2.3}$$

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{p} \right) = \left[\frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} \right], \tag{2.4}$$

$$\rho_0 \Delta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left[\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right].$$
 (2.5)
Використовуючи введені вище позначення, апроксимуємо рівняння (2.3)–(2.5) такою різницевою схемою (схема 1):

$$mu_{t} = L_{1}\left(p^{(\sigma_{1})}, y^{(\sigma_{2})}\right) = -\left[p_{\bar{a}}^{(\sigma_{1})}y_{b}^{(\sigma_{2})} - p_{\bar{b}}^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}\right], \qquad (2.6)$$

$$m\left(\frac{1}{p}\right)_{t} = \Delta_{1}\left(u, y^{(\sigma_{2})}\right) = \left[u_{a}^{(0,5)}y_{b}^{(\sigma_{2})}(+1_{1}) - u_{b}^{(0,5)}y_{a}^{(\sigma_{2})}(+1_{2})\right], \quad (2.7)$$

$$m\varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)}\Delta_1(u, y^{(\sigma_2)}).$$
(2.8)

Шаблони для різницевих операторів L_1 та Δ_1 показані на рис. 2.2 Величини $0 \le \sigma_1, \sigma_2 \le 1$ – параметри схеми. Як було сказано вище,



Рис. 2.2

для одновимірних течій, коли всі функції залежать лише від однієї просторової змінної x (тоді $y \equiv b$) або y (тоді $x \equiv a$), різницева схема (2.6)–(2.8) повинна вироджуватись в одновимірну консервативну схему. Відповідно до цього вага σ_1 тиску p у рівняннях (2.6) та (2.8) береться однаковою, а вага швидкості u в операторі Δ_1 покладена рівною 0,5. Вага σ_2 сіткової функції y поки що залишається вільною.

Величина *m* апроксимує $p_0\Delta_0$. Ця величина має сенс маси різницевої комірки, віднесеної до її площі в початковий момент. Відповідно до (1.20) вважаємо, що маса різницевих комірок сітки не змінюється з часом. Тому закон збереження маси у дискретній моделі, яку описує різницева схема 1, виконується автоматично.

Зазначимо, що величина m у випадку нерівномірної сітки залежить від номера вузла $m_{i,i}$. Проведемо деякі викладки з метою

впевнитись в тому, що рівняння схеми (2.6)–(2.8) задовольняють співвідношення еквівалентності, які згадувалися вище.

Додаючи та віднімаючи із правої частини (2.6) доданок $p_a^{(\sigma_1)}y_b^{(\sigma_2)}$ та скориставшись однією з формул різницевого диференціювання множення

$$(fg)_a = f(+1_1)g_a + gf_a, \quad (fg)_{\bar{a}} = f(-1_1)g_{\bar{a}} + gf_{\bar{a}},$$
 (2.9)

можна перетворити це рівняння до дивергентної форми

$$mu_{t} = -\left[\left(p^{(\sigma_{1})}y_{b}^{(\sigma_{2})}(+1_{1})\right)_{\overline{a}} - \left(p^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}(+1_{2})\right)_{\overline{b}}\right].$$
 (2.10)

Отримане співвідношення є різницевим аналогом (1.21^*) і забезпечує виконання закону збереження імпульсу (у проекції на вісь x) у схемі 1.

Не важко переконатися, що рівняння енергії (2.8) також можна привести до такого вигляду

$$me_{t} = -p^{(\sigma_{1})} \left[\left(u^{(0,5)} y_{b}^{(\sigma_{2})} \right)_{a} - \left(u^{(0,5)} y_{a}^{(\sigma_{2})} \right)_{b} \right], \qquad (2.11)$$

який є різницевим аналогом (1.23*) при $v \equiv 0$. Аналогічне перетворення можна здійснити і в правій частині рівняння неперервності (2.7).

Помножимо тепер рівняння руху (2.6) на $u^{(0,5)} = 0,5(\hat{u}+u)$. Отримаємо різницевий аналог балансу кінетичної енергії:

$$m(u^{2}/2)_{t} = -\left[u^{(0,5)}p_{\bar{a}}^{(\sigma_{1})}y_{b}^{(\sigma_{2})} - u^{(0,5)}p_{\bar{b}}^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}\right].$$
 (2.12)

Додаючи отриману рівність до рівняння енергії (2.8) та використовуючи формули різницевого диференціювання множення (2.9), переходимо до рівняння

$$m(\varepsilon + u^2/2)_t = -\left[\left(p^{(\sigma_1)}(-1_1)u^{(0,5)}y_b^{(\sigma_2)}\right)_a - \left(p^{(\sigma_1)}(-1_2)u^{(0,5)}y_a^{(\sigma_2)}\right)_b\right].$$
(2.13)

Це рівняння апроксимує дивергентне диференціальне рівняння (1.27) та виражає різницевий аналог закону збереження повної енергії для дискретної моделі.

Зазначимо також, що з (2.7) та (2.8) очевидним чином випливає рівність

$$\varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)} \left(\frac{1}{p}\right)_t, \qquad (2.14)$$

що апроксимує недивергентне диференціальне рівняння енергії (1.26).

Отже, у схемі 1 просторові та часові інтерполяції окремих членів різницевих рівнянь підібрані таким чином, що для цієї схеми виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії (закон збереження маси виконується автоматично), а також баланс внутрішньої енергії у формулах (2.8), (2.11) та (2.14).

Схема 1 є несиметричною та має перший порядок апроксимації $O(\tau + h_a + h_b)$ за часом та простором. Зокрема, при визначенні повної енергії різницевої комірки у цій схемі $\varepsilon + u^2/2$ (див. (2.13)) кінетична енергія визначається швидкістю лише для одного з чотирьох вузлів (кутів комірки), а саме нижнього лівого (i, j) (див. рис. 2.1).

Подібно до схеми 1 можна побудувати ще три схеми, послідовно повертаючи шаблон на кут 90°. Всі ці схеми також є несиметричними, кінетична енергія комірки сітки в них визначається швидкістю одного з чотирьох кутових вузлів.

Описані схеми є двовимірними аналогами несиметричних одновимірних схем, в яких так само кінетична енергія одновимірної комірки сітки – масового інтервалу визначається швидкістю одного з його кінців.

Якщо припустити, що розглянута течія є одновимірною, то несиметричні двовимірні схеми для цього випадку вироджуються у відповідні одновимірні повністю консервативні схеми.

Випишемо згадані несиметричні схеми, а також відповідні їм дивергентні види запису рівняння енергії, вважаючи, що $v \equiv 0$.

Схема 2 (див. шаблон на рис. 2.3):

$$m(-1_{2})u_{t} = L_{2}\left(p^{(\sigma_{1})}, y^{(\sigma_{2})}\right) = -\left[p_{\overline{a}}^{(\sigma_{1})}(-1_{2})y_{b}^{(\sigma_{2})} - p_{\overline{b}}^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}\right],$$
$$m\left(\frac{1}{p}\right)_{t} = \Delta_{2}\left(u, y^{(\sigma_{2})}\right) = \left[u_{a}^{(0,5)}(+1_{2})y_{b}^{(\sigma_{2})}(+1_{1}) - u_{b}^{(0,5)}y_{a}^{(\sigma_{2})}\right],$$

$$m\varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)}\Delta_2(u, y^{(\sigma_2)}).$$

Дивергентний вид рівняння енергії:



$$m\left(\varepsilon + \frac{u^{2}(+1_{2})}{2}\right)_{t} = -\left[\left(p^{(\sigma_{1})}(-1_{1})y_{b}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}(+1_{2})\right)_{a} - \left(p^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}\right)_{b}\right]_{t}$$

Схема 3 (див. шаблон на рис.2.4):

$$m(-1_1, -1_2)u_t = L_3\left(p^{(\sigma_1)}, y^{(\sigma_2)}\right) = -\left[p_{\overline{a}}^{(\sigma_1)}(-1_2)y_{\overline{b}}^{(\sigma_2)} - p_{\overline{b}}^{(\sigma_1)}(-1_2)y_{\overline{a}}^{(\sigma_2)}\right],$$

$$m\left(\frac{1}{p}\right)_t = \Delta_3\left(u, y^{(\sigma_2)}\right) = \left[u_a^{(0,5)}(+1_2)y_b^{(\sigma_2)} - u_b^{(0,5)}(+1_1)y_a^{(\sigma_2)}\right],$$

$$m\varepsilon_t = -p^{(\sigma_1)}\Delta_3\left(u, y^{(\sigma_2)}\right)$$

Дивергентний вид рівняння енергії:

$$m\left(\varepsilon + \frac{u^{2}(+1_{1}, +1_{2})}{2}\right)_{t} = -\left[\left(p^{(\sigma_{1})}y_{b}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}(+1_{2})\right)_{a} - \left(p^{(\sigma_{1})}y_{a}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}(+1_{1})\right)_{b}\right].$$





Дивергентний вид рівняння енергії:

$$m\left(\varepsilon + \frac{u^{2}(+1_{1})}{2}\right)_{t} = -\left[\left(p^{(\sigma_{1})}y_{b}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}\right)_{a} - \left(p^{(\sigma_{1})}(-1_{2})y_{a}^{(\sigma_{2})}u^{(0,5)}(+1_{1})\right)_{b}\right].$$

Зазначимо, що для кожної із схем 2-4 має місце запис рівнянь руху та енергії у формі, подібній до (2.10) та (2.11) для схе-

ми 1 з дивергентною правою частиною. Крім того, для всіх цих схем рівняння енергії записується також у формі (2.14).

Зауважимо також, що в кожній із схем 1-4 рівняння руху записано для швидкості u у вузлі (i, j). Тому величина m, яка входить до цього рівняння, віднесена у кожній схемі до відповідної комірки, що прилягає до вузла (i, j).

2.2.3. Аналіз закону збереження об'єму для несиметричних схем

У загальному випадку за наявності другої компоненти швидкості *v* ≠ 0 сімейство несиметричних схем для рівнянь газодинаміки можна записати таким чином:

$$mu_t = L_n\left(p^{(\sigma_1)}, y^{(\sigma_2)}\right), \qquad (3.1)$$

$$nv_t = -L_l(p^{(\sigma_1)}, x^{(\sigma_3)}),$$
 (3.2)

$$m\left(\frac{1}{p}\right)_{l} = \Delta_{n}\left(u, y^{(\sigma_{2})}\right) - \Delta_{l}\left(v, x^{(\sigma_{3})}\right), \qquad (3.3)$$

$$m\varepsilon_{l} = -p^{(\sigma_{1})} \left[\Delta_{n} \left(u, y^{(\sigma_{2})} \right) - \Delta_{l} \left(v, x^{(\sigma_{3})} \right) \right], \qquad (3.4)$$

$$x_t = u^{(0,5)}, \quad y_t = u^{(0,5)},$$
 (3.5)

$$p = P(\rho, T), \quad \varepsilon = E(\rho, T),$$
 (3.6)

де n, l = 1, 2, 3, 4, причому допускаються довільні поєднання значень n і l, а $0 \le \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \le 1$ – параметри схеми. При запису схеми (3.1) - (3.6) було зроблено припущення про рівномірність сітки m = const. На підставі того, що у рівняння руху, неперервності та енергії члени з компонентами швидкості u та v входять у вигляді окремих доданків, властивості схеми при довільних n та l аналогічні властивостям схем 1-4. Отже, в цій схемі виконано закон збереження повної енергії, а недивергентне рівняння (3.4) можна привести до відповідної дивергентної форми запису.

З'ясуємо щодо закону збереження об'єму в схемі (3.1)-(3.6). Розглянемо це питання на прикладі конкретної схеми:

 $n = 1, l = 3, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$. Аналіз інших схем виконується так само і приводить до аналогічного результату.

Перетворимо для обраної схеми праву частину рівняння неперервності, скориставшись рівнянням (3.5) і правилом різницевого диференціювання по часу множення:

$$(fg)_t = \hat{f}g_t + gf_t \,.$$

Маємо рівняння

$$\Delta_{1}(u, \hat{y}) - \Delta_{3}(v, x) = \left[u_{a}^{(0,5)} y_{b}(+1_{1}) - u_{b}^{(0,5)} \hat{y}_{a}(+1_{2}) \right] - \left[v_{a}^{(0,5)}(+1_{2}) x_{b} - v_{b}^{(0,5)}(+1_{1}) x_{a} \right] = \left[x_{af} \hat{y}_{b}(+1_{1}) - x_{bt} \hat{y}_{a}(+1_{2}) \right] - \left[y_{at}(+1_{2}) x_{b} - y_{bt}(+1_{1}) x_{a} \right] = \left[x_{a} y_{b}(+1_{1}) - x_{b} y_{a}(+1_{2}) \right]_{t} = d_{t}, \quad (3.7)$$

де

$$d = x_a y_b(+1_1) - x_b y_a(+1_2).$$
(3.8)

Таким чином, рівняння неперервності (3.3) при обраних значеннях параметрів n, l, σ_2, σ_3 перетворюється до вигляду

$$m\left(\frac{1}{p}\right)_t = d_t, \qquad (3.9)$$

який є різницевим аналогом диференціального рівняння (1.24). Тому функція d повинна апроксимувати якобіан $\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}$.

Величина якобіана перетворення, як відомо, являє собою відношення елементів площ на площинах (x, y) та (a, b). Природно вимагати, щоб різницева апроксимація якобіана дорівнювала відношенню площі комірки S(t) (див. мал. 6) до її площі у початковий момент $S(0) = h_a h_b$.

Розглядаючи сторони комірки *ABCD* як вектори (наприклад, сторону *AB* як вектор із проекціями $(h_b x_b, h_b y_b)$, сторону *BC* як вектор із проекціями $(h_a x_a(+1_2), h_a y_a(+1_2))$ і т. д.) і використовуючи формули векторного аналізу, можна записати площу комірки *S* за допомогою однієї з таких формул:

$$S = S_{1} + S_{2} =$$

$$= \frac{h_{a}h_{b}}{2} | (x_{a}y_{b}(+1_{1}) - x_{b}(+1_{1})y_{a}) + (x_{a}(+1_{2})y_{b} - x_{b}y_{a}(+1_{2})) | (3.10)$$

$$S = S_{3} + S_{4} =$$

$$= \frac{h_{a}h_{b}}{2} | (x_{a}y_{b} - x_{b}y_{a}) + (x_{a}(+1_{2})y_{b}(+1_{1}) - x_{b}(+1_{1})y_{a}(+1_{2})) | . (3.11)$$

Як видно із зіставлення (3.8) з цими формулами, має місце співвідношення

$$d \neq \frac{S(t)}{S(0)} = \frac{S}{h_a h_b}, \qquad (3.12)$$

яке означає, що закон збереження об'єму у схемі (3.1) - (3.6) порушений. Таким чином, для розглянутого сімейства несиметричних схем з порядком апроксимації $O(\tau + h_a + h_b)$ виконані основні закони збереження (маси, імпульсу, енергії), а також співвідношення, яке виражає баланс внутрішньої енергії, але порушений закон збереження об'єму. Закон збереження об'єму виконується для симетричних різницевих схем [9, с. 372].

Контрольні питання

- 1. Запишіть лагранжеву похідну за часом.
- 2. Чому несиметрична схема (3.1)–(3.6) має порядок апроксимації $O(\tau + h_a + h_b)$?
- 3. Принципи побудови повністю консервативних схем газової динаміки у двовимірному випадку.
- 4. Сформулюйте основні властивості несиметричних схем.
- 5. Чи виконуються закони збереження в схемі (3.1)-(3.6)?

2.3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОВИМІР-НИХ ЗАДАЧ АЕРОДИНАМІКИ

2.3.1. Поняття економічної різницевої схеми

Однією з основних проблем теорії чисельних методів є пошук економічних обчислювальних алгоритмів, що вимагають мінімального машинного часу для отримання наближеного розв'язку з будь-якою заданою точністю. Особливої гостроти це питання набуває при чисельному розв'язанні багатовимірних задач аеродинаміки (див. [5, 6]).

З'ясуємо спочатку поняття економічної різницевої схеми на прикладі. Розглянемо *p*-мірне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu , \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_{\alpha}u , \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial^{2}u}{\partial x_{\alpha}^{2}}, \quad (1.1)$$

$$\in G , \quad t \in (0, t_{0}], \quad u|_{\Gamma} = 0 , \quad u(x, 0) = u_{0}(x) .$$

Нехай $G = G_{0p} - p$ -мірний куб, $(0 \le x_{\alpha} \le 1, \alpha = 1, 2, ..., p)$, $\overline{\omega}_h = \{(ih_1, ..., ih_p) \in G\}$ — кубічна сітка з кроком h по всім x_{α} , $\alpha = 1, ..., p$, $\overline{\omega}_{\tau}$ — сітка з кроком $\tau = t_0/n_0$ на відрізку $0 \le t \le t_0$.

Оператор $L_{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}$ апроксимуємо різницевим оператором $\Lambda_{\alpha} = y_{\bar{x}_{\alpha}x_{\alpha}}$; отже $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_{\alpha}$. Напишемо двошарову схему з вагами

$$y_{t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y), \quad x \in \omega_{h}, \quad 0 \le t = n\tau < t_{0}, \quad (1.2)$$
$$y\Big|_{\gamma_{h}} = 0, \quad y(x, 0) = u_{0}(x).$$

Схема (1.2) стійка за початковими даними при

$$\sigma \ge \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4p\tau} = \sigma_0$$

Покладаючи $\sigma = 0$, отримаємо явну схему

$$y_t = \Lambda y$$
 also $\hat{y} = y + \tau \Lambda y$, (1.3)

х

стійку за умови $\tau \le 0.5 h^2 / p$.

Якщо (1.1) – рівняння із змінними коефіцієнтами, тобто

$$L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad 0 < k_{\alpha}(x,t) \le c_{2},$$

то $\Lambda_{\alpha} y = (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \Lambda = \sum_{i}^{p} \Lambda_{\alpha}, 0 < a_{\alpha} \leq c_{2}$ і явна схема (1.3) стійка

при $\tau \leq 0.5 h^2 / (pc_2)$.

Звідси видно, що допустимий крок т для явної схеми треба зменшувати із зростанням розмірності простору і зростанням максимуму коефіцієнта теплопровідності. Остання вимога є особливо жорсткою у разі задач з коефіцієнтами, що можуть значно змінюватися.

З цієї причини використання явних схем для розв'язання не тільки багатовимірних, але і одновимірних (p = 1) задач часто виявляється нелопільним.

З іншого боку, явна схема має ту перевагу, що розв'язок $\hat{y} = y_{n+1}$ на новому часовому шарі $t_{n+1} = t_n + \tau$ знаходиться за явною формулою (1.3) і при цьому в кожному вузлі сітки ω, виконується фіксована кількість дій, тож загальне число арифметичних операцій при переході з шару на шар пропорційно числу вузлів сітки ω_h (тобто є величиною $O(1/h^p)$).

Розглянемо тепер чисто неявну схему $\sigma = 1$. Вона стійка при будь-яких τ і *h*. Для визначення y^{n+1} маємо задачу

$$y^{n+1} - \tau \Lambda y^{n+1} = y^n$$
, $y^{n+1}\Big|_{\gamma_h} = 0$, $y(x,0) = u_0(x)$.

Для розв'язання цієї системи $1/h^p$ рівнянь, наприклад, методом виключення Гауса потрібно здійснити O(1/h^{3p-2}) дій (якщо врахувати при цьому спеціальний вид матриці $E - \tau \Lambda$).

Отже, явна схема вимагає невеликого числа дій, але її стійкість має місце при достатньо малому т; неявна схема безумовно стійка, але вона вимагає великої кількості арифметичних дій.

Виникає питання: чи можна побудувати схему, що поєднує найкращі якості явної і неявної схем, тобто

1) безумовно стійку (як неявна схема),

2) що вимагає для переходу з часового шару на шар числа арифметичних дій Q, пропорційного числу вузлів сітки ω_h , отже, $Q = O(1/h^p)$ (як і для явної схеми).

Тоді на вузол сітки припадає число дій, що не залежить від кількості вузлів. Такі схеми прийнято називати *економічними*.

2.3.2. Економічні схеми для систем рівнянь параболічного і гіперболічного типів

Нехай $\overline{G} = \{0 \le x_{\alpha} \le l_{\alpha}, \alpha = 1, 2, ..., p\}$ – це *р*-мірний паралелепіпед, а $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T], Q_T = G \times (0 \le t \le T)$. Позначимо через $k = (k_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta}^{sm}), s, m = 1, ..., n$, клітинну матрицю $p \times p$ з клітками $n \times n$, що задовольняє умову симетрії

$$k_{\alpha\beta}^{sm}(x,t) = k_{\beta\alpha}^{ms}(x,t)$$
 для всіх $(x,t) \in \overline{Q}_T$ (2.1)

та умову позитивної визначеності

$$c_{1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{p}(\xi_{\alpha}^{s})^{2} \leq \sum_{s,m=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}k_{\alpha\beta}^{sm}(x,t)\xi_{\alpha}^{s}\xi_{\beta}^{m} \leq c_{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{p}(\xi_{\alpha}^{s})^{2}, \qquad (2.2)$$

де c_1 і c_2 – позитивні сталі, $\xi_{\alpha} = (\xi_{\alpha}^1, ..., \xi_{\alpha}^s, ..., \xi_{\alpha}^n)$ – довільний дійсний вектор. Позитивна визначеність матриці $k \in$ умовою сильної еліптичності оператора

$$L\boldsymbol{u} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} L_{\alpha\beta}\boldsymbol{u} , \quad L_{\alpha\beta}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (k_{\alpha\beta}(x,t) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_{\beta}}) , \quad (2.3)$$

де $u = (u^1, ..., u^s, ..., u^n)$ – вектор розмірності *n*, тобто умовою виконання нерівності

$$c_1(-L^{(0)}u,u) \le (-Lu,u),$$
 (2.4)

де

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{s=1}^n \int_G u^s(x) v^s(x) dx, \quad dx = dx_1 \dots dx_p,$$

 $L^{(0)}$ $\boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{u} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_{\alpha}^2}$, \boldsymbol{u} – довільна достатньо гладка вектор-функція,

що дорівнює нулю на межі Г.

Розглянемо таке завдання. Потрібно знайти неперервний в \bar{Q}_{T} розв'язок системи рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = L\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t), \quad (\boldsymbol{x},t) \in Q_T, \\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x},t) \text{ при } \boldsymbol{x} \in \Gamma, \ t \in [0,T], \\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{G}.$$
(2.5)

Нехай $\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = (ih_1, ..., ih_p) \right\}$ – сітка в \overline{G} , $0 \le i_{\alpha} \le N_{\alpha}$, $h_{\alpha} = l_{\alpha} / N_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$, і $\overline{\omega}_{\tau} = \left\{ t_j = j\tau, \ j = 0, 1, ... \right\}$ – сітка на відрізку $0 \le t \le T$.

Оператор $L_{\alpha\beta}$ апроксимуємо різницевим оператором

$$\Lambda_{\alpha\beta}\boldsymbol{u} = 0,5[(k_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_{\bar{x}_{\beta}})_{x_{\alpha}} + (k_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_{x_{\beta}})_{\bar{x}_{\alpha}}]$$
(2.6)

і позначимо

$$\Lambda \boldsymbol{u} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \Lambda_{\alpha\beta} \boldsymbol{u} \,. \tag{2.7}$$

При $\beta = \alpha$ отримуємо

$$\Lambda_{\alpha\alpha}\boldsymbol{u} = (a_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \quad a_{\alpha} = 0,5(k_{\alpha\alpha} + k_{\alpha\alpha}^{(-1_{\alpha})}).$$

Введемо простір $\dot{\Omega}$ – множину сіткових вектор-функцій, заданих на $\bar{\omega}_h$ і рівних нулю на межі γ_h . Скалярний добуток в $\dot{\Omega}$ визначається так:

$$(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \sum_{s=1}^{n} (y^{s}, v^{s}), \quad (y^{s}, v^{s}) = \sum_{x \in \omega_{h}}^{n} y^{s}(x) v^{s}(x) h_{1} \dots h_{p}.$$

На підставі (2.1) оператор $\Lambda \in$ самоспряженим оператором, отже, ($\Lambda y, v$) = ($y, \Lambda v$). З (2.2) випливає рівність

$$c_1(-\Lambda^{(0)}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \leq (-\Lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \leq c_2(-\Lambda^{(0)}\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in \dot{\Omega},$$
(2.8)

де

$$\Lambda^{(0)} \boldsymbol{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} \boldsymbol{y}_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}, \quad (-\Lambda^{(0)} \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} (1, (y_{\bar{x}_{\alpha}}^{s})^{2}].$$

Як регуляризатор виберемо оператор

$$R = \sum_{\alpha=1}^{p} R_{\alpha} , \quad R_{\alpha} y = -\sigma y_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}} , \quad \alpha = 1, 2, \dots, p , \qquad (2.9)$$

де σ – числовий параметр, який буде вибраний з міркувань стійкості.

Напишемо двошарову економічну схему. Початкова схема має вигляд

$$(E+\tau R)\mathbf{y}_t = \Lambda \mathbf{y} + \mathbf{\varphi},$$

де $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}^{j} + O(|h|^{2} + \tau^{2}).$

Замінюючи $E + \tau R = E + \tau \sum_{\alpha=1}^{p} R_{\alpha}$ факторізованим оператором

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau R_{\alpha}) = E + \tau \tilde{R}, \quad \tilde{R} = R + \tau Q_{p}, \quad Q_{p} = \sum_{\alpha < \beta} R_{\alpha} R_{\beta} + \dots,$$

отримуємо економічну факторізовану схему

$$\prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau R_{\alpha}) \boldsymbol{y}_{t} = \Lambda \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi} , \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\omega}_{h} , \quad \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{\omega}_{\tau} ,$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, t) , \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\gamma}_{h} , \quad \boldsymbol{t} \in \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\tau} , \qquad (2.10)$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_{0}(\boldsymbol{x}) , \quad \boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{\omega}}_{h} .$$

Для відшукання вектор-функції $y^{j+1} = \hat{y}$ можна, наприклад, скористатися таким алгоритмом:

$$(E + \tau R_{1}) \boldsymbol{w}_{(1)} = \Lambda \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi} ,$$

$$\boldsymbol{w}_{(1)} = \prod_{\beta=2}^{p} (E + \tau R_{\beta}) \boldsymbol{\mu}_{t} \quad \text{при} \quad x_{1} = 0, l_{1} ,$$

$$(E + \tau R_{\alpha}) \boldsymbol{w}_{(\alpha)} = \boldsymbol{w}_{(\alpha-1)} , \quad \alpha = 2, 3, \dots, p ,$$

$$\boldsymbol{w}_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^{p} (E + \tau R_{\beta}) \boldsymbol{\mu}_{t} \quad \text{при} \quad x_{\alpha} = 0, l_{\alpha} , \quad \alpha = 2, 3, \dots, p-1 .$$

Можна показати (див. [10]), що схема (2.10) абсолютно стійка при $\sigma \ge 0.5 c_2$ і збігається зі швидкістю $O(|h|^2 + \tau)$.

Перейдемо тепер до системи рівнянь гіперболічного типу. Потрібно знайти неперервний в циліндрі \bar{Q}_T розв'язок системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = L\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad (\boldsymbol{x}, t) \in Q_T, \quad L = \sum_{\alpha, \beta=1}^p L_{\alpha\beta} \quad , \qquad (2.11)$$

що задовольняє додаткові умови

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\mu}(x,t) \text{ при } x \in \Gamma, \ t \in [0,T],$$
$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}(x,0)}{\partial t} = \overline{\boldsymbol{u}}_0(x) \text{ при } x \in \overline{G}.$$
(2.12)

Як регуляризатор виберемо той самий оператор, що і раніше:

$$R = \sum_{\alpha=1}^{p} R_{\alpha} , \quad R_{\alpha} \mathbf{y} = -\sigma \mathbf{y}_{\overline{x}_{\alpha} x_{\alpha}} .$$

Вихідна схема

$$\boldsymbol{y}_{\bar{t}t} + \tau^2 R \boldsymbol{y}_{\bar{t}t} = \Lambda \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}$$

стійка, якщо

$$\sigma \ge \frac{c_2(1+\varepsilon)}{4}$$
, $\varepsilon = \operatorname{const} > 0$.

Замінюючи $E + \tau^2 R = E + \tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p} R_{\alpha}$ факторізованим операто-

ром $D = \prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau^2 R_{\alpha})$, отримаємо економічну факторізовану схему $\prod_{\alpha=1}^{p} (E + \tau^2 R_{\alpha}) y_{\overline{u}} = \Lambda y + \varphi, \quad при \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_{\tau},$ $y = \mu, \quad при \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \overline{\omega}_{\tau},$ $y(x,0) = u_0(x), \quad y_t(x,0) = \widetilde{u}_0(x) \quad при \quad x \in \overline{\omega}_h,$ де $\widetilde{u}_0(x) = \overline{u}_0 + 0.5\tau(Lu_0 + f(x,0)).$ Можна показати (див. [11]), що ця схема абсолютно стійка і має другий порядок апроксимації. Звідси випливає її збіжність з швидкістю $O(|h|^2 + \tau^2)$.

Відшукання вектор-функції y^{j+1} зводиться до послідовного від α до $\alpha + 1$ розв'язання методом прогонки триточкових рівнянь вигляду $(E + \tau^2 R_{\alpha}) w = F_{\alpha}$ для кожної з компонент вектора w.

Скористаємося, наприклад, таким алгоритмом:

$$(E + \tau^2 R_1) \boldsymbol{w}_{(1)} = \boldsymbol{F} , \quad \boldsymbol{F} = \prod_{\alpha=1}^p (E + \tau^2 R_\alpha) \boldsymbol{y}_{\overline{\tau}} + \tau (\Lambda \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}) ,$$
$$(E + \tau^2 R_\alpha) \boldsymbol{w}_{(\alpha)} = \boldsymbol{w}_{(\alpha-1)} , \quad \alpha = 2, 3, \dots, p , \quad \boldsymbol{y}^{j+1} = \boldsymbol{y}^j + \tau \boldsymbol{w}_{(p)} .$$

Для вектор-функцій $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p-1$, ставимо при $x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}$ такі крайові умови:

$$w_{(1)} = \prod_{\beta=2}^{p} (E + \tau^{2} R_{\beta}) \boldsymbol{\mu}_{t}, \quad x_{1} = 0, l_{1},$$
$$w_{(\alpha)} = \prod_{\beta=\alpha+1}^{p} (E + \tau^{2} R_{\beta}) \boldsymbol{\mu}_{t} \quad \text{при} \quad x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}.$$

Оскільки оператори $D_{\alpha} = E + \tau^2 R_{\alpha}$ мають діагональну матрицю коефіцієнтів з діагональними клітками, то компоненти вектора $w_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, ..., p$, визначаються незалежно.

2.3.3. Метод скінченних об'ємів

Застосуємо метод скінченних об'ємів при розв'язанні рівнянь Ейлера для тривимірного дозвукового обтікання тіл у нев'язкому газі. Математична модель дозвукового обтікання описується нестаціонарними тривимірними рівняннями динаміки нев'язкого газу. При інтегруванні за часом використовується різницева схема типу Лакса-Вендроффа. Розв'язання різницевих рівнянь здійснюється методом скінченних об'ємів.

Диференціальні рівняння. Вихідні рівняння Ейлера в декартових координатах можна записати в такому вигляді:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}_z}{\partial z} = 0.$$
(3.1)

Припустимо, що область Ω , у якій шукається розв'язок, обмежена деякою поверхнею Γ , на якій задані додаткові граничні умови.

На основі теореми Гауса-Остроградського інтегральна форма рівнянь (3.1) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} q dvol + \iint_{\Gamma} Hnds = 0$$
(3.2)

де

$$\boldsymbol{q} = \left\{ \rho, \rho u, \rho v, \rho w, e \right\},$$
$$\boldsymbol{H} = \left\{ \boldsymbol{q} \boldsymbol{v} + p(0, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{v}) \right\},$$
$$\boldsymbol{v} = u \boldsymbol{e}_x + v \boldsymbol{e}_y + w \boldsymbol{e}_z,$$

n – одинична зовнішня нормаль до поверхні Γ , що обмежує об'єм Ω ; *p*, ρ – тиск і густина, віднесені відповідно до p_{∞} і ρ_{∞} , компоненти швидкості *u*, *v* віднесені до величини $(p_{\infty}/\rho_{\infty})^{0.5}$.

Повна енергія $e = p/(\gamma - 1) + \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2$, де γ – відношення теплоємностей. Квадрат швидкості звуку $a^2 = \gamma p/\rho$. Геометричні величини віднесені до характерного розміру r_0 , а час – до величини $r_0/(p_{\infty}/\rho_{\infty})^{0.5}$.

Величина $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_x \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{H}_y \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{H}_z \boldsymbol{e}_z$ є вектором потоку через поверхню:

$$H_{x} = \{\rho u, \rho u^{2} + p, \rho uv, \rho uw, (p+e)u\}, H_{y} = \{\rho v, \rho uv, \rho v^{2} + p, \rho vw, (p+e)v\}, H_{z} = \{\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^{2} + p, (p+e)w\},$$

n ds = S – вектор поверхні, що рівний по модулю площі поверхні і збігається за напрямом з нормаллю до поверхні, dvol – елементарний об'єм.

Метод скінченних об'ємів та його дискретизація. Введемо в області Ω деяку різницеву сітку з просторовими індексами (k, l, m). Точки, що потрапили на поверхню Γ , назвемо межовими, а всі точки, що лежать зовні Γ , – внутрішніми. Таким чином, об-

ласть Ω буде розбита на деяку кількість шестигранників, не обов'язково з ортогональними сторонами.

Позначимо об'єм довільного шестигранника з центром в точці (k, l, m) як Ω_{klm} і поверхню, що обмежує його, як $\partial \Omega_{klm}$. Рівняння для елементарного об'єму матимуть вигляд

$$\Omega_{klm} \frac{d\boldsymbol{q}_{klm}}{dt} + \delta \left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{S} \right]_{klm} = 0, \qquad (3.3)$$

де $S = \{S_k, S_l, S_m\}$ – векторний елемент поверхні (вектори S_k, S_l, S_m спрямовані по зовнішніх нормалях до відповідних поверхонь), δ – центральний різницевий оператор, μ – оператор усереднення,

$$[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{S}]_{klm} = [\mu_{k}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})]\boldsymbol{S}_{k} + [\mu_{l}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})]\boldsymbol{S}_{l} + [\mu_{m}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})]\boldsymbol{S}_{m},$$

$$\mu_{k}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{H}_{k+\frac{1}{2},l,m} + \boldsymbol{H}_{k-\frac{1}{2},l,m}] \text{ (аналогічно для } \mu_{l},\mu_{m}),$$

$$\delta[\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}] = \delta_{k}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_{k}] + \delta_{l}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_{l}] + \delta_{m}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_{m}],$$

$$\delta_{k}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_{k}] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{H}_{k}\boldsymbol{S}_{k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}_{k-1}\boldsymbol{S}_{k-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{S}_{k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{H}_{k}\boldsymbol{S}_{k-\frac{1}{2}}] \text{ (анало$$

гічно для δ_l, δ_m).

Для реалізації чисельного розв'язку застосовується модифікація різницевої схеми Лакса-Вендроффа, що заснована на розвиненні

$$\boldsymbol{q}(t+\tau) \approx \boldsymbol{q}(t) + \tau \partial \boldsymbol{q} / \partial t + \frac{1}{2} \tau^2 \partial^2 \boldsymbol{q} / \partial t^2$$

де друга похідна за часом обчислюється підстановкою $\partial q / \partial t$ з рівняння (3.1) у продиференційоване за часом рівняння (3.1):

$$\partial^{2} \boldsymbol{q} / \partial t^{2} = -\partial / \partial x \left(\frac{d\boldsymbol{H}_{x}}{d\boldsymbol{q}} \partial \boldsymbol{q} / \partial t \right) - \partial / \partial y \left(\frac{d\boldsymbol{H}_{y}}{d\boldsymbol{q}} \partial \boldsymbol{q} / \partial t \right) - \partial / \partial z \left(\frac{d\boldsymbol{H}_{z}}{d\boldsymbol{q}} \partial \boldsymbol{q} / \partial t \right),$$

де $\frac{d\boldsymbol{H}_{x}}{d\boldsymbol{q}}, \frac{d\boldsymbol{H}_{y}}{d\boldsymbol{q}}, \frac{d\boldsymbol{H}_{z}}{d\boldsymbol{q}} -$ матриці Якобі.

Область Ω_{klm} з центром в точці (k, l, m) обмежена поверхнями, що проходять через точки $(k \pm 1, l \pm 1, m \pm 1)$. Розіб'ємо область Ω_{klm} на 8 підобластей з центрами $(k \pm 1/2, l \pm 1/2, m \pm 1/2)$. У середніх точках областей Ω_{klm} визначаються $\partial q / \partial t$ для всіх 8 підобластей. По середніх точках будуємо нову підобласть Ω_* і в ній остаточно визначаємо $q_{kl,m}^{n+1}$.

Заздалегідь в підобласті Ω_* обчислюємо $\partial^2 q / \partial t^2$ за формулою (3.3). Остаточно маємо

$$\boldsymbol{q}_{k,l,m}^{n+1} = \boldsymbol{q}_{k,l,m}^{n} - \tau / \operatorname{vol}\Omega_* \,\delta[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_*^n)\boldsymbol{S}_*] - 1/2\tau^2 / \operatorname{vol}\Omega \,\delta[\boldsymbol{H}^t\boldsymbol{S}],$$

де $H^t = (H_x^t, H_y^t, H_z^t)$ – добуток матриць Якобі на похідну $\partial q / \partial t$.

Локальний крок за часом т обчислюється на підставі спектральної ознаки.

2.3.4. Метод скінченних суперелементів

У цьому пункті представлено один із напрямів у конструюванні різницевих схем для обчислення течій в'язкою нестисливої рідини в двовимірних областях складної форми. Просторові апроксимації нестаціонарних нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса на трикутній неструктурованій сітці будуються методом скінченних суперелементів (МССЕ) для чисел Рейнольдса в діапазоні $10^2 - 10^4$. Узагальнений (слабкий) розв'язок шукаємо в просторі неперервних функцій, простір слідів яких на межі комірок складається з інтерполяційних поліномів заданого степеня N (порядок схеми). Всередину комірки він продовжується як наближений розв'язок даного рівняння в класі поліномів вищого заданого степеня J > N. Числа J і N є параметрами методу.

МССЕ був запропонований в 1976 році для моделювання нейтронно-фізичних процесів в ядерних реакторах, а потім використовувався для розв'язання задач теорії пружності. Схеми МССЕ побудовані для двовимірного рівняння конвекції-дифузії, яке слід розглядати як фрагмент нелінійної системи рівнянь Нав'є-Стокса (див. [18]). Такий фрагмент може з'явитися при ітераційному розв'язанні стаціонарної задачі, заснованому на загальній ідеї розщеплення системи рівнянь і лінеаризації, або при розв'язанні нестаціонарної задачі за будь-якою неявною схемою.

МССЕ – це проекційно-сітковий метод, що використовує ідеї МСЕ, але в деталях значно відрізняється від стандартних конструкцій. Основна мета МССЕ – це розв'язання задач на сітках з великим (щодо ступеня гладкості шуканого розв'язку) кроком, але в той же час – ефективний облік дрібномасштабних неоднорідностей усередині комірки, що грають важливу роль в процесах, які вивчаються.

Поліноміальне наближення використовується з метою економії часу обчислення базисних функцій, яке необхідно робити в усіх комірках на кожному кроці за часом. Усі операції диференціювання та інтегрування виконуються за аналітичними формулами. Розв'язання нестаціонарної задачі здійснюється за неявною схемою, на кожному кроці за часом для розв'язання нелінійних рівнянь робиться невелике число (3-5) ітерацій типу Ньютона.

Диференціальна постановка задачі. Система рівнянь Нав'є-Стокса, що описує течію в'язкої нестисливої рідини в обмеженій області $\Omega \subset R^2$ з межею $\partial \Omega$, має вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \varepsilon \Delta \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{q}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4.1)$$
$$\mathbf{u}\Big|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y),$$

де $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ – невідома вектор-функція швидкості, p(x, y, t) – невідома функція тиску; $\varepsilon(x, y) > 0$ – коефіцієнт в'язкості, $\mathbf{q} = (q^1(x, y, t), q^2(x, y, t))$ – функція джерела і $\mathbf{g} = (g^1(x, y, t), g^2(x, y, t))$ – задані функції, а

$$(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Нестаціонарну задачу (4.1) розв'язуємо за неявною схемою; тоді на кожному кроці за часом $t^{n+1} = t^n + \tau$ необхідно розв'язати стаціонарну нелінійну задачу:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\tau} - \varepsilon \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (\nabla \mathbf{u}^{n+1})\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{q} , \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 . \quad (4.2)$$

Для її розв'язання будуємо ітераційний процес, в якому на кожній ітерації розв'язуємо лінеаризоване крайове завдання. Використовуємо ітерації типу

$$(\nabla \mathbf{u}^{m+1})\mathbf{u}^{m+1} \approx (\nabla \mathbf{u}^{m+1})\mathbf{u}^m + (\nabla \mathbf{u}^m)\mathbf{u}^{m+1} - (\nabla \mathbf{u}^m)\mathbf{u}^m.$$

Отриману лінеаризовану диференціальну систему рівнянь Нав'є-Стокса на *m*+1 ітерації запишемо у вигляді:

$$-\varepsilon\Delta u^{m+1} + U\frac{\partial u^{m+1}}{\partial x} + V\frac{\partial u^{m+1}}{\partial y} + a_{11}u^{m+1} + a_{12}v^{m+1} + \frac{\partial p^{m+1}}{\partial x} = f^{1},$$

$$-\varepsilon\Delta v^{m+1} + U\frac{\partial v^{m+1}}{\partial x} + V\frac{\partial v^{m+1}}{\partial y} + a_{21}u^{m+1} + a_{22}v^{m+1} + \frac{\partial p^{m+1}}{\partial y} = f^{2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial u^{m+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{m+1}}{\partial y} = 0,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = g^{1}(x, y), \quad v\Big|_{\partial\Omega} = g^{2}(x, y).$$

Тут є, U, V, a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , f^1 , f^2 – відомі функції з попередньої ітерації.

Введемо три вектори \mathbf{u} , $\mathbf{u}_1(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}_2(\mathbf{u})$, опускаючи індекс m+1:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + Uu + p \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} + Uv \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + Vu \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + Vv + p \\ v \end{pmatrix}$$
(4.4)

За умови $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ рівняння (4.3) можуть бути записані в «майже дивергентній формі»:

$$L\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} + A\mathbf{u} = \mathbf{f} , \qquad (4.5)$$

де матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ і права частина $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для рівняння (4.5) використовуватимемо також запис

$$L\mathbf{u} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{f} , \qquad (4.5a)$$

Апроксимація векторного рівняння (4.5) на трикутній неструктурованій сітці, отриманій за допомогою деякої правильної тріангуляції області Ω , буде далі побудована методом скінченних суперелементів.

Слабка постановка задачі. Розглянемо формальну інтегральну тотожність, на яку спирається визначення узагальненого (слабкого) розв'язку рівняння (4.5): для будь-якої підобласті $\omega \subset \Omega$ має місце рівність

$$\int_{\omega} (L\mathbf{u} - \mathbf{f}) \mathbf{w} d\omega = \int_{\partial \omega} (\mathbf{u}_1 n_x + \mathbf{u}_2 n_y) \mathbf{w} ds - \int_{\omega} (\mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) d\omega + \int_{\omega} A \mathbf{u} \mathbf{w} d\omega - \int_{\omega} \mathbf{f} \mathbf{w} d\omega, \quad (4.6)$$

де $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ – довільна гладка вектор-функція з носієм ω (поки що без вимоги перетворення в нуль на $\partial \omega$), $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – зовнішня нормаль до $\partial \omega$.

У МСЕ алгоритм побудови наближеного розв'язку рівняння (4.5) має такий вигляд:

а) в області Ω вводимо трикутну сітку, в локальній нумерації розрахункові вузли (x_m, y_m) розташовані у вершинах (схема 1-го порядку точності) та на сторонах трикутної комірки T (схема 2-го порядку точності), а для схем вище 2-го порядку точності – ще усередині T (рис. 4.1);



Рис. 4.1

б) в *T* вибираємо інтерполяційний базис $\{\tilde{\varphi}_m\}$, що складається, наприклад, з поліномів Лагранжа або Чебишева, або експоненціальних функцій. Всередину комірки наближений розв'язок продовжуємо інтерполяцією поки що невідомих сіткових значень

$$\tilde{\mathbf{u}}(x,y) = \sum_{m} \tilde{\mathbf{u}}_{m} \tilde{\varphi}_{m}(x,y) \,. \tag{4.7}$$

Зауважимо, що у разі неоднорідної області при недостатньо малому розмірі комірки, навіть якщо відомі точні сіткові значення розв'язку, наближений розв'язок (4.7) є грубим, таким, що не враховує складну поведінку розв'язку усередині T;

в) визначаємо білінійну форму

$$a(\mathbf{u},\mathbf{w}) = -\int_{\omega} (\mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) d\omega + \int_{\omega} A \mathbf{u} \mathbf{w} d\omega$$

і скалярний добуток

$$(\mathbf{f},\mathbf{w})=\int_{\omega}\mathbf{f}\mathbf{w}d\omega.$$

Слабким розв'язком рівняння (4.5) називатимемо неперервну функцію $\tilde{\mathbf{u}}$, що кусково диференціюється та задовольняє для будьякої функції **w** з простору $\dot{\mathbf{W}}_2^1$ рівності

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{w}(\partial \omega) = 0.$$
 (4.8)

Розв'язок (4.7) підставляємо в (4.8). Матриця жорсткості системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\mathbf{u}}_m$ утворюється з функціоналів $a(\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_l)$.

МССЕ відрізняється від МСЕ такими ознаками:

a) розрахункові вузли розташовані у вершинах і на сторонах трикутника, усередині *T* рахункових вузлів немає;



Рис. 4.2

б) в *T* обчислюються два інтерполяційні векторні базиси $\varphi_{ik}(x, y)$, $\Phi_{mk}(x, y)$ із спеціальних крайових задач:

$$L\varphi_{ik} = 0, \quad (x, y) \in T, \quad \varphi_{ik} \Big|_{\partial T} = \tilde{\varphi}_i \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, ..., 3N,$$

$$L\Phi_{mk} = \tilde{\varphi}_{m} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}, \quad (x, y) \in T, \quad \Phi_{mk} \Big|_{\partial T} = 0, \quad k = 1, 2; \quad m = 1, 2, ..., M \quad (4.9)$$

де 3N – число вузлів на ∂T , M – число вузлів в T.

Усередині комірки наближений розв'язок має вигляд

$$\mathbf{u}(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3N} u_i^k \varphi_{ik}(x,y) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{M} f_m^k \Phi_{mk}(x,y), \quad (4.10)$$

де u_i^k – шукані сіткові значення, f_m^k – відомі сіткові значення правої частини. Задача (4.9) в *T* розв'язується «точно» на дрібній внутрішній сітці;

в) слабким розв'язком ϵ неперервна, кусково-гладка функція **u**, яка в точках гладкості (усередині T) ϵ «точним» класичним

розв'язком рівняння (4.5), а на лініях розриву перших похідних (на ∂T) задовольняє умову слабкої неперервності потоку:

$$\int_{\partial \omega} (\mathbf{u}_1 n_x + \mathbf{u}_2 n_y) ds = 0.$$
 (4.11)

Розв'язок (4.10) підставляємо в (4.11). Матриця жорсткості системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих u_i^k утворюється з функціоналів типу (4.11) від базисних функцій $\varphi_{ik}(x, y)$. Побудована схема відрізняється від (4.8) точнішою апроксимацією розв'язку усередині T і, отже, на ∂T .

Рівняння (4.11) можна тлумачити як умову того, що носієм ω в (4.5) вибирається хрестоподібна область міри нуль з центром у вузлі розрахункової сітки, а замість **w** – характеристична функція області ω .

Використовуватимемо таке визначення слабкого розв'язку задачі (4.5). Визначимо форму

$$B(\mathbf{u},\mathbf{w}) = -\int_{\omega} (\mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) d\omega + \int_{\omega} \mathbf{A} \mathbf{u} \mathbf{w} d\omega + \int_{\partial \omega} (un_x + vn_y) w^3 ds \quad (4.12)$$

і тестовий простір функцій $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$ з компонентами $w^1, w^2 \in \dot{W}_2^1$ і $w^3 \in W_2^1$. Тоді в контурному інтегралі формули (4.6) після множення векторів залишиться тільки $\int_{\partial \omega} (un_x + vn_y) w^3 ds$, де $\mathbf{p} = (n_x + n_y)$ гормони до $\partial \omega$

 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – зовнішня нормаль до $\partial \omega$.

Слабким розв'язком задачі (4.5) назвемо неперервну функцію $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) = (u, v, p) \in W_2^1$, яка на межі комірок складається з інтерполяційних поліномів заданого степеня N (порядок схеми). Всередину комірки вона продовжується як наближений розв'язок рівняння (4.5) в класі поліномів вищого заданого степеня J > N і задовольняє рівняння

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \qquad (4.13)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g^{1}, \quad v|_{\partial\Omega} = g^{2}, \quad g^{1}, g^{2} \in W_{2}^{1/2},$$

$$\forall \mathbf{w} = (w^{1}, w^{2}, w^{3}): \quad w^{1}, w^{2} \in \dot{W}_{2}^{1}, \quad w^{3} \in W_{2}^{1}; \quad f^{1}, f^{2} \in L_{2}.$$

Апроксимація. Основна сітка. Припускаємо, що за допомогою правильної тріангуляції в області Ω можна побудувати сітку, в загальному випадку неструктуровану, з трикутними комірками T', причому $\overline{\Omega} = \bigcup_{t} T'$ і будь-які два трикутники або не перетинаються, або мають загальне ребро, або загальну вершину.

Вузли сітки розташовані у вершинах трикутників (схема першого порядку), а також, залежно від порядку схеми N, на кожній стороні трикутника вводиться N-1 вузол. Всього на межі трикутника вводиться 3N розрахункових вузлів (позначимо їх об'єднання через N_h^t), у яких мають бути визначені значення сіткової функції $\mathbf{u}_i^t = (u_i^{t,1}, u_i^{t,2}, u_i^{t,3}) \equiv (u_i^t, v_i^t, p_i^t), i = 1, 2, ..., 3N$ (тут i – локальний номер вузла комірки). Об'єднання N_h^t по всіх комірках назвемо сіткою N_h . Поліном P, що інтерполює слід функції u на ∂T по 3Nвузлах, записуватимемо у вигляді:

$$P(x, y; u)_{\partial T^{t}} = \sum_{i=1}^{3N} u_{1i}^{t} \tilde{\varphi}_{i}(x, y), \qquad (4.14)$$

де { $\tilde{\phi}_i(x, y)$, i = 1, 2, ..., 3N} – система функцій, що утворює на ∂T^t повний інтерполяційний базис порядку N щодо системи вузлів N_h^t , і $\tilde{\phi}_i(x_k, y_k) = \delta_{ki}$, i, k = 1, 2, ..., 3N. Вузол (x_i, y_i) , у якому функція $\tilde{\phi}_i(x_i, y_i) = 1$, називається її полюсом.

Допоміжна сітка. Для кусково-гладкого заповнення відомих сіткових функцій є, $U, V, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, f^1, f^2$ усередині комірки T^t використовуватимемо також сітку M_h^t , яка збігається із сіткою N_h^t для $N \le 2$, а для $N \ge 3$ сітка M_h^t включає ще внутрішні вузли в трикутнику T^t . Число вузлів M сітки M_h^t дорівнює M = (N+1)(N+2)/2, з них (N-1)(N-2)/2 вузла лежить усередині трикутника. Поліном P, що інтерполює, наприклад, функцію U по M вузлах комірки, записуватимемо у вигляді:

$$P(x, y; U) = \sum_{m=1}^{M} U_m^t \tilde{\Phi}_m(x, y), \qquad (4.15)$$

де { $\tilde{\Phi}_m(x,y)$, m=1,2,...,M} – система функцій, що породжує в T^t повний поліноміальний базис степеня N щодо системи вузлів M_h^t , де $\tilde{\Phi}_m(x_k,y_k) = \delta_{km}$, k,m=1,2,...,M. Для N=1,2 системи базисних функцій { $\tilde{\Phi}_h$ } і { $\tilde{\Phi}_m$ } збігаються. Для $N \ge 3$ маємо M > 3N.

Конструкція скалярних функцій $\tilde{\phi}_i(x, y), \tilde{\Phi}_m(x, y), \psi_i(x, y).$

Перш за все, зробимо перетворення системи координат Oxyу систему координат $O\alpha\beta$ так, щоб трикутник T^t з вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ перейшов в трикутник I з вершинами (0,0), (1,0), (0,1):

$$x = (x_2 - x_1)\alpha + (x_3 - x_1)\beta + x_1 = x_1(1 - \alpha - \beta) + x_2\alpha + x_3\beta,$$

$$y = (y_2 - y_1)\alpha + (y_3 - y_1)\beta + y_1 = y_1(1 - \alpha - \beta) + y_2\alpha + y_3\beta,$$
(4.16)

де $J = 2S_T = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$ – якобіан перетворення.

Зворотне перетворення має вигляд:

$$\alpha = \frac{1}{J} [(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + y_1x_3 - x_1y_3],$$

$$\beta = \frac{1}{J} [(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - y_1x_2].$$

Координати нормалі $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$, наприклад, до другої сторони трикутника T' мають вигляд:

$$n_x = (y_2 - y_1) / \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$n_y = (x_1 - x_2) / \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Початковим для побудови функцій $\tilde{\varphi}_i(\alpha,\beta)$, $\tilde{\Phi}_m(\alpha,\beta)$ є передбазис, що складається з *мономів*, – степенів змінних α , β , які позначаємо $\chi_j = \alpha^{K_j} \beta^{M_j}$, K_j , $M_j \ge 0$. Структуру передбазису представимо у вигляді «нескінченного» трикутника Паскаля, занумерувавши функції χ_i по рядках зліва праворуч і зверху вниз:

$$1$$

$$\alpha \qquad \beta$$

$$\alpha^{2} \qquad \alpha\beta \qquad \beta^{2}$$

$$\alpha^{3} \qquad \alpha^{2}\beta \qquad \alpha\beta^{2} \qquad \beta^{3}$$

$$\alpha^{4} \qquad \alpha^{3}\beta \qquad \alpha^{2}\beta^{2} \qquad \alpha\beta^{3} \qquad \beta^{4}$$

$$\alpha^{5} \qquad \alpha^{4}\beta \qquad \alpha^{3}\beta^{2} \qquad \alpha^{2}\beta^{3} \qquad \alpha\beta^{4} \qquad \beta^{5}$$

Мономи поділимо на межові і внутрішні. Функції $\tilde{\varphi}_i(\alpha,\beta)$ інтерполяційного базису порядку N на межі трикутника I будуються з мономів, що розташовані на межі перших N+1 рядків трикутника Паскаля, у вигляді

$$\tilde{\varphi}_{i}(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \chi_{List(j)}(\alpha,\beta), \quad i = 1, 2, ..., 3N.$$
 (4.17)

Коефіцієнти a_{ij} шукаємо звичайним способом побудови інтерполяційного базису з умови: $\tilde{\varphi}_i(\alpha_k,\beta_k) = \delta_{ki}$, i, k = 1, 2, ..., 3N. Порядок розташування вузлів (α_k,β_k) уздовж межі трикутника і номери граничних мономів χ_j для кожного порядку схеми Nстрого визначені. Вузли занумеровані в напрямку проти годинникової стрілки, починаючи з вузла (0,0), список номерів List(j)задається таблицею.

Наприклад, щоб побудувати функції $\tilde{\varphi}_i(\alpha,\beta)$ для схеми третього порядку, треба виділити в нескінченному трикутнику Паскаля перші чотири рядки і взяти в (4.17) всі граничні мономи, починаючи з 1. Коефіцієнти a_{ij} , i, j = 1, 2, ..., 3N, не залежать від номера t трикутника T^t та обчислюються для кожного N один раз і зберігаються на диску.

Таким же чином будуються функції $\tilde{\Phi}_m(\alpha,\beta)$ повного поліноміального базису степеня *N* у трикутнику *I*, у які входять всі

мономи з перших *N*+1 рядків трикутника Паскаля, включаючи внутрішні:

$$\tilde{\Phi}_{m}(\alpha,\beta) = \sum_{j=1}^{M} a'_{mj} \chi_{List(j)}(\alpha,\beta), \quad m = 1, 2, ..., M.$$
 (4.18)

Нумерація вузлів і мономів йде спочатку по межі, як в (4.17), потім по внутрішніх мономах (подібно до початкової нумерації χ_j). Коефіцієнти $a'_{mj}(N)$, m, j = 1, 2, ..., M, обчислюються для кожного N також один раз і зберігаються на диску. Використовується також система незалежних функцій, що перетворюється в нуль на межі I:

$$\{\psi_{i}(\alpha,\beta) = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)\chi_{i}, j=1,2,...,J\}.$$
 (4.19)

Метод скінченних суперелементів. Метод скінченних суперелементів є проекційно-сітковим методом. Побудова схеми складається з двох етапів: побудови базису в комірці (суперелемент) та обчислення коефіцієнтів схеми. Основною конструкцією є побудова спеціального базису в розрахунковій комірці, розміри якої великі в порівнянні зі ступенем гладкості шуканих функцій. Базисні функції повинні відображати цю негладкість розв'язку всередині комірки. У стандартному МССЕ для цієї мети в комірку вводиться дрібна сітка, на якій базис обчислюється яким-небудь скінченнорізницевим методом або МСЕ. Тут для побудови базису використовується проекційний метод.

Векторний суперелемент. У кожній трикутній комірці T^{t} , на межі якої розташовано 3N розрахункових вузлів (сітка N_{h}^{t}), побудуємо систему з $3 \times 3N$ базисних вектор-функцій $\varphi_{ik} = (\varphi_{ik}^{1}, \varphi_{ik}^{2}, \varphi_{ik}^{3}), \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, ..., 3N$ (вони залежать і від t) як розв'язок наступних елементарних крайових задач:

$$L\phi_{ik} = 0, \quad (x, y) \in T, \quad \phi_{ik} \Big|_{\partial T} = \tilde{\phi}_i \mathbf{e}_k, \quad (4.20)$$
$$k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, ..., 3N.$$

Крім того, визначимо ще базисні функції Φ_{mk} , k = 1, 2; m = 1, 2, ..., M, як розв'язок неоднорідного рівняння в T' з нульовими значеннями на $\partial T'$:

$$L\Phi_{mk} = \tilde{\Phi}_m \mathbf{e}_{\mathbf{k}}, \quad (x, y) \in T, \quad \Phi_{mk} \mid_{\partial T} = 0, \qquad (4.21)$$
$$k = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

де $\tilde{\varphi}_i$ – повний скалярний інтерполяційний базис на ∂T і $\tilde{\Phi}_m$ – повний скалярний інтерполяційний базис в $T \in$ заданими функціями.

Розв'язок крайових задач в трикутній комірці можна отримати методами колокацій, Галеркіна, мінімальної інтегральної похибки, МСЕ.

Векторним суперелементом (СЕ) порядку N назвемо трикутну комірку T^{t} , оснащену системами базисних вектор-функцій:

$$\{\varphi_{ik}(x, y)\}, \{\Phi_{mk}(x, y)\},$$
 (4.22)
 $i = 1, 2, ..., 3N, k = 1, 2, 3; m = 1, 2, ..., M, k = 1, 2.$

Наближений розв'язок в комірці T^t .

Наближений розв'язок в комірці Т' шукаємо у вигляді

$$u^{t}(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3N} u^{tk}_{i} \varphi^{t}_{ik}(x,y) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{M} f^{tk}_{m} \Phi^{t}_{mk}(x,y). \quad (4.23)$$

Тут u_i^{tk} – поки що невідомі сіткові значення шуканого розв'язку $\mathbf{u}_i^t = (u_i^{t,1}, \mathbf{u}_i^{t,2}, \mathbf{u}_i^{t,3}) \equiv (u_i^t, v_i^t, p_i^t), i$ – локальний номер вузла на ∂T^t , k – номер компоненти; f_m^k – відомі значення сіткового представлення правої частини, m – локальний номер вузла в T^t . Індекс k у вектор-функції $\phi_{ik}^t(x, y)$ позначає номер базисної функції з граничними значеннями в (4.20), а у вектор-функції $\Phi_{ik}^t(x, y)$ індекс k позначає номер базисної функції, що є розв'язком рівняння з правою частиною в (4.21).

Конструкція базисних функцій для однорідної задачі.

Елементарна комірка T^{t} сітки N_{h} розглядається як окрема ізольована область, в якій потрібно розв'язати серію крайових задач (4.20), що відрізняються тільки даними на межі ∂T^{t} .

Базисні трикомпонентні вектор-функції $\phi_{ik} = (\phi_{ik}^1, \phi_{ik}^2, \phi_{ik}^3), k = 1, 2, 3; i = 1, 2, ..., 3N$ шукаються як слабкий розв'язок (4.20) у вигляді поліноміальних функцій:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{ik}^{1}(x,y)\\ \varphi_{ik}^{2}(x,y)\\ \varphi_{ik}^{3}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{J} b_{ik}^{j1} \psi_{j}(x,y)\\ \sum_{j=1}^{J} b_{ik}^{j2} \psi_{j}(x,y)\\ \sum_{j=1}^{J} b_{ik}^{j3} \psi_{j}^{p}(x,y) \end{pmatrix} + \tilde{\varphi}_{i}(x,y)e_{k}. \quad (4.24)$$

Вважаємо, що $\psi_j^p(\alpha,\beta) = \psi_j(\alpha,\beta)$, але також можливий варіант з $\psi_j^p(\alpha,\beta) = \chi_j(\alpha,\beta)$. Система рівнянь для відшукання коефіцієнтів b_{ik}^{jm} , i = 1, 2, ..., 3N; k, m = 1, 2, 3 в (4.24) будується відповідно до рівняння (4.13) для однорідного завдання з тестовими функціями $\psi_{nl} = \psi_n \mathbf{e}_l$:

$$B(\phi_{ik}, \psi_{nl}) = 0.$$
 (4.25)

Для $\forall (i,k)$ це система з $2J + J_p$ рівнянь з $2J + J_p$ невідомими з однією і тією ж матрицею P з елементами

$$p_{n+l-1,j+m-1} = B_{lm}(\psi_j,\psi_n), \ j,n=1,...,J \ (J_p); \ l,m=1,2,3$$

Для подальшого розгляду буде зручно представити матрицю системи (4.25), що складається з блоків, згрупувавши блок відповідно до вигляду рівняння (4.5а):

$$\begin{pmatrix} B_{11}(\psi_{j},\psi_{n}) & B_{12}(\psi_{j},\psi_{n}) & B_{13}(\psi_{j},\psi_{n}) \\ B_{21}(\psi_{j},\psi_{n}) & B_{22}(\psi_{j},\psi_{n}) & B_{23}(\psi_{j},\psi_{n}) \\ B_{31}(\psi_{j},\psi_{n}) & B_{32}(\psi_{j},\psi_{n}) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{ik}^{j1} \\ b_{ik}^{j2} \\ b_{ik}^{j3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1k}(\tilde{\varphi}_{i},\psi_{n}) \\ B_{2k}(\tilde{\varphi}_{i},\psi_{n}) \\ B_{3k}(\tilde{\varphi}_{i},\psi_{n}) \end{pmatrix}$$

$$(4.26)$$

Таким чином, для побудови функцій ϕ_{ik} потрібно один раз обернути матрицю *P* і 3×3*N* разів помножити *P*⁻¹ на вектор правої частини ($B(\tilde{\phi}_{ik}, \psi_{nl})$), $l = 1, 2, n = 1, 2, ..., J; l = 3, n = 1, 2, ..., J_p$.

Конструкція базисних функцій неоднорідної задачі. Базисні трикомпонентні вектор-функції Φ_{mk} , k = 1, 2, m = 1, 2, ..., M, шукає-

мо як слабкий розв'язок неоднорідного рівняння (4.21) в T^t з нульовими значеннями на ∂T^t у вигляді:

$$\Phi^{1}_{mk}(x,y) = \sum_{j=1}^{J} c^{j1}_{mk} \psi_{j}(x,y),$$

$$\Phi^{2}_{mk}(x,y) = \sum_{j=1}^{J} c^{j2}_{mk} \psi_{j}(x,y),$$

$$\Phi^{3}_{mk}(x,y) = \sum_{j=1}^{J_{p}} c^{j3}_{mk} \psi^{p}_{j}(x,y).$$
(4.27)

Систему рівнянь для відшукання коефіцієнтів c_{mk}^{jl} , k = 1, 2; m = 1, 2, ..., M; $j = 1, 2, ..., J(J_p)$, l = 1, 2, 3, будуємо відповідно до (4.13) з тестовими функціями $\Psi_{nl} = \Psi_n \mathbf{e}_l$:

$$B(\Phi_{mk}, \psi_{nl}) = (\tilde{\Phi}_{mk}, \psi_{nl}), \qquad (4.28)$$

де $\tilde{\Phi}_{mk} = \tilde{\Phi}_m \mathbf{e}_k$.

Це система рівнянь з тією ж матрицею P, що і (4.25). Таким чином, для побудови функцій Φ_{mk} потрібно 2M разів помножити матрицю P^{-1} на вектор правої частини (($\tilde{\Phi}_{mk}, \psi_{nl}$)), $l = 1, 2, n = 1, 2, ..., J_p$.

Обчислення коефіцієнтів різницевої схеми. Після того, як знайдено коефіцієнти b_{ik}^{jm} , c_{mk}^{jl} , вирази (4.23) підставляємо в (4.13), як \mathbf{w}_{i}^{t} беремо $\tilde{\varphi}_{il} = \tilde{\varphi}_{j} \mathbf{e}_{l}$. Рівняння (4.13) запишемо у вигляді:

$$B(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{il}) = (\mathbf{f}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{il}). \tag{4.29}$$

Для формування різницевих рівнянь заздалегідь в кожній *T^t* комірці обчислюємо функціонали:

$$B_{\ln}(\varphi_{iu}^{k}, \tilde{\varphi}_{j}), \quad B_{\ln}(\Phi_{mf}^{k}, \tilde{\varphi}_{j}), \quad (\Phi_{mf}^{k}, \tilde{\varphi}_{j}),$$

k, l, n, u = 1,2,3; f = 1,2; i, j = 1,2,...,3N; m = 1,2,...,M.

Утворюючи матрицю жорсткості з функціоналів при коефіцієнтах u_i, v_i, p_i за шаблоном типу «зірка» або «ромб», отримаємо систему алгебраїчних рівнянь N_h на m+1 ітерації (4.3)

$$\sum_{i\in N_h} \mathbf{F}_{ji} \mathbf{u}_i = \mathbf{R}_j, \quad j \in N_h, \qquad (4.30)$$

де i – номер вузла глобальної сітки N_h в Ω . Розв'язавши систему (4.30), знаходимо коефіцієнти різницевої схеми.

Контрольні питання

- 1. Які різницеві схеми називаються економічними схемами?
- 2. Побудова економічних схем методом факторизації.
- 3. Суть методу скінченних об'ємів.
- 4. Алгоритм методу скінченних суперелементів.
- 5. Визначення слабкого розв'язку задачі (4.5).
- 6. Означення векторного суперелемента порядку *N*.
- 7. У чому особливість побудови економічних різницевих схем для систем рівнянь параболічного і гіперболічного типів?
- Як обчислюються коефіцієнти різницевої схеми в методі скінченних суперелементів?
- 9. Етапи побудови різницевої схеми.
- 10. Конструкція базисних функцій однорідної задачі.
- 11. Конструкція базисних функцій неоднорідної задачі.
- 12. Обчислення коефіцієнтів різницевої схеми.

2.4. МЕТОД «ЧАСТИНОК У КОМІРЦІ» РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ АЕРОДИНАМІКИ

Одним із методів обчислення аеродинамічних течій, який комбінує властивості підходів Ейлера і Лагранжа, щоб якоюсь мірою виключити недоліки кожного, є метод «частинок в комірці». Цей метод був запропонований Ф. Харлоу [8] в 1955 р. спочатку для розв'язання одновимірних задач. Одразу ж з'ясувалося, що за своєю точністю він не може конкурувати з іншими вже існуючими методами. Однак застосування цього методу для обчислення нестаціонарних двовимірних аеродинамічних задач, особливо таких, у яких зустрічаються сильні деформації, великі відносні переміщення і зіткнення поверхонь розділу, виявилося ефективним.

Метод використовує нерухому ейлерову сітку. Крім того, розглядається ще лагранжева сітка частинок рідини, які рухаються по ейлеревій сітці. Ейлерева сітка використовується для визначення змінних поля, а частинки – для визначення параметрів самої рідини і для опису руху контактних меж.

Обчислення нестаціонарного руху рідини проводиться кроками за часом. Перехід з одного часового шару t на інший, $t + \tau$, у методі частинок здійснюється в два етапи. На першому частинки нерухомі, тобто тут абсолютно не враховується рух рідини. У цьому припущенні розглядається різницева схема на ейлеревій сітці, яка дає змогу для всіх ейлеревих комірок визначити допоміжні значення величин, що характеризують рідину. Це ейлерів етап обчислення.

На другому етапі за допомогою моделі частинок враховуються процеси перенесення. Потоки визначають дискретним чином. Частинки рухаються по ейлеревій сітці. Щойно частинка перетинає межу ейлеревої комірки, переходячи з комірки 1 в комірку 2, маса, імпульс, енергія частинки віднімаються від маси, імпульсу, енергії комірки 1 і додаються до маси, імпульсу, енергії комірки 2.

Такі стрибки потоків складають характерну рису методу частинок в комірках. Вони приводять до великих флуктуацій величин, що розраховуються, особливо густини. Враховуючи вплив руху частинок на отримані на першому етапі допоміжні значення величин в комірках, для ейлеревих комірок визначаються остаточні значення всіх величин, що характеризують рідину в момент $t + \tau$.

Ейлерів підхід допомагає обчислювати вельми значні деформації речовин, використання ж частинок дає можливість у процесі обчислень чітко розрізняти межі речовин.

2.4.1. Опис алгоритму обчислення

Випишемо систему диференціальних рівнянь газодинаміки:

$$\frac{\partial \left[\rho y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho u y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho v y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\rho u y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\left(\rho u^{2} + p\right) y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho u v y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\rho v y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho u v y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\left(\rho v^{2} + p\right) y^{\delta}\right]}{\partial y} = \delta p,$$

$$\frac{\partial \left[W y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\left(W + p\right) u y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\left(W + p\right) v y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0.$$
(1.1)

Використані позначення:

t – час. Для нестаціонарних задач має сенс виділеної координати, пов'язаної з напрямом гіперболічності системи;

 $\delta = 0$ для плоскої течії, $\delta = 1$ для осесиметричної. Надалі розглядатимуться обидва ці випадки, тому зручно об'єднувати введенням цього формального параметра;

x, y — просторові змінні, що є або декартовими координатами для плоского руху, або осьовою і радіальною координатами відповідно для осесиметричного випадку;

u, v – компоненти вектора швидкості по осях x, y відповідно. Наприклад, у разі осесиметричної течії v означає радіальну компоненту;

 ρ – густина речовини; p – тиск; $W = \rho(E + \frac{u^2 + v^2}{2})$ – щільність повної енергії; E – внутрішня енергія. Система диференціальних рівнянь (1.1) є системою законів збереження маси, імпульсу та енергії. Тут не представлені необхідні для замикання системи термодинамічні співвідношення. Зазвичай вони пов'язують тиск із внутрішньою енергією і густиною, але іноді зручнішим виявляється введення ентропії S, температури Tта інших змінних.

Дана система, незалежно від вибору координат, реалізує точку зору Ейлера, згідно з якою досліджується поведінка рідини у фіксованій точці простору.

Алгоритм обчислення за методом частинок у комірці розглянемо на прикладі розв'язання таких двовимірних аеродинамічних задач.

Нехай в області 0 < x < A, 0 < y < B відбувається плоский або осесиметричний неусталений рух нев'язких нетеплопровідних речовин при заданих крайових та початкових умовах. Диференціальні рівняння, що описують рух у змінних Ейлера у формі законів збереження, мають вигляд (1.1).

У початковий момент часу для будь-якої точки (x, y) відомі значення величин ρ , u, v, E. В області може бути кілька речовин, можуть бути вакуумні шари. Межі області можуть бути жорсткими стінками. Через всю межу або якусь її частину може відбуватися відтік або приплив речовини. На деякі поверхні, що рухаються разом із речовиною, може діяти тиск, заданий як функція часу і координат.

В обчисленнях за методом «частинок у комірці» області інтегрування розбивають на деяке число, наприклад, рівних комірок, які утворюють нерухому ейлереву сітку (у плоскому випадку комірки – прямокутники, а в циліндричному – тороїди обертання). Для ейлеревої комірки визначають середні по комірці та віднесені до її центру значення швидкості і тиску, а також масу і питому внутрішню енергію кожної речовини, що міститься в комірці.

Речовина у плоскому випадку має вигляд набору точкових мас (частинок). В осесиметричному випадку частинки – це матеріальні кола, тобто кожна частинка має свою масу, пропорційну початковій відстані частинки від осі. У плоскому випадку також іноді необхідно використовувати частинки з різною масою для однієї і тієї ж речовини. Маса кожної речовини в ейлеровій комірці дорівнює сумі мас частинок цієї речовини, що належать цій комірці. У початковий момент часу розподіл і маса частинок такі, що описують початкову конфігурацію речовин. Надалі маса частинки залишається незмінною, а її положення, тобто координати (x, y), змінюються з часом. Спочатку, а також у процесі обчислень, деякі комірки можуть не містити частинок (порожні комірки) або містити частинки декількох речовин (мішані комірки). Це вносить особливості в обчислення.

Можливі різні трактування методу «частинок у комірці». Зупинимося на найбільш, на наш погляд, простому і зрозумілому, що розглядає метод «частинок у комірці» як своєрідну модифікацію методу розщеплювання (або дробових кроків).

Інтерпретація методу «частинок у комірці» в термінах методу розщеплювання полегшує формалізацію та аналіз методу. Будемо використовувати для простоти диференціальне формулювання методу розщеплювання. Насправді в методі частинок здійснюється розщеплювання інтегральних законів збереження.

Замість рівнянь (1.1) розглянемо дві допоміжні системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \left[\rho^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial t} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial \left[\rho^{(1)}u^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[p^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial x} = 0, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial \left[\rho^{(1)}v^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[p^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial y} = \delta p^{(1)}.$$

$$\frac{\partial \left[\frac{W^{(1)}y^{\delta}}{\partial t}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[p^{(1)}u^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[p^{(1)}v^{(1)}y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[\rho^{(2)}y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)}u^{(2)}y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)}v^{(2)}y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \left[\rho^{(2)} u^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)} (u^{(2)})^{2} y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)} u^{(2)} v^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \left[\rho^{(2)} v^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)} u^{(2)} v^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[\rho^{(2)} (v^{(2)})^{2} y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \left[W^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[W^{(2)} u^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[W^{(2)} v^{(2)} y^{\delta}\right]}{\partial y} = 0.$$

Система (1.2) випливає з системи (1.1), якщо відкинути конвективні члени. Вона означає, що в будь-якій фіксованій області зміна величин відбувається за рахунок роботи сил тиску на її межі.

Алгоритм переходу з *n*-го часового шару $t = n\tau$ (τ – крок за часом) на (n+1)-й в методі «частинок у комірці» здійснюється у два етапи і зводиться до послідовного розв'язання двох допоміжних систем диференціальних рівнянь (1.2) і (1.3).

Використовуючи як початкові дані розв'язок (ρ , u, v, E, p)ⁿ рівнянь (1.1) в момент часу $t = n\tau$, на першому етапі за допомогою різницевої схеми на ейлеровій сітці обчислюємо розв'язок ($\tilde{\rho}$, \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{E}) у момент часу $t + \tau$ системи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} &= 0, \\ \rho^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} &= 0, \\ \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y} &= 0, \\ \rho^{(1)} \frac{\partial E^{(1)}}{\partial t} + p^{(1)} \left[\frac{1}{y^{\delta}} \frac{\partial (vy^{\delta})^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right] &= 0, \end{aligned}$$
(1.4)

еквівалентної (1.2). Ці величини можна розглядати як деякі допоміжні значення відповідно густини, компонент швидкості і питомої внутрішньої енергії для ейлерової комірки у момент $t + \tau$, тобто система (1.2) дає можливість визначити зміну цих величин в комірці тільки під дією сил тиску на її межі, процеси ж перенесення не розглядаються.

Знаючи ($\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}$), можна визначити для комірок величини $\tilde{M} = \tilde{\rho}V$, $\tilde{R} = \tilde{M}\tilde{u}, \tilde{Z} = \tilde{M}\tilde{v}, \quad \tilde{W} = \tilde{M}(\tilde{E} + (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)/2)$, де V – об'єм комірки, тобто розв'язок системи (1.2) в момент $t + \tau$.

На другому етапі розв'язується система (1.3), причому як початкові дані використовуються величини із позначкою ~, отримані на першому етапі.

Інтегруючи диференціальні рівняння (1.3) по ейлеровій комірці, маємо, що зміна маси, кількості руху та повної енергії в ній дорівнює потоку відповідних величин через межу. Це дає змогу використовувати модель частинок для розв'язання рівнянь (1.3).

Частинки рухаються по сітці зі швидкостями, що визначаються \tilde{u}, \tilde{v} . Враховуючи рух всіх частинок, за величинами із позначкою ~ визначається розв'язок (M, R, Z, W) рівнянь (1.3) в момент $t + \tau$, тобто і (ρ, u, v, E). Використання частинок для розв'язання (1.3) дає змогу не розмазувати контактні межі.

Можна показати, що при нескінченному числі частинок після виключення допоміжних значень із значком ~ отримуємо різницеву схему, що апроксимує початкову систему рівнянь (1.1) і є стійкою, тобто в результаті послідовного розв'язання задач (1.2) і (1.3) маємо розв'язок системи (1.1) в момент часу $t + \tau$.

Зупинимося дещо докладніше на розрахункових формулах і на основних особливостях обчислення на І і II етапах.

Перший етап.

Позначення. Нехай h_1 , h_2 , τ – кроки сітки, відповідно по простору і часу, (k,l) – номер ейлерової комірки, координати центра якої (x_k, y_l) , $x_k = (k-1/2)h_1$, $y_l = (l-1/2)h_2$, $k = 1, 2, ..., N_1$, $l = 1, 2, ..., N_2$, а V_l – об'єм комірки (k, l): $V_l = h_1h_2$ для плоского випадку і $V_l = 2\pi y_l h_l h_2$ – для циліндричного; $f_{k,l}^n = f(t_n, x_k, y_l)$, $t_n = n\tau$.

Обчислення тиску. В момент t_n для всіх комірок відомі величини $M_{\alpha}, E_{\alpha}, u, v$, де M_{α}, E_{α} – маса і питома внутрішня енергія речовини з номером α , що міститься в комірці. Для розв'язання системи (1.2) необхідно знати тиск в ейлерових комірках.

У порожній комірці тиск вважається рівним нулю. Якщо комірка містить тільки одну речовину α , то тиск p в ній визначається з рівняння стану

$$p = p_{\alpha} = F_{\alpha}(\frac{M_{\alpha}}{V}, E_{\alpha}),$$

де $M_a / V = \rho$ – густина речовини у комірці.

Якщо ж комірка мішана, то тиск у такій комірці визначається з умови його неперервності на контактній межі, тобто передбачається, що всі речовини створюють у комірці однаковий тиск. Таким чином, якщо речовина α створює тиск $\rho_{\alpha} = F_{\alpha}(M_{\alpha}/\sigma_{\alpha}V, E_{\alpha})$, де σ_{α} – частка об'єму комірки, зайнята речовиною α , то для визначення тиску *p* комірки і σ_{α} маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_{\alpha} = p, \\ \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} = 1. \end{cases}$$
(1.5)

Якщо рівняння стану речовин мають вигляд $p = f(E)\rho$, то

$$\sigma_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}M_{\alpha}}{\sum f_{\beta}M_{\beta}}, \quad p = \frac{1}{V}\sum M_{\beta}f_{\beta},$$

тобто загальний тиск у комірці дорівнює сумі парціальних тисків усіх речовин комірки (парціальний тиск даної речовини у комірці – тиск, що створювала б речовина, якщо б вона займала всю комірку). У випадку більш складних рівнянь стану визначення тиску в мішаних комірках із системи (1.5) проводиться ітераціями.

Різницева схема 1-го етапу. Розглянемо різницеву схему для розв'язання системи рівнянь (1.2), запропоновану Ф. Харлоу:

$$\tilde{M}_{k,l} = M_{k,l}^{n},
\tilde{u}_{k,l} = u_{k,l}^{n} + \frac{V_{l}}{M_{k,l}^{n}} \chi_{1} (p_{k-1/2,l}^{n} - p_{k+1/2,l}^{n}),
\tilde{v}_{k,l} = v_{k,l}^{n} + \frac{V_{l}}{M_{k,l}^{n}} \chi_{2} (p_{k,l-1/2}^{n} - p_{k,l+1/2}^{n}),$$
(1.6)

$$\Delta \tilde{Q}_{k,l} = V_l p_{k,l}^n \left\{ \chi_1 \left[\overline{u}_{k-1/2,l} - \overline{u}_{k+1/2,l} \right] + \frac{\chi_2}{y_l^{\delta}} \left[(\overline{v} y^{\delta})_{k,l-1/2} - (\overline{v} y^{\delta})_{k,l+1/2} \right] \right\}.$$

$$\text{de } M_{k,l}^n = \sum_{\alpha} (M_{\alpha}^n)_{k,l} , \ x_1 = \frac{\tau}{h_1}, \ x_2 = \frac{\tau}{h_2}, \ \Delta \tilde{Q}_{k,l}^n = M_{k,l}^n (\tilde{E}_{k,l} - E_{k,l}^n) - \text{do-}$$

поміжне значення приросту повної внутрішньої енергії комірки, $\overline{u} = 0,5(u^n + \tilde{u}), \ \overline{v} = 0,5(v^n + \tilde{v}), a \ \overline{u}, \ \overline{v}y^{\delta}, p$ на межах комірки визначаються лінійною інтерполяцією за значеннями відповідних величин у центрах комірки. Для порожніх комірок $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{E}_{\alpha}$ покладаємо рівними нулю.

Неважко перевірити, що система рівнянь (1.6) апроксимує (1.4) з порядком апроксимації $0(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ і є дивергентною щодо кількості руху у напрямку осі x (при $\delta = 0$ і в напрямку y) і повної енергії.

При розрахунках на цьому етапі необхідно знати \bar{u} , $\bar{v}y^{\delta}$, p на межах з порожніми комірками і на межах області інтегрування. Порожні комірки не повинні вносити дисбаланс у кількість руху та енергії. Закон збереження імпульсу не порушується, якщо тиск на межі з порожньою коміркою вважається рівним нулю. Порожня комірка не вносить дисбаланс в енергію, якщо потік енергії через її межу дорівнює нулю. Якщо порожніми є комірки (k,l), то неважко показати, що ця умова виконується при $\bar{u}_{k,l\pm 1/2} = \bar{u}_{k,l\pm 1}$, $(\bar{v}y^{\delta})_{k+1/2,l} = (\bar{v}y^{\delta})_{k+1/2}$.

Різницева схема етапу І вимагає більшого числа граничних умов, ніж те, що задано для вихідних диференціальних рівнянь. Так, наприклад, при розв'язанні (1.1) на жорсткій стінці задається тільки умова рівності нулю нормальної компоненти швидкості, а для реалізації (1.6) на ній потрібно знати ще і p.

Крайові умови для різницевих рівнянь на жорсткій стінці можна задавати по-різному. Нехай, наприклад, жорсткою стінкою є ліва межа (k-1/2, l) комірки (k,l). На ній допустимо задавати такі крайові умови: $p_{k-1/2,l} = p_{k,l}$, $(\overline{v}y^{\delta})_{k-1/2,l} = 0$. Вони забезпечують рівність нулю різницевого потоку енергії через межу.

На межі з відтоком речовини важливо задати граничні умови так, щоб збурення, яке виникає внаслідок неточного значення величин на межі, не впливало на розв'язок в області інтегрування. Якщо потік речовини через межу є надзвуковий, то збурення, що виникає на межі і поширюється по речовині зі швидкістю звуку, виноситься з області потоком.

В цьому випадку значення $(\overline{v}y^{\delta})$, \overline{u} , p на межі можна задавати рівними відповідним величинам з прилеглих комірок або знаходити екстраполяцією по значеннях у внутрішніх комірках.

Визначення E_{α} . Якщо комірка містить одну речовину α , то

$$\tilde{E}_{\alpha} = E_{\alpha}^{n} + \frac{\Delta \tilde{Q}}{M_{\alpha}^{n}} \,.$$

У мішаній комірці, як видно з (1.6), приріст повної внутрішньої енергії комірки $\Delta \tilde{Q}$ обчислюється за припущення, що \tilde{u}, \tilde{v} однакові для всієї комірки. Оскільки кожна речовина отримує свій приріст $\Delta \tilde{E}_{a}$ питомої внутрішньої енергії, то

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{n} \Delta \tilde{E}_{\alpha} = \Delta \tilde{Q} .$$
 (1.7)

Решту рівнянь для визначення $\Delta \tilde{E}_{\alpha}$ отримують різними, певною мірою довільними, способами, які відповідають різним умовам термодинамічної рівноваги. Зупинимося на двох способах, використання яких, як показали обчислення, дає можливість достатньо добре описати перенесення енергії через межу речовин.

1. Якщо припустити, що речовини отримують один і той самий приріст питомої внутрішньої енергії, то, використовуючи пер-

ше рівняння (1.6) для $\Delta \tilde{E}_{\alpha}$, маємо $\Delta \tilde{E}_{\alpha} = \frac{\Delta Q}{\sum_{\beta} M_{\beta}^{n}}$.

2. З умови, що мішана комірка ізотермічна у разі, коли $E_{\alpha} = (c_V)_{\alpha} T$, де T – температура, маємо $\frac{\Delta \tilde{E}_{\alpha}}{(c_V)_{\alpha}} = \Delta T$ і, згідно з (1.6),

$$\Delta \tilde{E}_{\alpha} = \frac{(c_{\nu})_{\alpha}}{\sum_{\beta} (c_{\nu})_{\beta} M_{\beta}} \Delta \tilde{Q} \,.$$

Зауважимо, що на першому етапі в комірці може вийти від'ємна внутрішня енергія. Якщо цього не допускати, то, згідно з (1.6), випливає, наприклад, у випадку ідеального газу, таке обмеження на крок за часом:

$$\tau \leq \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{1}{2(\gamma - 1)u_m}, \quad u_m = \max_{k,l} (|u_{k,l}|, |v_{k,l}|)$$

Етап I завершується визначенням величин $\tilde{R}, \tilde{Z}, \tilde{W}_{\alpha}$ для комірок.

Другий етап.

На другому етапі за допомогою моделі частинок розв'язуємо систему (1.3), причому як початкові дані використовуємо величини із позначкою ~, отримані на етапі І.

Визначення швидкості і нових координат частинок.

Частинки рухаються по ейлеревій сітці. Якщо (x^n, y^n) – координати частинки у момент t_n , а (u_r, v_r) – компоненти швидкості, то положення частинки в момент t_{n+1} визначається координатами $x^{n+1} = x^n + u_r \tau$, $y^{n+1} = y^n + v_r \tau$.

Компоненти (u_r, v_r) швидкості частинки можна визначити різними способами, наприклад, лінійними інтерполяціями по \tilde{u}, \tilde{v} сусідніх комірок. Зауважимо, що таке визначення компонент швидкості частинки еквівалентне інтерполяції швидкості з вагами за площами

$$u_r = \frac{\sum_{\beta=1}^4 S_\beta \tilde{u}_\beta}{\sum_{\beta=1}^4 S_\beta}, \quad v_r = \frac{\sum_{\beta=1}^4 S_\beta \tilde{v}_\alpha}{\sum_{\beta=1}^4 S_\beta},$$

де S_{β} – площі, які комірка, побудована з центром у частинці, покриває в кожній з чотирьох комірок, що беруть участь в інтерполяції.

У ряді обчислень одновимірних рухів швидкість частинок вважалась рівною відповідно $(\tilde{u}, \tilde{v}), (u^n, v^n)$ і $(\overline{u}, \overline{v})$ тої комірки, де знаходиться частинка. Результати обчислень при цьому були менш точними, ніж у тих випадках, коли швидкість частинки визначалася інтерполяцією. Визначення швидкості частинки інтерполяцією, але не за (\tilde{u}, \tilde{v}) , а за (u^n, v^n) або $(\overline{u}, \overline{v})$ в ряді випадків також знижувало точність. При визначенні швидкості частинки інтерполяцією за швидкостями сусідніх комірок може виявитися, що серед комірок, які беруть участь в інтерполяції, будуть порожні комірки або ж зовнішні відносно розглянутої області інтегрування. Виникає питання, як у них задавати компоненти швидкості?

Якщо будь-яка комірка з тих, які беруть участь в інтерполяції, є порожньою, то компоненти швидкості в ній можна вважати (це підтверджено розрахунками) рівними відповідним компонентам тої комірки, де знаходиться частинка.

При обчисленні швидкостей частинок, що знаходяться у межових комірках, вводять фіктивні зовнішні комірки, в яких швидкості задають в залежності від типу меж.

Якщо межа є жорсткою стінкою, що збігається з межею комірки або віссю симетрії, то тангенціальна компонента швидкості у фіктивній комірці покладається рівною відповідній компоненті внутрішньої комірки, що прилягає до фіктивної. Для нормальної до межі компоненти швидкості у фіктивній комірці можливі два способи задання:

1) нормальна компонента швидкості у фіктивній комірці $(v_n)_{\phi}$ дорівнює зі зворотнім знаком нормальній компоненті для внутрішньої комірки, тобто $(v_n)_{\phi} = -(v_n)_{e}$, що відповідає заданій граничній умові;

2) $(v_n)_{\phi} = (v_n)_{\theta}$.

При першому способі задання швидкості у фіктивних комірках нормальна до межі компонента швидкості частинки прямує до нуля при наближенні частинки до межі. Якщо частинка підійшла дуже близько до межі, то вона якийсь час буде знаходитись біля неї і може рухатися тільки вздовж межі. Це не завжди бажано в задачах з рухом речовини до стінки. У них більш пріоритетним є другий спосіб; а там, де основний рух відбувається уздовж межі або від неї, кращим є перший спосіб. При будь-якому τ, взагалі кажучи, в розрахунках можуть бути частинки, які виходять з області інтегрування. Такі частинки повертаються в область, наприклад, дзеркальним відображенням щодо межі.

Якщо межа є неперервною (межа з припливом або відтоком речовини), то компоненти швидкості у фіктивній комірці задаються рівними відповідним компонентам прилеглої до неї внутрішньої комірки. Частинка, що залишає область інтегрування через неперервну межу, вважається такою, що витекла, і вилучається з подальшого розгляду.

Зауважимо, що визначення швидкості частинок може призводити до утворення загальмованого шару вздовж ліній ковзання рідин. Гальмування може виникати також на контактній межі, оскільки в мішаній комірці покладають однаковими для всієї комірки обидві компоненти швидкості (у той час як однакові тільки компоненти, нормальні до контактної межі), що еквівалентно введенню на контактній межі деякої в'язкості зсуву.

Визначення $(M_{\alpha}, W_{\alpha}, R, Z)_{k,l}^{n+1}$. Тут враховують вплив руху частинок на значення величин $(\tilde{M}_{\alpha}, \tilde{R}, \tilde{Z}, \tilde{W}_{\alpha})$ у комірках. Якщо частинка після руху на даному кроці залишається в тій же комірці, де була в момент t_n , то вона не впливає на розглянуті величини в цій комірці. Нехай, наприклад, частинка речовини α переходить з комірки (k,l) у комірку (k,l+1). Тоді вона забирає з (k,l) і приносить в (k,l+1) масу m, кількість руху $m\tilde{u}_{k,l}$, $m\tilde{v}_{k,l}$ та енергію $m(\tilde{E} + (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)/2)_{k,l}$. Якщо частинка залишає розглянуту область через неперервну межу з відтоком, то враховується тільки відтік частинки з комірки.

Після переміщення всіх частинок системи для всіх ейлерових комірок маємо $(M_{\alpha}, R, Z, W_{\alpha})^{n+1}$.

Визначення $(u, v, E_{\alpha})^{n+1}$. Оскільки для комірки відомі $(M_{\alpha}, R, Z)^{n+1}$, то можна визначити

$$u^{n+1} = \frac{R^{n+1}}{M^{n+1}}, \quad v^{n+1} = \frac{Z^{n+1}}{M^{n+1}}, \quad M^{n+1} = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{n+1}.$$

Знаючи $(W_{\alpha}, M_{\alpha})^{n+1}$ і нові значення компонент швидкості комірки, а отже і кінетичну енергію, визначаємо питому внутрішню енергію кожної речовини

$$E_{\alpha}^{n+1} = \frac{W_{\alpha}^{n+1}}{M_{\alpha}^{n+1}} - \frac{1}{2} \Big[(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 \Big].$$

Зауважимо, що таким чином для кожної речовини у комірці виконується закон збереження маси, імпульсу та повної енергії, але при цьому може відбуватися завищення внутрішньої енергії за рахунок зменшення кінетичної. У мішаних комірках, хоча загальна внутрішня енергія комірки невід'ємна, внутрішня енергія окремої речовини може бути негативною. Цьому можна запобігти, якщо трохи змінити алгоритм визначення E_{α}^{n+1} .

Алгоритм другого етапу – це деяка дискретна модель, яка не може бути представлена як однорідна різницева схема. Якщо число частинок N у комірці велике, то потік частинок можна усереднити, і ми приходимо до асимптотичного представлення методу частинок у вигляді деякої однорідної різницевої схеми. Можна показати, що при такому розгляді алгоритм другого етапу – це різницева схема на ейлеровій сітці, в якій просторові похідні апроксимуються різницевими відношеннями «вперед» або «назад» залежно від напрямку потоку речовини. Ця схема дивергентна й апроксимує систему рівнянь (1.3) з порядком $O(\tau + h_1 + h_2)$.

2.4.2. Властивості методу «частинок у комірці»

Аналіз апроксимації та стійкості методу частинок будемо проводити у припущенні, що $N \rightarrow \infty$. Такий асимптотичний підхід дає змогу зрозуміти ряд особливостей методу, не пов'язаних з частинками.

Апроксимація. Різницеву схему повного кроку отримуємо виключенням допоміжних величин із позначкою ~ з асимптотичних рівнянь етапу II і рівнянь (1.6). Можна показати, що схема повного кроку, що дає перехід з *n*-го часового шару на n+1, є дивергентною, тобто виконуються закони збереження маси, кількості руху уздовж осі та повної енергії.

З розвинення кожного члена різницевої схеми в ряд Тейлора в точці (k,l,n) випливає, що вона апроксимує вихідну систему диференціальних рівнянь з порядком $O(\tau + h_1 + h_2)$.

Схема є гнучкою, тому що апроксимаційна в'язкість не залежить від відношення τ і h.

Зазначимо, що основна апроксимаційна в'язкість методу залежить від швидкості потоку. У неї входять члени виду

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial E}{\partial y} \right), \quad \lambda = \frac{h}{2} \rho |v|, \qquad (2.1)$$

відповідно в першому, другому і третьому рівняннях у випадку одновимірного руху. Такий вид в'язкості викликаний урахуванням напряму потоку на етапі II.

Стійкість. В'язкість. Аналіз стійкості схеми етапів І і ІІ проводився методом Неймана, а для схеми повного кроку – і методом першого диференціального наближення. Неважко показати, що схема (1.6) етапу І є абсолютно нестійкою.

Асимптотична схема етапу II є умовно стійкою. Умова стійкості в одновимірному випадку має вигляд $\tau < h/|\tilde{v}|$. Аналіз стійкості схеми повного кроку показує, що вона є умовно стійкою, тобто нестійкість схеми на етапі I компенсується другим етапом. Умова стійкості має вигляд

$$\tau \le \frac{|v|h}{v^2 + b^2},\tag{2.2}$$

де *b* < *c*, *c* – адіабатична швидкість звуку.

З (2.1), (2.2) випливає, що апроксимаційна в'язкість та умови стійкості не інваріантні щодо перетворення Галілея. Це може бути використано для покращення стійкості, але може мати і негативний вплив, оскільки, наприклад, ширина зони «розмазування» ударної хвилі залежить від швидкості потоку.

Із умови (2.2) видно, що в розрахунках за методом частинок важлива величина |v| у порівнянні з c. Якщо |v| >> c, то обмеження на τ буде мати вигляд $\tau \le h/|v|$. При |v| << c для стійкості потрібен дуже дрібний крок за часом.

Така залежність від v призводить до автоколивань чисельного розв'язку: в області малих швидкостей, якщо порушити умову (2.2), починається «розгойдування», відбувається втрата теплової енергії, перехід її в кінетичну. Але коливання не зростають нескінченно, оскільки з ростом v з деякого моменту часу t вибране τ вже починає задовольняти умову стійкості, коливання згасають, vзнову набуває малих значень і т. д. Величина таких коливань залежить від τ .

Слід зазначити, що в'язкість (2.1) не є також інваріантною щодо перетворення повороту. Це може призвести до порушення симетрії при розрахунках сферично симетричних рухів в циліндричних координатах. Неінваріантність щодо перетворень перенесення і повороту властива багатьом різницевих схем у поданні Ейлера.

Для наскрізного обчислення стрибків з допомогою скінченно-різницевих методів у ряді випадків необхідно вводити додаткову штучну в'язкість. Вона дає змогу «розмазувати» ударну хвилю на вузьку область, де параметри речовин змінюються, хоча і різко, але вже неперервно.

Обчислення за методом частинок у комірці показали, що для наскрізного розрахунку ударних хвиль, як правило, досить апроксимаційної в'язкості методу, причому хвиля «розмазується» приблизно на 3–4 інтервали. Але використання додаткової в'язкості в методі все ж доцільніше для посилення стійкості та монотонності.

Введення, наприклад, в *р* адитивної штучної лінійної в'язко-

сті $q = -ac\rho h \frac{\partial v}{\partial y}$, a = const > 0 робить схему першого етапу умовно

стійкою. Для схеми повного кроку умови стійкості мають вигляд:

$$\tau \le \frac{h}{|v| + 2ac}, \quad \tau \le \frac{h(|v| + ac)}{v^2 + 2|v|c + \mu^2},$$
$$\mu^2 = \frac{p}{2\rho^2 \varphi_p} - \frac{\varphi_p}{\varphi_p}, \quad E = \varphi(\rho, p).$$

Обчислення з використанням цієї в'язкості показали, що така схема стала більш монотонною і більш стійкою. При цьому контактна межа не розмивається, а ударна хвиля, як і очікувалось, розмивається сильніше (приблизно на 5 рахункових інтервалів). Тому

лінійну в'язкість не слід застосовувати при розв'язанні задач, де немає застійних областей.

Для підвищення стійкості та монотонності різницевих схем рекомендується використовувати штучну в'язкість, яка є комбінацією лінійної і квадратичної, причому вона діє по-різному в залежності від диференціальних властивостей різницевого розв'язку (знак $\partial v / \partial y$, величину $\left| \partial^2 v / \partial y^2 \right|$ у порівнянні з $\left| \partial v / \partial y \right|$). У ряді випадків цей спосіб введення в'язкості дає можливість гасити осциляції розв'язку, одержуваного за методом частинок у комірці. Можливе використання й інших видів «псевдов'язкості» для посилення стійкості схеми етапу І. Застосування неявної схеми на етапі І призводить до підвищення стійкості схеми повного кроку. У цьому випадку $\tau \leq h / |v|$.

Зазначені факти мають місце і в самому методі частинок, і в його асимптотиці, при $N \rightarrow \infty$. Крім того, є флуктуації, пов'язані зі скінченним числом частинок. Оскільки потік речовини через межі змінюється дискретно, це призводить до флуктуації густини і тиску. Величина цих флуктуацій залежить від числа частинок.

Для зменшення флуктуацій, пов'язаних із частинками, використовуються, наприклад, такі прийоми.

1. Частинка розглядається не як точкова маса, а як прямокутник (у разі плоского руху), розміри якого не змінюються з часом і який рухається без обертання. На етапі ІІ пересування частинки проводиться по її центру так само, як і раніше, а при визначенні потоків враховується частка прямокутника – частинка, що увійшла в комірку або вийшла з неї.

2. Застосовуються різні способи згладжування, наприклад, перерахунок густини за формулами, що апроксимують рівняння нерозривності.

Зауважимо, що якщо для опису потоків на другому етапі не використовувати частинки, а просто апроксимувати (1.3) на ейлеровій сітці явною різницевої схемою, що враховує напрямок руху потоку, як це пропонується в методі «великих частинок», то схема повного кроку природно буде більш монотонна. Однак це вже чисто ейлерів підхід, хоча, як і в методі частинок, обчислення на кожному часовому кроці проводиться в два етапи. Такий метод прида-

тний для обчислення течій, хоча і з великими деформаціями, але тільки однорідної речовини. Описувати ж рух контактних поверхонь при цьому стає неможливо.

Точність методу. Недоліки методу. Аналіз точності проводився на основі обчислень одновимірних і двовимірних газодинамічних задач і порівняння результатів з точними розв'язками, з результатами обчислень, отриманими іншими різницевими методами, та з експериментальними даними.

Зупинимося на деяких факторах, що впливають на точність.

Якщо не вживати додаткових заходів, схема методу є дуже немонотонною (немонотонність схеми етапу I, використання частинок на етапі II). При малому числі частинок та сильній залежності тиску від густини коливання будуть значними. Але обчислення показали, що коливання відбуваються біля середніх величин, близьких до дійсних. Тим не менш, немонотонність схеми не дозволяє достатньо добре визначати значення величин у будь-який момент в окремих точках течії. Проте основні функціонали руху, загальна картина перебігу визначаються досить точно.

При обчисленні одновимірних і двовимірних аеродинамічних течій вивчалося питання про вплив числа частинок. Виявилося, що для правильного опису руху необхідний певний мінімум частинок, свій для кожного завдання, причому існує оптимальне число частинок у комірці, вище якого спостерігається лише незначне поліпшення результатів.

Вибір оптимального числа частинок – складне питання, яке повинно вирішуватися окремо для кожної конкретної задачі. Велике обмеження на число частинок накладає пам'ять і швидкість ЕОМ. Потрібно, виходячи з можливостей комп'ютера, мати достатню кількість ейлерових комірок, щоб добре описувати рідину на першому етапі, і необхідне число частинок для правильного опису руху і для того, щоб не було дуже сильних коливань густини і тиску.

Ясна річ, що для середовищ, які з часом будуть стискуватися, можна починати з невеликого числа частинок у комірці (по 2–4 і навіть по одній). Виняток становить рух, в якому ударне стиснення дає мале зростання густини.

Для середовищ, які будуть розширюватися, потрібно спочатку брати дуже велике число частинок, щоб потім правильно опису-

вати рух. Багато частинок потрібно брати в разі, коли необхідно з великою точністю стежити за контактною границею.

Універсальних рекомендацій дати не можна. Зазвичай в розрахунках двовимірних течій при виборі сітки використовують апріорні відомості про шуканий розв'язок.

На точність результатів впливає і розташування частинок у комірці. Частинки всередині комірки можуть розташовуватися в початковий момент рівномірно. Наприклад, комірку розбивають на N рівних прямокутників, і частинка, маса якої дорівнює масі такого прямокутника у разі плоского руху і масі тороїда, отриманого від обертання цього прямокутника навколо осі, для осесиметричного руху, ставиться в центрі прямокутника.

У ряді випадків рекомендується проводити регулярний зсув частинок. Іноді, особливо в задачах з сильною залежністю p від ρ , нерівномірне розташування частинок дає змогу зменшувати коливання величин, які є при тому ж числі частинок в комірці, але рівномірному їх розподілі, оскільки це допомагає уникнути одночасного переходу значної кількості частинок з однієї комірки в іншу. Первісне розташування частинок у комірці повинно бути таким, щоб воно не призводило до двовимірного руху там, де рух є одновимірним.

Як вже зазначалося раніше, одним із джерел неточностей обчислень за методом частинок у комірці є його неінваріантність щодо перетворень перенесення і повороту. Відсутність інваріантності щодо перенесення створює труднощі в розрахунках застійних областей, а неінваріантність щодо повороту може призводити в ряді випадків до порушення симетрії при обчисленні сферичносиметричного стискання речовини.

Деякі труднощі виникають при русі по ейлеровій сітці лагранжевої поверхні, на яку діє заданий тиск. Межа з прикладеним тиском апроксимується ступінчастою кривою, що складається з відрізків координатних ліній. Вона переміщується стрибками: поки не підуть всі частинки з примежової комірки, межа не пересувається. При цьому можуть виникати деякі ефекти обчислення (на їхній масштаб впливає і число частинок у комірці), наприклад, відрив окремих частинок від поверхні.

Зауважимо про ще два недоліки методу частинок в комірці.

За допомогою методу частинок у комірці важко стежити за особливостями потоку, малими в порівнянні з усім потоком. Також, використовуючи нерухому ейлерову сітку, не можна отримати достатню інформацію у разі, коли при русі речовини стискаються до області, що містить невелику кількість ейлерових комірок. Метод частинок у комірці вимагає більше пам'яті і витрат машинного часу, ніж суто лагранжевий або суто ейлерів підходи.

Про реалізацію методу на ЕОМ. Ефективне застосування того чи іншого різницевого методу багато в чому залежить від ЕОМ і від якості програми. При розв'язанні необхідно перетворювати і зберігати величезну кількість інформації. Якщо N_1N_2 – кількість комірок, N – середнє число частинок у комірці, то на кожному кроці необхідно зберігати інформацію $(4+3N)N_1N_2$ слів (без урахування мішаних комірок). За вельми скромними підрахунками для $N_1N_2 = 6000$, N = 4, це становить приблизно 100 тис. слів.

Має місто ще одна трудність при реалізації методу: про кожну частинку потрібно знати, в якій комірці вона знаходиться в даний момент часу і куди перейде в наступний. При створенні програми, якщо ми хочемо розв'язувати задачі (і не поодинокі) в розумні терміни і з допустимими витратами, доводиться дбати про оптимальне співвідношення інформації, яка розраховується і зберігається, щоб не було зайвих пошуків та обмінів даними і щоб обчислення не проводилися там, де їх можна не проводити. Необхідно враховувати і використовувати особливості ЕОМ.

Створення економної програми – дуже складне завдання. Від якості програми багато в чому залежить успіх методу.

При реалізації методу створюється зазвичай цілий комплекс програм – програма, що здійснює перехід з одного часового кроку на інший, і різні сервісні програми. До сервісних програм належать всілякі обробки та видачі результатів на друк і графіки: поля частинок (частинки різних речовин зображаються по-різному), поля швидкостей (для кожної речовини своїм кольором), залежності різних величин від x, y або t (з попереднім згладжуванням, якщо це необхідно) та ін.

Зазвичай досить великою за обсягом є програма обчислення початкових даних: вона дає змогу звести до мінімуму роботу над вхідною інформацією для завдання.

Дуже корисною при розв'язанні задач за методом частинок у комірці виявилася програма, що дає змогу використовувати в процесі обчислення змінне поле інтегрування. Програма допомагає використовувати в задачах, де відбувається розширення, необхідне число комірок у якійсь невеликій області для найбільш акуратного опису руху в ній, а в міру розширення проводити укрупнення сітки, змінювати розстановку і число частинок, додавати нові області. Вона дає можливість викидати з розгляду ті області, які вже не мають впливу на результати обчислень, задавати нові лагранжеві поверхні з тиском, подрібнювати сітку при стисканні речовин. Перехід від однієї різницевої сітки до іншої проводиться з виконанням законів збереження маси, імпульсу, повної енергії. Ця програма робить метод частинок у комірці більш гнучким і підвищує точність обчислень, не збільшуючи час обчислень.

Контрольні питання

- 1. Записати різницеву схему методу Ф. Харлоу.
- 2. У чому полягає двохетапність методу «частинок у комірці»?
- 3. Визначення швидкості і нових координат частинок.
- 4. Недоліки методу «частинок у комірці».
- 5. Особливості комп'ютерної реалізації методу Ф. Харлоу.
- 6. Властивості методу «частинок у комірці».
- 7. Різницева схема 1-го етапу.
- 8. Вибір оптимального числа частинок.
- 9. Розрахункові формули на першому етапі.
- 10. Основні особливості обчислення на другому етапі.

2.5. МЕТОДИКА «МЕДУЗА» РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ АЕРОДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ

2.5.1. Постановка диференціальної задачі

Основою постановок задач, що розв'язуються запропонованою методикою, є лагранжева система

$$\frac{du}{dt} = -\sigma \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\sigma \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dx}{dt} = u,$$
(1.1)
$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dE}{dt} = -p \frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \sigma div\{u, v\}.$$

Ця система замикається рівнянням стану у формі

$$E = E(p, \rho). \tag{1.2}$$

У початковий момент часу $t = t_0$ стан середовища в деякій області *G* змінних (x, y) вважають відомим

$$u = u_0(x, y), v = v_0(x, y), \rho = \rho_0(x, y), p = p_0(x, y).$$
(1.3)

На межі Г області *G* задана правильна гранична умова, що коректно замикає задачу, наприклад:

$$p\big|_{\Gamma} = p(t, M), \quad M \in \Gamma.$$
 (1.4)

Потрібно обчислити розв'язок еволюційної системи (1.1), (1.2) з умовами (1.3), (1.4).

Насправді система, що розв'язується, відрізняється від зазначеної в'язким додатком до тиску

$$q = -c\frac{d\sigma}{dt} \left| \frac{d\sigma}{dt} \right|$$

всюди, крім (1.1). Надалі про це згадувати не будемо і всі викладки проведемо з точністю до цього додатку.

2.5.2. Будова сітки

Конструювання різницевої схеми пов'язане з ідеями Паста й Улама (див. [4]) щодо подання середовища у вигляді глобул. Точ-

ніше кажучи, середовище має представлення у вигляді точок і оточуючих їх областей. Кожна точка несе таку інформацію:

$$x, y$$
 – Ейлерові координати;
 u, v – компоненти швидкості;
 p – тиск;
 σ – питомий об'єм;
 m – маса точки; (2.1)
 q – в'язкість;
 N – номер рівняння стану;
 z – ознака стану;
 $A_{\rm e}$ – алреси «сусілів» ланої точки.

Вказівка «сусідства» A_i означає, що при обчисленні використовується сітка, що являє собою граф з вершинами у лагранжевих точках і ребрами, які позначають «сусідство». У процесі обчислення архітектура графа змінюється відповідно до метричних міркувань про близькість точок. Тому ця методика може бути названа «безсітковою» або методикою на нерегулярній сітці.

Для зазначення необхідних властивостей сітки введемо відношення «сусідства» $A \rightarrow B$ ($A \in$ «сусідом» B). Елементарні властивості цього відношення полягають у такому:

а) $A \to B \Longrightarrow B \to A$, тобто завжди має сенс $A \leftrightarrow B$, що означає неорієнтованість графа, відображену реченням: якщо $A \in \ll$ сусідом» B, то $B \in \ll$ сусідом» A;

б) якщо $C_j \leftarrow A$, $D_k \leftarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $j,k = 1,2,...,l \ (l > 3)$, то знайдуться дві і лише дві точки E і F такі, що $E \in \{C_j\}$, $E \in \{D_k\}$, $F \in \{C_j\}$, $F \in \{D_k\}$ і F не є «сусідом» E. Іншими словами: якщо A і B – «сусіди», то в перетині множини «сусідів» A з множиною «сусідів» B знайдуться дві точки E і F, які не є «сусідами» між собою. Ця властивість вірна, якщо число «сусідів» кожної точки не менше чотирьох (див. рис. 5.1).

Дана властивість важлива в подальшому для перебудови «сусідства», яка відбувається за стандартним алгоритмом при числі «сусідів», більшому трьох. Перебудова графа при числі «сусідства» рівному трьом можлива, але при цьому слід використовувати ін-

ший алгоритм. Щоб не ускладнювати програму, було прийнято конструкцію сітки з числом «сусідів», не меншим чотирьох.



Рис. 5.1

Кожній точці сіткового графа ставиться у відповідність деякий багатокутник, іменований далі областю відповідності. При цьому слід дотримуватися таких умов:

1) точки сіткового графа повинні належати внутрішнім точкам своєї області відповідності;

2) вся область руху повинна бути покрита множиною областей відповідності;

3) вершини областей відповідності повинні бути точками лагранжевої сітки, тобто повинні переміщатися разом із середовищем;

4) області відповідності повинні бути опуклими.

Рис. 5.1 ілюструє співвідношення між вершинами графа і областями відповідності. Очевидно, умову 3 (наприклад, для точки M на рис. 5.1) можна задовольнити, якщо вважати координати вершин областей відповідності лінійними комбінаціями координат вихідних точок (C_1BD_7), що не залежать від часу. У програмі «Медуза» ці маси обрані по 1/3, але, взагалі кажучи, ними можна розпорядитися по-іншому для досягнення визначеної мети, наприклад, поліпшення апроксимації меж.

З цього способу конструювання випливає ще одна така властивість областей відповідності:

5) у вершині багатокутника відповідності (*M*) збігаються рівно три сторони.

Резюме висловлених положень про сітку можна сформулювати таким чином:

дискретизація рухомого континуума здійснюється точками, які є вершинами плоского неорієнтованого графа.

З подальшого викладу буде зрозуміло, що топологія графа індукується ейлеревою метрикою, а його архітектура змінюється з часом, пристосовуючись до руху так, що число елементів графа – вершин і ребер – залишається постійним.

У зв'язку з такою будовою сітки виникає багато цікавих запитань на зразок розподілу *n*-кутових елементарних циклів графа за випадковим, скажімо, рівномірним розподілом вершин на площині або розподілу *n*-гранників в об'ємі.

2.5.3. Дискретизація задачі

Обчислення за методикою «Медуза» починається з розстановки точок в області. «Добра» розстановка точок допомагає отримувати більш детальну інформацію про рух. Цей момент не алгоритмізований і скеровується досвідом і смаками обчислювача.

Із загальних міркувань можна висловити лише те, що точки, які зближуються в обчисленні сильніше за інші, варто розставляти рідше, а ті, що розширюються — густіше. Це — не рецепт, а лише спосіб отримання більш рівномірного розподілу точок при русі. Можливо, цього робити не слід, якщо інформативність різних ділянок G повинна бути різною.

Після розстановки точок здійснюється встановлення «сусідства». Початкові «сусідства» можна отримати, наприклад, на основі розбиття G на області Діріхле, кожна з яких є континуальною однозв'язною підмножиною G, віднесеною до A_i за принципом метричної близькості. Іншими словами, кожна точка $Q \in G$ і $Q \notin \{A_i\}$ віднесена до тієї точки A_i , до якої вона розташована ближче, ніж до інших.

Таке розбиття G дає можливість однозначно встановити «сусідів» для кожної точки, оскільки межами областей Діріхле є лінії, рівновіддалені від сусідніх точок. Таким чином будується початковий граф, що задовольняє пункт а) про взаємність «сусідства» і вимоги пунктів 1, 2, 4 для областей відповідності (оскільки області Діріхле мають властивості розбиття G на опуклі полігони).

Використанню областей Діріхле як областей відповідності у задачах аеродинаміки перешкоджає пункт 3 про лагранжевий опис вершин областей відповідності. Тому після встановлення «сусідства» робиться розбивка на зони відповідності з наступним обчисленням мас.

Якщо серед областей відповідності зустрічаються трикутники, то точки або трохи зміщуються для отримання чотирьох «сусідів», або їм приписується четвертий «сусід» з числа «сусідів сусідів».

Дискретизація аеродинамічних величин за початковими даними здійснюється далі очевидним чином. Отже, початкова інформація (2.1) встановлена для кожної внутрішньої точки. Специфіку інформації про крайові точки ми розглянемо пізніше.

Неописану ознаку z вважаємо рівною нулю.

2.5.4. Обчислення внутрішніх точок

Обчислення полягає у послідовному переході з одного часового шару на наступний відповідно до різницевої апроксимації системи (1.1), (1.2).

Один із різновидів апроксимації полягає в різницевому поданні об'ємних законів збереження. Терміном «об'ємні» ми наголошуємо на тому, що вони віднесені до тіл обертання навколо осі x, отриманих з багатокутників відповідно. Наведемо деякі формули.

Нехай x_0, y_0 позначають координати точки, що розраховується, x_i, y_i – координати її «сусідів» (див. мал. 2).

Позначимо координати вершин багатокутників відповідності як $x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}$. Ці координати не зберігаються, а розраховуються, на-

приклад, за формулами

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_0 + x_i + x_{i+\frac{1}{2}}}{3}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_0 + y_i + y_{i+\frac{1}{2}}}{3}.$$
 (4.1)

Далі розраховується площа S трикутника, що є частиною області відповідності:

$$S_{i} = \frac{1}{2} \left[\left(x_{i-\frac{1}{2}} - x_{0} \right) \left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{0} \right) - \left(x_{i+\frac{1}{2}} x_{0} \right) \left(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{0} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Потім розраховується об'єм тора багатокутного перерізу, но-рмований на одиничний азимутальний кут

$$V^{0} = \sum_{i=1}^{n} S_{i} \frac{y_{0} + y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}}}{3}.$$
 (4.3)

Тут *n* – число вершин багатокутника відповідності. Питомий об'єм обчислюється за формулою

$$\sigma^0 = \frac{V^0}{m} \,. \tag{4.4}$$

Тут і в подальших формулах нижній індекс означає приналежність до нижнього часового шару, верхній – до верхнього.

Тиск p^0 обчислюється з такої системи рівнянь:

$$E^{0} - E_{0} + \frac{p^{0} + p_{0}}{2} (\sigma^{0} - \sigma_{0}) = 0,$$

$$E^{0} = E(p^{0}, \sigma^{0}),$$

$$E_{0} = E(p_{0}, \sigma_{0}).$$

(4.5)

Тиск у вершинах багатокутника відповідності

$$p^{i+\frac{1}{2}} = \frac{p^0 + p^i + p^{i+1}}{3}.$$
 (4.6)

Лінійно інтерполюючи тиск з вершин на грані тора, отримуємо силу, що діє на нього. Використовуючи різницеву форму рівнянь Ньютона, отримаємо апроксимацію рівнянь Ейлера:

$$m_{0} \frac{u^{0} - u_{0}}{\Delta t} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \left(y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left[\left(2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2}} \right) p^{i-\frac{1}{2}} + \left(y_{i-\frac{1}{2}} + 2y_{i+\frac{1}{2}} \right) p^{i+\frac{1}{2}} \right]$$

$$(4.7)$$

$$m_{0} \frac{v^{0} - v_{0}}{\Delta t} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \right) \left[\left(2x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} \right) p^{i-\frac{1}{2}} + \left(x_{i-\frac{1}{2}} + 2x_{i+\frac{1}{2}} \right) p^{i-\frac{1}{2}} \right] + \sum_{i=1}^{n} S_{i} \frac{p^{0} + p^{i-\frac{1}{2}} + p^{i+\frac{1}{2}}}{3}.$$

Звідси, обчисливши швидкості u^0, v^0 , отримаємо координати зсунутих точок

$$x^{0} = x_{0} + u^{0}\Delta t, \quad y^{0} = y_{0} + v^{0}\Delta t.$$
 (4.8)

На цьому обчислення часового кроку внутрішньої точки закінчується.

Для доведення апроксимації системи (1.1) формулами (4.1) – (4.7), введемо циклічні суми, що віднесені до точки (x_0, y_0) . Сумування в них поширюється на всіх «сусідів» точки (x_0, y_0) , що вибираються для зручності послідовно. Термін «циклічні», окрім впорядкованості вершин, підкреслює незалежність суми від вибору номера початку сумування, тобто

$$\sum_{i} f_i = \sum_{i} f_{i+k} \tag{4.9}$$

при довільному цілому к.

Щоб скоротити запис, введемо в околі (x_0, y_0) місцеві координати типу

$$\xi_i = x_i - x_0, \quad \eta_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+\frac{1}{2}} - y_0 \quad \text{i т.д.}$$
 (4.10)

Припускаючи достатню гладкість розв'язків системи (1.1), запишемо розвинення в ряд Тейлора для тиску

$$p^{i} = p^{0} + \frac{\partial p}{\partial x}\xi_{i} + \frac{dp}{\partial y}\eta_{i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}p}{\partial x^{2}}\xi_{i}^{2} + \frac{\partial^{2}p}{\partial x\partial y}\xi_{i}\eta_{i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}p}{\partial y^{2}}\eta_{i}^{2}.$$
 (4.11)

Підстановка (4.11) в перше з рівнянь (4.7) з урахуванням (4.9) і (4.10) дає, після належних перетворень, такий вираз

$$\begin{split} m_{0} \frac{u^{0} - u_{0}}{\Delta t} &= \left\{ p_{0} \left[y_{0} \left(\sum_{i} \eta_{i-\frac{1}{2}} - \sum_{i} \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i} \eta_{i-\frac{1}{2}}^{2} - \sum_{i} \eta_{i+\frac{1}{2}}^{2} \right) \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \sum_{i} \left(\xi_{i-\frac{1}{2}} \eta_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i+\frac{1}{2}} \eta_{i-\frac{1}{2}} \right) \frac{3y_{0} + \eta_{i+\frac{1}{2}} + \eta_{i-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i} \eta_{i}^{2} \xi_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \sum_{i} \eta_{i+\frac{1}{2}}^{2} \xi_{i+\frac{1}{2}} \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \sum_{i} \left(\eta_{i-\frac{1}{2}} - \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \left[\left(3y_{0} + 2\eta_{i-\frac{1}{2}} + \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \eta_{i-\frac{1}{2}} + \left(3y_{0} + \eta_{i-\frac{1}{2}} + 2\eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \eta_{i+\frac{1}{2}} \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{36} \frac{\partial^{2} p}{\partial x^{2}} \sum_{i} \left(\eta_{i-\frac{1}{2}} - \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \left[\left(2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\xi_{i-1}^{2} + \xi_{i}^{2} \right) + \left(y_{i-\frac{1}{2}} + 3y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\xi_{i}^{2} + \xi_{i+1}^{2} \right) \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{36} \frac{\partial^{2} p}{\partial y^{2}} \sum_{i} \left(\eta_{i-\frac{1}{2}} - \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \left[\left(2y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\xi_{i-1} - \eta_{i-1} + \xi_{i} \eta_{i} \right) + \left(y_{i-\frac{1}{2}} + 2y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\xi_{i} \eta_{i} + \xi_{i+1} \eta_{i+1} \right) \right] \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{36} \frac{\partial^{2} p}{\partial y^{2}} \sum_{i} \left(\eta_{i-\frac{1}{2}} - \eta_{i+\frac{1}{2}} \right) \left[\left(2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\eta_{i-1}^{2} + \eta_{i}^{2} \right) + \left(2y_{i-\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2}} \right) \left(\eta_{i}^{2} + \eta_{i+1}^{2} \right) \right] \right\} \end{split}$$

Перший і третій доданки правої частини (4.12) дорівнюють нулю, в цьому легко переконатись, використовуючи (4.9). Формули (4.2), (4.3), (4.9), (4.10) показують, що другий доданок (4.12) дорівнює $V^0 \frac{\partial p}{\partial x}$. Четвертий, п'ятий і шостий доданки в нуль, взагалі кажучи, не перетворюються (окрім випадків певної симетрії сітки), але мають третій порядок малості відносно ξ, η .

Нехай L означає оператор лівої частини першого рівняння системи (1.1), а L^* – оператор лівої частини першого рівняння схеми (4.7), що поділена на m_0 . Тоді для кроків ξ порядку τ справедлива формула

$$(L-L^*)\{u, p, \sigma\} = O(\tau),$$

тобто в загальному випадку має місце апроксимація першого порядку.

Аналогічний результат має місце і для другого рівняння (4.7).

При доведенні апроксимації рівняння неперервності в розвиненнях Тейлора достатньо утримувати лінійні члени.

Підстановка (4.8) із зсунутими вниз індексами в (4.3) приводить до виразу

$$V^{0} = V_{0} + \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial x_{0}} u_{0} + \frac{\partial V}{\partial y_{0}} v_{0} + \sum_{i} \frac{\partial V}{\partial x_{i}} u_{i} + \sum_{i} \frac{\partial V}{\partial y_{i}} v_{i} \right). \quad (4.13)$$

Похідні, що входять в (4.13), обчислюємо диференціюванням (4.3) з урахуванням (4.2) і (4.9). Результат:

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = \frac{1}{3}S_0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = \frac{1}{18} \left(-\eta_{k-\frac{3}{2}} + \eta_{k+\frac{1}{2}} - \eta_{k-\frac{1}{2}} + \eta_{k+\frac{3}{2}} \right) \left(3y_0 + \eta_{k-\frac{3}{2}} \eta_{k-\frac{1}{2}} \right),$$

і т.д. Опускаючи малі третього порядку при підстановці похідних в (4.13), отримаємо

$$\frac{V^0 - V_0}{\Delta t} = S_0 y_0 \left(\frac{v_0}{y_0} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Оскільки $V_0 = m_0 \sigma_0 = S_0 y_0$, то апроксимація рівняння $\frac{d\sigma}{dt} = \sigma div \{u, v\}$ також виконана.

2.5.5. Особливості обчислення межових точок

Визначення межових точок потребує деякої формалізації, необхідної для алгоритмів обчислення і складання початкових даних. При початковому розбитті області G на області Діріхле може виявитись, що деякі з них будуть розбиті межею Г. Точки, яким відповідають такі комірки Діріхле, назвемо межовими.

З боку межі, протилежної області G, розставляємо додаткові фіктивні точки Φ_i так, щоб звичайний алгоритм побудови областей відповідності для всіх точок, включаючи фіктивні, давав би задовільну апроксимацію межі (рис. 5.2).



Ламана *BCDEF* вважається апроксимацією межі. Кожна з фіктивних точок Φ_i несе таку інформацію: x, y – координати, $\sum q_i$ – вага, $\sum q_i u_i, \sum q_i v_i$ – зважені швидкості, P – тиск, Φ_{i-1} – лівий

фіктивній «сусід», Ф_{*i*+1} – правий фіктивний «сусід».

Якщо фіктивним точкам приписувати швидкості, близькі до швидкостей межових точок, то стискування комірки визначалось би її половиною. На рис. 5.3 показано одномірний аналог такої ситуації. У двомірному випадку це призвело б до надмірного заповнення межі внутрішніми точками. Тільки за рахунок цього тиск в них міг піднятися до заданого значення у фіктивних точках.



Рис. 5.3

Уникнути цього явища можна, збільшивши рухливість фіктивних точок. Реалізація цього міркування виконується в такий спосіб.

Маса межової точки A_0 розподіляється деяким чином по межі її області відповідності, але так, що $m_{RS} < m_0$, $m_{ST} < m_0$ (див. рис. 5.4). Масу стінки *RS* приписуємо точці *B*. Обчислюємо силу, що діє

на *B* за напрямом $\Phi_1 A_0$, як різницю тисків у точках Φ_1 та A_0 , помножену на добуток площі конуса від обертання *RS* на косинус кута між цим відрізком і нормаллю до відрізка $\Phi_1 A_0$.

Отримана сила і маса дають змогу обчислити прискорення точки B і приписати його точці Φ_1 . Звідси можна визначити складову швидкості точки Φ_1 за напрямом $A_0\Phi_1$. Дотична складова швидкості береться та сама, що і в точці A_0 .



Якщо фіктивна точка обслуговує декілька межових, то її різні швидкості зважуються з коефіцієнтами q_i (типу кута зору лінії *SR* з Φ_1). Щоб запобігти вистрибуванню точки A_0 з її області відповідності, формула розподілу мас сконструйована так, що $\lim_{B\to A_0} m_{RS} = m_0$.

Основна відмінність обчислення осьових точок полягає в наявності природної симетрії (рис. 5.5). Координата x точки C покладається рівній напівсумі координат осьових сусідів A і B. Так само обчислюється тиск у цій точці. Ця зміна викликана втратою умови зіткнення трьох ліній у вершині області відповідності через симетрію обертання.

Друга відмінність полягає в тому, що від'ємні координати точки A, які виникають в процесі обчислення, замінюються додатними з одночасною зміною знаку швидкості v, тобто відбувається немовби обмін місцями симетричних точок A та A'. В усьому іншому обчислення осьових точок ідентичне обчисленню внутрішніх.

2.5.6. Зміна «сусідства» точок

В процесі обчислення з незмінними «сусідами» можливе близьке розміщення розрахункової точки до межі області відповідності і навіть вистрибування її назовні. Незважаючи на те, що ця ситуація формально не впливає на порядок апроксимації рівнянь і слабо впливає на стійкість, її слід уникати через неконтрольовані втрати точності.

Тому наближення точки до межі області відповідності призводить або до зміни «сусідства», або до переміщення точок вглиб області відповідності.

Зміна «сусідства» передбачена структурою графа, яка може бути також змінною. Техніка реалізації зміни структури не дуже складна, оскільки нові «сусіди» можуть з'явитися лише з числа «сусідів сусідів». При перебудові «сусідства» стрибкоподібно змінюються площі областей відповідності, у зв'язку з чим різко змінюється густина та інші аеродинамічні параметри, що призводить до посилення піків немонотонності.

Для зменшення цих піків використовуються інтерполяційні прийоми в рамках законів збереження. Але оцінка впливу інтерполяцій на кінцевий результат обчислення досить складна, тому чим менше зроблено інтерполяцій на одну точку, тим надійнішими є результати обчислення.

Техніка зміни «сусідств» полягає в такому.

Нехай для точок A_0, A_1, A_2, A_3 є такі сусідства:

для $A_0: A_2, A_3, A_4, A_5;$ для $A_1: A_9, A_8, A_7, A_6, A_3, A_2;$ для $A_2: A_0, A_5, A_{12}, A_9, A_1, A_3;$

для A_3 : A_{11} , A_4 , A_0 , A_2 , A_1 , A_6 , A_{10} .

Нехай тепер точка A_0 розташована близько до межі a_0a_1 і одночасно близька до вершини a_1 .

За вершиною a_1 визначаються ті «сусіди» точки A_0 , на яких реалізується дана вершина. В нашому прикладі це точки A_2, A_3 . Тоді, за властивістю області відповідності, для точок A_2, A_3 знайдеться «сусід» A_1 такий, що він не є «сусідом» A_0 . Ця точка вво-

диться до «сусідства» точки A_0 , а точки A_2, A_3 із взаємного «сусідства» виводяться.

Виправлена таблиця «сусідств» тепер буде виглядати так: для $A_0: A_2, A_1, A_3, A_4, A_5;$ для $A_1: A_9, A_8, A_7, A_6, A_3, A_0, A_2;$ для $A_2: A_0, A_5, A_{12}, A_9, A_1;$ для $A_3: A_{11}, A_4, A_0, A_1, A_6, A_{10}.$

Перебудова звелась до того, що в «сусідство» A_0 введена A_1 , в «сусідство» A_1 введена A_0 , з «сусідства» A_2 виведена A_3 , з «сусідства» A_3 виведена A_2 . При цьому всі властивості областей відповідності збереглись.

Цей приклад показує, що граф «сусідства» у процесі перебудови не змінює число ребер.

Інтерполяції при перебудові полягають у такому. Маса $a_0a_1b_0b_1$ з маси точці A_3 видаляється, а до маси точки A_0 додається. Так само змінюються кількості руху та енергії. Аналогічні дії виконуються для всіх чотирьох перебудованих точок.

Процедури переміщення точок слід проводити тоді, коли вихідна точка наближається до межі, але не до вершини. Ця ситуація досить зустрічається часто й означає попарне зближення точок. У цих випадках краще розсувати пари, що зблизилася, без зміни «сусідства». Інтерполяція, природно, залишається внаслідок зміни областей відповідності.

Зазначені процедури при дослідженні газів з різними властивостями призводять до необхідності розраховувати комірки змішаних складів і зберігати інформацію про різні склади змішаних комірок.

Недоведеність коректності механізму перебудови є слабким місцем в описаній методиці «Медуза». Зазначимо, що ініціатива реалізації ідей Паста й Улама на основі використання комірок Діріхле як сітки для рівнянь аеромеханіки належить І.Д. Софронову, який мав досвід обчислень рівнянь теплопровідності на таких комірках (див. [4]).

Проте перші газодинамічні розрахунки призвели до незадовільних результатів. Аналітичне дослідження різницевої схеми пока-

зало відсутність апроксимації на сітках, що не мають певної структурної симетрії. В основі цього факту лежить «нелагранжевість» комірок Діріхле.

Але комірки Діріхле мають ряд переваг, з яких слід відмітити такі.

1. «Неперервність дотику». Цим умовним терміном назвемо збільшення довжини межі між точками від нуля при їх зближенні до положення «сусідства». Цією якістю комірки Діріхле вигідно відрізняються від областей відповідності, в яких межа змінюється стрибком з неминучим посиленням немонотонності.

2. Можливість такої розстановки точок у двовимірному випадку, яка автоматично приводить до одновимірної задачі, якщо диференціальна задача сформульована як одновимірна.

2.5.7. Стійкість методу

Як вже було сказано в попередньому пункті, розрахункова точка може наближатися до межі своєї глобули. Крім того, можливе попарне наближення точок. З міркувань стійкості обчислень виникає питання про залежність часового кроку від близькості точки до межі глобули.

Техніка дослідження стійкості у загальному випадку досить складна, тому обмежимося дослідженням необхідної ознаки за Нейманом для одновимірного наближення. Але і цей випадок не є простим з таких двох причин:

1) кожна одновимірна модель виникає з двовимірної у припущенні ідентичності станів на двох сусідніх горизонтальнопросторових шарах, включаючи розміщення розрахункових вузлів. Методика «Медуза» виключає таку постановку, оскільки вона суперечить принципам побудови областей відповідності. Необхідне наближення буде реалізоване лише за рахунок сильної розтяжки глобули в одному напрямку;

2) методика Неймана зручна для рівнянь з постійними коефіцієнтами, що автоматично припускає постійність кроку.

Наша мета – дослідження впливу нерівномірного кроку. Проілюструємо цей вплив на прикладі простої схеми для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

з даними на нескінченній прямій.

Виходячи з мети дослідження, побудуємо найпростішу нерівномірну сітку з послідовними кроками h_1 і h_2 (рис. 5.6).



Рис. 5.6

Введемо цілу і дробову індексацію, як показано на рисунку. Тоді різницева апроксимація набуває вигляду

$$u^{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{h_1} \left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_i \right), \quad u^{i+1} = u_{i+1} - \frac{\tau}{h_2} \left(u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}} \right).$$

Погляд на цю апроксимацію як на однорідну схему зі змінними коефіцієнтами ускладнює аналіз її фур'є-гармонік. Інший погляд полягає у використанні відсутності інформації про зсув фаз в точках з цілими індексами. Це дає змогу, замість розв'язку в напівцілих точках, ввести нову, по суті незалежну, функцію й отримати для аналізу систему з постійними коефіцієнтами.

Покладемо $u_{i+\frac{1}{2}} = v_i$. Одержимо систему

$$v^{i} = v_{i} - \frac{\tau}{h_{1}} (v_{i} - u_{i}), \quad u^{i+1} = u_{i+1} - \frac{\tau}{h_{2}} (u_{i+1} - v_{i}).$$

Звичайний аналіз швидкості росту фур'є-компонент дає умову стійкості $\tau < 2 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$, яка підтверджена безпосередніми численними експериментами.

2.5.8. Послідовність обчислень за методикою «Медуза»

Три етапи обчислення часового кроку пов'язані з присвоєнням певного значення ознаціz, що міститься в інформації (1.2). Усі обчислення складаються з таких чотирьох етапів.

1. Обчислення об'єму глобули та густин. Обчислення тисків та енергії. Стан: *z*:= 1.

2. Інтерполяція тисків на вершини багатокутника відповідності. Обчислення вектора сили, що діє на глобулу. Стан: *z*:= 2.

3. Перебудова сусідів та переміщення точок.

4. Обчислення координат нового часового шару. Стан: z:=0.

У процесі обчислення геометрії з'являються ознаки перебудови сусідів та переміщених точок. Оскільки близькість точки до межі глобули формально не впливає ні на апроксимацію, ні на стійкість, то збільшення відстані між «сусідами» та їх зміна реалізуються на наступному кроці, для чого номери точок з відповідними ознаками заносяться до «чорного списку».

Така тактика значно спрощує складання алгоритму, оскільки перебудови можливі лише для точки, яка разом зі своїми «сусідами» до другого покоління включно знаходиться в стані z:=2. Переведення точки в стан z:=1 можливе, якщо всі її сусіди знаходяться в нульовому або першому станах, переведення точки в стан z:=2можливе, якщо її «сусіди» знаходяться в першому або другому станах.

Контрольні питання

- 1. Яку інформацію несе кожна точка середовища в методиці «Медуза»?
- 2. Елементарні властивості відношення «сусідства» між вершинами графа, що являє собою сітку.
- 3. Розстановка точок в області за методикою «Медуза».
- 4. Техніка зміни відношення «сусідства» при наближенні точки до межі області відповідності.
- 5. Алгоритм переходу з одного часового шару на наступний у методиці «Медуза».
- 6. Як обчислюються аеродинамічні характеристики системи у межових точках області?
- 7. Як досліджується стійкість обчислень за методикою «Медуза»?.
- 8. Алгоритм обчислення об'єму глобули, густини, тиску та енергії за методикою «Медуза».

2.6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ГІПЕРЗВУКОВОЇ АЕРОДИНАМІКИ

2.6.1. Загальна характеристика чисельних методів

Аеродинаміка надзвукових потоків є основою для розвитку авіаційної та космічної техніки. Основною особливістю надзвукових потоків є поява газодинамічних розривів – ударних хвиль і контактних поверхонь.

Рівняння аеродинаміки як дозвукових так і надзвукових потоків нелінійні. Знайти їх аналітичні розв'язки можна лише в окремих випадках. Тому необхідно застосовувати чисельні методи.

Для чисельного моделювання надзвукових течій потрібні методи, які дають можливість наближено знаходити розривні розв'язки. Це – нетривіальна математична проблема.

У 1950 році Нейман і Рихтмайєр (див. [5]) запропонували використовувати *штучну в'язкість* для розв'язання рівнянь, що описують течії з ударними хвилями.

1959 року С.К. Годунов (див. [6]) побудував схему для чисельного розв'язання задачі про розпад розриву. Ця схема є основою багатьох сучасних методів чисельного моделювання течій з ударними хвилями. У методах типу Годунова розв'язання нелінійної системи рівнянь засновано на осередненні точного або наближеного розв'язку задачі Рімана про розпад довільного розриву. Для підвищення порядку точності розв'язку за часом і за простором використовують метод реконструкції величин на гранях обчислювальних комірок за осередненими значеннями в їх центрах.

У 1983 році Хартен (див. [13]) запропонував схему TVD (total variation diminishing). Зараз найбільш популярними методами розв'язання рівнянь аеродинаміки надзвукових потоків є скінченно-різницеві TVD і ENO (essentially non-oscillatory) схеми.

Розривні розв'язки гіперболічних систем рівнянь гіперзвукової аеродинаміки можуть виникати з гладких початкових даних. Такі властивості цих розв'язків накладають на алгоритми чисельного розв'язання задач гіперзвукової аеродинаміки достатньо суперечливі вимоги.

З одного боку, чисельний метод повинен уміти зберігати властивість монотонності в тих областях, де шукані розв'язки мають великі перепади значень. З другого боку, той же метод повинен мати високий порядок точності в тих областях, де розв'язки є глад-кими.

Теорема С.К. Годунова (див. [1]) показує, що в рамках лінійних різницевих схем ці дві вимоги одночасно задовольнити неможливо.

Для подолання цих труднощів можна застосовувати різницеві методи з виділенням розривів (shock-fitting methods). Ці методи засновані на прямому виділенні, або уловлюванні, розривів, що виникають в чисельному розв'язку. Таке виділення забезпечується побудовою дискретної сітки, що пов'язана з цими розривами. Зокрема, для цієї мети можна використати метод характеристик. Методи з виділенням розривів складають декілька груп.

Перша група – це, власне, класичні методи виділення розривів. Вони застосовуються тоді, коли заздалегідь повністю відома структура розв'язку, а також число, тип і приблизний порядок розташування кожного з розривів, що є у розв'язку. Що стосується конкретного розташування і швидкостей цих розривів, то вони визначаються в процесі обчислень.

На початку роботи такого алгоритму будують деякі початкові дані, що враховують порядок розривів у розв'язку, і організовують таку апроксимацію похідних, що скінченні різниці, що перетинають розриви, не використовуються. Це означає, що дискретна сітка має бути узгоджена з поверхнями розривів. Наприклад, точки сітки повинні лежати на цих поверхнях, причому з обох боків. Інший підхід полягає в тому, щоб навпаки, межі ряду дискретних комірок збігалися з поверхнями розривів.

При цьому початкові умови можуть і не задовольняти співвідношення на розривах. Тоді в процесі обчислень останні рухатимуться так, щоб врешті-решт задовольнити ці співвідношення. Остаточні стаціонарні розв'язки будуть тоді, коли всі розриви матимуть нульову швидкість.

В околі розривів різницева апроксимація похідних має бути проведена з використанням тільки односторонніх скінченних різниць. При цьому для врахування напрямів розповсюдження збурень і відповідних їм різницевих апроксимацій мають бути використані характеристичні властивості гіперболічної системи рівнянь. Співвідношення на розривах у методах з виділенням розривів повинні виконуватися точно, і для їх реалізації можна використовувати, наприклад, різного роду ітераційні процедури.

Зауважимо, що оскільки при цьому похідні апроксимуються тільки в областях гладкості розв'язку, то вимоги до різницевих методів тут не є такими обмежувальними, як було б при використанні однорідних різницевих схем, або різницевих схем наскрізного обчислення.

Методи з виділенням розривів теоретично дають можливість виділити всі розриви, хоча практично це можна здійснити, взагалі кажучи, тільки в одновимірному випадку. Що стосується двовимірних і тривимірних задач, то виділення всіх розривів є достатньо складним завданням. У таких випадках можна виділяти тільки деякі основні розриви. Що стосується областей між ними, то там обчислення можна проводити різницевими методами наскрізного обчислення. Такий підхід з частковим виділенням розривів досить широко застосовується [5].

Інша група методів виділення розривів це методи з виділенням *плаваючих розривів*. Ці методи призначені для виділення і тих розривів, які виникають з часом. Такі алгоритми мусять виявити розриви, що знов утворюються, а потім зробити їх межами підобластей гладкого розв'язку. Алгоритми цієї групи методів стають все більш складними зі зростанням числа розривів, які потрібно виділити.

У методах *наскрізного обчислення* (shock-capturing methods) похідні апроксимуються і через розриви. При цьому розрив «розмазується» на відрізку, величина якого визначена *чисельною дисипацією* різницевої схеми і перетворюється на вузьку область з різкими перепадами значень сіткових функцій.

Ширина такого переходу зазвичай зменшується із збільшенням порядку точності різницевої схеми. При використанні наскрізного обчислення в областях великих перепадів сіткових величин можуть виникати *нефізичні осциляції*, які мають бути якимось чином усунені. Для цього можна використати різного роду штучні добавки, наприклад, *штучна в'язкість* (*дисипація*), лінійна або квадратична.

Цілий низці модифікацій і застосувань такого роду добавок, узагальненню їх на багатовимірні випадки, використанню лінійних та нелінійних фільтрів, спеціальних дисипативних членів, які вра-

ховують характеристичні напрями системи рівнянь, присвячена досить велика кількість публікацій (див. [13]). Але використання штучної в'язкості може принципово змінити властивості розв'язку, тому чисельні результати, отримані з використанням штучної в'язкості, необхідно ретельно тестувати. Що стосується гладких областей, то в них можна використовувати, наприклад, різницеві схеми другого порядку точності, які мають слабкі дисипативні властивості.

Основні методики виділення розривів були розроблені приблизно 30–40 років тому і застосовуються практично без змін до сьогодні. Нові підходи в цій галузі з'являються достатньо рідко. Що стосується методів наскрізного обчислення, то вони перебувають у стані неперервного розвитку (див. [1, 17]). Спочатку були створені явні різницеві схеми наскрізного обчислення фіксованого порядку точності. Далі – схеми другого і третього порядків точності. Були також створені схеми четвертого і вищих порядків точності.

Для того, щоб поблизу розривів не виникали нефізичні осциляції, потрібно застосовувати або *монотонні схеми* першого порядку точності, або штучну в'язкість. З іншого боку, в областях гладкості розв'язку необхідним є використання схем вищого порядку точності. Для забезпечення цих вимог при чисельному розв'язанні гіперболічних систем рівнянь застосовують *гібридні різницеві схеми*, або різницеві схеми *змінного порядку точності*.

Гібридність означає, що чисельна різницева схема є нелінійною, залежить від характеру розв'язку і може локально змінювати свої властивості, наприклад, свій порядок апроксимації. Зокрема, гібридні схеми застосовують схему підвищеного порядку точності в областях гладкості розв'язку і схему першого порядку точності з гарними монотонними властивостями в тих областях, де розв'язок має великі перепади значень сіткових величин. Такий підхід дає можливість сумістити в одному алгоритмі наскрізного обчислення позитивні властивості схем різного порядку точності.

Дещо інший підхід до уточнення чисельного розв'язку, отриманого методами наскрізного обчислення, заснований на застосуванні диференціальних аналізаторів.

Диференціальний аналізатор – це чисельний алгоритм, який дає змогу за наслідками наскрізного обчислення визначити розта-
шування розривів у дискретних комірках. Потім поблизу знайдених і виділених особливостей проводиться уточнення розв'язку.

Практичні вимоги стимулювали створення і розвиток гібридних схем, які стали першою стадією розвитку різницевих схем наскрізного обчислення зі змінним порядком точності (див. [13, 17]).

У найпростішому випадку гібридна схема є комбінацією двох схем: $gS_1 + (1-g)S_2$. Схема S_1 – це схема першого порядку точності, S_2 – схема другого порядку, а g – це коефіцієнт гібридності, де 0 < g < 1.

У першій гібридній схемі для лінійного рівняння перенесення було визначено правило перемикання між двома базовими схемами S_1 и S_2 на основі аналізу відношення другої скінченної різниці розв'язку до її першої різниці. Далі побудовано декілька гібридних схем для лінійного і квазілінійного рівнянь перенесення, застосовано гладке перемикання між схемами першого і другого порядків (коефіцієнт *g* залежить від градієнта розв'язку).

Для побудови гібридних схем для системи рівнянь, зокрема, використана комбінація схеми Лакса-Фрідріхса першого порядку точності і схеми Лакса-Вендроффа другого порядку точності.

При введенні гібридності усередині різницевих комірок методу Годунова були використані кусково-лінійні розподіли сіткових функцій, а також вперше була використана одна з версій обмежувача minmod. Згодом були створені й інші гібридні схеми на змінному різницевому шаблоні, де залежно від характеру течії використовуються або центральні, або орієнтовані різниці (див. [13]). Гібридність була введена у неявні різницеві схеми з урахуванням характеристичних напрямів.

Вогіз & Book (див. [17]) розвинули гібридний метод, який дає змогу підвищити порядок точності обчислень шляхом застосування спеціальної процедури корекції потоків – FCT (flux corrected transport). На першому кроці обчислення розв'язку використовується монотонна схема першого порядку точності. На другому кроці отриманий чисельний розв'язок модифікується так, щоб його порядок за часом і за простором підвищився до другого. На цьому кроці в чисельному розв'язку не повинні виникати нові локальні екстремуми, а також зростати (зменшуватися) значення локальних максимумів (мінімумів), які мали місце на початку цього кроку.

Зауважимо, що такі умови еквівалентні умові *не збільшення повної варіації* чисельного розв'язку, або умові TVD (total variation diminishing). Таким чином, метод корекції потоків вже містить в собі елементи більш пізніх TVD-схем, які спираються на зазначену властивість більш явно і конструктивно.

Для того, щоб розв'язок задовольняв TVD-умові, була розвинена спеціальна техніка кусково-лінійної (кусково-поліноміальної) реконструкції сіткових функцій. Нахили кусково-лінійних розподілів сіткових функцій усередині дискретних комірок для виконання TVD-умови обмежуються спеціальними обмежувачами (limiters). Вони діють на скінченні різниці сіткових функцій. Детальний аналіз властивостей сучасних обмежувачів викладено в [13].

Перша стадія розвитку гібридних різницевих схем, до створення TVD-схем, відноситься в основному до періоду 1970-1985 років. Сьогодні термін «гібридність» в контексті різницевих схем практично не використовується. Проте схеми змінного порядку точності не тільки існують, але й є одним із основних інструментів при проведенні чисельних розрахунків.

В процесі розвитку чисельних методів гібридні різницеві схеми шляхом усунення ряду формальних та емпіричних підходів трансформувались у схеми змінного порядку точності. Практично всі сучасні схеми змінного порядку точності засновані на кусковополіноміальній реконструкції дискретних сіткових функцій, що задовольняє TVD-властивість або властивість, близьку до неї.

Інтенсивний розвиток TVD-алгоритмів привів до створення їх модифікацій, зокрема, схем UNO, TVD2, UNO2, TVB, ENO, AUSM, WENO, WAF. Створення цих методик, а також їх численних різновидів призвело до значного підвищення якості отримуваних чисельних розв'язків у порівнянні з класичними різницевими схемами фіксованого порядку точності. Це дало підставу ввести в обіг поняття *схеми високого розрізнення* (high resolution schemes).

Подальше підвищення роздільної здатності цих алгоритмів за допомогою простого розширення шаблонів апроксимації і реконструкції є проблематичним. Може бути корисною комбінація виділення у розв'язку декількох основних розривів і застосування в областях між розривами схем наскрізного обчислення, зокрема гібридних.

Ефективним є використання схем наскрізного обчислення на рухомих адаптивних сітках. Такі сітки згущуються до особливостей розв'язку і, тим самим, дають змогу підвищувати точність обчислень.

На сьогодні методи типу Годунова побудовано для рівнянь стаціонарної і нестаціонарної газової динаміки, зокрема релятивістської і нерелятивістської, двохтемпературної і трьохтемпературної газової динаміки, а також різного роду узагальнень цих систем на багатофазні середовища.

Такі методи побудовані також для стаціонарних і нестаціонарних рівнянь теорії дрібної води, релятивістської і нерелятивістської магнітної гідродинаміки, систем рівнянь механіки твердого тіла з урахуванням властивостей пружності і пластичності.

Окрім описаних вище явних чисельних алгоритмів, для розв'язання гіперболічних систем рівнянь існують різні класи *неявних і явно-неявних* методів. Так, повністю консервативні методи були створені для рівнянь газової динаміки, включаючи трьохтемпературні рівняння, а також для рівнянь магнітної гідродинаміки, теорії пружності та ін.

Розроблено неявний метод потоків, що дає можливість проводити обчислення перебігу ідеального і в'язкого недосконалого газу, а також пружнов'язкопластичний перебіг середовища. Побудовано клас неявних компактних різницевих схем високого порядку точності, створені і застосовуються неявні версії методу розщеплювання.

2.6.2. Метод С.К. Годунова

Для отримання чисельних розв'язків з особливостями розривного характеру на практиці широко застосовується *метод С.К. Годунова*, заснований на розв'язку *задачі Рімана про розпад розриву*. У газовій динаміці добре відомий точний розв'язок цієї задачі та його властивості [5, 6].

Припустимо, що початкові дані є кусково-постійні функції на сітці $\{x_m, m = 0, 1, ..., M\}$:

$$\boldsymbol{u}(0,x) = \left\{ \boldsymbol{u}_{m+1/2}^{0} \right\}, \quad \boldsymbol{u}_{m+1/2}^{n} = \boldsymbol{u} \left[t_{n}, 0, 5(x_{m} + x_{m+1}) \right].$$

Наприклад, для системи рівнянь газової динаміки маємо $\boldsymbol{u} = \{u, \rho, \varepsilon\}$. Іноді початкові дані задають в комірках з цілими номерами $\boldsymbol{u}(0, x) = \{\boldsymbol{u}_m^0\}$.

Розв'язок задачі будується таким чином. У околі кожного вузла x_m (або $x_{m+1/2}$ при іншій нумерації) розв'язується задача *про розпад розриву* незалежно від інших збурень. Цей розв'язок використовується до того моменту, коли хвиля, що утворилася від розриву в точці x_m , не зустрінеться з хвилею, що йде від точки x_{m+1} . Далі припускаємо, що і при $t = t_1 = \tau$ розв'язок також наближається кусково-постійними функціями

$$\boldsymbol{u}_{m+1/2}^{1} = \frac{1}{h} \int_{x_{m}}^{x_{m+1}} \boldsymbol{u}(t_{1}, x) dx , \quad h = x_{m+1} - x_{m} ,$$

або, на сітці з відмінною нумерацією вузлів,

$$\boldsymbol{u}_{m+1/2}^{1} = \frac{1}{h} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} \boldsymbol{u}(t_{1}, x) dx , \quad h = x_{m+1/2} - x_{m-1/2} .$$

Представимо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, записану в дивергентному вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} = 0$$

в інтегральній формі

$$\iint_{G} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \right) dt dx = \int_{\partial G} \left(\mathbf{S} dx - \mathbf{P} dt \right) = 0 ,$$

де G – якась однозв'язна область, ∂G – замкнутий контур, що обмежує її, S, P – функції від u. Виберемо як G комірку $\{(t_n, t_{n+1}) \times (x_m, x_{m+1})\}$ та отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_{x_m}^{t_{m+1}} \boldsymbol{S}(t_n, x) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{P}(t, x_{m+1}) dt - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \boldsymbol{S}(t_{n+1}, x) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{P}(t, x_m) dt = 0.$$

Перший і третій інтеграли обчислюються просто за формулою середніх, оскільки функції на відрізку $[x_m, x_{m+1}]$ кусковопостійні. Припускаючи, що всі функції кусково-постійні і на відрізку $[t_n, t_{n+1}]$, на підставі автомодельності розв'язку задачі Рімана відносно змінних (x/t), отримаємо рівність

$$S_{m+1/2}^{n}h - P_{m+1}^{n}\tau - S_{m+1/2}^{n+1}h + P_{m}^{n}\tau = 0$$
,

або, поділивши праву і ліву частини на добуток τh,

$$\frac{S_{m+1/2}^{n+1}-S_{m+1/2}^{n}}{\tau}+\frac{P_{m+1}^{n}-P_{m}^{n}}{h}=0,$$

або

$$\frac{S_m^{n+1}-S_m^n}{\tau}+\frac{P_{m+1/2}^n-P_{m-1/2}^n}{h}=0,$$

при іншій індексації. При цьому потоки P_m^n , P_{m+1}^n обчислюються за допомогою розв'язку задачі про розпад розриву, яка зводиться до розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Підвищення порядку апроксимації схем типу Годунова, заснованих на розв'язку задачі розпаду розриву (або солверів Рімана) реалізується шляхом використання кусково-лінійної апроксимації шуканих величин усередині комірок (на відміну від кусковопостійного їх представлення в *методі Годунова*) і різних алгоритмів обчислення за часом (алгоритмів типу предиктор-коректор).

Розглянемо один із таких методів. Нехай усередині комірок для всіх сіткових функцій задані кусково-лінійні розподіли

$$\boldsymbol{u}(t_n,x) = \boldsymbol{u}_m^n + \boldsymbol{Q}_m^n(x-x_m),$$

де Q_m^n – вектор нахилів функцій **и** усередині комірки. При цьому зміна цієї функції за часом усередині комірки дорівнює

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = -A \boldsymbol{Q}_m^n \, .$$

Предиктор (перший крок) виглядає таким чином:

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_m-\boldsymbol{u}_m^n}{\tau}+\frac{f(\boldsymbol{u}_m^n+\frac{h}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_m^n)-f(\boldsymbol{u}_m^n-\frac{h}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_m^n)}{h}=0,$$

де $u_m^{n+1/2}$ на проміжному часовому шарі n+1/2 обчислюємо як середнє арифметичне

$$\boldsymbol{u}_m^{n+1/2} = 0, 5(\tilde{\boldsymbol{u}}_m + \boldsymbol{u}_m^n).$$

На другому кроці (коректор) отримаємо, використовуючи метод скінченних об'ємів,

$$\frac{\boldsymbol{u}_m^{n+1}-\boldsymbol{u}_m^n}{\tau}+\frac{\boldsymbol{f}_{m+1/2}-\boldsymbol{f}_{m-1/2}}{h}=0,$$

де $f_{m\pm 1/2} = f(u_{m\pm 1/2})$, а функції $u_{m\pm 1/2}$ визначаються з розв'язку задачі Рімана з наступними початковими даними:

$$u_m^{n+1/2} + \frac{h}{2} Q_m^n$$
, якщо $x_{m+1/2} \le 0$,
 $u_{m+1}^{n+1/2} + \frac{h}{2} Q_m^n$, якщо $x_{m+1/2} > 0$.

Ця схема була описана в [17]. Як початкові дані можна вибирати, не змінюючи порядок точності, наприклад, такі:

$$\boldsymbol{u}_{m}^{n} + \frac{h}{2}\boldsymbol{Q}_{m}^{n}, \quad x_{m+1/2} \leq 0, \quad \boldsymbol{u}_{m+1}^{n} + \frac{h}{2}\boldsymbol{Q}_{m+1}^{n}, \quad x_{m+1/2} > 0,$$
a
fo $\boldsymbol{u}_{m}^{n}, \quad x_{m+1/2} \leq 0, \quad \boldsymbol{u}_{m+1}^{n}, \quad x_{m+1/2} > 0.$

Найпростішим способом обчислення нахилу Q_m в комірці з номером *m* для сіткової функції u_m , що забезпечує стійкість схеми, є використання функції

$$\min \operatorname{mod}(y, z) = 0, 5(\operatorname{sign}(y) + \operatorname{sign}(z)) \min(|y|, |z|),$$

яка вибирає нахил з мінімальним значенням модуля, за умови, що знаки обох аргументів збігаються (при різних знаках аргументів ця функція дорівнює нулю):

$$\boldsymbol{Q}_m = \min \mod \left(\frac{\boldsymbol{u}_{m+1} - \boldsymbol{u}_m}{h}, \frac{\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{u}_{m-1}}{h} \right).$$

Алгоритм предиктор-коректор можна використовувати і для системи рівнянь, записаної в характеристичній формі:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + A(\boldsymbol{u})\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 , \quad A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega .$$

При цьому предиктор має вигляд

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{u}}_m^{n+1} - \boldsymbol{u}_m^n}{\tau} + A_m^n \boldsymbol{Q}_m^n = 0,$$
$$\boldsymbol{u}_m^{n+1/2} = 0,5(\tilde{\boldsymbol{u}}_m^{n+1} + \boldsymbol{u}_m^n) = \boldsymbol{u}_m^n - 0,5\tau A_m^n \boldsymbol{Q}_m^n,$$

а коректор – це, наприклад, схема

$$\frac{\boldsymbol{u}_{m}^{n+1}-\boldsymbol{u}_{m}^{n}}{\tau}+(\Omega^{-1}\Lambda^{-}\Omega)_{m+1/2}^{n}\frac{\boldsymbol{u}_{m+1}^{n}-\boldsymbol{u}_{m}^{n}}{h}+(\Omega^{-1}\Lambda^{+}\Omega)_{m-1/2}^{n}\frac{\boldsymbol{u}_{m}^{n}-\boldsymbol{u}_{m-1}^{n}}{h}=0.$$

Реконструкція функцій та обмежувачі. При побудові чисельних методів типу Годунова підвищеного порядку точності по простору застосовуються кусково-лінійні або кусковополіноміальні розподіли функцій всередині дискретної комірки з певними обмеженнями на величини коефіцієнтів відповідних поліномів. Опишемо методи побудови кусково-лінійних розподілів сіткових функцій. Одна зі складностей цієї задачі пов'язана із неоднозначністю вибору величин нахилів для цих розподілів.

Розглянемо рівномірну просторову сітку з кроком h. Нехай на цій сітці задана деяка дискретна сіткова функція u_m , де

m = 1,...,N. Нижні цілі індекси позначають значення функції, що віднесені до центра дискретної комірки з номером m, а напівцілі індекси – значення функції на межі комірок. Для визначення значень функції u на межі комірок за її значенням в центрах потрібно задати процедуру *реконструкції*.

Будемо вважати, що всередині кожної із дискретних комірок має місце кусково-лінійний розподіл

$$u(x) = u_m + \alpha_m x, \quad x \in [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h].$$

Тут використані локальні координати; значення x = 0 відповідає центру комірки з номером m. Для спрощення покладемо h = 1.

Зауважимо, що найпростіший спосіб визначення нахилів α_m , наприклад, за формулою $\alpha_m = \frac{1}{2}(u_{m+1} - u_{m-1})$ або $\alpha_m = u_{m+1} - u_m$, може призвести до нестійкості обчислень і виникненню у чисельних результатах нефізичних осциляцій.

Таким чином, визначення нахилів, по-перше, має бути таким, щоб не порушити умову стійкості різницевої схеми.

По-друге, воно має задовольняти природну умову, щоб чисельний розв'язок, хоч би локально за часом, мав властивості, подібні до властивостей початкової сіткової функції u_m . Такі умови накладають певні обмеження на величини нахилів, наприклад, у вигляді $\alpha_m = (u_{m+1} - u_m)\psi_m$, де $0 \le \psi_m \le 2$.

Таким чином, величини нахилів α_m модифікуються так званими *обмежувачами* ψ_m (limiters). У найпростішому випадку обмежувач є функцією, яка задає й одночасно обмежує нахили α_m на основі аналізу значень u_m або скінченних різниць $u_{m+1} - u_m$, наприклад, обмежувач

$$\Psi_m = \begin{cases} \min(2, r_m), & r_m > 1, \\ \min(2r_m, 1), & 0 < r_m \le 1, \\ 0, & r_m \le 0. \end{cases} \text{ de } r_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{u_{m+1} - u_m}$$

2.6.3. Монотонні та гібридні схеми

У загальному випадку будь-яку лінійну різницеву схему можна представити у вигляді суми по точках шаблону з невизначеними ваговими множниками

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_{\mu}^{\nu} u_{m+\mu}^{n+\nu} , \qquad (3.1)$$

де v = -1, 0, 1 – номери шарів за часом, що входять у шаблон (шаблони з більш ніж 3 шарами за часом не розглядаються), $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – просторові вузли точок сіткового шаблону $(t^{n+v}, x_{m+\mu})$, α^{v}_{μ} – невизначені коефіцієнти. Якщо v не набуває позитивних значень, то схема явна, інакше – неявна.

Якщо α^{v}_{μ} всі невід'ємні, то *схема (3.1) монотонна за Фрідріхсом* або є схемою з *позитивною апроксимацією*.

Існують ще інші означення монотонної схеми; вони, взагалі кажучи, не еквівалентні. Так, монотонна схема за Boris & Book – це схема, що не збільшує число екстремумів у різницевому розв'язку задачі в порівнянні з кількістю екстремумів в точному розв'язку задачі. Ще одне означення монотонної схеми: схема називається монотонною, якщо з умови $u_{m+1}^n - u_m^n \ge 0$ випливає нерівність $u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} \ge 0$ для всіх m.

У нелінійному випадку (p+q+1)-точкова схема $u_m^{n+1} = G(u_{m-q}^n, ..., u_{m+p}^n)$ називається монотонною, якщо G – монотонна зростаюча функція від (p+q+1) аргументів.

Схема називається схемою, що зберігає монотонність, якщо із монотонності u^n випливає монотонність u^{n+1} .

Розглянемо, наприклад, лінійне рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x).$$
(3.2)

Точний розв'язок цього рівняння u(t,x) записується у вигляді $u = u_0(x-t)$. Цей розв'язок зберігає властивість монотонності початкової функції u_0 .

Для задачі (3.2) побудуємо різницеву схеми типу Куранта-Ізаксона-Риса першого порядку точності:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_{m+1/2} - u_{m-1/2}}{h} = 0, \qquad (3.3)$$

де $u_{m\pm 1/2} = \frac{1}{2}(u_m^n + u_{m\pm 1}^n) + \frac{1}{2}\operatorname{sign}(u_m^n - u_{m\pm 1}^n)$. Тут нижні напівцілі інде-

кси позначають значення відповідних величин на межах комірок. Чисельний розв'язок схеми (3.3) має вигляд:

$$u_m^{n+1} = (1 - \sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n, \qquad (3.4)$$

де $\sigma = \frac{\tau}{h}$ – число Куранта і $\sigma \le 1$. Із рівняння (3.4) випливає, що схема (3.3) є монотонною за Фрідріхсом і зберігає монотонність початкових даних. Справді, можна отримати наступну формулу для зміни скінченної різниці $\Delta_m = u_{m+1} - u_m$ за крок часу:

$$\Delta_m^{n+1} = (1-\sigma)\Delta_m^n + \sigma\Delta_{m-1}^n.$$
(3.5)

Припустимо, що $\Delta_j^n \ge 0$. Тоді з рівності (3.5) випливає, що $\Delta_j^{n+1} \ge 0$, тобто різницева схема монотонна.

Зауважимо, що монотонна схема (3.3) має тільки перший порядок точності. Це невипадково, оскільки має місце теорема.

Теорема Годунова. Монотонної лінійної схеми типу (3.1) другого або більш високого порядку точності не існує.

Тому для проведення обчислень з високим порядком точності без нефізичних осциляцій у результатах обчислень необхідно розглядати інші, нелінійні, класи різницевих схем. До них належать, зокрема, *гібридні різницеві схеми*.

Застосовується також метод побудови різницевих схем першого порядку точності з *мінімальною чисельною в'язкістю*.

У цьому підході різницеві схеми розглядаються як точки в евклідовому просторі, координати яких дорівнюють коефіцієнтам в шаблоні схеми. В цьому разі схема (3.1) є точкою з координатами α^{v}_{μ} в евклідовому просторі з розмірністю, що дорівнює числу точок в різницевому шаблоні.

Схема першого порядку точності з мінімальною числовою в'язкістю визначається в такий спосіб.

В евклідовому просторі розглядаємо множини коефіцієнтів, які відповідають схемам різного порядку точності. Схема з мінімальною чисельною в'язкістю – це така схема із множини схем першого порядку, коефіцієнти якої найбільш близькі до множини схем другого порядку точності в сенсі відстані, визначеної в цьому евклідовому просторі.

Щоб знайти коефіцієнти α^{ν}_{μ} застосовують методи лінійного програмування, враховуючи при цьому обмеження $\alpha^{\nu}_{\mu} \ge 0$.

Аналогічно знаходимо схеми високих порядків точності з найкращими властивостями монотонності. Такі схеми є найбільш близькими (з точки зору відстані в евклідовому просторі) до монотонних схем першого порядку точності у вибраному просторі коефіцієнтів.

Така інтерпретація схем у вигляді точок евклідового простору дає змогу також провести природну класифікацію декількох десятків відомих явних і неявних схем першого, другого і третього порядків точності при зменшенні їх дисипативних властивостей.

Потокова форма представлення різницевих схем. Розглянемо лінійне одновимірне рівняння перенесення

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
, $u(0, x) = u_0(x)$, $a = const$.

Наблизимо його за допомогою схем «лівий куточок» і «правий куточок» залежно від напряму перенесення (схеми Куранта-Ізаксона-Риса)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0, \ a > 0,$$
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0, \ a < 0.$$

Можна об'єднати форму запису наведених вище виразів і записати схему так:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma \begin{cases} u_{m+1}^n - u_m^n, & a < 0, \\ u_m^n - u_{m-1}^n, & a \ge 0, \end{cases}$$

 $\sigma = \frac{a\tau}{h}$ – число Куранта. Ввівши позначення

$$a^+ = 0,5(a + |a|), \quad a^- = 0,5(a - |a|),$$

наведений вище об'єднаний запис можна представити ще в двох формах:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h} (a^- (u_{m+1}^n - u_m^n) + a^+ (u_m^n - u_{m-1}^n)),$$

або

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + \frac{|\sigma|}{2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n).$$

Представимо *різницеву схему в потоковому вигляді*, для чого введемо функції $f_{m+1/2}^n$, $f_{m-1/2}^n$ так, що дані на наступному шарі за часом можна записати так:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n).$$

Тоді просте порівняння виразів дасть можливість знайти вирази для потоків:

$$f_{m+1/2}^{n} = 0,5((u_{m+1}^{n} + u_{m}^{n}) - a(u_{m+1}^{n} - u_{m}^{n})),$$

$$f_{m-1/2}^{n} = 0,5((u_{m}^{n} + u_{m-1}^{n}) - a(u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n})).$$

Загальний вид неявної схеми, записаної в потоковому вигляді

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(\overline{f}_{m+1/2} - \overline{f}_{m-1/2}),$$

де $\overline{f}_{m\pm 1/2} = (1-\theta) f_{m\pm 1/2}^n + \theta f_{m\pm 1/2}^{n+1}, 0 \le \theta \le 1$, вираз для $f_{m\pm 1/2}^{n+1}$ аналогічний виразу для $f_{m\pm 1/2}^n$.

Метод корекції потоків Бориса-Буку. Метод корекції потоків запропонований як схема «предиктор-коректор». На етапі «предиктор» похибка методу вносить до чисельного розв'язку потік чисельної дифузії (в'язкість), на етапі «коректор» вводяться потоки штучної антидифузії, що зменшують в'язкість.

Нехай \tilde{u}_m чисельний розв'язок, отриманий після предиктора. Коректор запишемо у вигляді

$$u_m^{n+1} = \tilde{u}_m - (\tilde{f}_{m+1/2} - \tilde{f}_{m-1/2}),$$

де визначені антидифузійні потоки

$$\tilde{f}_{m-1/2} = \mu(\tilde{u}_m - \tilde{u}_{m-1}), \quad \tilde{f}_{m+1/2} = \mu(\tilde{u}_{m+1} - \tilde{u}_m)$$

через межі $x_{m-1/2}$, $x_{m+1/2}$ (μ – коефіцієнт антидифузії).

У [17] запропоновано також загальний вигляд коректора:

$$u_m^{n+1} = \tilde{u}_m + \mu(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \tilde{\mu}(\tilde{u}_{m+1} - 2\tilde{u}_m + \tilde{u}_{m-1}).$$

Гібридна схема для рівняння переносу. Для побудови першої гібридної різницевої схеми (див. [17]) використовувалося таке представлення (при a > 0):

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n) + \frac{\gamma\sigma}{2}(1 - \sigma)(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n),$$

де γ – параметр гібридності. Від γ залежить порядок різницевої схеми, за якою проводитиметься розрахунок в областях з великими локальними градієнтами розв'язку. Замість γ беремо значення

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \left| u_{m+1}^{n} - 2u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n} \right| < \lambda \left| u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n} \right|, \\ 0, & \left| u_{m+1}^{n} - 2u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n} \right| \ge \lambda \left| u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n} \right|. \end{cases}$$
(3.6)

При $\lambda = 0$ схема має перший порядок точності, а при скільки завгодно великих значеннях λ – другий. Можна також підвищити порядок апроксимації цієї схеми до третього:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n) + \frac{\gamma\sigma}{2}(1-\sigma)\left\{(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + (u_{m+1}^n - 3u_m^n + 3u_{m-1}^n - u_{m-2}^n)\right\}.$$

Схему, записану в потоковій формі, можна зробити гібридною, вводячи потоки:

$$f_{m+1/2}^{n} = 0,5a\left\{(u_{m+1}^{n} - u_{m}^{n}) - \overline{\sigma}(u_{m+1}^{n} - u_{m}^{n})\right\},\$$

$$f_{m-1/2}^{n} = 0,5a\left\{(u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n}) - \overline{\sigma}(u_{m}^{n} - u_{m-1}^{n})\right\},\$$

де $\overline{\sigma} = \sigma$ в області гладкого розв'язку і $\overline{\sigma} = a$ в області з великими градієнтами розв'язку. Перемикач між «гладким» і «негладким» розв'язком може бути побудований аналогічно до (3.6).

Гібридна схема для системи рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 ,$$

де *А* квадратна матриця з постійними коефіцієнтами розміру $n \times n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – вектор-стовпець.

Гібридну різницеву схему можна представити у вигляді

$$\boldsymbol{u}_{m}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{m}^{n} - \frac{\tau}{2h} A(\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}) + \frac{\tau}{2h} |A| (\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - 2\boldsymbol{u}_{m}^{n} + \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}),$$

або

$$\boldsymbol{u}_{m}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{m}^{n} - \frac{\tau}{2h} \left\{ \Omega^{-1} \Lambda \Omega(\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}) + \Omega^{-1} \left| \Lambda \right| \Omega(\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - 2\boldsymbol{u}_{m}^{n} + \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}) \right\},$$

де $\Lambda = diag(\lambda_k)$ — діагональна матриця з власних значень матриці A, Ω — матриця розміру $n \times n$, рядками якої є ліві власні вектори матриці A.

Якщо матриця A невироджена і всі її власні числа дійсні, то система має гіперболічний тип, а матриця системи може бути представлена у вигляді добутку трьох матриць $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$.

Матрицею переходу в базис з власних векторів у даному випадку є матриця з *лівих* власних векторів матриці системи, оскільки матриця A несамоспряжена. Обернену матрицю до матриці переходу треба обчислювати безпосередньо; як правило, в задачах механіки суцільних середовищ матриця переходу не ортогональна, а обернена матриця не дорівнює транспонованій.

Наведену вище схему можна записати також у вигляді:

$$\boldsymbol{u}_{m}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{m}^{n} - \frac{\tau}{h} \Big\{ A^{-}(\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - \boldsymbol{u}_{m}^{n}) + A^{+}(\boldsymbol{u}_{m}^{n} + \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}) \Big\},$$

de $A^{+} = 0, 5(A + |A|), A^{-} = 0, 5(A - |A|)$ abo
 $\boldsymbol{u}_{m}^{n+1} = \boldsymbol{u}_{m}^{n} - \frac{\tau}{h} \Big\{ \Omega^{-1} \Lambda^{-} \Omega(\boldsymbol{u}_{m+1}^{n} - \boldsymbol{u}_{m}^{n}) + \Omega^{-1} \Lambda^{+} \Omega(\boldsymbol{u}_{m}^{n} + \boldsymbol{u}_{m-1}^{n}) \Big\},$

de
$$\Lambda^+ = 0,5(\Lambda + |\Lambda|), \Lambda^- = 0,5(\Lambda - |\Lambda|).$$

2.6.4. TVD-схеми

Ідею *схем TVD (Total Variation Diminition)*, тобто схем із зменшенням повної варіації, представимо на прикладі схеми Лакса-Вендроффа для рівняння переносу:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n) - (f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n).$$

Ця схема немонотонна, але за відсутності останнього доданку $(f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n)$ вона була б монотонною. Цей факт можна проінтерпретувати таким чином: *антидифузійні* потоки у схемі Лакса-Вендроффа дуже великі і призводять до появи осциляцій.

Отже, ці потоки необхідно обмежити, наприклад, як

$$\overline{f}_{m+1/2} = \varphi(r_m) \sigma(1-a\tau) (\widetilde{u}_{m+1}-\widetilde{u}_m) \,.$$

Потік $f_{m+1/2}^n$ обмежується певною функцією $\varphi(r_m)$, що називається обмежувачем або лімітером. Параметр r_m обчислюється так:

$$r_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{u_{m+1} - u_m},$$

його можна назвати показником гладкості розв'язку. Для гладких вирішень $r_m \approx 1$, при великих градієнтах — $r_m \approx 0$. Функція $\varphi(r_m)$ вибирається так, щоб схема належала до *класу* TVD, тобто щоб зменшувалася повна варіація на наступному шарі за часом

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n),$$

де вираз для повної варіації є таким

$$TV(u^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| u_{m+1}^n - u_m^n \right|.$$

Умова незростання варіації чисельного розв'язку, або TVDпринцип, є більш слабкою, ніж умова монотонності схеми.

За означенням, повна варіація TV(u) для обмеженої функції u = u(x) виражається таким чином:

$$TV(u) = \sup_{\{x_i\}} \sum_{m=1}^{M} |u(x_m) - u(x_{m-1})|, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = b,$$

або, для диференційованої функції u = u(x), у вигляді

$$TV(u) = \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

Для того, щоб повна варіація зменшувалася, досить вибрати лімітер таким чином:

$$0 < \varphi(r_m) \le \min(2r_m, 2)$$
 при $r_m > 0$ і $\varphi(r_m) = 0$ при $r_m \le 0$,

причому для забезпечення другого порядку апроксимації необхідно, щоб $\phi(1) = 1$. Інший обмежувач має вигляд

$$\varphi(r_m) = \begin{cases} \min(2, r_m), & r_m > 1, \\ \min(2r_m, 1), & 0 < r_m \le 1, \\ 0, & r_m \le 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що замість вільних параметрів в TVD-схемі вводиться функція-обмежувач, а сама схема є однокроковою. Іноді в розрахунках використовують параметр

$$r_m = \frac{u_m - u_{m-1} + \varepsilon}{u_{m+1} - u_m + \varepsilon},$$

де мала величина є ($\epsilon \approx 10^{-5} - 10^{-7}$) грає роль шумового фільтра.

Замість умови зменшення повної варіації різницевої схеми можна ввести слабкішу обмежуючу умову: $TV(u^n) \le C$, причому $n\tau \le C$ (*схеми TVB*).

Розглянемо спосіб конструювання TVD-схем.

Довільну чотириточкову схему (три точки на нижньому часовому шарі) можна представити у вигляді

$$u_m^{n+1} = u_m^n + C_{m+1/2}^+ \Delta_{m+1/2} u - C_{m-1/2}^- \Delta_{m-1/2} u,$$

де введені потоки $\Delta_{m+1/2}u = u_{m+1} - u_m$, $\Delta_{m-1/2}u = u_m - u_{m-1}$. Вважаємо, що коефіцієнти схеми задовольняють умови $C^+_{m+1/2} \ge 0$, $C^-_{m-1/2} \ge 0$ для всіх *m*. Тоді наведена різницева схема є *TVD-схемою*.

Покажемо, що це так. Для цього обчислимо повну варіацію

$$TV(u^{n}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_{m+1}^{n} - u_{m}^{n}| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\Delta_{m+1/2}u^{n}|.$$

Запишемо різницеву схему в операторному вигляді

$$u_m^{n+1}=Lu_m^n\,,$$

де

$$Lu_m^n = u_m^n + C_{m+1/2}^+ \Delta_{m+1/2} u - C_{m-1/2}^- \Delta_{m-1/2} u .$$

Покажемо, що

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$
 abo $TV(Lu^n) \leq TV(u^n)$.

Справді,

$$\begin{aligned} \left| u_{m+1}^{n+1} - u_{m}^{n+1} \right| &\leq \left| \Delta_{m+1/2} u^{n} \right| \left(1 - C_{m+1/2}^{+} - C_{m-1/2}^{-} \right) + \\ &+ C_{m-1/2}^{-} \left| \Delta_{m-1/2} u \right| + C_{m+3/2}^{+} \left| \Delta_{m+3/2} u \right|, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{m+1/2} u^{n+1} \right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 - C_{m+1/2}^{+} - C_{m-1/2}^{-}) \left| \Delta_{m+1/2} u^{n} \right| + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m-1/2}^{-}) \left| \Delta_{m-1/2} u \right| + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{m+3/2}^{+} \left| \Delta_{m+3/2} u \right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{m+1/2} u^{n} \right| = TV(u^{n}) .$$

TVD-схема для квазілінійного рівняння переносу. Розглянемо нелінійне рівняння переносу, записане в *дивергентній* формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

і відповідній характеристичній формі, що випливає з дивергентної

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}.$$
(4.2)

У дивергентній формі запису цього квазілінійного рівняння переносу величина f грає роль потоку. Запишемо явну триточкову різницеву схему для чисельного розв'язання (4.1) або (4.2) в потоковій формі:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \overline{\sigma}(f_{m+1/2}^n - f_{m-1/2}^n), \qquad (4.3)$$

де $\overline{\sigma} = \frac{\tau}{h}$, $f_{m+1/2}^n = 0.5 \left[f_m^n + f_{m+1}^n - \eta(a_{m+1/2}) \Delta u_{m+1/2} \right]$, $f_{m-1/2}^n = 0.5 \left[f_{m-1}^n + f_m^n - \eta(a_{m-1/2}) \Delta u_{m-1/2} \right]$, $\Delta_{m+1/2} u = u_{m+1} - u_m$, $\Delta_{m-1/2} u = u_m - u_{m-1}$,

 η – це коефіцієнт при другій різниці в різницевій схемі (якщо *a* = *const*). У разі схеми Куранта-Ізаксона-Риса (або схеми з різницями, орієнтованими проти потоку) маємо

$$f_{m+1/2} = 0.5 \left[f_{m+1} + f_m - |a_{m+1/2}|(u_{m+1} - u_m) \right],$$

$$f_{m-1/2} = 0.5 \left[f_m + f_{m-1} - |a_{m-1/2}|(u_m - u_{m-1}) \right],$$

де для скорочення запису введено швидкість перенесення, що обчислюється за формулою,

$$a_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{f_{m+1} - f_m}{u_{m+1} - u_m} \approx \frac{\partial f}{\partial u}, & u_{m+1} - u_m \neq 0, \\ a(u_m), & u_{m+1} - u_m = 0. \end{cases}$$

У квазілінійному випадку схеми, що збігалися в лінійному випадку, приводитимуть до різних різницевих рівнянь. Відповідно, розрізняються і чисельні розв'язки через різницю похибок апроксимації. У разі квазілінійного рівняння для схеми Лакса-Вендроффа вирази для потоків матимуть такий вигляд:

$$f_{m+1/2} = 0.5 \left[f_{m+1} + f_m - \frac{\tau}{h} a_{m+1/2}^2 (u_{m+1} - u_m) \right],$$

$$f_{m-1/2} = 0.5 \left[f_m + f_{m-1} - \frac{\tau}{h} a_{m-1/2}^2 (u_m - u_{m-1}) \right].$$

Введемо позначення $\gamma_{m+1/2} = 2\overline{\sigma}a_{m+1/2}$; тоді величини потоків $f_{m\pm1/2}$ можна переписати як

$$\overline{\sigma}f_{m+1/2} = \overline{\sigma}f_m - 0.5 \left[-\gamma_{m+1/2} + Q(\gamma_{m+1/2})\right] \Delta_{m+1/2} u ,$$

$$\overline{\sigma}f_{m-1/2} = \overline{\sigma}f_m - 0,5[\gamma_{m-1/2} + Q(\gamma_{m-1/2})]\Delta_{m-1/2}u$$

Тут введені позначення $f_{m+1} = f_m + a_{m+1/2} \Delta_{m+1/2} u$,

$$Q(\gamma_{m+1/2}) = 2\overline{\sigma}\eta(a_{m+1/2}), \quad Q(\gamma_{m-1/2}) = 2\overline{\sigma}\eta(a_{m-1/2}).$$

Підставляючи ці вирази для чисельних потоків у (4.3), отримуємо

$$u_m^{n+1} = u_m^n + C_{m+1/2}^+ \Delta_{m+1/2} u^n - C_{m-1/2}^- \Delta_{m-1/2} u^n,$$

де $C_{m+1/2}^+ = 0,5[Q(\gamma_{m+1/2}) - \gamma_{m+1/2}], \quad C_{m-1/2}^- = 0,5[Q(\gamma_{m-1/2}) + \gamma_{m-1/2}].$ Звідки випливає, що $C_{m+1/2}^+ + C_{m+1/2}^- = Q(\gamma_{m+1/2})$. Умова стійкості такої схеми має вигляд:

$$\tau \leq \frac{h}{\max_{m} \left| a_{m+1/2}^{n} \right|}$$

Побудована різницева схема належить до класу *TVD-схем*, що безпосередньо можна перевірити. Схема забезпечує виконання умови $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ з урахуванням нерівностей $C_{m+1/2}^+ \geq 0$, $C_{m-1/2}^- \geq 0$, $C_{m+1/2}^+ + C_{m+1/2}^- \leq 1$ для всіх *m*. Триточкові TVD-схеми мають не більш ніж перший порядок точності.

TVD-схеми для квазілінійного рівняння з антидифузією. Підвищити порядок апроксимації *TVD-схем* можна, ввівши в рівняння переносу антидифузійний член

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f + \frac{h}{\tau} \overline{f} \right) = 0 ,$$

де додатковий *антидифузійний* потік має порядок похибки апроксимації і вводиться за формулою

$$\overline{f} = h\mu(\sigma, u) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Очевидно, що цей доданок у рівнянні переносу матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\mu\frac{\partial u}{\partial x})\,.$$

Таким чином, проведена корекція потоку і компенсована в'язкість апроксимації. Хартен запропонував модифікувати потік, ввівши в нього функцію *P*:

$$\tilde{f}_{m+1/2} = 0,5 \big[f_{m+1} + f_m + P_{m+1/2} \big],$$

причому різні TVD-схеми розрізняються вибором цього доданка *P*. У початковому варіанті різницевої схеми, запропонованому Хартеном, ця функція вибиралася таким чином:

$$P_{m+1/2} = \frac{h}{\tau} \Big[f_{m+1} + f_m - \left| \xi_{m+1/2} + \overline{\xi}_{m+1/2} \right| \Delta_{m+1/2} u \Big],$$

$$p_{m+1/2} = \sigma a_{m+1/2},$$

$$\overline{\xi}_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{f_{m+1} - f_m}{u_{m+1} - u_m}, & u_{m+1} - u_m \neq 0, \\ 0, & u_{m+1} - u_m = 0. \end{cases}$$

Така схема, проте, приводила до помітного «розмазування» розривів у розв'язках. Приведемо також інші види обмежувальної функції. Загальний вигляд лімітера буде один і той самий:

$$P_{m+1/2} = - \left[\sigma Q_{m+1/2} + \eta(a_{m+1/2}) (\Delta_{m+1/2} u - Q_{m+1/2}) \right],$$

а $Q_{m+1/2}$ можна вибрати з таких:

$$Q_{m+1/2} = \min \operatorname{mod}(\Delta_{m+1/2}u, \Delta_{m-1/2}u) + \min \operatorname{mod}(\Delta_{m+1/2}u, \Delta_{m+3/2}u) - \Delta_{m+1/2},$$
$$Q_{m+1/2} = \min \operatorname{mod}(\Delta_{m-1/2}u, \Delta_{m+1/2}u, \Delta_{m+3/2}u),$$

$$Q_{m+1/2} = \min \mod(2\Delta_{m-1/2}u, 2\Delta_{m+1/2}u, 2\Delta_{m+3/2}u, 0, 5(\Delta_{m+3/2}u + \Delta_{m-1/2}u)).$$

TVD-схеми для систем рівнянь гіперболічного типу.

Побудуємо різницеву схему типу TVD для випадку одновимірної системи лінійних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, до яких належать, наприклад, системи рівнянь акустики або теорії пружності.

Запишемо систему, як і раніше, в матричній формі

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 ,$$

де $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – вектор-стовпець шуканих функцій, A – квадратна матриця $n \times n$ з постійними коефіцієнтами, t, x – незалежні змінні.

Припускаємо, що матриця A має n дійсних власних чисел λ_k і власних векторів ω_i . Без обмеження загальності можна вважати, що серед цих власних чисел немає кратних, а відповідні власні вектори утворюють базис.

Тоді можливий перехід до базису з власних векторів, в якому матриця системи діагональна, і саму систему можна записати так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \Omega^{-1} \Lambda \Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0,$$

де $\Lambda = diag(\lambda_k)$ – діагональна матриця з власних значень матриці A, Ω – матриця, рядками якої є відповідні ліві власні вектори.

Останнє рівняння можна переписати таким чином:

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} = 0,$$

де $R = \Omega u$ – інваріанти Рімана. Різницеву схему для чисельного розв'язання рівняння в інваріантах представимо у вигляді

$$\boldsymbol{R}_{m}^{n+1} = \boldsymbol{R}_{m}^{n} - \sigma(\tilde{\boldsymbol{f}}_{m+1/2} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{m-1/2}),$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{m\pm 1/2} = 0, 5(\boldsymbol{f}_{m} + \boldsymbol{f}_{m+1} + \Omega_{m\pm 1/2}\boldsymbol{\varphi}_{m\pm 1/2}).$$

Тут $\sigma = \tau/h$, а $\phi_{m+1/2}$ обчислюється аналогічно скалярному випадку з урахуванням того, що замість $a_{m+1/2}$ необхідно брати $\lambda_{m+1/2}^{i}$ (*i* – номер власного значення), а замість $\Delta_{m+1/2}u$ брати

$$u_{m+1/2} = \Omega_{m+1/2}^{-1} (u_{m+1} - u_m).$$

Явну схему TVD другого порядку точності типу предикторкоректор для чисельного розв'язання нелінійної системи рівнянь гіперболічного типу представимо у вигляді:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_m = \boldsymbol{u}_m^n - \sigma(\boldsymbol{f}_m^n - \boldsymbol{f}_{m-1}^n),$$
$$\tilde{\boldsymbol{u}}_m = 0,5(\tilde{\boldsymbol{u}}_m + \boldsymbol{u}_m^n) - 0,5\sigma(\tilde{\boldsymbol{f}}_{m+1} - \tilde{\boldsymbol{f}}_m),$$

$$\boldsymbol{u}_{m}^{n+1} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{u}}}_{m} + \Omega_{m+1/2}^{n} \boldsymbol{\varphi}_{m+1/2}^{n} - \Omega_{m-1/2}^{n} \boldsymbol{\varphi}_{m-1/2}^{n}$$
,

де компоненти вектора

$$\mathbf{\phi}_{m+1/2}^{i} = -\frac{\eta(\lambda_{m+1/2}^{i}) + \gamma_{m+1/2}^{2}}{U_{m+1/2}^{i} - Q_{m+1/2}^{i}}$$

Функція, що входить у вираз для лімітера, обчислюється так:

$$\begin{aligned} Q_{m+1/2} &= \min \mod(\boldsymbol{u}_{m-1/2}, \boldsymbol{u}_{m+1/2}, \boldsymbol{u}_{m+3/2}), \\ Q_{m+1/2} &= \min \mod(\boldsymbol{u}_{m+1/2}, \boldsymbol{u}_{m-1/2}) + \min \mod(\boldsymbol{u}_{m+1/2}, \boldsymbol{u}_{m+3/2}) - \boldsymbol{u}_{m+1/2}, \\ Q_{m+1/2} &= \min \mod(2\boldsymbol{u}_{m-1/2}, 2\boldsymbol{u}_{m+1/2}, 2\boldsymbol{u}_{m+3/2}, 0, 5(\boldsymbol{u}_{m+3/2} + \boldsymbol{u}_{m-1/2})). \end{aligned}$$

Приклади обмежувачів.

MinMod

$$\psi_{MM}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0, \\ \min(1, R), & R > 0, \\ \psi_{MM}(1) = 1. \end{cases}$$





Обмежувач Ван Лесра

$$\psi_{VL}(R) = \frac{R + |R|}{|R| + 1} = \begin{cases} 0, & R \le 0, \\ \frac{2R}{R + 1}, & R > 0, \\ \psi_{VL}(1) = 1. \end{cases}$$



Рис. 6.2 Обмежувач Ван Леєра

Обмежувач Ван Альбада

 $\psi_{VA}(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1}, \quad \psi_{VA}(1) = 1, \quad \psi_{VA} \in C^{\infty}.$

Рис. 6.3 Обмежувач Ван Альбада

Superbee

$$\psi_{SB}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0, \\ \max(\min(2R, 1), \min(R, 2)), & R > 0, \\ \psi_{SB}(1) = 1. \end{cases}$$

Модифікований MinMod

$$\psi_{MM}^{c}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0, \\ \min(c, R), & R > 0, & 1 \le c \le 2, \end{cases}$$
$$\psi_{MM}(1) = 1.$$

Зв'язок з лінійною реконструкцією.

Якщо розв'язок представлено в кожній комірці лінійною функцією, тоді

$$u_{j+1/2}^{L} - u_{j} = u_{j} - u_{j-1/2}^{R},$$

$$\psi(R_{j})(u_{j} - u_{j-1}) = \psi(\frac{1}{R_{j}})(u_{j+1} - u_{j}),$$

$$\psi(\frac{1}{R_{j}}) = \frac{\psi(R_{j})}{R_{j}}.$$

Таким чином, якщо обмежувач має властивість

$$\psi(\frac{1}{R}) = \frac{\psi(R)}{R} \quad \forall R \in \mathbb{R},$$

тоді можна говорити про лінійну реконструкцію розв'язку в кожній розрахунковій комірці. Обмежувачі ψ_{MM} , ψ_{VL} , ψ_{VA} , ψ_{SB} мають дану властивість, ψ_{MM}^c – ні. У випадку лінійної реконструкції, TVD-властивість еквівалентна

$$\alpha \leq \psi(R) \leq M$$
, $-M \leq \psi(R) \leq 2 + \alpha \quad \forall R \in \mathbb{R}$.

Покладаючи M = 2, зведемо ці умови до однієї

$$\alpha \leq \psi(R) \leq 2 + \alpha \quad \forall R \in \mathbb{R} \ (\alpha \in [-2,0]),$$

тобто $\psi_{max} - \psi_{min} \leq 2$.

Узагальнення на багатовимірний випадок.

$$u_t + f_x + g_y = 0,$$

$$\begin{split} u_{jk}^{n+1} &= u_{jk}^{n} + \frac{\tau}{h_{x}} \Big[F^{+}(u_{j,k-1/2}^{L}) - F^{+}(u_{j,k+1/2}^{L}) + F^{-}(u_{j,k-1/2}^{R}) - F^{-}(u_{j,k+1/2}^{R}) \Big] + \\ &+ \frac{\tau}{h_{y}} \Big[G^{+}(u_{j,k-1/2}^{L}) - G^{+}(u_{j,k+1/2}^{L}) + G^{-}(u_{j,k-1/2}^{R}) - G^{-}(u_{j,k+1/2}^{R}) \Big] , \\ &u_{j+1/2,k}^{L} = u_{j,k}^{n} + \frac{1}{2} \Psi(R_{j,k}^{n})(u_{j,k}^{n} - u_{j-1,k}^{n}) , \\ &u_{j-1/2,k}^{R} = u_{j,k}^{n} - \frac{1}{2} \Psi(\frac{1}{R_{j,k}^{n}})(u_{j+1,k}^{n} - u_{j,k}^{n}) , \\ &R_{j,k}^{n} = \frac{u_{j+1,k}^{n} - u_{j-1,k}^{n}}{u_{j,k}^{n} - u_{j-1,k}^{n}} , \\ &u_{j,k+1/2}^{L} = u_{j,k}^{n} + \frac{1}{2} \Psi(S_{j,k}^{n})(u_{j,k-1}^{n} - u_{j,k-1}^{n}) , \\ &u_{j,k-1/2}^{L} = u_{j,k}^{n} - \frac{1}{2} \Psi(\frac{1}{S_{j,k}^{n}})(u_{j,k+1}^{n} - u_{j,k}^{n}) , \\ &S_{j,k}^{n} = \frac{u_{j,k+1}^{n} - u_{j,k}^{n}}{u_{j,k}^{n} - u_{j,k-1}^{n}} \\ &u_{j,k}^{n} \approx \frac{1}{h_{x}h_{y}} \int_{y_{x+1/2}}^{y_{x+1/2}} u(\zeta,\eta,n\tau) d\zeta d\eta , \\ &u_{j+1/2,k}^{L}, u_{j+1/2,k}^{R} \approx \frac{1}{h_{y}} \int_{y_{x-1/2}}^{y_{x+1/2}} u(x_{j+1/2},\eta,n\tau) d\zeta d\eta . \end{split}$$

Узагальнення на систему законів збереження.

$$u_t + f_x = 0$$
, $A(u) = \partial f / \partial u = R^{-1}(u)\Lambda(u)R(u)$.

Визначимо локальні характеристичні змінні:

$$W_{j-q} = R_j^{-1} u_{j-q}, \dots, W_j = R_j^{-1} u_j, \dots, W_{j+p} = R_j^{-1} u_{j+p},$$
$$W_j = \left\{ W_j^{(\alpha)} \right\} = (W_j^{(1)}, \dots, W_j^{(n)})^T.$$

Реконструкцію здійснюємо в локальному характеристичному полі:

$$\begin{split} W_{j+1/2}^{(\alpha)L} &= W_j^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \psi(S_j^{(\alpha)}) (W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}) \,, \\ W_{j-1/2}^{(\alpha)R} &= W_j^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \psi(\frac{1}{S_j^{(\alpha)}}) (W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}) \,, \\ S_j^{(\alpha)} &= \frac{W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}}{W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}} \,. \end{split}$$

Обернене перетворення до фізичних змінних:

$$u_{j+1/2}^{L} = R_{j}W_{j+1/2}^{L}, \quad u_{j-1/2}^{R} = R_{j}W_{j-1/2}^{R}.$$

2.6.5. СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ АПРОКСИМАЦІЇ: ЕNO I WENO СХЕМИ

Стандартні схеми TVD, що мають другий порядок точності поза розривами та екстремумами розв'язку, добре підходять для обчислення надзвукових течій з невеликим числом ізольованих ударних хвиль. Проте задачі, що містять як ударні хвилі, так і численні складні структури в областях, де розв'язок гладкий, вимагають застосування більш точних обчислювальних інструментів. Ця необхідність особливо очевидна при прямому чисельному моделюванні (DNS) і моделюванні методом крупних вихорів (LES) стискуваних перехідних і турбулентних течій, при моделюванні відривних і струменевих течій, в обчислювальній аероакустиці, а також при моделюванні надзвукового горіння і детонації.

Тому важливе значення мають алгоритми і комп'ютерні програми, які здатні надійно проводити наскрізне обчислення сильних ударних хвиль і, одночасно, з високою точністю моделювати гладку частину надзвукових течій, що містять складні взаємодії ударних хвиль між собою, з примежовими шарами, вихорами, акустичними хвилями і хвилями гідродинамічної нестійкості. Сучасні ENO (essentially non-oscillatory) і WENO (weighted ENO) схеми є природними кандидатами на роль базового обчислювального інструменту в таких алгоритмах і програмах.

Основна ідея ENO-схеми: використовувати кусковополіноміальну реконструкцію та уникнути інтерполяції через розриви. *Означення ENO-схеми*: різницевий метод є ENO-схемою, якщо виконується нерівність

 $TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) + O(\Delta x^r)$

для всіх n і деякого r.

Порівняння ЕΝО і WENO-схем.

Скінченно-об'ємні ЕNO-схеми:

- використовують локальний адаптивний шаблон для реконструкції змінних на межі комірок $u_{i+1/2}^{L,R}$ з середніх по комірках \overline{u}_i ;

- використовують наближений розв'язок задачі Рімана, щоб обчислити чисельні потоки $F_{i+1/2} = F(u_{i+1/2}^L, u_{i+1/2}^R)$.

Скінченно-різницеві ENO-схеми:

- використовують розщеплювання потоків в центрах комірок, щоб виділити їх «позитивну» і «негативну» частини;

- використовують локальний адаптивний шаблон для реконструкції чисельних потоків $\hat{F}_{j+1/2}$ з «розщеплених» потоків у центрах комірок.

Скінченно-об'ємні WENO-схеми:

- використовують опуклу лінійну комбінацію шаблонів з адаптивними коефіцієнтами для реконструкції $u_{i+1/2}^{L,R}$;

- використовують наближений розв'язок задачі Рімана, подібно до скінчено-об'ємних схем ЕNO.

Скінченно-різницеві WENO-схеми:

- використовують розщеплювання потоків, подібно до скінченно-різницевих схем ENO;

- використовують опуклу лінійну комбінацію шаблонів з адаптивними коефіцієнтами для реконструкції $\hat{F}_{i+1/2}$.

Якщо розв'язок достатньо гладкий, то для скінченнооб'ємних схем ENO і WENO використовуються формули

$$\overline{u}_{j} = u(x_{j}) + O(\Delta x^{2}),$$

$$u_{j+1/2}^{L,R} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{r}),$$

$$F_{j+1/2} = f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{r}).$$

Для скінченно-різницевих схем ENO і WENO – формули

$$\hat{F}_{j+1/2} = f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^2),$$
$$\frac{\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r),$$

де *r* – порядок апроксимації схеми.

ENO-схема для лінійного рівняння переносу.

Основна ідея методу полягає у використанні двох (або більше) шаблонів для забезпечення двох традиційно протилежних властивостей: другого порядку точності і монотонності без наявності в'язкості апроксимації або штучної в'язкості.

Зазвичай використовують дві базові схеми: з центральними та односторонніми різницями, а також з умовою перемикання, залежною від значення похідних (першої і другої) і знаку швидкості перенесення.

Розглянемо один із варіантів побудови ENO-схеми для чисельного розв'язання лінійного рівняння перенесення. Запишемо схему в потоковій формі

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma(\overline{f}_{m+1/2} - \overline{f}_{m-1/2})$$

а самі числові потоки обчислюватимемо за формулами, в які введемо невизначені поки що коефіцієнти:

$$\overline{f}_{m+1/2} = \begin{cases} \alpha u_{m-1}^{n} + (1 - \alpha - \beta)u_{m}^{n} + \beta u_{m+1}^{n}, & \alpha \ge 0, \\ \alpha u_{m+2}^{n} + (1 - \alpha - \beta)u_{m+1}^{n} + \beta u_{m}^{n}, & \alpha < 0, \end{cases}$$
$$\overline{f}_{m-1/2} = \begin{cases} \alpha u_{m-2}^{n} + (1 - \alpha - \beta)u_{m-1}^{n} + \beta u_{m}^{n}, & \alpha \ge 0, \\ \alpha u_{m+1}^{n} + (1 - \alpha - \beta)u_{m}^{n} + \beta u_{m-1}^{n}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Випишемо *перше диференціальне наближення (ПДН)* різницевої схеми. Для цього випишемо проекцію точного розв'язку рівняння переносу на введену різницеву сітку, розкладемо в ряд Тейлора в околі будь-якої точки шаблону і зведемо подібні доданки. В одержаному диференціальному рівнянні залишимо головні члени нев'язки. Крім того, як більш інформативну, розглядаємо П-форму; після всіх обчислень отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{h}{2} |a| (1 + 2\alpha - 2\beta) - \frac{\tau a^2}{2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

З ПДН виходить, що при $\alpha = \beta = 0$ маємо схему першого порядку, при $\alpha = 0, \beta = 1/2$ – другого порядку з центральними різницями, при $\alpha = -1/2, \beta = 0$ – другого порядку з орієнтованими різницями. Зробимо так, щоб коефіцієнт при другій похідній в першому диференціальному наближенні схеми з центральними різницями перетворився на нуль. Це означає, що в схемі відсутня схемна (апроксимаційна) в'язкість. Звідси отримаємо

$$\beta = 0, 5\left(1 - \frac{|a|h}{\tau}\right).$$

Якщо ввести аналог числа Куранта $\sigma = \frac{|a|h}{\tau}$, то дану умову можна записати компактніше: $\beta = 0,5(1-\sigma)$. Для схем з орієнтованими різницями умова рівності нулю в'язкості апроксимації дає $\beta = -0,5(1-\sigma)$.

Дослідження обох схем на монотонність, яке тут опускається, приводить до умов

$$\Delta_{m+1/2} u \ge \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)} \Delta_{m-1/2} u$$

для схеми з центральними різницями і

$$\Delta_{m+1/2} u \leq \frac{2(1+\sigma)}{\sigma} \Delta_{m-1/2} u$$

для схеми з орієнтованими різницями. Об'єднання цих умов дає умову монотонності обох схем:

$$\frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)}\Delta_{m-1/2}u \leq \Delta_{m+1/2}u \leq \frac{2(1+\sigma)}{\sigma}\Delta_{m-1/2}u.$$

245

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (<u>http://www.novapdf.com/</u>)

Можна виділити монотонні *різницеві схеми без в'язкості апроксимації*, якщо реалізувати перемикання з однієї схеми на іншу. Для такої монотонної схеми можна виписати остаточний вигляд потоків. Формули для потоків випишемо через число Куранта:

$$\overline{f}_{m+1/2} = \begin{cases} \frac{3-\sigma}{2}u_m^n - \frac{1-\sigma}{2}u_{m-1}^n, & a \ge 0, \\ \frac{3-\sigma}{2}u_{m+1}^n - \frac{1-\sigma}{2}u_{m+2}^n, & a < 0, \end{cases}$$

якщо $(a\Delta u\Delta^2 u)_{m+1/2} \ge 0$ і

$$\overline{f}_{m+1/2} = \frac{1 - \sigma a}{2} u_{m+1}^n + \frac{1 + \sigma a}{2} u_m^n$$

якщо $(a\Delta u\Delta^2 u)_{m+1/2} < 0$. Тут позначено

$$\Delta_{m+1/2} u = u_{m+1} - u_m, \quad \Delta_{m+1/2}^2 u = \Delta u_{m+1} - \Delta u_m.$$

Два завдання поліноміальної реконструкції. <u>Завдання 1</u>. Відомі середні значення функції *u*(*x*):

$$\overline{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x) dx , \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Для кожної комірки $\Delta_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ знайти поліном $p_j(x)$ степеня не вище k-1, що апроксимує u(x) усередині комірки з k-м порядком точності:

$$p_j(x) = u(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, ..., N$$

<u>Завдання 2</u>. Задані значення функції u(x) в центрах комірок $\overline{u}_j \equiv u(x_j)$. Знайти величини $\hat{u}_{j+1/2} = \hat{u}(u_{j-r},...,u_{j+s}), \quad j = 0,1,...,N$, різниця яких апроксимує похідну u'(x) з *k*-м порядком точності:

$$\frac{\hat{u}_{j+1/2} - \hat{u}_{j-1/2}}{\Delta x} = u'(x_j) + O(\Delta x^k), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Реконструкція з середніх по комірках.

Нехай число k задано. Виберемо шаблон $S(j) = \{\Delta_{j-r}, ..., \Delta_{j+s}\}$, що складається з комірки Δ_j , r комірок

ліворуч і *s* комірок праворуч. Існує єдиний поліном p(x) степеня k-1=r+s, чиї середні по кожній комірці шаблону збігаються з середніми значеннями функції u(x):

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}p(x)dx=\overline{u}_i, \quad i=j-r,\ldots,j+s.$$

Цей поліном і дає шукану реконструкцію. Що стосується значень на гранях комірки, то вони є лінійними комбінаціями середніх по комірках, з коефіцієнтами c_{ri} , \tilde{c}_{ri} , що не залежать від самої функції u(x):

$$u_{j+1/2}^{R} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \overline{u}_{j-r+i} , \quad u_{j-1/2}^{L} = \sum_{i=0}^{k-1} \widetilde{c}_{ri} \overline{u}_{j-r+i} .$$

Якщо ми ідентифікуємо r не з коміркою Δ_j , а з точкою $x_{j+1/2}$, тобто використовуємо шаблон S(j), щоб апроксимувати значення в точці $x_{j+1/2}$, тоді $\tilde{c}_{ri} = c_{r-1,i}$. Отже,

$$u_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ii} \overline{u}_{j-r+i} , \quad u_{j+1/2} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k) .$$

Побудова p(x) та обчислення коефіцієнтів c_{ri} . Визначимо первісну $U(x) = \int_{-\infty}^{x} u(\xi) d\xi$. Очевидно

$$U(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^{j} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi = \sum_{i=-\infty}^{j} \overline{u}_i \Delta x$$

Побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа P(x) степеню k по значеннях $U(x_{j+1/2})$ в k+1 точці $x_{j-r-1/2},...,x_{j+s+1/2}$ і покладемо p(x) = P'(x). Легко перевірити, що

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P'(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x} (U(x_{i+1/2}) - U(x_{i-1/2})) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{-\infty}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{i-1/2}} u(\xi) d\xi \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi) d\xi = \overline{u}_i,$$

$$i = j - r, \dots, j + s.$$

Для коефіцієнтів c_{n} обчислення дають такий вираз

$$c_{ri} = \sum_{m=i+1}^{k} \frac{\sum_{l=0, l\neq m}^{k} \prod_{q=0, q\neq m, l}^{k} (r-q+1)}{\prod_{l=0, l\neq m}^{k} (m-l)}.$$

Таблиця коефіцієнтів с_{гі}

r	i = 0	<i>i</i> = 1	<i>i</i> = 2	<i>i</i> = 3
-1	1			
0	1			
-1	3/2	-1/2		
0	1/2	1/2		
1	-1/2	3/2		
-1	11/6	-7/6	1/3	
0	1/3	5/6	-1/6	
1	-1/6	5/6	1/3	
2	1/3	-7/6	11/6	
-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4
0	1/4	13/12	-5/12	1/12
1	-1/12	7/12	7/12	-1/12
2	1/12	-5/12	13/12	1/4
3	-1/4	13/12	-23/12	25/12
	r -1 0 -1 0 1 -1 0 1 2 -1 0 1 2 3	$\begin{array}{cccc} r & i=0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \\ -1 & 11/6 \\ 0 & 1/3 \\ 1 & -1/6 \\ 2 & 1/3 \\ -1 & 25/12 \\ 0 & 1/4 \\ 1 & -1/12 \\ 2 & 1/12 \\ 3 & -1/4 \end{array}$	r $i = 0$ $i = 1$ -1101-1 $3/2$ $-1/2$ 0 $1/2$ $1/2$ 1 $-1/2$ $3/2$ -1 $11/6$ $-7/6$ 0 $1/3$ $5/6$ 1 $-1/6$ $5/6$ 2 $1/3$ $-7/6$ -1 $25/12$ $-23/12$ 0 $1/4$ $13/12$ 1 $-1/12$ $7/12$ 2 $1/12$ $-5/12$ 3 $-1/4$ $13/12$	r $i=0$ $i=1$ $i=2$ -1101-1 $3/2$ $-1/2$ 0 $1/2$ $1/2$ 1 $-1/2$ $3/2$ -1 $11/6$ $-7/6$ 1 $-1/6$ $5/6$ 1 $-1/6$ $5/6$ 1 $-1/6$ $5/6$ 1 $25/12$ $-23/12$ 1 $-1/12$ $7/12$ 2 $1/4$ $13/12$ -5/12 $13/12$ 3 $-1/4$

Приклади:

$$\frac{k=2}{r=-1}: \quad u_{j+1/2} = \frac{3}{2}\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{2}\overline{u}_{j+2} + O(\Delta x^2)$$

$$r=0: \quad u_{j+1/2} = \frac{1}{2}\overline{u}_j + \frac{1}{2}\overline{u}_{j+1} + O(\Delta x^2)$$

$$r=1: \quad u_{j+1/2} = -\frac{1}{2}\overline{u}_{j-1} + \frac{3}{2}\overline{u}_j + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{k=3}{r=-1}: \quad u_{j+1/2} = \frac{11}{6}\overline{u}_{j+1} - \frac{7}{6}\overline{u}_{j+2} + \frac{1}{3}\overline{u}_{j+3} + O(\Delta x^3)$$

$$r=0: \quad u_{j+1/2} = \frac{1}{3}\overline{u}_j + \frac{5}{6}\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{6}\overline{u}_{j+2} + O(\Delta x^3)$$

$$r=1: \quad u_{j+1/2} = -\frac{1}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{5}{6}\overline{u}_j + \frac{1}{3}\overline{u}_{j+1} + O(\Delta x^3)$$

$$r=2: \quad u_{j+1/2} = \frac{1}{3}\overline{u}_{j-2} - \frac{7}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{11}{6}\overline{u}_j + O(\Delta x^3)$$

Консервативна апроксимація похідної. Якщо можна знайти функцію *h*(*x*) таку, що

$$u(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi) d\xi,$$

тоді, очевидно,

$$u'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[h(x + \frac{\Delta x}{2}) - h(x - \frac{\Delta x}{2}) \right] \quad \text{i} \quad \hat{u}_{j+1/2} = h(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k) \,.$$

Тому

$$\frac{\hat{u}_{j+1/2} - \hat{u}_{j-1/2}}{\Delta x} = u'(x_j) + O(\Delta x^k) \,.$$

Оскільки u(x) – «ковзаюче середнє» функції h(x), то для відшукання h(x) можна знову використовувати реконструкцію через первісну. Визначимо $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(\xi) d\xi$, тоді

$$H(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^{j} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h(\xi) d\xi = \sum_{i=-\infty}^{j} u_i \Delta x.$$

Знаходимо апроксимацію *k*-го порядку, яку беремо замість «чисельного потоку»:

$$\hat{u}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} u_{j-r+i}$$
.

Наприклад,

$$\hat{u}_{j+1/2} = -\frac{1}{6}u_{j-1} + \frac{5}{6}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1}, \quad \frac{\hat{u}_{j+1/2} - \hat{u}_{j-1/2}}{\Delta x} = u'(x_j) + O(\Delta x^3).$$

Адаптивний шаблон. Як вибрати шаблон так, щоб уникнути реконструкції упоперек розривів?

Визначимо розділені різниці

$$U[x_{j-1/2},\ldots,x_{j-1/2+i}] = \frac{U[x_{j+1/2},\ldots,x_{j-1/2+i}] - U[x_{j-1/2},\ldots,x_{j-3/2+i}]}{x_{j-1/2+i} - x_{j-1/2}},$$

де $i \ge 1$ і $U[x_{j+1/2}] \equiv U(x_{j+1/2})$ при i = 0. Очевидно,

$$U[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = \frac{U(x_{j+1/2}) - U(x_{j-1/2})}{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}} = \overline{u}_j,$$

тож вищі розділені різниці U виражаються через різниці \overline{u} .

Розділені різниці можуть служити мірою гладкості розв'язку, оскільки, якщо функція гладка, то

$$U[x_{j-1/2},...,x_{j-1/2+i}] = U^{(i)}(\xi)/i!$$

для деякого ξ усередині шаблону $x_{i-1/2} < \xi < x_{i-1/2+i}$, і

$$U[x_{i-1/2},...,x_{i-1/2+i}] = O(1/\Delta x^i),$$

якщо усередині шаблону існує розрив. Тому шаблон може бути визначений за допомогою такої послідовної процедури.

1. У комірці Δ_j починаємо з двоточкового шаблону $\tilde{S}_2(j) = \{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}$ для U, який еквівалентний $\tilde{S}_1(j) = x_j$ для u.

2. Для *l* = 2,...,*k*, припускаючи відомим шаблон

$$\tilde{S}_{l}(j) = \{x_{j+1/2}, \dots, x_{j-1/2+l}\},\$$

додаємо одну з двох точок $x_{i-1/2}$ або $x_{i+1/2+l}$ відповідно до правила:

Якщо $|U[x_{j-1/2},...,x_{j-1/2+l}]| < |U[x_{j+1/2},...,x_{j+1/2+l}]|$, то додати $x_{j-1/2}$ до шаблону $\tilde{S}_{l}(j)$ і отримати $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j-1/2},...,x_{j-1/2+l}\}$. Інакше додати $x_{j+1/2+l}$ до шаблону $\tilde{S}_{l}(j)$ і отримати $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j+1/2},...,x_{j+1/2+l}\}$.

3. Визначити, використовуючи таблицю коефіцієнтів c_{ri} , $u_{j+1/2}^R$, $u_{j-1/2}^L$. Якщо потрібно, то побудувати $P_j(x)$ і $p_j(x)$.

Властивості ЕЮО-реконструкції.

ENO-реконструкція має такі властивості:

1. $P_j(x) = U(x) + O(\Delta x^{k+1})$, $x \in \Delta_j$, для будь-якої комірки, що не містить розриву. Повна точність аж до розриву.

2. Функція $P_j(x)$ монотонна в будь-якій комірці, що містить розрив U(x).

3. Дана реконструкція є TVB (total variation bounded). Це означає, що існує функція z(x) така, що

$$z(x) = P_i(x) + O(\Delta x^{k+1}), \quad x \in \Delta_i,$$

для будь-якої комірки, включаючи і ті, що містять розриви, і

$$TV(z) \leq TV(U)$$
.

WENO-реконструкція. Головна ідея: замість використання тільки одного з «шаблонів-кандидатів», використовувати їх опуклу комбінацію, тобто, якщо $S_r(j) = \{x_{j-r}, ..., x_{j-r+k+1}\}$, то

$$u_{j+1/2}^{(r)} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \overline{u}_{j-r+i} , \quad r = 0, \dots, k-1 ,$$
$$u_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{j+1/2}^{(r)} , \quad \omega_r \ge 0 , \quad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1$$

Якщо функція u(x) гладка, то існують константи Ω_r , такі що

$$u_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \Omega_r u_{j+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}).$$

Для k = 1 – це $\Omega_0 = 1$, при k = 2 маємо $\Omega_0 = 2/3$, $\Omega_1 = 1/3$, при k = 3: $\Omega_0 = 3/10$, $\Omega_1 = 3/5$, $\Omega_2 = 1/10$.

Для гладкого випадку бажано мати властивість

$$\omega_r = \Omega_r + O(\Delta x^{k-1}),$$

тоді отримаємо

$$u_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{j+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1})$$

Якщо якийсь шаблон містить розрив, то відповідний ваговий коефіцієнт повинен бути близьким до нуля.

Добре працюють вагові коефіцієнти, вибрані так:

$$\omega_r = \frac{\sigma_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \sigma_s}, \quad \sigma_r = \frac{\Omega_r}{(\varepsilon + IS^{(r)})^2}, \quad \varepsilon \approx 10^{-6}, \quad r = 0, \dots, k-1,$$

де для гладкої функції $IS^{(r)} = O(\Delta x^2)$, $\omega_r = O(1)$; у разі розриву $IS^{(r)} = O(1)$, $\omega_r = O(\Delta x^4)$.

Індикатори гладкості.

$$IS^{(r)} = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{j-l/2}}^{x_{j+l/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx \, .$$

Приклади:

$$\frac{k=2}{IS^{(0)}} = \overline{u}_{j+1} - \overline{u}_{j}$$

$$IS^{(1)} = \overline{u}_{j} - \overline{u}_{j-1}$$

$$\frac{k=3}{IS^{(0)}} = \frac{13}{12} (\overline{u}_{j} - 2\overline{u}_{j+1} + \overline{u}_{j+2})^{2} + \frac{1}{4} (3\overline{u}_{j} - 4\overline{u}_{j+1} + \overline{u}_{j+2})^{2},$$

$$IS^{(1)} = \frac{13}{12} (\overline{u}_{j-1} - 2\overline{u}_{j} + \overline{u}_{j+1})^{2} + \frac{1}{4} (\overline{u}_{j-1} - \overline{u}_{j+1})^{2},$$

$$IS^{(2)} = \frac{13}{12} (\overline{u}_{j-2} - 2\overline{u}_{j-1} + \overline{u}_{j})^{2} + \frac{1}{4} (\overline{u}_{j-2} - 4\overline{u}_{j} + 3\overline{u}_{j})^{2}.$$

Алгоритм скінченно-об'ємної схеми.

1. Використовуючи ENO або WENO-реконструкцію, отримати з \overline{u}_j величини $u_{j+1/2}^L$ і $u_{j+1/2}^R$.

2. Обчислити потоки $F_{j+1/2}$, розв'язавши (наближено) задачу про розпад розриву на гранях між комірками.
3. Інтегруємо за часом рівняння

$$\frac{d\overline{u}_j}{dt} = -\frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x}.$$

Алгоритм скінченно-різницевої схеми.

1. Розщепити потік на позитивну і негативну частини:

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u), \quad \frac{\partial f^+(u)}{\partial u} \ge 0, \quad \frac{\partial f^-(u)}{\partial u} \le 0$$

2. Покласти $\overline{V}_j = f^+(u_j)$ і, використовуючи ENO або WENO-реконструкцію, отримати величини $\hat{F}_{j+1/2}^+ = u_{j+1/2}^L$.

3. Покласти $\overline{V}_j = f^-(u_j)$ і, використовуючи ENO або WENOреконструкцію, отримати величини $\hat{F}_{j+1/2}^- = u_{j+1/2}^R$.

- 4. Утворити повний потік $\hat{F}_{j+1/2} = \hat{F}_{j+1/2}^+ + \hat{F}_{j+1/2}^-$.
- 5. Інтегруємо за часом рівняння

$$\frac{du_{j}}{dt} = -\frac{\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}}{\Delta x}$$

Скінченно-різницева схема WENO 5-го порядку. Скалярний закон збереження

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \lambda = \frac{\partial f}{\partial u} \ge 0.$$

Покладаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x} ,\\ f_{j+1/2}^{(1)} &= \frac{11}{6} f_j - \frac{7}{6} f_{j-1} + \frac{1}{3} f_{j-2} ,\\ f_{j+1/2}^{(2)} &= \frac{1}{3} f_{j+1} + \frac{5}{6} f_j - \frac{1}{6} f_{j-1} ,\\ f_{j+1/2}^{(3)} &= -\frac{1}{6} f_{j+2} + \frac{5}{6} f_{j+1} + \frac{1}{3} f_j . \end{aligned}$$

Для ENO покладаємо:

$$\hat{f}_{j+1/2} = f_{j+1/2}^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

253

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

Для WENO:

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{\nu=1}^{3} \omega^{(\nu)} f_{j+1/2}^{(\nu)} .$$
$$\omega^{(\nu)} = \frac{\sigma^{(\nu)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}}, \quad \sigma^{(\nu)} = \frac{\Omega^{(\nu)}}{(\varepsilon + IS^{(\nu)})^2}, \quad \varepsilon \approx 10^{-6} .$$

Оптимальні коефіцієнти: $\Omega^{(1)} = 1/10$, $\Omega^{(2)} = 6/10$, $\Omega^{(3)} = 3/10$. Індикатор гладкості:

$$IS^{(v)} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left[\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \Delta x^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \, .$$

З оптимальними коефіцієнтами WENO-схема еквівалентна несиметричній схемі 5-го порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{-3f_{j+2} + 30f_{j+1} + 20f_j - 60f_{j-1} + 15f_{j-2} - 2f_{j-3}}{60\Delta x} \,.$$

При $\lambda = \frac{\partial f}{\partial u} \le 0$ використовуються симетрично відбиті формули.

Побудова схем ЕΝО і WENO.

Системи законів збереження.

 $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}_x = 0, \quad A(\boldsymbol{u}) = \partial \boldsymbol{f} / \partial \boldsymbol{u} = R^{-1}(\boldsymbol{u}) \Lambda(\boldsymbol{u}) R(\boldsymbol{u}).$

- Знайдемо середній стан $\tilde{u}_{j+1/2}$ (зазвичай за допомогою усереднювання по Роу).

- Визначимо локальні характеристичні змінні

$$\overline{\boldsymbol{W}}_{j-r} = \tilde{R}_{j+1/2}^{-1} \overline{\boldsymbol{u}}_{j-r}, \quad \overline{\boldsymbol{W}}_{j+s} = \tilde{R}_{j+1/2}^{-1} \overline{\boldsymbol{u}}_{j+s}.$$

- Реконструкцію робимо в локальному характеристичному полі:

$$W_j \rightarrow W_{j+1/2}^{L,R}$$

- Обернене перетворення до фізичних змінних

$$\boldsymbol{u}_{j+1/2}^{L,R} = \tilde{R}_{j+1/2} \boldsymbol{W}_{j+1/2}^{L,R}$$

- У разі скінченно-різницевих (W)ENO-схем реконструкція застосовується до локальних характеристичних потоків:

$$\Phi_{j-r} = \tilde{R}_{j+1/2}^{-1} f_{j-r}, \quad \Phi_{j+s} = \tilde{R}_{j+1/2}^{-1} f_{j+s}.$$

Способи розщеплювання потоку.

$$\boldsymbol{\Phi} = \left\{ \Phi^{\alpha} \right\}, \quad \tilde{\Lambda} = \operatorname{diag} \left\{ \tilde{\lambda}_{j+1/2}^{\alpha} \right\}, \quad \alpha, j = 1, \dots, n.$$

Розщеплювання Роу

$$\Phi_{j}^{\alpha+} = \begin{cases} \Phi_{j}^{\alpha}, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^{\alpha} \ge 0\\ 0, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^{\alpha} < 0 \end{cases}, \quad \Phi_{j}^{\alpha-} = \begin{cases} \Phi_{j}^{\alpha}, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^{\alpha} < 0\\ 0, & \tilde{\lambda}_{j+1/2}^{\alpha} \ge 0 \end{cases}.$$

Локальне розщеплювання Лакса-Фрідріхса

$$\Phi_j^{\alpha+} = (\Phi_j^{\alpha} + \beta W_j^{\alpha})/2, \ \Phi_j^{\alpha-} = (\Phi_j^{\alpha} - \beta W_j^{\alpha})/2, \ \beta = \min\left\{\lambda_j^{\alpha}, \lambda_{j+1}^{\alpha}\right\}.$$

Глобальне розщеплювання Лакса-Фрідріхса

$$\Phi_j^{\alpha+} = (\Phi_j^{\alpha} + \beta W_j^{\alpha})/2, \quad \Phi_j^{\alpha-} = (\Phi_j^{\alpha} - \beta W_j^{\alpha})/2, \quad \beta = \min_{1 \le j \le n} \{\lambda_j^{\alpha}\}.$$

Від одновимірних задач до багатовимірних.

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = 0.$$

Скінченно-об'ємні схеми:

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \bar{U}_{i,j}}{\partial t} + (F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}) + (G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2}) = 0,$$

$$\bar{U}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, y) dx dy,$$

$$F_{i-1/2,j} = \sum_{k} G_{k} F(x_{i-1/2}, y_{k}).$$

Скінченно-різницеві схеми:

$$\begin{split} \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \frac{\hat{F}_{i+1/2,j} - \hat{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{\hat{G}_{i,j+1/2} - \hat{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0, \\ \frac{\hat{F}_{i+1/2,j} - \hat{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} = \frac{\partial F_{i,j}}{\partial x} + O(\Delta x^k), \\ \hat{F}_{i+1/2,j} = F(x_{i+1/2}, y_j) + O(\Delta x^2), \\ \hat{F}_{i,j+1/2} = F(x_i, y_{j+1/2}) + O(\Delta y^2). \end{split}$$

Час обчислення для скінченно-об'ємних схем в 3,7 раза більший ніж для скінченно-різницевих.

Інтегрування за часом.

Розглянемо систему рівнянь $u_t + f_x = 0$. Після дискретизації по простору маємо

$$\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}) \,. \tag{5.1}$$

Нехай схема (5.1) стійка і має властивість TVD при інтегруванні її методом Ейлера

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^n + \Delta t \, L(\boldsymbol{U}^n) \,, \quad \Delta t \leq \Delta t_1 \,.$$

Тоді можна спробувати знайти методи Рунге-Кутти, які також стійкі і мали властивість TVD за умови $\Delta t \le c\Delta t_1$.

Загальний метод Рунге-Кутти

$$U^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} U^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(U^{(k)})), \quad i = 1, ..., m,$$
$$U^{(0)} = U^{n}, \quad U^{(m)} = U^{n+1}$$

буде TVD схемою, якщо

$$\alpha_{ik} \ge 0$$
, $\beta_{ik} \ge 0$, $c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}}$.

Вдається побудувати TVD-схеми Рунге-Кутти аж до третього порядку. При цьому *c* = 1.

Схема другого порядку:

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \boldsymbol{U}^n + \Delta t \, L(\boldsymbol{U}^n) \,,$$

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^n + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(\boldsymbol{U}^{(1)}).$$

Схема третього порядку точності:

$$U^{(1)} = U^{n} + \Delta t L(U^{n}),$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4}U^{n} + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}),$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3}U^{n} + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}).$$

Контрольні питання

- 1. У чому полягає задача Рімана про розпад розриву?
- Записати основні інтегральні співвідношення у методі С.К. Годунова.
- Записати схему типу Годунова підвищеного порядку точності з використанням кусково-лінійної апроксимації величин усередині комірок.
- Побудуйте різницеву схеми типу Куранта-Ізаксона-Риса першого порядку точності.
- 5. Сформулюйте теорему С.К. Годунова відносно існування монотонних лінійних схем.
- 6. Наведіть приклади гібридних різницевих схем.
- 7. У чому полягає метод корекції потоків Бориса-Буку?
- 8. Дайте означення та опишіть спосіб конструювання TVDсхем.
- Запишіть гібридну схему для системи рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.
- 10. Який вигляд має TVD-схема для квазілінійного рівняння з антидифузією?
- 11. Які обмежувачі має TVD-схема для квазілінійного рівняння переносу?
- 12. Особливості будови TVD-схеми типу предиктор-коректор для систем рівнянь гіперболічного типу.
- 13. Означення та основна ідея ЕNO і WENO-схем.
- 14. Властивості ENO і WENO-реконструкції.
- 15. Записати TVD-схему Рунге-Кутти третього порядку.

2.7. МЕТОДИ ПОБУДОВИ КРИВОЛІНІЙНИХ СІТОК

2.7.1. Рівняння для побудови сіток

Розрахункову область Ω на площині змінних x, y зручно представляти як чотирикутник з криволінійними межами, які для наочності назвемо нижньою, верхньою, лівою і правою. Кожна з цих чотирьох меж може складатися з декількох ділянок різного фізичного типу, але це поки що несуттєво, і ми вважатимемо, що усі вузли на кожній із них пронумеровані підряд. Число вузлів на протилежних межах однакове: індекс j = 0, 1, ..., J – на нижній і верхній, k = 0, 1, ..., K – на лівій і правій.

Надалі вважатимемо, що вже отримано положення вузлів на межах області Ω :

$$\{(x,y)_{j}^{n}\}, \{(x,y)_{j}^{s}\}, \{(x,y)_{k}^{nis}\}, \{(x,y)_{k}^{np}\}.$$
 (1.1)

Кутові точки, зрозуміло, збігаються:

$$(x, y)_0^{h} = (x, y)_0^{nie}, \quad (x, y)_J^{h} = (x, y)_0^{np}, (x, y)_0^{e} = (x, y)_K^{nie}, \quad (x, y)_J^{e} = (x, y)_K^{np}.$$

Ставимо завдання обчислення координат «внутрішніх» вузлів $\{(x, y)_{j,k}; j = 1, ..., J - 1; k = 1, ..., K - 1\}$ з тим, щоб два сімейства ліній, з яких одне виходить з'єднанням сусідніх вузлів по індексу *j* при фіксованому значенні індекса *k* (умовно назвемо його горизонтальним), а друге – з'єднанням вузлів, що відповідають послідовним значенням індекса *k* при фіксованому індексі *j* (вертикальне сімейство ліній), розрізали розрахункову область на комірки, які не повинні мати накладень, самоперетинів і виходити за межі обчислювальної області, заповнюючи її без проміжків. Іншими словами, лінії вертикального і горизонтального сімейств повинні утворювати невироджену систему координат.

Поставлене завдання можна тлумачити як різницевий аналог завдання про відшукання функцій $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, що забезпечують однолисте відображення на розрахункову область Ω деякої параметричної області D на площині ξ,η , наприклад, одиничного ква-

драта $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \eta \le 1$. Граничні значення цих функцій є відомі функції:

$$\begin{aligned} x(\xi,0) &= x^{n}(\xi), \quad y(\xi,0) = y^{n}(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \\ x(\xi,1) &= x^{s}(\xi), \quad y(\xi,1) = y^{s}(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \\ x(0,\eta) &= x^{nis}(\eta), \quad y(0,\eta) = y^{nis}(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \\ x(1,\eta) &= x^{np}(\eta), \quad y(1,\eta) = y^{np}(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1, \end{aligned}$$

які представляють неперервні аналоги дискретних великих кількостей точок (1.1), що задають положення меж області Ω:

$$x^{\mu}(j/J) = x_{j}^{\mu}, \quad x^{\pi i \theta}(k/K) = x_{k}^{\pi i \theta}.$$
 (1.3)

Очевидно, що сформулювана в такий спосіб задача про побудову сітки ще не визначена, і залишається широкий простір для різних припущень. Почнемо з викладу алгоритму [6], який назвемо *алгоритмом* I для зручності подальших посилань. Він полягає в тому, що два сімейства ліній сітки шукаємо як лінії рівня функцій $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, що задовольняють рівняння Лапласа

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \tag{1.4}$$

з граничними умовами, що забезпечують відповідність точок на контурі області Ω і контурі параметричної області D.

Рівняння (1.4) можна перетворити у рівняння для функцій $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \quad \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0, \quad (1.5)$$

 $\exists e \ \alpha = x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}, \ \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \ \gamma = x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}.$

Зауважимо, що в такій постановці існування однолистого відображення забезпечено. Розглянемо допоміжне конформне відображення x(p,q), y(p,q) на задану область деякого прямокутника $0 \le p \le p^*$, $0 \le q \le q^*$, при якому чотирьом його кутам відповідають чотири «кути» області Ω , що можливо при певному відношенні p^*/q^* . З інваріантності рівнянь (1.4) відносно конформного відображення $\xi(p,q)$, $\eta(p,q)$ прямокутника $\left\{ 0 \le p \le p^*, \ 0 \le q \le q^* \right\}$ на квадрат D випливає існування і єдиність однолистого відображен-

ня $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, що задовольняє рівняння (1.5). Однолистість функцій $\xi(p,q)$, $\eta(p,q)$ можна довести за допомогою гармонійності відношення

$$\frac{\xi_p\eta_q-\xi_q\eta_p}{\xi_p^2+\xi_q^2}$$

Проведені чисельні експерименти із застосування рівнянь (1.4) для обчислення різницевих сіток показали їх надійність в тому сенсі, що навіть у разі «дуже кривих» меж розраховані вузли лежать всередині контуру області і комірки сітки не мають накладень.

Проте в деяких випадках отримана сітка з тих або інших причин може бути визнана невдалою (наприклад, деякі з її ліній підходять до межі області під дуже малим кутом або бажано змінити розміри комірок сітки в певних місцях області, не змінюючи розташування точок на контурі). Такі побажання можна задовольнити, забезпечивши більшу «гнучкості» відображення за рахунок введення деякого числа змінних параметрів. З цією метою зробимо заміну змінних

$$\xi = \xi(\phi, \psi)$$
, $\eta = \eta(\phi, \psi)$.

Тоді замість (1.5) отримаємо систему рівнянь такого виду:

$$\alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = a x_{\varphi} + b x_{\psi},$$

$$\alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = a y_{\varphi} + b y_{\psi},$$
(1.6)

де

$$\alpha = x_{\psi}^2 + y_{\psi}^2, \quad \beta = x_{\varphi}x_{\psi} + y_{\varphi}y_{\psi}, \quad \gamma = x_{\varphi}^2 + y_{\varphi}^2,$$

$$a = \frac{\alpha\xi_{\varphi\varphi} - 2\beta\xi_{\varphi\psi} + \gamma\xi_{\psi\psi}}{\xi_{\varphi}\eta_{\psi} - \xi_{\psi}\eta_{\varphi}}\eta_{\psi} - \frac{\alpha\eta_{\varphi\varphi} - 2\beta\eta_{\varphi\psi} + \gamma\eta_{\psi\psi}}{\xi_{\varphi}\eta_{\psi} - \xi_{\psi}\eta_{\varphi}}\xi_{\psi},$$

$$b = \frac{\alpha\eta_{\varphi\varphi} - 2\beta\eta_{\varphi\psi} + \gamma\eta_{\psi\psi}}{\xi_{\varphi}\eta_{\psi} - \xi_{\psi}\eta_{\varphi}}\xi_{\varphi} - \frac{\alpha\xi_{\varphi\varphi} - 2\beta\xi_{\varphi\psi} + \gamma\xi_{\psi\psi}}{\xi_{\varphi}\eta_{\psi} - \xi_{\psi}\eta_{\varphi}}\eta_{\varphi}.$$
(1.7)

Вважаючи функції $\xi = \xi(\varphi, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi)$ заданими сукупністю їхніх значень $\{(\xi, \eta)_{j,k}\}$ у вузлах сітки, можна виписати систему різницевих рівнянь, що апроксимують (1.6), (1.7).

Розв'язок цієї системи дає сітку, горизонтальні лінії якої, що є образами прямих $\psi = \psi_k = const$, з точки зору згаданого вище відображення представлятимуть образи ліній $\xi = \xi(\varphi, \psi_k)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi_k)$. Аналогічно, вертикальні лінії сітки є образами ліній $\xi = \xi(\varphi_j, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi_j, \psi)$. Отже, використовуючи функції $\xi = \xi(\varphi, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi)$, маємо широкі можливості «управління» лініями сітки усередині області, не змінюючи розташування точок на її межах.

Зазначимо, що висловлені вище міркування про існування однолистого відображення і його єдиності залишаються в силі при використанні довільних функцій $\xi = \xi(\varphi, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi)$ з якобіаном, відмінним від нуля на квадраті D.

З точки зору практичної реалізації бажано, щоб функції $\xi = \xi(\phi, \psi)$, $\eta = \eta(\phi, \psi)$ визначалися невеликим числом параметрів. Будемо використовувати як такі параметри чотири послідовності: $\{s_j^n\}$, $\{s_j^s\}$, $\{s_k^{nis}\}$, $\{s_k^{np}\}$, які передають розташування вузлів сітки уздовж контуру межі. По них обчислюються за допомогою формул (1.4) величини (ξ, η)_{*j*,*k*}, що і беруть участь в складанні різницевих рівнянь. Як ліній сітки при відображенні $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ отримуватимемо образи прямолінійних відрізків, що сполучають відповідні точки на нижній – верхній і лівій – правій межах (див. рис. 7.1).



Рис. 7.1

Інший підхід до вибору рівнянь для обчислення різницевих сіток пов'язаний із залученням конформних і квазіконформних відображень. Розрахункову область, яку нам зручно представляти як чотирикутник з криволінійними межами, можна конформно відобразити на прямокутник $\overline{D}: \{0 \le \overline{\xi} \le p^*, 0 \le \overline{\eta} \le q^*\}$ з певним відношенням сторін $p^*/q^* = l$ так, щоб при цьому чотирьом кутам області Ω відповідали чотири кути \overline{D} .

Нехай це відображення описується функціями $\overline{x}(\overline{\xi},\overline{\eta})$, $\overline{y}(\overline{\xi},\overline{\eta})$. В подальшому зручніше розглядати відображення області Ω на одиничний квадрат $D: \{0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1\}$, що описується функціями

$$x(\xi,\eta) = \overline{x}(p^*\xi,q^*\eta), \quad y(\xi,\eta) = \overline{y}(p^*\xi,q^*\eta).$$

Його назвемо «конформним», позначаючи лапками ту обставину, що пов'язана з «розтягуванням» координат.

Задачу про відшукання функцій $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ і параметра l можна сформулювати як варіаційну задачу про мінімізацію функціонала

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_{D} \left[l(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}) + \frac{1}{l}(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}) \right] d\xi d\eta \qquad (1.8)$$

на класі функцій, що мають такі властивості:

1) $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ визначені на квадраті D;

2) на кожній із його сторін вони визначені так, що встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками сторони квадрата D і точками відповідної межі області Ω ;

3) функції $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ подовжуються всередину квадрата *D* довільним чином, але так, щоб існував інтеграл (1.8).

Функції $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ з описаного класу і число l, що забезпечують мінімум функціонала Φ , дають шукане «конформне» відображення. Справді,

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_{D} \left[\left(\sqrt{l} x_{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l}} y_{\eta} \right)^{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{l}} x_{\eta} + \sqrt{l} y_{\eta} \right)^{2} \right] d\xi d\eta + S, \quad (1.9)$$

де $S = \iint_{D} (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) d\xi d\eta$ означає площу заданої області Ω .

Мінімальне значення $\Phi = S$ досягається на функціях $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, що задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \sqrt{l}x_{\xi} - \frac{1}{\sqrt{l}}y_{\eta} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{l}}x_{\eta} + \sqrt{l}y_{\xi} = 0 \end{cases} \quad \text{afo} \quad \begin{cases} x_{\bar{\xi}} - y_{\bar{\eta}} = 0, \\ x_{\bar{\eta}} + y_{\bar{\xi}} = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

що і доводить твердження.

При «конформному» відображенні, що описується функціями $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta),$ маємо цілком визначена відповідність між точками на межі Γ області Ω і точками на сторонах квадрата D. Зокрема, заданим точкам $\{(x,y)_{j}^{n}\}$ з послідовностей (1.1) відповідають точки на нижній стороні з координатами $\{\xi_{j}^{n}, 0\},$ точкам $\{(x, y)_{j}^{s}\}$ – точки на верхній стороні з координатами $\{\xi_{j}^{e}, 1\},$ точкам $\{(x, y)_{k}^{nie}\}$ – точки на лівій стороні з координатами $\{0, \eta_{k}^{nie}\},$ точкам $\{(x, y)_{k}^{np}\}$ – точки на правій стороні з координатами $\{0, \eta_{k}^{nie}\},$ точкам $\{(x, y)_{k}^{np}\}$ – точки на правій стороні з координатами $\{0, \eta_{k}^{nie}\},$

З'єднаємо відповідні точки на протилежних сторонах квадрата D відрізками прямих. Тоді задача обчислення «конформного» відображення при фіксованих вузлах на межі області Ω зводиться до обчислення параметра l, значень координат $\{\xi_j^n\}, \{\xi_j^e\}, \{\eta_k^{nie}\}, \{\eta_k^{nie}\}$ і координат сітки $\{(x, y)_{j,k}\}$, що є прообразами точок перетину вищезгаданих відрізків на квадраті D. Алгоритм для чисельної реалізації цього завдання є досить громіздким, особливо в тій його частині, яка стосується відшукання послідовностей $\{\xi_j^n\}, \{\eta_k^{e}\}, \{\eta_k^{nie}\}, \{\eta_k^{nie}\}$.

Можна було б розглянути дещо іншу постановку завдання про побудову сітки. А саме, зафіксувавши положення вузлів на параметричному квадраті D, дозволити вузлам сітки «плисти» за заданим профілем меж області Ω доти, поки вони не займуть положення, що відповідає «конформному» відображенню.

Такий алгоритм реалізується набагато простіше. Проте, з цілого ряду причин, ми відмовляємося від такої можливості, наполягаючи на тій постановці, яка описана вище. Одна з причин полягає в тому, що в задачах із складною геометрією «мапу» завдання доводиться розрізати на декілька областей і в кожній з них сітку розраховувати незалежно. Можливість розпорядитися розташуванням точок на межах дозволяє обчислювачу більш доцільно використовувати наявні «ресурси» (як правило, дуже обмежені), орієнтуючись на конкретний зміст завдання.

Повертаючись до алгоритмів обчислення сітки із заданим положенням точок на межах області, замінимо в наведених вище міркуваннях «конформне» відображення з метрикою

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{l}d\xi^2 + ld\eta^2$$

на квазіконформне відображення, для якого

$$dx^{2} + dy^{2} = g_{11}d\xi^{2} + 2g_{12}d\xi d\eta + g_{22}d\eta^{2}, \qquad (1.11)$$

де g_{11} , g_{12} , g_{22} є функціями ξ , η , l. Тоді функціонал (1.8) набуває вигляду

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_{D} \frac{g_{22}(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}) - 2g_{12}(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}) + g_{11}(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^{2}}} d\xi d\eta. \quad (1.12)$$

Визначимо величину ω (0 < ω < π) формулою

$$\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$$

Як легко переконатися безпосередньою перевіркою, має місце тотожність

$$g_{22}(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}) - 2g_{12}(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}) + g_{11}(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}) \equiv \\ \equiv 2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^{2}}(x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) + X^{2} + Y^{2},$$

де

$$X = \sqrt{g_{22}} \left(x_{\xi} \sin \frac{\omega}{2} + y_{\xi} \cos \frac{\omega}{2} \right) + \sqrt{g_{11}} \left(x_{\eta} \sin \frac{\omega}{2} - y_{\eta} \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

$$Y = \sqrt{g_{22}} \left(-x_{\xi} \cos \frac{\omega}{2} + y_{\xi} \sin \frac{\omega}{2} \right) + \sqrt{g_{11}} \left(x_{\eta} \cos \frac{\omega}{2} + y_{\eta} \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Отже,

$$\Phi \geq \iint_D (x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}) d\xi d\eta = S.$$

Мінімальне значення $\Phi = S$ буде досягнуто, якщо існують функції $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, що задовольняють рівняння X = 0, Y = 0, які можуть бути записані так:

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} x_{\xi} = g_{11}y_{\eta} - g_{12}y_{\xi},
\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} x_{\eta} = g_{12}y_{\eta} - g_{22}y_{\xi},$$
(1.13)

і відомі в теорії квазіконформних відображень як рівняння Бельтрамі. Інтерес становить таке завдання з теорії квазіконформних відображень: зазначити клас функцій g_{11} , g_{12} , g_{22} від ξ , η , l такий, що для будь-якого криволінійного чотирикутника при деякому l існує єдине квазіконформне відображення на одиничний квадрат $\{0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1\}$.

Розглянутий вище приклад «конформних» відображень, для яких $g_{11} = \frac{1}{l}$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = l$, показує, що цей клас не порожній.

Ще один змістовний приклад, який можна покласти в основу алгоритму обчислення різницевих сіток, було розглянуто в [6]. Пропонується виділити спеціальний клас квазіконформних відображень, задавши коефіцієнти g_{11} , g_{12} , g_{22} квадратичної форми (1.11) у вигляді

$$g_{11} = e^{2q(\xi)}, \ g_{22} = e^{2p(\eta)}, \ g_{12} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos[\beta(\eta) - \alpha(\xi)], \ (1.14)$$

що містить чотири довільні функції одного аргументу ξ чи η . Ці функції мають бути знайдені в процесі мінімізації функціонала (1.12) на класі функцій $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ (аналогічному описаному

вище для «конформного» функціонала (1.8)), що приймають на межі квадрата *D* задані значення (1.2).

В [6] доведено, що мінімальне значення $\Phi = S$ досягається на єдиному наборі функцій

$$x = x(\xi, \eta), \ q = q(\xi), \ \alpha = \alpha(\xi),$$
$$y = y(\xi, \eta), \ p = p(\eta), \ \beta = \beta(\eta),$$

за умови природного нормування p, q, α, β та деяких обмежень на область Ω і розташування граничних точок, тобто на параметризацію граничних кривих (ці обмеження забезпечують існування відображень з даного класу, для яких екстремальне значення $\Phi = S$).

Нижче коротко описано чисельну реалізацію відповідного алгоритму побудови сіток (для зручності подальших посилань назвемо його алгоритмом II).

Зупинимося ще на одному виборі рівнянь для даного завдання. Звернемося до «конформного» функціонала (1.8) і, виходячи з вимоги його мінімізації, підберемо *l* локально у кожній точці. Очевидно, що цього можна досягти при

$$l = \sqrt{\frac{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}}.$$
 (1.15)

Підставляючи отримане *l* в (1.8), маємо функціонал такого вигляду:

$$\Phi = \iint_{D} \sqrt{(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2})(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2})} d\xi d\eta . \qquad (1.16)$$

На підставі очевидної тотожності

$$(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2})(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}) = (x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta})^{2} + (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi})^{2},$$

функціонал (1.16) можна записати у вигляді

$$\Phi = \iint_{D} \frac{(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\mu})^{2}}{(x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) + \sqrt{(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2})(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2})}} d\xi d\eta + \iint_{D} (x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}) d\xi d\eta.$$

266

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (<u>http://www.novapdf.com/</u>)

Отже, якщо абсолютний мінімум Φ , рівний S, досяжний, то для функцій $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, які його забезпечують, виконана рівність

$$x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0, \qquad (1.17)$$

яка є нічим іншим, як умовою ортогональності сітки.

Оскільки функціонал (1.16) не є опуклим, то можна побудувати приклади неєдиності розв'язку відповідної системи рівнянь Ейлера-Лагранжа для цього функціонала. Ця обставина не перешкоджає, проте, створенню чисельного алгоритму обчислення сіток на основі функціонала (1.16).

Для забезпечення його більшої гнучкості з точки зору властивостей отримуваної різницевої сітки можна розглядати і більш загальний функціонал:

$$\Phi = \iint_{D} \omega \sqrt{(x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2})(x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2})} d\xi d\eta , \qquad (1.18)$$

де ω > 0 – деяка вагова функція. Зокрема, добрі різницеві сітки будуть при використанні замість такої функції

$$\omega = |x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}|.$$
 (1.19)

Відповідний алгоритм умовно назвемо алгоритмом III.

На цьому закінчено розгляд питання про математичну формалізацію завдання побудови різницевої сітки. Як вже було зазначено на початку параграфа, воно дуже невизначене і допускає широкі можливості для різних розв'язків. Тому цікавим є насамперед дослідження оптимальності сіток для окремих класів задач.

2.7.2. Чисельна реалізація алгоритмів побудови сіток

Під словами «побудувати різницеву сітку в розрахунковій області Ω » мають на увазі обчислення координат «внутрішніх» вузлів $\{(x, y)_{j,k}; j = 1, ..., J - 1; k = 1, ..., K - 1\}$ за заданими координатами (1.1) вузлів на межах області. Алгоритм їх обчислення повинен задовольняти принаймні такі вимоги:

1. Вузли сітки $\{(x, y)_{j,k}\}$ повинні знаходитися всередині контуру області Ω .

2. При малому переміщенні меж розрахункової області координати вузлів сітки змінюються мало (тобто швидкості внутрішніх вузлів сітки мають бути погоджені зі швидкостями руху меж).

3. Два сімейства ліній сітки, що побудовані за її вузлами, повинні утворювати невироджену систему координат.

Для відшукання координат $\{(x, y)_{j,k}\}$ складаємо систему різницевих рівнянь, виходячи з тих або інших диференціальних рівнянь або варіаційних функціоналів, приклади яких наведено вище. Рівняння ці досить складні, оскільки апроксимують систему нелінійних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу.

Для їх розв'язання потрібно розробляти спеціальні ітераційні алгоритми. Розглянемо найпростіші з таких алгоритмів, засновані на явних ітераціях. Швидкість їх збіжності дуже повільна, але ситуація полегшується тим, що нас цікавить тільки різницева сітка, а не розв'язок системи рівнянь. Тому часто ітераційний процес можна обривати, не турбуючись про його збіжність.

Слід, проте, зауважити, що при розв'язанні нестаціонарних задач з рухливими межами потрібно потурбуватися про те, щоб така «недоітерованість» рівнянь для сітки не призводила до неправомірного штучного завищення швидкостей її вузлів порівняно зі швидкостями меж. Зокрема, може виявитися доцільним вести ітераційний процес для швидкостей вузлів сітки паралельно з обчисленням їх координат або замість процесу для координат, обчислюючи потім координати вузлів інтегруванням швидкостей за часом.

При викладі алгоритмів для обчислення сіток одразу постає питання про початкове наближення. На початковому кроці нестаціонарної задачі, коли є тільки контури меж, як початкове наближення можна взяти сітку, розраховану інтерполяцією. Надалі, як правило, замість початкового наближення використовується або сітка попереднього кроку за часом, або результат екстраполяції по двох попередніх кроках.

А тепер звернемося до викладу алгоритмів, що дають можливість чисельно реалізувати побудову різницевої сітки. Спочатку розглянемо *алгоритм* I, заснований на апроксимації диференціальних рівнянь (1.6), (1.7). Через їх інваріантність відносно розтягування змінних φ і ψ можна вважати кроки сітки $\Delta \varphi = \Delta \psi = 1$ й

апроксимацію похідних, що входять у ці рівняння, здійснювати за допомогою простих різницевих співвідношень, наприклад, таких:

$$\begin{aligned} x_{\varphi} &\approx \left[\hat{x}_{\varphi} \right]_{j,k} = \frac{1}{2} (x_{j+1,k} - x_{j-1,k}), \\ x_{\psi} &\approx \left[\hat{x}_{\psi} \right]_{j,k} = \frac{1}{2} (x_{j,k+1} - x_{j,k-1}), \\ x_{\varphi\varphi} &\approx \left[\hat{x}_{\varphi\varphi} \right]_{j,k} = x_{j+1,k} - 2x_{j,k} + x_{j-1,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\varphi\psi} &\approx \left[\hat{x}_{\varphi\psi} \right]_{j,k} = \frac{1}{4} (x_{j+1,k+1} - x_{j-1,k+1} - x_{j+1,k-1} + x_{j-1,k-1}), \\ x_{\psi\psi} &\approx \left[\hat{x}_{\psi\psi} \right]_{j,k} = x_{j,k+1} - 2x_{j,k} + x_{j,k-1}. \end{aligned}$$
(2.1)

Аналогічні співвідношення використовуються і для інших функцій, що входять у рівняння (1.6), (1.7). Функції $\xi(\varphi, \psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ при цьому вважаються заданими у вигляді таблиці їх значень $\{(\xi, \eta)_{ik}\}$ у вузлах сітки.

Різницеві рівняння виписуємо в кожному з внутрішніх вузлів j = 1, ..., J - 1; k = 1, ..., K - 1. Граничні значення $\{(x, y)_{j,0}\}, \{(x, y)_{j,K}\}, \{(x, y)_{0,k}\}, \{(x, y)_{J,k}\}$ задані послідовностями (1.1). Для розв'язання отриманої системи рівнянь застосовуємо простий явний ітераційний процес:

$$\begin{aligned} x_{j,k}^{(i+1)} &= x_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} \left[\hat{\alpha} \hat{x}_{\phi\phi} - 2\hat{\beta} \hat{x}_{\phi\psi} + \hat{\gamma} \hat{x}_{\psi\psi} - \hat{a} \hat{x}_{\phi} - \hat{b} \hat{x}_{\psi} \right]_{j,k}^{(i)}, \\ y_{j,k}^{(i+1)} &= y_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} \left[\hat{\alpha} \hat{y}_{\phi\phi} - 2\hat{\beta} \hat{y}_{\phi\psi} + \hat{\gamma} \hat{y}_{\psi\psi} - \hat{a} \hat{y}_{\phi} - \hat{b} \hat{y}_{\psi} \right]_{j,k}^{(i)}, \end{aligned}$$
(2.2)

де

$$\theta_{j,k}^{(i)} = \frac{\theta}{2(\hat{\alpha}_{j,k} + \hat{\gamma}_{j,k}) + |\hat{\beta}_{j,k}|}$$

Тут *i* – номер ітерації, θ – звичайний релаксаційний параметр, який, взагалі кажучи, може змінюватися в процесі ітерацій. З лінійної теорії (із «замороженими» коефіцієнтами рівнянь) випливає, що процес стійкий, якщо $0 < \theta < 2$. Процес збігається повільно,

але з урахуванням зроблених вище зауважень цілком придатний для нашої мети.

Звернемося тепер до викладу *алгоритму* II, заснованого на мінімізації функціонала (1.12), який після підстановки коефіцієнтів (1.14) набуває вигляду

$$\Phi = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \frac{e^{p-q} (x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}) - 2\cos(\beta - \alpha)(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}) + e^{q-p} (x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2})}{\sin(\beta - \alpha)} d\xi d\eta,$$
(2.3)

де функції $q = q(\xi)$, $p = p(\eta)$, $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\eta)$ мають бути знайдені в процесі мінімізації, як і функції $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, значення яких у вузлах (j,k) дадуть шукану сітку. Передбачається, що

$$0 < \beta(\eta) - \alpha(\xi) < \pi.$$
(2.4)

Найпростіший спосіб мінімізації функціонала Φ використовує явний ітераційний процес для таких еліптичних рівнянь, які представляють варіаційні рівняння Ейлера-Лагранжа для функціонала Φ , що мінімізується тільки по *x* і *y*:

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial x}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial x}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi}B\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}B\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial y}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi}B\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}B\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) = 0,$$

(2.5)

де

$$A = \frac{e^{p(\eta) - q(\xi)}}{\sin[\beta(\eta) - \alpha(\xi)]}, \quad C = \frac{e^{q(\xi) - p(\eta)}}{\sin[\beta(\eta) - \alpha(\xi)]}, \quad B = \operatorname{ctg}[\beta(\eta) - \alpha(\xi)]. \quad (2.6)$$

Легко перевірити, що в стаціонарній точці функціонала має бути виконана рівність

$$p(\eta) - q(\xi) = \ln \sqrt{\frac{x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}}{x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}}} = \lambda(\xi, \eta),$$

$$\beta(\eta) - \alpha(\xi) = \arccos \frac{x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}}{\sqrt{x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}} \cdot \sqrt{x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}}} = \omega(\xi, \eta).$$
(2.7)

При обчисленні значень функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ на наступній ітерації функції p, q, α, β розглядаються як параметри, що входять у коефіцієнти рівнянь (2.5) та обчислюються за поточними значеннями $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ з допомогою формул, що випливають з (2.7):

$$p(\eta) = \int_{0}^{1} \lambda(\xi, \eta) d\xi - \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$q(\xi) = -\int_{0}^{1} \lambda(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\beta(\eta) = \int_{0}^{1} \omega(\xi, \eta) d\xi - \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\alpha(\xi) = -\int_{0}^{1} \omega(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

(2.8)

При різницевому записі похідних у рівняннях (2.5) використовуються прості різницеві оператори. Вираз $-\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial x}{\partial\xi}$ у різницевому записі має вигляд

$$-\frac{1}{2}(A_{j+1/2,k+1/2} + A_{j+1/2,k-1/2})(x_{j+1,k} - x_{j,k}) + \frac{1}{2}(A_{j-1/2,k+1/2} + A_{j-1/2,k-1/2})(x_{j,k} - x_{j,k-1}), \quad (2.9)$$

у якому напівцілі індекси означають, що, наприклад, величина $A_{j-1/2,k-1/2}$ віднесена до комірки з номером (j-1/2, k-1/2) і обчислюється за формулою (2.13), яка буде наведена нижче. Вираз $-\frac{\partial}{\partial \eta}C\frac{\partial x}{\partial \eta}$ замінюємо аналогічною формою: $-\frac{1}{2}(C_{j+1/2,k+1/2}+C_{j-1/2,k+1/2})(x_{j,k+1}-x_{j,k}) + \frac{1}{2}(C_{j+1/2,k-1/2}+C_{j-1/2,k-1/2})(x_{j,k}-x_{j,k-1}).$ (2.10)

Трохи складніше записується сума змішаних похідних

$$\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} :$$

$$\frac{1}{2} B_{j+1/2,k+1/2} (x_{j+1,k+1} - x_{j,k}) - \frac{1}{2} B_{j-1/2,k+1/2} (x_{j-1,k+1} - x_{j,k}) - \frac{1}{2} B_{j+1/2,k+1/2} (x_{j+1,k+1} - x_{j,k}) + \frac{1}{2} B_{j-1/2,k-1/2} (x_{j-1,k-1} - x_{j,k}).$$
(2.11)

Відповідні вирази для другого з рівнянь (2.5) випливають з (2.9)-(2.11) заміною x на y.

Різницеві формули для функцій $p(\eta), q(\xi), \beta(\eta), \alpha(\xi), які ви$ $значаються значеннями в «напівцілих» точках <math>\{p_{k-1/2}\}, \{q_{j-1/2}\}, \{\beta_{k-1/2}\}, \{\alpha_{j-1/2}\}, \{\alpha_{j-1/2}\}, випливають з (2.8) після заміни інтегралів відпо$ відними сумами:

$$p_{k-1/2} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \lambda_{j-1/2,k-1/2} - \lambda^{*},$$

$$q_{j-1/2} = -\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \lambda_{j-1/2,k-1/2} + \lambda^{*},$$

$$\beta_{k-1/2} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \omega_{j-1/2,k-1/2} - \omega^{*},$$

$$\alpha_{j-1/2} = -\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \omega_{j-1/2,k-1/2} + \omega^{*},$$
(2.12)

де

$$\lambda^* = \frac{1}{2JK} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \lambda_{j-1/2,k-1/2},$$
$$\omega^* = \frac{1}{2JK} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \omega_{j-1/2,k-1/2}.$$

При обчисленні величин $\lambda_{j-1/2,k-1/2}$, $\omega_{j-1/2,k-1/2}$ використовуємо формули (2.7) для функцій $\lambda(\xi,\eta)$, $\omega(\xi,\eta)$, для яких похідні $x_{\xi}, x_{\eta}, y_{\xi}, y_{\eta}$ замінюємо у комірці (j-1/2, k-1/2) різницевими виразами

$$(x_{\xi})_{j-1/2,k-1/2} = \frac{1}{2}(x_{j,k} - x_{j-1,k} + x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1}),$$

$$(x_{\eta})_{j-1/2,k-1/2} = \frac{1}{2}(x_{j,k} - x_{j,k-1} + x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1}),$$

 $(y_{\xi})_{j-1/2,k-1/2}$, $(y_{\eta})_{j-1/2,k-1/2}$ знаходять заміною *x* на *y*. Нарешті, формули для коефіцієнтів $(A,B,C)_{j-1/2,k-1/2}$, що входять у (2.9)– (2.11), грунтуються на (2.6):

$$A_{j-1/2,k-1/2} = \frac{e^{p_{k-1/2} - q_{j-1/2}}}{\sin \omega_{j-1/2,k-1/2}},$$

$$B_{j-1/2,k-1/2} = \operatorname{ctg} \omega_{j-1/2,k-1/2},$$

$$C_{j-1/2,k-1/2} = \frac{e^{q_{j-1/2} - p_{k-1/2}}}{\sin \omega_{j-1/2,k-1/2}}.$$
(2.13)

Ітераційний процес визначається рівностями

$$\begin{aligned} x_{j,k}^{(i+1)} &= x_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} \right]_{j,k} - \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]_{j,k} \right\}, \\ y_{j,k}^{(i+1)} &= y_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]_{j,k} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_{j,k} - \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]_{j,k} \right\}, \end{aligned}$$

$$(2.14)$$

де в квадратні дужки поміщено різницеві вирази, визначені вище формулами (2.9)–(2.11).

Величина $\theta_{j,k}^{(i)}$ задається формулами

$$\theta_{j,k}^{(i)} = \min\left\{\theta_{j-1/2,k-1/2}, \theta_{j-1/2,k+1/2}, \theta_{j+1/2,k-1/2}, \theta_{j+1/2,k+1/2}\right\},\$$

$$\theta_{j-1/2,k-1/2} = \frac{\theta}{2(A_{j-1/2,k-1/2} + C_{j-1/2,k-1/2}) + |B_{j-1/2,k-1/2}|}.$$

Тут θ – такий же релаксаційний параметр, як і у формулах (2.2). З міркувань стійкості, що досліджувалася при «заморожених» коефіцієнтах рівнянь, слід підпорядкувати його умові $0 < \theta < 2$.

На цьому закінчимо опис реалізації чисельних алгоритмів І і ІІ для побудови різницевих сіток. Як приклад розглянемо застосування методу змінних напрямів до побудови різницевих сіток по алгоритму III, заснованому на використанні варіаційного функціонала (1.18) з ваговою функцією, визначеною формулою (1.19). Рівняння для шуканих функцій $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ такі:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} A \frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} C \frac{\partial x}{\partial\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} A \frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta} C \frac{\partial y}{\partial\eta} = 0,$$
(2.15)

де

$$A = \omega l = \sqrt{\frac{x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}}{x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}}} | x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta} |,$$

$$C = \frac{\omega}{l} = \sqrt{\frac{x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2}}{x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2}}} | x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta} |.$$
(2,16)

Фактично ці рівняння є рівняннями Ейлера-Лагранжа для варіаційного функціонала в припущенні, що l і ω , визначені формулами (1.15) і (1.19) і, отже, залежні від шуканих функцій x і y, не варіюються.

При складанні різницевих рівнянь для системи (2.15) використовуємо різницеві оператори (2.9) і (2.10). Коефіцієнти $A_{j-1/2,k-1/2}$ і $C_{j-1/2,k-1/2}$ обраховуємо на підставі формул (2.16), в яких похідні $x_{\xi}, x_{\eta}, y_{\xi}, y_{\eta}$ можна обчислювати за допомогою простих різницевих виразів, аналогічних (2.1), або скористатися різницевими апроксимаціями такого вигляду:

$$\begin{split} x_{\xi}^{2} + y_{\xi}^{2} &\approx \frac{1}{2} \Big[(x_{j,k} - x_{j-1,k})^{2} + (y_{j,k} - y_{j-1,k})^{2} + \\ &+ (x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1})^{2} + (y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1})^{2} \Big], \\ x_{\eta}^{2} + y_{\eta}^{2} &\approx \frac{1}{2} \Big[(x_{j,k} - x_{j,k-1})^{2} + (y_{j,k} - y_{j,k-1})^{2} + \\ &\quad (x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1})^{2} + (y_{j-1,k} - y_{j-1,k-1})^{2} \Big], \\ x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta} &\approx \frac{1}{2} \Big[(x_{j,k} - x_{j-1,k-1})(y_{j-1,k} - y_{j,k-1}) - \\ &- (x_{j-1,k} - x_{j,k-1})(y_{j,k} - y_{j-1,k-1}) \Big]. \end{split}$$

При обчисленні коефіцієнтів $A_{j-1/2, k-1/2}$, $C_{j-1/2, k-1/2}$ задаються деякі обмеження, що перешкоджають появі занадто малих або великих їх значень (див. [6]).

Ітераційний процес для розв'язання отриманої системи різницевих рівнянь полягає у послідовному виконанні декількох циклів, кожен із яких складається з двох етапів. На першому етапі за наявною сіткою $\{(x, y)_{j,k}\}$, отриманою на попередньому циклі, обчислюються коефіцієнти різницевих рівнянь $\{A_{j-1/2,k-1/2}\}$ і $\{C_{j-1/2,k-1/2}\}$, а також значення двох ітераційних параметрів d',d'', роль яких буде описана нижче. На другому етапі при фіксованих значеннях коефіцієнтів $A_{j-1/2,k-1/2}$, $C_{j-1/2,k-1/2}$ виконується декілька ітерацій для перерахунку сітки. Кожна з ітерацій організована таким чином.

Спочатку при фіксованому індексі k розв'язуємо системи «трьохточкових» рівнянь по індексу j для величин $\overline{x}_{j,k}$, $\overline{y}_{j,k}$ (j = 1, 2, ..., J - 1):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \overline{x}}{\partial \xi} \end{bmatrix}_{j,k} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{j,k} = d'(\overline{x}_{j,k} - x_{j,k}),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \overline{y}}{\partial \xi} \end{bmatrix}_{j,k} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{j,k} = d'(\overline{y}_{j,k} - y_{j,k}),$$
(2.17)

із заданими межовими значеннями

$$\begin{split} \overline{x}_{0,k} &= x_k^{\text{mB}}, \ \overline{x}_{J,k} = x_k^{\text{mp}}, \\ \overline{y}_{0,k} &= y_k^{\text{mB}}, \ \overline{y}_{J,k} = y_k^{\text{mp}}, \end{split}$$

що визначають положення межових вузлів сітки. Вирази у (2.17), розташовані в квадратних дужках, означають відповідні різницеві апроксимації, що описані вище. Такі системи рівнянь розв'язуються послідовно для значень індексу k = 1, 2, ..., K - 1 за допомогою методу прогонки. Назвемо цей метод умовно горизонтальною прогонкою.

Після цього при фіксованому індексі *j* розв'язуються системи «трьохточкових» рівнянь по індексу *k* для величин $\overline{\overline{x}}_{j,k}, \overline{\overline{y}}_{j,k}$ (k = 1, 2, ..., K - 1):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \overline{x}}{\partial \xi} \end{bmatrix}_{j,k} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \overline{\overline{x}}}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{j,k} = d''(\overline{\overline{x}}_{j,k} - \overline{x}_{j,k}),$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial \overline{y}}{\partial \xi} \end{bmatrix}_{j,k} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial \overline{\overline{y}}}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{j,k} = d''(\overline{\overline{y}}_{j,k} - \overline{y}_{j,k}),$$

із заданими граничними значеннями

$$\overline{\overline{x}}_{j,0} = x_j^{\scriptscriptstyle H}, \quad \overline{\overline{x}}_{j,K} = x_j^{\scriptscriptstyle B}, \\ \overline{\overline{y}}_{j,0} = y_j^{\scriptscriptstyle H}, \quad \overline{\overline{y}}_{j,K} = y_j^{\scriptscriptstyle B}.$$

Такі системи рівнянь розв'язуються послідовно для значень індексу j = 1, 2, ..., J - 1. Назвемо їх вертикальними прогонками. Отримана сітка $\{(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})_{j,k}\}$ є початковою для наступної ітерації.

На швидкість збіжності цього ітераційного процесу дуже сильний вплив має вибір ітераційних параметрів d', d''. Теорія вибору цих параметрів розроблена тільки для простих випадків, коли одновимірні оператори, на які здійснюється розщеплювання у процесі виконання ітерації, переставні. У цьому випадку можна обчислювати послідовності ітераційних параметрів d'_i , d''_i , які забезпечують високу швидкість збіжності.

У випадку непереставних операторів розщеплювання використаємо на всіх ітераціях одного циклу постійні значення параметрів d'_i , d''_i , що реалізовуються при горизонтальних і вертикальних прогонках. Для застосування теорії необхідно знати межі спектру для цих одновимірних самоспряжених операторів. Позначимо ці межі [δ', Δ'] для оператора горизонтальних прогонів та [δ'', Δ''] для оператора вертикальних прогонів.

Тоді оптимальні значення параметрів *d*_i', *d*_i" визначаються формулами

$$d' = \alpha - \beta, \ d'' = \alpha + \beta,$$

$$\beta = \frac{\delta' \Delta' - \delta'' \Delta''}{\delta' + \Delta' + \delta'' + \Delta''},$$

$$\alpha = \sqrt{(\delta' - \beta)(\Delta' - \beta)} = \sqrt{(\delta'' - \beta)(\Delta'' - \beta)}$$

що гарантують швидкість збіжності не повільніше, ніж за експонентою з показником

$$\gamma = \ln \frac{(\Delta' - d'')(\Delta'' - d'')}{(\Delta' - d')(\Delta'' - d')}$$

у деякій спеціальній сітковій нормі.

Повернемося до питання про межі спектра одновимірних операторів, що реалізовуються при прогонках. Для отримання величин δ' , Δ' , що задають межі спектра оператора горизонтальних прогонів, потрібно для кожного значення індексу k = 1, 2, ..., K - 1 обчислити найменше δ'_k і найбільше Δ'_k власні значення трьохдіагональних симетричних матриць порядку J - 1, що відповідають їх різницевому операторові $-\frac{\partial}{\partial \xi}A\frac{\partial}{\partial \xi}$, визначеному формулою (2.9). Після цього покладаємо

$$\delta' = \min_{1 \le k \le K-1} \delta'_k, \quad \Delta' = \max_{1 \le k \le K-1} \Delta'_k.$$

Для отримання величин δ'', Δ'' , що задають межі спектра оператора вертикальних прогонів, треба для кожного значення індексу j = 1, 2, ..., J - 1 обчислити найменше δ''_j і найбільше Δ''_j вла-

сні значення трьохдіагональних симетричних матриць порядку K-1, що відповідають різницевому операторові $-\frac{\partial}{\partial n}C\frac{\partial}{\partial n}$, визна-

ченому формулою (2.10). Після цього покладаємо

$$\delta'' = \min_{1 \le j \le J-1} \delta''_j, \quad \Delta'' = \max_{1 \le j \le J-1} \Delta''_j.$$

Застосування методу змінних напрямів та оптимізація підбору ітераційних параметрів дають можливість значно прискорити збіжність ітераційного процесу алгоритму III побудови різницевих сіток. Наведемо приклад сітки, побудованої за допомогою одного з наведених алгоритмів.

Рівняння (1.5), що лежать в основі алгоритму І, не містять серед своїх розв'язків полярної сітки, що описується функціями $x = e^{\xi} \cos \eta$, $y = e^{\xi} \sin \eta$. Це призводить до того, що при обчисленні сітки на півколі за алгоритмом, заснованим на рівняннях (1.5), ви-



Рис 72

ходить картина приблизно така, як на рис. 7.2. Стяганню ліній сітки до діаметру півкола можна запобігти, якщо відповідним чином ввести допоміжні змінні і скористатися гнучкішими рівняннями (1.6). При введенні таких змінних можна використати ту обставину, що функції $x = e^{\xi} \cos \eta$, $y = e^{\xi} \sin \eta$ задовольняють рівняння (1.5).

Контрольні питання

- 1. У чому полягає завдання побудови сіток на розрахунковій області з криволінійними межами?
- 2. Яке завдання вирішує алгоритм І побудови сіток?

- Як здійснюється вибір рівнянь для обчислення різницевих сіток із залученням конформних і квазіконформних відображень?
- 4. Сформулювати варіаційну задачу про мінімізацію функціонала для відшукання функцій відображення.
- 5. Особливість алгоритму ІІ побудови сіток.
- 6. Який функціонал мінімізується за алгоритмом III?
- 7. Математична формалізація завдання побудови сітки.
- 8. Запишіть різницеві співвідношення чисельної реалізації побудову сітки за алгоритмом І.
- 9. Застосування методу змінних напрямів до побудови різницевих сіток за алгоритмом III.
- 10. Недоліки та переваги алгоритмів І, ІІ, ІІІ побудови різницевих сіток.

3.1. ОБЧИСЛЕННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ І ТЕПЛОВИХ НА-ВАНТАЖЕНЬ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Постановка задачі

При проектуванні літальних апаратів потрібно мати дані щодо розподілу газодинамічних величин біля їх поверхонь. У разі гіперзвукових швидкостей польоту в ударному шарі відбуваються зміни хімічного складу газу, тому також необхідно враховувати вплив фізико-хімічних процесів.

Оскільки експериментальні дослідження складні, а в багатьох випадках у наземних умовах принципово неможливі, то необхідну інформацію отримують математичними методами.

Для обчислення стаціонарного розподілу газодинамічних величин необхідно мати початкові дані. Класичний підхід полягає у використанні простих залежностей типу формули Ньютона для обчислення газодинамічних параметрів на поверхні тіла.

Для тіл складної форми окремим елементам конструкції ставлять у відповідність прості тіла з тим самим, що і на них, розподілом параметрів газової динаміки. Вигляд головної ударної хвилі, як правило, приймається параболічним. Між поверхнями ударної хвилі і тіла здійснюється лінійна інтерполяція для визначення всіх шуканих функцій у вузлах різницевої сітки.

Такий наближений підхід пов'язаний з великими обчислювальними витратами, що іноді призводить до зриву процедури інтегрування нестаціонарних рівнянь газової динаміки.

Нашим завданням є застосування аналітичних і чисельних методів [14] задля встановлення наближених початкових даних розподілу газодинамічних величин біля поверхонь літальних апаратів.

3.1.1. Аналітичний метод

Основою генерування даних Коші для нестаціонарної системи рівнянь газової динаміки є обчислення параметрів на поверхні обтічного тіла. Розглянемо цю задачу в осесиметричному варіанті. У циліндричній системі координат *z*,*r*, φ (рис. 1.1) вектор швидкості і градієнт тиску мають вигляд

$$\begin{cases} \vec{V} = u \vec{e}_z + v \vec{e}_r + w \vec{e}_{\varphi}, \\ \nabla P = \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} \end{cases}$$



Рис. 1.1

Тут u, v, w – компоненти вектора швидкості, $\vec{e}_z, \vec{e}_r, \vec{e}_{\phi}$ – одиничні базисні вектори. Осесиметричний стаціонарний рух газу описуються такою системою рівнянь:

$$\frac{\partial(r\rho u)}{\partial z} + \frac{\partial(r\rho v)}{\partial z} = 0,$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial z} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r},$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(r\rho uS)}{\partial z} + \frac{\partial(r\rho vS)}{\partial r} = 0,$$
a, $S = c_u \ln\left(\frac{P}{dx}\right) + const$ – ентропія газу.
$$(1.1)$$

де ρ – густина, $S = c_v \ln \left(\frac{1}{\rho^{\gamma}}\right) + const$ – ентропія газу. Введемо функцію течії $d\psi = -r\rho v dz + r\rho u dr$, тобто таку фу-

нкцію у , що

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -r\rho v \;, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r\rho u \;.$$

У змінних P, ψ рівняння неперервності задовольняється автоматично, умова збереження ентропії уздовж лінії течії має вигляд $\frac{\partial S}{\partial P} = 0$, а друге і третє рівняння системи (1.1) такі:

$$\rho u^{p} \frac{\partial u}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

$$\rho u^{p} \frac{\partial v}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$
(1.2)

де $u^p = u \frac{\partial P}{\partial z} + v \frac{\partial P}{\partial r}$ – контраваріантна компонента вектора швидкості. Коваріантні і контраваріантні базисні вектори, якобіан перетворення і коефіцієнти метричної матриці мають вигляд:

$$\boldsymbol{g}_{1} = \boldsymbol{g}_{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial P} \\ \frac{\partial r}{\partial P} \\ \frac{\partial r}{\partial P} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_{2} = \boldsymbol{g}_{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial r}{\partial \psi} \end{pmatrix};$$
$$\boldsymbol{g}^{1} = \boldsymbol{g}^{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{\partial P}{\partial r} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}^{2} = \boldsymbol{g}^{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial P} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ \frac{\partial r}{\partial P} & \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial r}{\partial P} & \frac{\partial r}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{g}r\rho v_{z} & -\sqrt{g}\frac{\partial P}{\partial r} \\ \sqrt{g}r\rho v_{r} & \sqrt{g}\frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_{z}}{u^{p}} & -\sqrt{g}\frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{v_{r}}{u^{p}} & \sqrt{g}\frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial r} \\ -r\rho v_r & r\rho v_z \end{pmatrix} = r\rho u^p \Rightarrow \sqrt{g} = \frac{1}{r\rho u^p};$$

$$g_{pp} = \left(\frac{\partial z}{\partial P}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial P}\right)^2 = \left(\frac{V}{u^p}\right)^2 = \left(\frac{u_p}{V}\right)^2;$$

$$g_{p\psi} = \frac{\partial z}{\partial P}\frac{\partial z}{\partial \psi} + \frac{\partial r}{\partial P}\frac{\partial r}{\partial \psi} = \frac{1}{u^p}\left(v_z\frac{\partial z}{\partial \psi} + v_r\frac{\partial r}{\partial \psi}\right) = \frac{u_p u_{\psi}}{u^p} = \frac{u_p u_{\psi}}{V^2};$$

$$g_{\psi\psi} = \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)^2 + \left(V\frac{\partial \sigma}{\partial P}\right)^2\right] = \frac{1}{r^2}\frac{1}{\rho^2 V^2} + \frac{u_{\psi}^2}{V^2}.$$

У цих виразах V – модуль швидкості, σ – кут між віссю z і вектором швидкості у довільній точці на лінії течії (контурі тіла).

Зазначимо, що контраваріантна складова швидкості $u^{\psi} \equiv (\nabla \psi, V) \equiv 0$, тобто на поверхні тіла (лінії течії) виконана умова непротікання. Тому

$$V^{2} = u^{p}u_{p} + u^{\psi}u_{\psi} = u^{p}u_{p} \Longrightarrow u_{p} = \frac{V^{2}}{u^{p}}.$$
(1.3)

Тут $u_p = (V, g_p)$ і $u_{\psi} = (V, g_{\psi})$ – коваріантні швидкості, причому $ru_{\psi} = V^2 \frac{\partial \sigma}{\partial P}$. Система рівнянь (1.2) може бути записана у вигляді проекцій векторного рівняння $\frac{\partial V}{\partial P} + r \sqrt{g} \nabla P = 0$ на контраваріантні базисні вектори: $\nabla_p u_i + r \delta_{pi} \sqrt{g} = 0$, i = 1, 2.

Індексу i = 1 відповідає P, індексу $i = 2 - \psi$, ∇_P – коваріантна похідна по аргументу P коваріантних компонент вектора швидкості.

Після множення цих рівнянь на $g^{i\psi}$ і складання (підсумовування проводиться по індексах) отримуємо

$$g^{i\Psi}\nabla_{P}u_{i}+g^{i\Psi}\delta_{Pi}\sqrt{g}r=0 \Longrightarrow \nabla_{P}u^{\Psi}+g^{P\Psi}\frac{1}{\rho u^{P}}=0.$$

Звідси, враховуючи, що

$$g^{P\Psi} = \left(\nabla P, \nabla \Psi\right) = -\frac{g_{P\Psi}}{\left(\sqrt{g}\right)^2} g^{P\Psi} = \left(\nabla P, \nabla \Psi\right) = -\frac{g_{P\Psi}}{\left(\sqrt{g}\right)^2},$$

маємо

$$\Gamma^{\Psi}_{pp}u^{p} + g^{p\Psi}\frac{1}{\rho u^{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{\Psi}_{pp} = \frac{u_{p}u_{\Psi}}{V^{2}}r^{2}\rho.$$

Якщо *s*,*n* – відстані уздовж лінії течії і по нормалі до неї, *R* – радіус кривизни лінії течії, то:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R} = \left(\nabla P, \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}\right) \implies \left(\nabla P \cdot \nabla \psi\right) = \frac{\partial P}{\partial n} |\nabla \psi|,$$
$$|\nabla \psi| = r\rho V = \left|\frac{\partial \psi}{\partial n}\vec{e_n} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\vec{e_s}\right| = \left|\frac{\partial \psi}{\partial n}\vec{e_n}\right| = \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$
Ottke, $g^{p\psi} = r\rho V \frac{\rho V^2}{R}$ i $\left(u^p\right)^2 = -\frac{g^{p\psi}}{\rho \Gamma_{pp}^{\psi}} = \frac{V^5}{rRu_p u_{\psi}},$ Звідки, з

урахуванням виразу (1.3), отримуємо:

$$\frac{V^4}{\left(u_p\right)^2} = -\frac{V^5}{rRu_p u_{\psi}} \quad \Rightarrow u_{\psi} = -\frac{Vu_p}{rR} \,. \tag{1.4}$$

Оскільки набігаючий потік однорідний, то

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = r\rho T \frac{\partial S}{\partial \psi} = -r\rho V \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

У координатах *P*, ψ :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial u_{\psi}}{\partial P} - \frac{\partial u_{p}}{\partial \psi} \right) = -r\rho \, V \frac{\partial V}{\partial \psi} \Rightarrow \frac{\partial u_{\psi}}{\partial P} = V \frac{\partial \frac{u_{p}}{V}}{\partial \psi} \,. \tag{1.5}$$

284

Print to PDF without this message by purchasing novaPDF (http://www.novapdf.com/)

Рух газу відбувається у площині, тому в змінних $x^{l} = P$, $x^{2} = \psi$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{1}} \left(\frac{g_{12}}{g_{11}\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{2}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^{1}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{2}} - \frac{g_{12}}{g_{11}\sqrt{g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{1}} \right) = 0.$$

Підставляючи сюди метричні коефіцієнти з (1.4), (1.5), маємо:

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{V}{u_p} \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial P} \right) - \frac{r u_{\psi}^2}{u_p V^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{r u_{\psi}}{V^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \sigma}{\partial P \partial \psi} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \psi \partial P}$$

Замість аргументів p, ψ можна використовувати координати σ, ψ ; тоді для функції

$$f = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{r\rho V}$$

маємо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + f = \frac{\partial R}{\partial \psi} \,. \tag{1.6}$$

В результаті отримано диференціальне рівняння уздовж контуру тіла (лінії течії), якщо похідна радіуса кривизни в правій частині рівняння задана уздовж лінії течії як функція того ж кута.

Якщо $\sigma \ge 60^{\circ}$, то для оцінки тиску на тілах, що обтічні надзвуковим потоком газу, застосовується формула Ньютона:

$$\frac{P_w}{P_0'} = \sin^2 \sigma + \frac{P_\infty}{P_0'} \cos^2 \sigma.$$
(1.7)

Індексами ∞ , 0', w позначені значення параметрів перед стрибком, в точці гальмування потоку (критичній точці) і на поверхні тіла відповідно. При $\sigma \le 30^{\circ}$ цією формулою користуватися не можна, оскільки розподіл тиску відчутно залежить від числа Маха.

Іноді використовують наближений підхід, при якому розподіл тиску по місцевому куту нахилу поверхні тупого тіла беруть таким же, як і для сфери. При цьому відносна похибка може досягати 60% і більше, оскільки різниця між величинами часто має такий же порядок, як і самі значення тиску. Формула (1.7) дає ще більшу похибку.

Для усунення недоліку запишемо розв'язок рівняння (1.6):

$$f(\sigma) = f_k \cos(\sigma - \sigma_k) + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_k \sin(\sigma - \sigma_k) + \int_{\sigma_k}^{\sigma} \frac{\partial R}{\partial \psi}(\tau) \sin(\sigma - \tau) d\tau.$$

Тут σ_k відповідає фіксованій точці на контурі, а σ може набувати будь-якого можливого значення.

Нехай $h = \sigma_{k-1} - \sigma_{k-2} = \sigma_k - \sigma_{k-1} = \sigma_{k+1} - \sigma_k$ і т.д. Замінимо в загальному розв'язку похідні за допомогою центральних різниць, для обчислення інтеграла скористаємось формулою Сімпсона, а замість $\frac{\partial R}{\partial \psi}$ у підінтегральному виразі використаємо ліву частину рівняння (1.6). Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos 2h + \frac{4\sinh}{3h} - \frac{2\sin 2h}{3h} + \frac{h\sin 2h}{3}, \\ \beta &= \frac{\sin 2h}{2h} - \frac{8\sinh}{3h} + \frac{4h\sinh}{3} + \frac{\sin 2h}{3}, \\ \gamma &= \frac{4\sin h}{3h} - 1, \quad D = \frac{\sin 2h}{2h} - \frac{\sin 2h}{3h}, \\ f_{k+1} &= \frac{\alpha f_k + \beta f_{k-1} + \gamma f_{k-2}}{D}. \end{aligned}$$
(1.8)

3 формули (1.8) знаходимо $(\rho V)_{k+1} = \frac{1}{f_{k+1}r_{k+1}}$. Використовуючи таб-

лиці газодинамічних функцій, отримуємо $P_{k+1} = P((\rho V)_{k+1})$.

Для рівнянь газової динаміки, записаних у змінних «тиск – функція течії», можна отримати розвинення розв'язку в ряд по приросту тиску і коефіцієнти ряду. Цей ряд використовується для побудови розв'язку уздовж лінії течії:

$$\left(V_{n+1}, V_n\right) = V_n^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P}, V\right)_n \Delta P + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}, V\right)_n \frac{\Delta P^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 V}{\partial P^3}, V\right)_n \frac{\Delta P^3}{3!} + \cdots + \left(\frac{\partial^k V}{\partial P^k}, V\right)_n \frac{\Delta P^k}{k!} + \cdots$$
(1.9)

Використовуючи формулу $\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial P} = \sqrt{g} (\Gamma_{pp}^{p} + \Gamma_{\psi p}^{\psi})$, з рівняння $\frac{\partial V}{\partial P} + r\sqrt{g} g^{p} = 0$ послідовно отримуємо:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}, V\right) = -\frac{1}{\rho},\tag{1.10}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}, V\right) = -\frac{1}{\rho} r \sqrt{g} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\psi}_{\psi p}\right), \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial^{3} V}{\partial P^{3}} + r \sqrt{g} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma_{\psi p}^{\Psi} \right)^{2} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma_{\psi p}^{\Psi} \right)}{\partial P} + \Gamma_{p \psi}^{p} \Gamma_{p \psi}^{\Psi} \right] \boldsymbol{g}^{p} - r \sqrt{g} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma_{\psi p}^{\Psi} \right) \Gamma_{p \psi}^{p} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} \Gamma_{p \psi}^{p} + \Gamma_{p p}^{p} \Gamma_{p \psi}^{p} + \frac{\partial \Gamma_{p \psi}^{p}}{\partial P} \right] \boldsymbol{g}^{\Psi} = 0,$$

$$(1.12)$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^{3} V}{\partial P^{3}}, V\right) = -\frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p}\right)^{2} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p}\right)}{\partial P} + \Gamma^{p}_{p\Psi} \Gamma^{\Psi}_{pp} \right]. \quad (1.13)$$

У загальному випадку, $\frac{\partial^k V}{\partial P^k} + r\sqrt{g} A g^p - r\sqrt{g} B g^{\psi} = 0$. Тому

$$\begin{split} &\frac{\partial^{k+1} \boldsymbol{V}}{\partial P^{k+1}} + r \sqrt{g} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial p} + \Gamma^{\psi}_{\psi p} \right) \boldsymbol{A} + \Gamma^{\psi}_{pp} \boldsymbol{B} + \frac{\partial A}{\partial P} \right] \boldsymbol{g}^{p} - \\ &- r \sqrt{g} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} \boldsymbol{B} + \Gamma^{p}_{pp} \boldsymbol{B} + \Gamma^{p}_{p\psi} \boldsymbol{A} + \frac{\partial B}{\partial P} \right) \boldsymbol{g}^{\psi} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \\ &\left(\frac{\partial^{k+1} \boldsymbol{V}}{\partial P^{k+1}}, \boldsymbol{V} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial p} + \Gamma^{\psi}_{\psi p} \right) \boldsymbol{A} + \Gamma^{\psi}_{pp} \boldsymbol{B} + \frac{\partial A}{\partial P} \right]. \end{split}$$

Якщо, наприклад, k = 3, то A, B є вирази в квадратних дужках з (1.12). Звідки для k = 4:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^{4} \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{P}^{4}}, \boldsymbol{V} \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{\rho} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial p} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix}^{2} + \frac{\partial}{\partial P} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix} + \Gamma^{p}_{p\Psi} \Gamma^{\Psi}_{pp} \right] + \\ + \Gamma^{\Psi}_{pp} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix} \Gamma^{p}_{p\Psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} \Gamma^{p}_{p\Psi} + \Gamma^{p}_{pp} \Gamma^{p}_{p\Psi} + \frac{\partial \Gamma^{p}_{p\Psi}}{\partial P} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial P} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix}^{2} + \frac{\partial}{\partial P} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} + \Gamma^{\Psi}_{\Psi p} \end{pmatrix} + \Gamma^{p}_{p\Psi} \Gamma^{\Psi}_{pp} \right] \right\}.$$
(1.14)

Для визначення о як функції *Р* виразимо праві частини (1.11), (1.13), (1.14) через параметри газової динаміки. Маємо

$$\Gamma^{\Psi}_{pp} = \frac{\rho u_p u_{\Psi} r^2}{V^2}, \quad \sqrt{g} = \frac{1}{\rho u^p r} = \frac{u_p}{\rho V^2 r},$$
$$u_{\Psi} = \frac{V^2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial P}, \quad \nabla_p u_i + r \delta_{pi} \sqrt{g} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (1.15)$$

Зробимо підстановки в перше рівняння руху з (1.15); тоді, після перетворень, отримуємо:
$$\Gamma_{\psi p}^{\psi} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial P} = -\frac{M^2 - 1}{\rho V^2} + \rho V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P}\right)^2 = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}}{\frac{\partial V}{\partial P}} + \rho V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P}\right)^2. \quad (1.16)$$

Тому

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}, V\right) = \frac{M^2 - 1}{\rho^2 V^2} - V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P}\right)^2.$$
 (1.17)

3 рівнянь руху Ейлера (1.15) випливає, що

$$\Gamma^{p}_{pp} = \frac{1}{u_{p}} \left(\frac{\partial u_{p}}{\partial P} - \Gamma^{\psi}_{pp} u_{\psi} + \frac{u_{p}}{\rho V^{2}} \right), \ \Gamma^{p}_{\psi p} = \frac{1}{u_{p}} \left(\frac{\partial u_{\psi}}{\partial P} - \Gamma^{\psi}_{\psi p} u_{\psi} \right). \ (1.18)$$

Використовуючи (1.13), (1.16), (1.18), отримуємо

$$\left(\frac{\partial^{3} \boldsymbol{V}}{\partial P^{3}}, \boldsymbol{V}\right) = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\frac{\partial^{3} \boldsymbol{V}}{\partial P^{3}}}{\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial P}} + 3 \left[\rho \boldsymbol{V}^{2} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial P} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{\sigma}}{\partial P^{2}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial P}\right)^{2} \right] \right\}.$$
 (1.19)

Нехай тиск віднесено до тиску гальмування, швидкість – до максимально можливої швидкості, тоді

$$\left(\frac{\partial^{3} V}{\partial P^{3}}, V\right) = -\frac{2}{\gamma \rho^{2} V^{2} P^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}} - \frac{1}{\rho^{3} V^{4}} (M^{2} - 1)(2M^{2} - 3) + 3\left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial P}\right)^{2} - V^{2} \frac{\partial \sigma}{\partial P} \frac{\partial^{2} \sigma}{\partial P^{2}}\right].$$
 (1.20)

Аналогічно, з (1.14), (1.15), (1.16), (1.18) випливає, що

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^4 V}{\partial P^4}, V \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3}{\partial P^3} \frac{1}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{1}{\rho^2 V^2} \left[-\frac{\partial M^2}{\partial P} \left(\frac{6M^2 - 7}{\rho V^2} + \frac{2\gamma - 1}{\gamma P} \right) + \frac{1}{\rho^2 V^4} (M^2 - 1) (2M^2 - 3) (3M^2 - 4) \right] +$$

$$+\left(\frac{M^{2}-1}{\rho^{2}V^{3}}\right)^{2}+\frac{12}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial P}\frac{\partial^{2}\sigma}{\partial P}-3V^{2}\left(\frac{\partial^{2}\sigma}{\partial P^{2}}\right)^{2}-4V^{2}\frac{\partial\sigma}{\partial P}\frac{\partial^{3}\sigma}{\partial P^{3}}+V^{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial P}\right)^{4}-\frac{6\left(M^{2}-1\right)}{\rho^{2}V^{2}}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial P}\right)^{2}.$$
 (1.21)

Вважаючи у формулах (1.10), (1.17), (1.20), (1.21) $\rho = 1$, M = 0, отримуємо коефіцієнти шуканого розвинення в ряд для моделі нестисливої рідини. Розвинення (1.9) у змінних $\tilde{P} = P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, ψ буде таким, як для нестисливої рідини у змінних P, ψ .

При використанні ряду (1.9) з точністю до членів порядку $O(\Delta P^m)$ для поширення розв'язку уздовж лінії течії у початковій точці має бути відома похідна $\left(\frac{\partial^{m-2}\sigma}{\partial P^{m-2}}\right)_0$, де m = 2, 3, Для досягнення тієї ж точності за допомогою ряду Тейлора для функції $\sigma(P)$ потрібно задати похідну на порядок вище.

Для ілюстрації ефективності наведених вище співвідношень розглянемо їх при $m \le 4$. Застосовуючи розвинення (1.9) і враховуючи (1.10), (1.17), (1.19), отримуємо:

$$V_{n+1}V_n\cos(\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 2\left\{V_n^2 + \left[\frac{M_n^2 - 1}{\rho_n^2 V_n^2} - V_n^2 \left(\frac{\partial\sigma}{\partial p}\right)_n^2\right]\frac{\Delta p^2}{2}\right\} - V_{n-1}V_n\cos(\sigma_{n-1} - \sigma_n) + O(\Delta p^4), \quad (1.22)$$

$$V_{n+1}V_{n}\cos(\sigma_{n+1} - \sigma_{n}) = V_{n-1}V_{n}\cos(\sigma_{n-1} - \sigma_{n}) - 2\{\frac{\Delta p}{\rho_{n}} + [-\frac{1}{\rho_{n}^{2}V_{n}^{2}}(\frac{\partial M^{2}}{\partial p})_{n} + \frac{1}{\rho_{n}^{3}V_{n}^{4}}(M_{n}^{2} - 1)(2M_{n}^{2} - 3) + 3V_{n}^{2}(\frac{\partial\sigma}{\partial p})_{n}(\frac{\partial^{2}\sigma}{\partial p^{2}})_{n} - \frac{3}{\rho_{n}}(\frac{\partial\sigma}{\partial p})_{n}^{2}]\frac{\Delta p^{3}}{3!}\} + O(\Delta p^{5}).$$
(1.23)

Для скінченно-різницевої апроксимації похідних

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)_n, \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}\right)_n$$

застосовуємо центральні різниці. Формули (1.22), (1.23) ефективні для покрокового, з фіксованим Δp , поширенням розв'язку уздовж лінії течії (поверхні тіла) ненульової кривизни.

Для надзвукових режимів обтікання початкові дані в околі точки гальмування потоку досить точно задають за допомогою формул Ньютона і Буземана. Для дозвукових течій можна скорис-

татися тим, що рівняння газової динаміки в змінних $P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, ψ за формою збігаються з «нестисливою» системою рівнянь у змінних P, ψ , тобто використовувати в околі критичної точки відомі «нестисливі» розподіли швидкостей безциркулярного обтікання сфери або циліндра.

Значення $\sigma_2 = \sigma(p_0 + 2\Delta p),...,\sigma_n = \sigma(p_0 + n\Delta p),...$ були отримані за допомогою формул (1.22), (1.23). При місцевих числах $M \le 1$ застосовувалася формула (1.23). Замість похідних $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)_n$, $\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}\right)_n$, використовувалися $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p}\right)_{n-1}$, $\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}\right)_{n-1}$, тобто помилка на

одному кроці зростала до $O(\Delta p^4)$. При місцевих числах M > 1 на кроці предиктор було застосовано формулу (1.22), при цьому розв'язувалося квадратне рівняння для невідомої $\Delta \sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$, а на кроці коректор – формула (1.23).



На рис. 1.2 наведені дані [4], причому суцільна лінія відповідає сфері, пунктирна – циліндру, штрихпунктирна – еліпсоїду. Кружечками позначені значення тиску, отримані за формулами (1.22), (1.23). Потенційність течії, коли $M_{\infty} < 1$, заздалегідь не визначалася. Порівняння свідчить про хорошу точність представлених співвідношень (1.22), (1.23).

3.1.2. Чисельний метод

Тут описаний різницевий метод розв'язання початкової нестаціонарної тривимірної задачі з урахуванням нерівновісних фізико-хімічних перетворень у потоці біля лобової поверхні літального апарату.

Початкове наближення задано в п. 3.1.1. Рівняння газової динаміки містять рівняння руху Ейлера, неперервності та енергії. Для їх розв'язання застосовується явна скінченно-різницева схема Мак-Кормака, заснована на дивергентній формі запису системи рівнянь у нормованій сферичній системі координат.

Загальна процедура обчислення нерівновісних фізикохімічних перетворень у потоці така.

Розв'язок газодинамічної частини системи рівнянь при заданій в будь-якій точці сітки функції γ_* шукаємо на основі методу *встановлення*, як і для ідеального газу. Початковий розподіл ефективного показника адіабати в ударному шарі беремо постійним, зазвичай $\gamma_* = 1.3333$.

Використовуючи знайдені з розв'язку рівнянь газової динаміки тиск і швидкість, інтегруємо уздовж ліній течії стаціонарні релаксаційні рівняння. Для цього з розрахункової точки, що є найближчою до ударної хвилі координатної поверхні $\xi = const$ (ξ – координата, що нормалізує відстань між тілом і хвилею), будується лінія течії до перетину з головним стрибком. Визначивши координати точки перетину, знаходимо в ній значення газодинамічних функцій *P*, ρ , *V* і *T* і концентрації η_i ($\eta_i = 0$ на стрибку) за допомогою інтерполяції.

Потім за неявною схемою розраховуємо концентрації компонентів O, N, NO, NO^+ уздовж збудованої лінії течії (густина, що входить у вираз для $\dot{W_i}$, виключається за допомогою інтеграла енергії, а концентрації $O_2, N_2, e^- - 3$ умови збереження елементарного складу багатокомпонентної суміші та її квазінейтральності):

$$\eta_i^{n+1} = \tilde{\eta}_i^{n+1} + \left[I - \frac{(1-\alpha)\Delta S_{n+1}}{V^n} \left[\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \eta} \right]^{n+1} \right]^{-1} \times \left[\eta_i^n - \tilde{\eta}_i^{n+1} + \alpha \frac{\Delta S_{n+1}}{V^n} \dot{W}_i^n + \frac{1-\alpha}{V^n} \Delta S_{n+1} \tilde{W}_i^{n+1} \right].$$

Тут $\tilde{\eta}_i^{n+1}$ – концентрація *i*-го компоненту, обчисленого в точці $\sum_{j=1}^n \Delta S_j$

уздовж лінії течії, η_i^{n+1} – у точці $\sum_{j=1}^{n+1} \Delta S_j$, ΔS_j – крок інтегрування. Тиль-

дою позначені функції, отримувані в процесі ітерацій; $\frac{\partial \dot{W_i}}{\partial \eta}$ – матриця в частинних похідних від джерельних членів по концентраціях компонентів; I – одинична матриця; α – параметр чисельної схеми, який вибирається в діапазоні $0 \le \alpha < 0.5$.

В результаті інтегрування за описаною схемою системи кінетичних рівнянь отримують значення змінних ρ, T, η_i , а потім і нове значення γ_* , яке використовують на другій ітерації при розв'язанні газодинамічної частини завдання.

Аналогічно визначаються шукані параметри на решті координатних поверхонь, з тією лише зміною, що замість ударної хвилі розглядається попередня координатна поверхня $\xi = const$ с відомими параметрами на ній. Після відшукання функції γ_* , у всьому ударному шарі розв'язання проводиться для газодинамічної частини завдання так само, як і для ідеального газу (за 3 таких ітерації досягають необхідної точності у визначенні газодинамічних і релаксаційних параметрів).

Розглянемо питання побудови чисельних розв'язків у надзвуковій частині потоку. У надзвуковій розрахунковій області система внутрішніх ударних хвиль, хвиль розрядки, контактних поверхонь, що утворюються на виступах і на зламах обтічної поверхні, може бути достатньо складна. Тут застосовують однорідні різницеві схеми, що автоматично задовольняють умови на розривах і дають можливість переходити через стрибок, «розмазуючи» його в межах декількох осередків розрахункової області.

Систему рівнянь газової динаміки при цьому записують в дивергентній формі для того, щоб відповідна їй система різницевих схем задовольняла закони збереження з точністю до машинного заокруглення (тобто була консервативною).

При використанні криволінійних систем координат у рівняннях руху з'являються, взагалі кажучи, додаткові члени, що не стоять під знаком похідної. Наявність цих членів аналогічна дії фіктивних масових сил, що виникають при використанні неінерціальної системи координат. При чисельному розв'язанні задачі присутність «джерел» перешкоджає досягненню повного збереження імпульсу та апроксимації рівнянь.

Нехай x^i – координати довільної системи, а y_i – декартової системи. Базисні коваріантні і контраваріантні вектори:

$$\boldsymbol{g}_{i} = \left(\frac{\partial y_{1}}{\partial x^{i}}, \frac{\partial y_{2}}{\partial x^{i}}, \frac{\partial y_{3}}{\partial x^{i}}\right), \quad \boldsymbol{g}^{i} = \left(\frac{\partial x^{i}}{\partial y_{1}}, \frac{\partial x^{i}}{\partial y_{2}}, \frac{\partial x^{i}}{\partial y_{3}}\right), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Компонентам векторів, тензорів, скалярам і всім параметрам, що характеризують рух газу, приписуватимемо індекс «О» в довільній фіксованій точці евклідового простору $P_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Для будь-якої точки $P(x^1, x^2, x^3)$, що належить околу P_0 , введемо два набори двоточкових скалярних добутків базисних векторів за правилом:

$$G_l^i = \boldsymbol{g}_0^i \cdot \boldsymbol{g}_l, \quad Q_l^i = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_{l0}.$$
 (2.1)

Величини G_l^i , Q_l^i у фіксованій точці P_0 є функціями координат x^i . З (2.1) випливають такі властивості:

$$\left(G_{l}^{i}\right)_{0} = \delta_{l}^{i}, \quad \left(Q_{l}^{i}\right)_{0} = \delta_{l}^{i}, \quad (2.2)$$

$$\left(\Gamma_{lj}^{i}\right)_{0} = \left(\frac{\partial G_{l}^{i}}{\partial x^{j}}\right)_{0} = -\left(\frac{\partial Q_{l}^{i}}{\partial x^{j}}\right)_{0}, \qquad (2.3)$$

$$Q_r^j G_\beta^r = \delta_\beta^j, \qquad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial G_l^i}{\partial x^j}\right)_0 = \left(\frac{\partial G_j^i}{\partial x^l}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial Q_l^i}{\partial x^j}\right)_0 = \left(\frac{\partial Q_j^i}{\partial x^l}\right)_0. \tag{2.5}$$

Символи Крістоффеля Γ_{lj}^i є похідними від об'єктів G_l^i , Q_l^i , і у формулі коваріантного диференціювання можуть бути внесені під знак похідної в будь-якій точці P_0 , у якій розглядаються рівняння газової динаміки.

Стаціонарні рівняння кількості руху в проекціях на напрями базисних коваріантних і контраваріантних векторів мають відповідно такий вигляд:

$$\frac{\partial \Pi^{jl}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{j}_{jr}\Pi^{rl} + \Gamma^{l}_{jr}\Pi^{jr} = 0, \quad \frac{\partial \Pi^{j}_{l}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{j}_{jr}\Pi^{r}_{l} - \Gamma^{r}_{jl}\Pi^{j}_{r} = 0,$$

де $\Pi^{jk} = \rho v^j v^k + p g^{jk}$; $\Pi^j_k = \rho v^j v_k + p \delta^j_k$; v^j – контраваріантні компоненти швидкості; v_j – коваріантні компоненти швидкості ($\tilde{v}^l = G^l_k v^k$ і $\tilde{v}_l = Q^k_l v_k$ – складові вектора швидкості V в базисах $\{g_{l0}\}$ і $\{g^l_0\}$). Використовуючи властивості (2.2)–(2.5) і формулу

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j},$$

отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial x^{j}} \left[\sqrt{g} \left(\rho v^{j} \tilde{v}^{l} + \left(\boldsymbol{g}^{j} \cdot \boldsymbol{g}_{0}^{l} \right) p \right) \right] = 0, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{j}} \left[\sqrt{g} \left(\rho v^{j} \tilde{v}_{l} + Q_{l}^{j} p \right) \right] = 0.$$
(2.7)

Отже, розглядаючи в довільній точці P_0 проекції векторного рівняння імпульсів на осі, визначені векторами $\{g_{I_0}\}$ або $\{g_0^I\}$, отримуємо строго консервативні форми (2.6), (2.7).

Нехай $\boldsymbol{g}_0^l = \boldsymbol{g}_{l0} = \boldsymbol{a}_l$ – декартовий базис. Проектуючи векторне рівняння імпульсів на напрями, визначені векторами \boldsymbol{a}_l , замість (2.6), (2.7) отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x^{j}} \left[\sqrt{g} \left(\rho v^{j} w_{m} + \frac{\partial x^{j}}{\partial y_{m}} p \right) \right] = 0$$
 (2.8)

 $(w_m - \text{компоненти } V$ у декартовому базисі, тобто $V = w_j a_j$, а $\frac{\partial x^i}{\partial y_m} = (g^i, a_m)$).

Наведені міркування мають загальний характер і такою ж мірою стосуються рівнянь Нав'є-Стокса для багатокомпонентного газу, оскільки останні можна записати в інваріантній формі.

Строго консервативні форми запису рівнянь гідродинаміки (2.6), (2.7) вперше отримані в [9]. Зазначимо, що існують і інші способи запису рівнянь гідродинаміки в строго консервативній формі. Вибір на користь тієї або іншої форми запису рівнянь залежить від способу введення криволінійної системи координат і конкретного фізичного завдання.

Зручним з погляду зменшення об'єму обчислень в еліптикогіперболічній зоні є таке задання поверхні Коші, коли нормальна складова швидкості до неї надзвукова, в той час як проекція швидкості V на напрям осі тіла може бути ще дозвуковою.

Шукана поверхня в процесі обчислень може деформуватися i, за необхідності, трансформується в площину для продовження обчислення в циліндричних координатах. Наявність складної форми тіл, що розраховуються, і великих кутів атаки зумовлює вимогу близькості ліній течії до одного з координатних напрямів. Граничними випадками побудованої системи є сферична і циліндрична системи, широко вживані для обчислення відповідних конфігурацій.

Диференціальні рівняння в частинних похідних, що є рівняннями неперервності та імпульсів, записують у строго консервативній формі. При обчисленні руху ідеального газу вони замикаються інтегралом Бернуллі:

$$h+\frac{V^2}{2}=h_0.$$

При розгляді течій з урахуванням нерівновісних фізикохімічних перетворень в потоці до цих рівнянь додають релаксацій-

ні рівняння, записані уздовж ліній течії, рівняння стану і залежності констант швидкостей хімічних реакцій від щільності, температури і концентрацій компонентів.

Інтегрування газодинамічної частини системи здійснюють за допомогою явної двокрокової скінченно-різницевої схеми другого порядку точності, запропонованої Мак-Кормаком. Для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь хімічної кінетики, що належать до класу «жорстких», застосовується неявна скінченорізницева схема, описана в [11].

На першому етапі розв'язок поширюють уздовж ліній течії, що закінчуються в розрахункових вузлах нового координатного шару, де вже відомі «предикторні» значення «консервативних» газодинамічних комплексів. Координати точок перетину ліній течії зі старим шаром і значення комплексів в них знаходять за допомогою інтерполяції.

Необхідні для замикання рівнянь хімічної кінетики тиск і компоненти вектора швидкості w_i записують через густину за допомогою спеціальної процедури декодування «консервативних» комплексів. У результаті в розрахункових вузлах нового шару знаходять значення тиску p, густини ρ , складових w_i вектора швидкості V, концентрацій компонентів η_i та ефективного змінного по простору показника адіабати

$$\gamma_*: h = \frac{\gamma_*}{\gamma_* - 1} \frac{P}{\rho}.$$

На другому етапі за відомими значеннями компонент вектора швидкості V, отриманих на кроці предиктор, лінії течії будуються назад до перетину зі старим координатним шаром, і, аналогічно до першого етапу, здійснюють розв'язання системи рівнянь хімічної кінетики уздовж знов збудованих ліній течії. При цьому використовують значення комплексів, отримані після здійснення кроку коректор.

Процедура задоволення граничних умов та обчислення контуру ударної хвилі здійснюється за допомогою співвідношень Ренкіна-Гюгоніо. Граничні умови на тілі: $V \cdot \mathbf{n}_T = 0$. Процеси конвективного перенесення можуть відбуватися повільніше, ніж хімічні процеси, особливо при наближенні до рівноваги. Тому, для правильного врахування останніх, здійснюється декілька дрібних кроків на кожному крупному кроці, що визначається з умови Куранта-Фрідріхса-Леві.

Дослідження впливу фізико-хімічних процесів на обтікання класичних форм важливе для прогнозування аеродинаміки складних апаратів в реальних умовах обтікання.

Розглянуто [4] обтікання конуса з кутом напіврозхилу 10^{0} (радіус сферичного затуплення $R_n = 5$ см): $M_{\infty} = 20$, H = 50 км, $\alpha = 0^{0} - 15^{0}$. Нерівновісні хімічні процеси зменшують на 2–4% значення осьової сили в порівнянні з рівновісним режимом протікання хімічних реакцій.

Значення C_x для ідеального газу також трохи нижчі, ніж для рівновісного повітря. У разі рівноваги хімічних реакцій коефіцієнт нормальної сили C_y для малих довжин конуса менший, ніж для ідеального газу. При x > 5 ($\alpha = 5^0$) і x > 4 ($\alpha = 10^0$) значення цього коефіцієнта стають великими (до 15% при x = 10 - 15) для рівновісного реагуючого повітря.

Це пов'язано з різним характером поведінки тиску на надвітряному боці конуса. Для рівновісного газу мінімум тиску на поверхні тіла в «ложці» унаслідок менших розмірів ударного шару є ближчим до критичної точки, а наростання тиску надалі відбувається інтенсивніше і до більш великих значень, ніж для ідеального газу і нерівновісного повітря. Значення C_y в останньому випадку вище, ніж для рівновісного повітря та ідеального газу з $\gamma = 1.4$.

Це пояснюється більш сильним розширенням потоку з надвітряного боку конуса. Відмінність в C_y може досягати 15% для хімічно рівновісного і 20% для нерівновісного режимів при всіх кутах атаки.

Для отримання стаціонарного розв'язку при обтіканні тіла рівномірним надзвуковим потоком використовують метод встановлення нестаціонарної системи, що складається з рівнянь неперервності, Нав'є-Стокса і дифузії продуктів хімічних реакцій. Набігаючий надзвуковий потік розглядається як суміш 23.3% кисню O_2 і 76.7% азоту N_2 . Газ, що оточує тіло, складається з семи компонентів (O, N, NO, O_2 , N_2 , NO^+ , e^-).

Тепловий потік до поверхні тіла зумовлений теплопровідністю і перенесенням енергії дифундуючими компонентами. Розподіл енергій за поступальними і обертальними ступенями свободи приймається рівномірним. Замикають систему рівнянь співвідношення констант рівноваги і швидкостей хімічних реакцій та рівняння стану.

Природні граничні умови для системи задані на нескінченному віддаленні від тіла (у незбуреному потоці) і на самому тілі. На поверхні обтічного тіла для компонентів швидкості задають умови прилипання $u_w = v_w = w_w = 0$. Режим теплообміну – охолоджування стінки $T_w = T_w^0 = const$ або зміна температури згідно із законом, близьким до лінійного.

Для концентрацій компонент атомів О і N, молекул NO граничні умови мають вигляд $\left(\frac{\partial c_i}{\partial n}\right)_w = 0$, як для некаталітичної поверхні стінки. Відносно рекомбінації заряджених частинок використовують умови ідеально каталітичної поверхні $(c_{NO^+})_w = 0$. При обчисленні концентрацій O_2 , N_2 , e^- використовують умови збереження атомарного складу і квазінейтральності суміші. Для забезпечення стійкості обчислень накладають ще одну умову на стінці: $\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right) = 0$.

Перехід через ударну хвилю відбувається «замороженим» чином, тобто на ній концентрації збігаються з відповідними значеннями набігаючого потоку. Для задавання «зовнішньої» межі області інтегрування необхідні апріорні дані про структуру поля течії.

Для великих чисел Рейнольдса ($Re > 10^3$) можна нехтувати впливом структури тонкої головної ударної хвилі на течію вниз по потоку і прийняти, що ударна хвиля є поверхнею розриву газодинамічних параметрів, на якій виконуються нестаціонарні умови Ренкіна-Гюгоніо.

Основою методу обчислення є розщеплювання завдання обтікання по фізичних процесах.

На першому етапі інтегрується «нев'язка» частина системи. Вона включає рівняння руху Ейлера, неперервності та енергії.

На другому етапі розв'язок уточнюється з використанням «в'язкої» частини рівнянь Нав'є-Стокса та енергії. «В'язка» підсистема інтегрується за допомогою методу прогонки.

Наявність вузьких областей з великими градієнтами параметрів потоку (таких як прикордонний шар поблизу тіла, зона ударної хвилі при низьких числах Рейнольдса) не дозволяє отримувати надійні кількісні результати, використовуючи *рівномірні сітки*. Для адекватного моделювання поведінки параметрів в областях великих градієнтів вводять згущування в радіальному напрямі.

Для обчислення «в'язкої» підсистеми рівнянь використовують неявну різницеву схему. Представимо «в'язку» частину рівнянь кількості руху та енергії у вигляді

$$\begin{split} \frac{\partial F}{\partial t} &= A_R \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + A_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + \\ &+ A_{\theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + B_M \frac{\partial \mu F}{\partial \xi} + B \frac{\partial F}{\partial \xi} + CF + D, \end{split}$$

де *А*,*В*,*С* – коефіцієнти при других похідних, перших похідних і самій функції відповідно, *D* містить члени рівнянь зі змішаними похідними і вільними членами.

Використовуючи вирази для скінченно-різницевих аналогів похідних для сітки зі змінним кроком, можна записати різницевий аналог рівняння, залишаючи як невідомі на новому часовому шарі значення цільових функцій в радіальному напрямі. Усі значення решти функцій беруть із поточного часового шару.

Для отримання розв'язку на новому часовому шарі з відповідними граничними умовами проводять інтегрування одновимірних рівнянь, що зводиться до послідовного розв'язання окремих різницевих рівнянь з трьохдіагональною матрицею методом прогонки. Ці рівняння мають стандартний вигляд

$$A_n f_{n+1} - B_n f_n + C_n f_{n-1} = D_n, \quad 0 \le n \le N,$$

де f – будь-яка з невідомих функцій; f_0 і f_N задані або визначаються з граничних умов.

Таким чином, у «в'язкій» частині послідовно розв'язують різницеві рівняння руху, що записані неявно відносно шуканих параметрів. Потім, з використанням отриманого поля швидкостей, розв'язують рівняння енергії та дифузії.

Для інтегрування рівнянь дифузії метод прогонки застосовуєть у поєднанні з неявною різницевою схемою, що використовується для апроксимації джерелоподібних членів. При цьому спочатку розв'язують систему різницевих рівнянь з джерелоподібними членами, але без урахування дифузії. Потім враховується дифузія компонентів суміші шляхом послідовного розв'язання рівнянь цієї підсистеми методом прогонки.

Для дослідження течій біля подовжених тіл використовують розділення всієї області інтегрування на ряд підобластей, що взаємно перекриваються, і проводять послідовні обчислення в кожній із них. Таке розділення області можливе через слабку передачу збурень вгору по потоку при обтіканні тіл надзвуковим набігаючим потоком в'язкого газу і дає можливість проводити обчислення довгих затуплених тіл до 100 калібрів і більше.

З погляду на велику складність рівнянь Нав'є-Стокса неможливо отримати аналітичний вираз стійкості для описаної схеми обчислення. Проте практичне застосування алгоритмів показало можливість використання, без втрати стійкості, емпіричної формули $\Delta t = \sigma \Delta t_{K \phi \pi}$, де σ – коефіцієнт запасу ($\sigma = 0.8$); $\Delta t_{K \phi \pi}$ визначається за критерієм Куранта-Фрідріхса-Леві для нев'язких лінійних гіперболічних рівнянь в частинних похідних.

Можливе застосування спрощених рівнянь Нав'є-Стокса для деяких режимів обтікання або для генерування початкових даних.

Розщеплювання задач по фізичних процесах, використання змішаних явно-неявних чисельних алгоритмів дає змогу значно скоротити трудомісткість отримання практичних результатів. Витрати машинного часу при обчисленні просторової течії біля затуплених конусів приблизно в 10 разів менші, ніж при використанні повністю неявних схем у всій області без виділення головної ударної хвилі.

3.2. ОБЧИСЛЕННЯ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИСТРОЇВ РОТОРНОГО ТИПУ

3.2.1. Динаміка руху несиметричного авторотуючого тіла

Задача обчислення аеродинамічних характеристик авторотуючого тіла виникає, наприклад, в авіаракетобудуванні.

Простою моделлю авторотуючого тіла є аеродинамічний маятник в потоці середовища, що чинить опір. Цю модель можна розглядати як узагальнення фізичного маятника. З такою моделлю можна зіставити багато реальних механічних систем, приміром, крило, вітрило, парашут, вітродвигун у вигляді гвинта.

Гвинт з вертикальною віссю служить ще однією простою моделлю авторотуючого тіла. Усім відоме використання режиму авторотації як режиму аварійної посадки вертольота. Вертикальна складова швидкості при зниженні тіла, що швидко обертається, набагато менше швидкості лопатей. Це дає можливість використовувати такі пристрої для спуску або гальмування в атмосфері.

Розглянемо спуск у вертикальній площині тіла складної конфігурації, що складається із стрижня і двох паралельних пластинок. Площина пластинок утворює кут δ з площиною, ортогональною стрижню (рис. 2.1).

При побудові математичної моделі дії середовища на тіло в [15] використана гіпотеза про квазістаціонарне обтікання пластинок середовищем. Згідно з цією гіпотезою, сила дії середовища на кожну пластинку характеризується швидкістю деякої її точки, яка називається центром тиску. Передбачається, що центри тиску A і B нерухомі в площині пластинок, оскільки поперечні розміри пластинок набагато менші за довжину стрижня. Вважається також, що середовище не впливає на стрижень і центр мас системи знаходиться в середині стрижня.

Сили дії середовища на кожну пластинку розкладаються на суму сил опору S_A , S_B , спрямованих проти абсолютних швидкостей центрів тиску V_A , V_B , і підйомних сил P_A , P_B , спрямованих ортогонально V_A , V_B .



Рис. 2.1

Залежність аеродинамічних сил від швидкостей центрів тиску носить квадратичний характер і має вигляд:

$$|\mathbf{S}_{A}| = s(\alpha + \delta)V_{A}^{2} = \frac{1}{2}\rho\sigma c_{x}(\alpha + \delta)V_{A}^{2},$$

$$|\mathbf{P}_{A}| = p(\alpha + \delta)V_{A}^{2} = \frac{1}{2}\rho\sigma c_{y}(\alpha + \delta)V_{A}^{2},$$

$$|\mathbf{S}_{B}| = s(\beta + \delta)V_{B}^{2} = \frac{1}{2}\rho\sigma c_{x}(\beta + \delta)V_{B}^{2},$$

$$|\mathbf{P}_{B}| = p(\beta + \delta)V_{B}^{2} = \frac{1}{2}\rho\sigma c_{y}(\alpha + \delta)V_{B}^{2},$$

де V_A і V_B – швидкості центрів тиску, α , β – кути атаки між векторами швидкостей точок A, B (V_{AO} , V_{BO}) і векторами V_A , V_B ; p, s – аеродинамічні функції кутів атаки, c_x , c_y – безрозмірні аеродинамічні функції, ρ – густина повітря, σ – площа пластинок.

Як узагальнені координати, що визначають положення тіла, введемо координати x, y центру мас, точки O і кут ψ відхилення стрижня AB від вертикалі. Для опису розподілу швидкостей точок нашого тіла задамо величину вектора абсолютної швидкості центру мас V, кут γ відхилення вектора V від вертикалі, кут θ відхилення ня стрижня AB від вектора абсолютної швидкості центру мас V та абсолютну кутову швидкість стрижня ω .

Математична модель спуску даного тіла складається з таких рівнянь та умов (див. [15]):

$$\begin{split} m\dot{V} &= p(\alpha + \delta)V_{A}r\omega\cos\theta - p(\beta + \delta)V_{B}r\omega\cos\theta + \\ &+ s(\alpha + \delta)V_{A}(r\omega\sin\theta - V) - s(\beta + \delta)V_{B}(r\omega\sin\theta + V) + mg\cos\gamma \,, \end{split}$$

$$mV\dot{\gamma} = -s(\alpha + \delta)V_{A}r\omega\cos\theta + s(\beta + \delta)V_{B}r\omega\cos\theta + +p(\alpha + \delta)V_{A}(r\omega\sin\theta - V) - p(\beta + \delta)V_{B}(r\omega\sin\theta + V) - mg\sin\gamma , (1.1)$$

$$J\dot{\omega} = r(V_A^2(p(\alpha+\delta)\sin\alpha - s(\alpha+\delta)\cos\alpha) +$$

 $+V_B^2(p(\beta+\delta)\sin\beta-s(\beta+\delta)\cos\beta),$

$$\dot{\theta} + \dot{\gamma} = \omega$$
.

Кінематичні співвідношення, що пов'язують V_A , V_B , α , β з V, θ , ω , мають вигляд:

$$V_A \sin \alpha = -V \cos \theta, \qquad V_B \sin \beta = V \cos \theta, V_A \cos \alpha = r\omega - V \sin \theta, \qquad V_B \cos \beta = r\omega + V \sin \theta.$$

Чисельне інтегрування рівнянь (1.1) руху тіла може бути реалізоване за допомогою однокрокових явних методів Рунге-Кутта 4го порядку. Аеродинамічні функції зручно наближати кубічними сплайнами. Інтерес становить параметричний аналіз динамічної системи, що описує рух тіла. Авторотація тіла розглядається при різних значеннях маси, перекосу пластинки. Результати чисельного моделювання представлені у вигляді поверхні $\omega = \omega(m, \delta)$, що зображає залежність кутовій швидкості від маси і перекосу пластинки.

Чисельні експерименти дають змогу також знаходити такі аеродинамічні характеристики авторотуючого тіла:

1) множину неізольованих усталених режимів, при яких у тіла відсутнє обертання;

2) залежність кута ширяння в режимі авторотації від куту перекосу пластинки б;

3) максимальне значення кута ширяння;

4) залежність швидкості зниження від режиму авторотації;

5) умови стійкості усталених режимів вертикального спуску і ширяння;

6) стаціонарний режим авторотації;

7) залежність кута відхилення від вертикалі від настановного кута $\delta = \delta(9)$ (для ефективного управління рухом тіла).

3.2.2. Обчислення аеродинамічних характеристик вентиляторів

Відомі методи обчислення аеродинамічних характеристик турбомашин з енергетичним управлінням циркуляцією можна розділити на три групи.

Методи першої групи засновані на використанні інтегральних рівнянь несучої поверхні і розрізняються способами обчислення граничних умов на поверхнях управляючого струменя потоку та профілів лопаток турбомашини.

У методах другої групи застосовується представлення профілю лопаток турбомашини та управляючого струменя у вигляді розподілу елементарних вихорів з різними гіпотезами взаємодії вихрової поверхні і струменя, з урахуванням відповідних граничних умов.

Проте застосування цих методів для аеродинамічного обчислення роторних кругових грат профілів з енергетичним управлінням циркуляцією на практиці не є доцільним через складність побудови математичної моделі.

Для аеродинамічного обчислення енергетичного регулятора найефективнішим є метод конформних перетворень, заснований на використанні конформного відображення області поза радіальними гратами профілів регулятора на допоміжну канонічну область, течію в якій можна достатньо легко обчислити.

На базі методу конформних перетворень з використанням теорії турбулентних струменів, аеродинаміки тіл із струменями, теорії функції комплексного змінного в [16] розроблена теоретична аеродинаміка малоканального енергетичного регулятора і регулятора у вигляді радіальних ґрат аналітичних профілів довільної форми.

Схематичне представлення радіальних грат профілів енергетичного регулятора у вигляді однолистого контура дає змогу звести завдання аеродинамічного обчислення радіальних грат регулятора з аналітичними профілями довільної форми на базі використання теореми Рімана для однозв'язних багатолистих областей до побудови двох аналітичних функцій – функції $z(\gamma)$ відображення n_{π} листої ріманової області D_{γ} зовнішності круга одиничного радіуса на область течії, обмежену однолистим контуром ріманової області D_z , і комплексного потенціалу $F[z(\gamma)]$ в n_{π} -листій рімановій області круга одиничного радіуса.

Оскільки розглядається загальний випадок аеродинаміки радіальних грат аналітичних профілів довільної форми, функцію конформного відображення $z(\gamma)$ знаходять подвійним перетворенням: на першому етапі відбувається відображення на область «деформованого круга», що визначає функціональну відповідність профілю довільної форми профілю у вигляді відрізання логарифмічної спіралі $Z_{\rm B}(\gamma_{\rm B})$, на другому етапі проводиться відображення вищезгаданої області $D_{\rm BY}$ на область поза кругом одиничного радіуса D_{γ} (рис. 2.2).

Принципова схема послідовності конформних перетворень:

а – перетворення n_{n} -листої області D_{γ} в n_{n} -листу область $D_{в\gamma}$;

б – перетворення n_{π} -листої області $D_{B\gamma}$ в однолисту область D_z .

За теоремою єдиності розв'язку задачі Діріхле-Неймана, отримане відображення є однозначним з точністю до константи.

Функція конформного відображення однолистої ріманової поверхні D_z кругових грат аналітичних профілів довільної форми на n_{π} -листу область D_{γ} поза кругом одиничного радіуса:



Рис. 2.2

$$z = \left[\frac{(\gamma + \Phi)}{(\gamma - \Phi)}\right]^{\frac{1}{n_{s}}} \left[\frac{(\gamma - \Phi_{1}^{-1}e^{i\theta_{1}})}{(\gamma - \Phi_{2}^{-1}e^{i\theta_{2}})}\right]^{\frac{(2i\beta_{s} + c)}{n_{s}}},$$
 (2.1)

де $z = re^{iv}$, $\gamma = \rho e^{i\theta}$ – комплексні координати точок в областях D_z і D_γ відповідно; r, v – радіус і полярний кут на площині Z відповідно; ρ, θ – радіус і полярний кут на площині γ відповідно; Φ – форм-параметр еквівалентних радіальних грат профілів у вигляді відрізань логарифмічних спіралей; β_n – кут логарифмічної спіралі еквівалентних грат профілів; $\gamma_1 = \Phi_1^{-1}e^{i\theta_1}$, $\gamma_2 = \Phi_2^{-1}e^{i\theta_2}$, $K_{\Phi} = e^{2i\beta_n + c}$

комплексні параметри, що визначають форму профілю початкових кругових ґрат аналітичних профілів.

З урахуванням обмежень, що накладаються на аналітичний профіль, точки γ_1 , γ_2 можуть бути розташовані тільки всередині одиничного круга області D_{γ} , при цьому повинен зберігатися напрям обходу контура профілю в області D_z .

Форм-параметри Ф, Ф₁, Ф₂ у разі аналітичних профілів довільної форми визначаються відповідно до рівнянь Майкапара для кругових грат профілів і теорії аналітичних профілів Жуковського.

Використовуючи метод особливих точок С.А. Чаплигіна, канонічне рівняння течії поза кругом і принцип суперпозиції, з (2.1) отримуємо комплексний потенціал в n_n -листій рімановій області D_{γ} круга одиничного радіуса у вигляді:

$$\overline{F}[z(\gamma)] = \overline{\varphi}[z(\gamma)] + i\overline{\psi}[z(\gamma)] =$$

$$= q_y \ln \frac{(\gamma + \Phi)(\gamma + \frac{1}{\Phi})}{(\gamma - \Phi)(\gamma - \frac{1}{\Phi})} - \frac{\frac{K_y - n_x K_x}{i} \ln \frac{\gamma - \frac{1}{\Phi}}{\gamma - \Phi}}{(\gamma - \Phi)} - \frac{iK_y \ln \frac{\gamma + \Phi}{\gamma + \frac{1}{\Phi}}}{(\gamma + \frac{1}{\Phi})} , \quad (2.2)$$

де q_y – коефіцієнт витрати стоку радіальних грат профілів енергетичного регулятора в області D_z ; K_y – інтенсивність вихрів (коефіцієнт циркуляції) з центром в радіальних гратах профілів регулятора в області D_z , що визначена обертанням потоків в порожнині високого тиску корпусів вентилятора; K_n – інтенсивність вихрів (коефіцієнт циркуляції) навколо профілю кругових грат в площині D_z ; $\overline{\phi}$

$$\varphi = \frac{\varphi}{2\pi n_{\pi}} - \varphi$$
ункція потенціалу течії в області $D_{\gamma}; \ \psi = \frac{\psi}{2\pi n_{\pi}} - \varphi$ ун-

кція течії в області D_{γ} ; n_{π} – число профілів енергетичного регулятора.

Отриманий розв'язок при заданих q_y , $K_{\rm H}$, K_{π} є, з точністю до константи, єдиним. Справді, якщо припустити, що розв'язків два – $F_1[Z(\gamma)]$ і $F_2[Z(\gamma)]$ – і розглянути функцію $\Delta(\gamma) = F_1[Z(\gamma)] - F_2[Z(\gamma)]$, то легко побачити, що ця функція – однозначна поза кругом і на крузі й на нескінченності Іт $\Delta(\gamma) = 0$. Звідси, за теоремою єдиності

розв'язку задачі Діріхле-Неймана, маємо Іт $\Delta(\xi) \equiv 0$, а отже, $F_1[Z(\gamma)] - F_2[Z(\gamma)] \equiv \text{const.}$

Враховуючи єдиність (з точністю до константи) розв'язку для функції $F[Z(\gamma)] = W(\gamma)$ та умови єдиності конформного відображення при заданому п_л-листому контурі, отримуємо єдиний розв'язок (з точністю до константи) задачі обтікання зазначеного вище однолистого контура кругових ґрат аналітичних профілів регулятора: $F(Z) = W[\gamma(Z)]$.

Тоді, використовуючи теорію лишків функції комплексного змінного та співвідношення (2.2), можна записати формулу для комплексної швидкості руху поза кругом одиничного радіусу п_л-листої ріманової області *D*_γ у вигляді:

$$2\pi n_{\pi} V[z(\gamma)] = \frac{q_{y} + iK_{y}}{(\gamma + \Phi) - \frac{1}{\gamma - \Phi}} - \frac{q_{y} + iK_{y}}{\gamma + \Phi} - \frac{q_{y} + iK_{y}}{\gamma + \frac{1}{\Phi}} + \frac{q_{y} + in_{\pi}K_{\pi} - iK_{y}}{\gamma - \Phi} + \frac{q_{y} + in_{\pi}K_{\pi} - iK_{y}}{\gamma - \frac{1}{\Phi}}.$$
 (2.3)

Наведена формула (2.3) дає змогу розробити алгоритм обчислення аеродинаміки енергетичного регулятора з радіальними гратами аналітичних профілів довільної форми та отримати характеристики потенційного обтікання широкого класу енергетичних регуляторів.

Практичний інтерес становить проблема дослідження аеродинаміки малоканального енергетичного регулятора.

За умови однозв'язності області D_z можна записати функцію конформного відображення зовнішності круга одиничного радіуса на n_n -листій рімановій поверхні в області D_γ на зовнішність однолистого полігонального контура кругових ґрат в області D_z у вигляді формули Кристоффеля-Шварца:

$$Z = \int_{\gamma} [(\gamma - \Phi^{-1})(\gamma - \Phi)]^{-1} \prod_{n=1}^{n_y} (\gamma - \tau_{yn})^{\overline{\beta}_{yn}^{-1}} d\gamma ,$$

де τ_{yn} $(n = 1, ..., n_y)$ – точки на колі одиничного радіуса, що відповідають кутовим точкам полігонального контуру y_n ; $\beta_{yn} = \pi \overline{\beta}_{yn}$ – зовнішні кути однолистого полігонального контуру кругових грат профілів в кутових точках y_n .

Канонічне рівняння комплексної швидкості на однолистій рімановій поверхні полігонального контуру радіальних грат малоканального енергетичного регулятора має вигляд:

$$V(z) = \frac{k_{rq} \prod_{\tau=1}^{n_{y}} (\gamma - \tau_{0\tau}) (\gamma - \gamma_{0\tau}) (\gamma - \frac{1}{\gamma_{0\tau}})}{\prod_{n=1}^{n_{y}} (\gamma - \tau_{y_{n}})^{\overline{\beta}_{y_{n}}^{-1}}}.$$

Рівняння ідеальної аеродинамічної характеристики енергетичного регулятора центрового вентилятора таке:

$$K_{\mathrm{T}} = K_{q} q_{\Sigma} + K_{K} K_{\mathrm{y}} + K_{q_{\mathrm{T}}} q_{\mathrm{T}},$$

де K_q – коефіцієнт, що характеризує зміну теоретичної циркуляції в залежності від витрат потоку і дорівнює тангенсу кута нахилу характеристики при $K_y = 0$; K_K – коефіцієнт впливу циркуляції потоку в порожнині високого тиску вентилятора на теоретичну циркуляцію; K_{q_r} – коефіцієнт впливу тандемності грат профілів енергетичного регулятора на його теоретичну циркуляцію; q_r – коефіцієнт тандемності керуючого потоку.

Таким чином, задача зводиться до побудови алгоритму обчислення K_q і K_K в залежності від геометричних параметрів проточної частини регулятора.

В [16] розглянуто методи прикладного аеродинамічного обчислення регуляторів для окремих випадків форми їх проточної частини: лопатки, малоканальна, безлопаткова, кусково-гладка із змінним кутом розкриття.

Зокрема, для гладких профілів логарифмічної спіралі маємо:

$$K_{q} = \frac{8\Phi(\Phi^{2} + 1)\sin\theta_{3}}{(\Phi^{2} - 1)(\Phi^{2} + 2\Phi\cos\theta_{3} + 1)},$$

$$K_{K} = \frac{8\Phi\cos\theta_{3}}{\Phi^{2} + 2\Phi\cos\theta_{3} + 1}, \quad K_{q_{r}} = 0.$$

З виразів для K_q і K_K видно, що ефективність перетворення енергії потоку в порожнині високого тиску корпусу вентилятора залежить від геометричних параметрів регулятора.

Для безлопаткового регулятора (коли $K_{\tau} = K_{y}$) коефіцієнти $K_{q} = 0$, $K_{K} = 1$, тобто має місце рух потоку в регуляторі у формі безвихрової циркуляції.

З практичного погляду принципове значення має дослідження режимів обтікання грат профілів енергетичного регулятора. Відповідні цьому режиму коефіцієнти радіальної швидкості і теоретичної циркуляції мають вигляд:

$$C_{1r}^{0} = -K_{\Gamma} \text{tg}\beta_{\pi}, \quad K_{\tau}^{0} = K_{K} \frac{4\Phi(\Phi^{2}+1)}{(\Phi^{2}-1)}.$$

Рівняння ідеальної аеродинамічної характеристики центрового вентилятора з енергетичним регулятором таке:

$$\overline{H}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}} = \overline{H}_{\mathrm{T}0} - K_{q} q_{\Sigma} - K_{\kappa} K_{q} K_{n}^{2} \frac{H_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}}}{q_{\mathrm{T}} + K_{n} \sqrt{H_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}}}} - \frac{K_{\kappa} K_{\kappa} K_{n} \pi \overline{\mathcal{I}}_{\mathrm{SHA}}^{2} \omega \sqrt{H_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}}}}{2(q_{\mathrm{T}} + K_{n} \sqrt{H_{\mathrm{T}}^{\mathrm{p}}})},$$

де $q_{\Sigma} = q_{T} + q_{y} = q_{T} + K_{n}\sqrt{H_{T}^{p}}$, K_{n} – коефіцієнт, що характеризує пропускну спроможність регулятора; $\overline{H}_{\tau 0}$, K_{q} , K_{κ} – коефіцієнти, визначені [16]. Математичний аналіз цієї формули показує, що ідеальна аеродинамічна характеристика центрового вентилятора з енергетичним регулятором є функцією коефіцієнта витрати, причому $q_{T} = q_{\text{max}}$ відповідає q_{max} центрового вентилятора без регулятора, оскільки досягається при $H_{T} = 0$.

Цілеспрямований вибір геометричних параметрів центрового вентилятора та його енергетичного регулятора дає можливість в широкому діапазоні змінювати максимальний коефіцієнт теоретичного тиску вентилятора і, що принципово важливо, функціональну залежність приросту коефіцієнта теоретичного тиску $\overline{H}_{\rm r}^{\rm p}$ від коефіцієнта витрати $q_{\rm r}$.

В [16] отримано рівняння, що пов'язують геометричні параметри енергетичного регулятора з його енергетичними характеристиками, критеріями подібності течії і дають змогу проводити теоретичний розрахунок критеріїв ефективності енергетичного регулятора.

Контрольні питання

- 1. У чому полягає класичний підхід для обчислення газодинамічних параметрів на поверхні тіла?
- Запишіть розвинення розв'язку в ряд по приросту тиску для рівнянь газової динаміки, записаних у змінних «тиск – функція течії».
- Загальна процедура розв'язання різницевим методом початкової нестаціонарної тривимірної задачі з урахуванням нерівновісних фізико-хімічних перетворень в потоці біля лобової поверхні літального апарату.
- 4. Як використовуються конформні відображення для аеродинамічного обчислення енергетичного регулятора?
- 5. Як визначається функція конформного відображення для аеродинаміки радіальних грат аналітичних профілів довільної форми?

ЛІТЕРАТУРА

- Кудрявцев А.Н. Современные численные методы сверхзвуковой аэродинамики. – Новосибирск: ИТПМ СО РАН, 2005. – 149 с.
- Загузов И.С., Поляков К.А. Математические модели в аэрогидромеханике. Ч.1: Учебное пособие. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. – 92 с.
- Черный Г.Г. Газовая динамика: Учебник для университетов и втузов. – М.: Наука, 1988. – 424 с.
- Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
- 5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
- Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
- 7. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд. ЛГУ, 1978. 296 с.
- Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач газовой динамики / Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 317-342.
- 9. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
- 10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 656 с.
- 11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
- 12. Нажесткина Э.И. Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка

точности. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (препринт № 33), 2008. – 15 с.

- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
- Котенев В.П. Моделирование газовых потоков около поверхности гиперзвуковых летательных аппаратов методом начального аналитического приближения: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 34 с.
- Беляков Д.В. Математическое моделирование движения несимметричного авторотирующего тела: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – М.: РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2009. – 20 с.
- 16. Макаров Н.В. Обоснование параметров и разработка энергетических регуляторов шахтных центробежных вентиляторов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Екатеринбург: УГГУ, 2008. – 21 с.
- 17. Лобанов А.И., Петров И.Б. Численные методы решения уравнений в частных производных. – Интернет-университет информационных технологий: <u>http://www.intuit.ru/</u>.
- Страховская Л.Г. Об одном варианте МКСЭ для уравнений Навье-Стокса. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – 24 с.