МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практикум
для студентів спеціальності 6.040301
«Прикладна математика»

Київ 2013

УДК 533.6.519.6(076.5)
ББК В253.3 в 631я7
М 34

Укладач: *П. Ф. Жук*

Рецензент: *О. М. Супрун* – канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 6/12 від 15.11.2013 р.)

Диференціальні рівняння : практикум / уклад.: П. Ф. Жук. – К. :
М 34 НАУ, 2013. – 56 с.

Містить методичні рекомендації до практичних занять, що сприяють кращому засвоєнню студентами теоретичного курсу навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння», формуванню в них відповідних вмінь і навичок використання математичних методів розв’язання типових диференціальних рівнянь та їх систем, застосування диференціальних рівнянь у галузі прикладної математики.

Для кожного практичного заняття викладено посилання на теоретичні відомості, наведено методи і приклади розв’язання типових завдань, сформульовано перелік завдань для самостійного виконання.

Для студентів спеціальності 6.040301 «Прикладна математика».

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Диференціальні рівняння» є обов'язковим компонентом загальної та професійної освіти фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" за напрямом 6.040301 "Прикладна математика". Значення цього курсу визначається насамперед тим, що диференціальні рівняння є математичним фундаментом науково-дослідницької діяльності та науково-технічного прогресу.

У результаті вивчення даної навчальної дисципліни студент повинен знати основні означення, теореми та методи теорії звичайних диференціальних рівнянь; принципи побудови на їх основі математичних моделей прикладних задач. Він повинен вміти використовувати сучасні методи теорії диференціальних рівнянь; самостійно формалізувати окремі прикладні задачі, зводити їх до типових задач та розв'язати; застосовувати основні математичні методи при розв'язанні практичних задач з використанням обчислювальної техніки і нормативної літератури.

Важливою складовою курсу «Диференціальні рівняння» є практичні заняття. Їх метою є закріплення та поглиблення теоретичних знань і набуття практичних навичок розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем, застосування диференціальних рівнянь при математичному моделюванні та дослідженні динамічних систем.

У результаті виконання практичних завдань студент повинен вміти розв'язувати основні типи звичайних диференціальних рівнянь та їх системи, найпростіші крайові задачі та задачі Штурма-Лиувілля, досліджувати стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем за Ляпуновим, знаходити інтегральні поверхні рівнянь з частинними похідними першого порядку. Він повинен вміти самостійно розробляти математичні моделі динамічних систем і проводити дослідження властивостей їх траєкторій.

Практикум «Диференціальні рівняння» призначено для студентів спеціальності "Прикладна математика". Він цілком відповідає програмі навчальної дисципліни, містить методичні вказівки за всіма темами курсу та значну кількість прикладів розв'язання типових задач. Для ефективного використання практикуму в навчальному процесі студент повинен для кожного практичного заняття засвоїти вказаний там теоретичний матеріал, уважно розібрати типові приклади, наведені в практикумі, та самостійно розв'язати контрольні завдання.

ТЕМА 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Практичне заняття № 1. Приклади математичних моделей

План.

1. Складання звичайних диференціальних рівнянь
2. Розв'язання диференціальних рівнянь методом ізоклін

Теоретичні відомості: [1, с.12-16], [2, с. 17], [4, с. 9]

Перше питання.

Приклад 1. Тіло маси m падає вертикально вниз з деякої висоти. Сила в'язкого тертя, що діє на тіло, пропорційна величині швидкості: $F = -\alpha v$, де $\alpha > 0$ – коефіцієнт тертя. Скласти математичну модель процесу падіння тіла.

Розв'язання. Нехай $v(t)$ – швидкість тіла в момент часу t. На тіло діють дві протилежно направлені сили: сила тяжіння $G = mg$ і сила в'язкого тертя $F = -\alpha v$. За другим законом Ньютона $ma = G + F$. Тому процес падіння описується звичайним диференціальним рівнянням 1-го порядку: $m\dfrac{dv}{dt} = mg - \alpha v$.

Приклад 2. Тіло, що має на початку температуру $T(0) = T_0$, поклали до середовища, температура якого незмінна і дорівнює T_1. Скласти математичну модель процесу зміни температури тіла.

Розв'язання. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t. Експериментально встановлено, що швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища. Тому процес зміни температури тіла описується звичайним диференціальним рівнянням 1-го порядку:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1),$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт пропорційності.

Приклад 3. Побудувати математичну модель процесу розмноження бактерій, якщо його швидкість пропорційна їх кількості.

Розв'язання. Позначимо через $N(t)$ кількість бактерій в момент часу t, де $N_0 = N(0)$ – початкова їх кількість. Абстрагуючись від того, що кількість може вимірюватися тільки цілими числами, вважаємо, що $N(t)$ змінюється за часом неперервно. Тоді швидкість розмноження є похідною від функції $N(t)$ за часом, а сам процес розмноження описується звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t), \text{ де } k > 0.$$

Друге питання.

Приклад 4. Методом ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}. \tag{1}$$

Розв'язання. Покладаючи $y' = k$, $k = const$, отримуємо рівняння сімейства ізоклін $\frac{y-x}{y+x} = k$. Таким чином, ізоклінами є прямі, що проходять через початок координат $O(0,0)$.

При $k = -1$ маємо ізокліну $y = 0$, при $k = 0$ – ізокліну $y = x$, при $k = 1$ – ізокліну $x = 0$.

Рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{y+x}{y-x}$ дає ізокліну $y = -x$, у всіх точках якої інтегральні криві мають вертикальні дотичні.

В точці $O(0,0)$ перетинаються всі ізокліни цього рівняння (особлива точка). За допомогою отриманих ізоклін будуємо інтегральні криві (рис. 1).

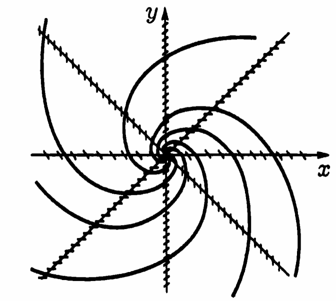

Рис. 1. Інтегральні криві рівняння (1)

Завдання для самостійної роботи: [2, с. 110, задачі 25-29], [3, задачі 3-8].

Практичне заняття № 2. Окремі типи рівнянь

План.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними
2. Однорідні рівняння та рівняння, що до них зводяться

Теоретичні відомості: [1, с. 24-27], [2, с. 28-29, 50].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(xy+y)dx+(xy+x)dy=0 . \tag{1}$$

Розв'язання. Винесемо в (1) за дужки загальні множники: $y(x+1)dx=-x(y+1)dy$. Це рівняння зі змінними, що відокремлюються, оскільки: $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$. Інтегруємо отримане рівняння по відповідним змінним: $\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy$. Маємо $\ln|x|+x=-\ln|y|-y+\ln C$, тобто $xye^{x+y}=C$ – загальний інтеграл рівняння (1).

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy'=x\sin\frac{y}{x}+y . \tag{2}$$

Розв'язання. Змінні відокремити не вдається, тому поділимо обидві частини рівняння на x. Маємо $y'=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$. Права частина цього рівняння залежить тільки від відношення $\frac{y}{x}$, тому воно однорідне. Робимо заміну $z=\frac{y}{x}$. Тоді $y'=z'x+z$, $z'x+z=\sin z+z$, $z'x=\sin z$, $\frac{dz}{\sin z}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dz}{\sin z}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln\left|tg\frac{z}{2}\right|=\ln|x|+\ln C$, $\left|tg\frac{z}{2}\right|=|x|C$, тобто $\left|tg\frac{y}{2x}\right|=|x|C$ або $y=2x\,arctg\,(xC)$ – загальний розв'язок рівняння (2).

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y = 2x + 1. \tag{3}$$

Розв'язання. Рівняння (3) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, якщо покласти $z = y - 2x - 1$. Тоді $z' = y' - 2$, тобто $\frac{dz}{dx} + z + 2 = 0$. Один розв'язок (3) очевидний: $z = -2$. Інші знаходимо: $\frac{dz}{z+2} + dx = 0$, $\int \frac{dz}{z+2} + \int dx = 0$, $\ln|z+2| + x = \ln C_1$, $|z+2| = C_1 e^{-x}$, $C_1 > 0$. Розв'язок $z = -2$ можна отримати з останнього співвідношення при $C_1 = 0$, тому $z = -2 + Ce^{-x}$, $C \in R$. Остаточно маємо $y - 2x - 1 = -2 + Ce^{-x}$ або $y = 2x - 1 + Ce^{-x}$.

Друге питання.

Приклад 4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{x+1} + tg\frac{y-2x}{x+1}. \tag{4}$$

Розв'язання. Рівняння (4) стає однорідним, якщо покласти $x = t - 1$, $y = z - 2$. Тому заміна змінних $x = t - 1$, $y = ut - 2$ зводе це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t\frac{du}{dt} + u = u + tg\frac{ut - 2 - 2(t-1)}{t}, \quad t\frac{du}{dt} = tg(u-2).$$

Функція $u = 2 + k\pi$ ($k \in Z$) є розв'язком отриманого рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні:

$$\frac{du}{tg(u-2)} = \frac{dt}{t}, \quad \ln|\sin(u-2)| = \ln|t| + \ln C_1,$$

або $\sin(u-2) = Ct$, $C \in R$. Розв'язки $u = 2 + k\pi$ отримуємо з цієї формули при $C = 0$. Повертаючись до змінних x і y, знаходимо загальний інтеграл рівняння (4): $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 51-55], [4, задачі 100-102, 108-109].

Практичне заняття № 3. Лінійні рівняння першого порядку

План.

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку
2. Рівняння Бернуллі та Ріккаті

Теоретичні відомості: [1, с. 27-30], [2, с. 60].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' + y\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

Розв'язання. Рівняння (1) є лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку, оскільки має вигляд $p(x)y' + q(x)y = f(x)$. Будемо розв'язувати його за допомогою заміни Бернуллі $y = uv$.

Маємо таку послідовність перетворень:

$$y' = u'v + v'u\,,\ \ u'v + v'u + uv\,\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}\,,\ \ u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}x) = \frac{1}{\cos x}\,,$$

$$v' + v\,\mathrm{tg}x = 0\,,\ \ \frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}x\,dx\,,\ \ \ln|v| = \ln|\cos x|\,,\ \ |v| = |\cos x|\,,$$

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}\,,\ \ du = \frac{1}{\cos^2 x}dx\,,\ \ u = \mathrm{tg}x + C\,,$$

$y = \cos x\left(\mathrm{tg}x + C\right)$ – загальний розв'язок рівняння (1).

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$y' + \frac{1}{x}y = x\,,\quad y(1) = 2\,. \qquad (2)$$

Розв'язання. Рівняння (2) є лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку. Розв'язуємо його методом варіації сталої. Відповідне однорідне рівняння $y' + \frac{1}{x}y = 0$ має розв'язок

$$y = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}. \qquad (3)$$

Реалізуємо варіацію сталої C, вважаючи, що вона є деякою функцією $C = C(x)$ від змінної x. Рівняння (2) тоді набуває вигляду:

$$\frac{xC'(x)-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x\text{, тобто } C'(x)=x\,.$$

Тому $C(x)=\frac{x^3}{3}+C_1$ і, покладаючи цей вираз для $C(x)$ в формулу (3), отримаємо загальний розв’язок рівняння (2):

$$y=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}\,.$$

З початкової умови знаходимо значення сталої $C_1=\frac{5}{3}$ і записуємо розв’язок задачі Коші: $y=\frac{x^2}{3}+\frac{5}{3x}$.

Друге питання.

Приклад 3. Розв’язати диференціальне рівняння

$$xy'-4y=x^2\sqrt{y}\,. \tag{4}$$

Розв’язання. Це – рівняння Бернуллі, $n=0,5$. Заміна $z=\sqrt{y}$ зводе рівняння (4) до лінійного рівняння $z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$, розв’язок якого такий: $z=C\,x^2+\frac{1}{2}x^2\ln|x|$. Тому $y=z^2=\left(C\,x^2+\frac{1}{2}x^2\ln|x|\right)^2$ – загальний розв’язок рівняння (4), $y=0$ – його особливий розв’язок.

Приклад 4. Розв’язати рівняння Ріккаті

$$y'-y^2+2e^xy=e^{2x}+e^x\,, \tag{5}$$

якщо відомий його окремий розв’язок $y_1=e^x$.

Розв’язання. Заміна $y=e^x+z$ перетворює рівняння (5) до виду: $z'=z^2$. Тоді $-\frac{1}{z}=x-C$ або $z=\frac{1}{C-x}$. Таким чином, загальний розв’язок рівняння (5) такий:

$$y=e^x+\frac{1}{C-x}\,.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 145-148], [4, задачі 127, 129, 159, 160, 232, 235].

Практичне заняття № 4. Рівняння в повних диференціалах

План.

1. Рівняння в повних диференціалах
2. Інтегруючий множник

Теоретичні відомості**:** [2, с. 74-75], [4, с. 40-41].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=0\,. \tag{1}$$

Розв'язання. Тут $M(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x$, $N(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Оскільки $\dfrac{\partial M}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, то рівняння (1) є рівнянням в повних диференціалах, тобто існує така функція $u(x,y)$, частинні похідні якої по x і y дорівнюють $M(x,y)$ і $N(x,y)$ відповідно:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}+e^x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}\,. \tag{2}$$

Інтегруємо перше з співвідношень (2) по x:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx+\varphi(y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+e^x+\varphi(y)\,.$$

Тепер диференціюємо $u(x,y)$ по y і прирівнюємо другому співвідношенню з (2): $-\dfrac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Звідси маємо $\varphi'(y)=0$, тобто $\varphi(y)=C$. Таким чином, загальним інтегралом рівняння (1) є $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+e^x=C$.

Друге питання.

Приклад 2. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)dx+\left(2xy+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0\,. \tag{3}$$

Розв'язання. Обчислюємо

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{x}{y^2}-2y-\frac{1}{y}-\frac{2x}{y^2}=-\left(2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right).$$

Тобто, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)N^{-1}$ є функцією тільки від x. Тому інтегруючий множник знаходимо з рівняння $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=-\frac{1}{x}$ і $\mu=\frac{1}{x}$.

Помноживши рівняння (3) на μ, отримуємо рівняння в повних диференціалах: $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\left(2y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\right)dy=0$. Його загальний інтеграл такий: $\ln|x|+\ln|y|+y^2-\frac{x}{y}=C$.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\cos y dx-xdy=0. \tag{4}$$

Розв'язання. Обчислюємо

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2\left(3x^2\cos y-\sin y\right)\sin y.$$

Тобто, $\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)M^{-1}$ є функцією тільки від y. Тому інтегруючий множник знаходимо з рівняння $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=2\operatorname{tg}y$ і $\mu=\frac{1}{\cos^2 y}$.

Помноживши рівняння (4) на μ, отримуємо рівняння в повних диференціалах: $\left(3x^2-\operatorname{tg}y\right)dx-\frac{x}{\cos^2 y}dy=0$. Розв'язуємо його:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-\operatorname{tg}y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{\cos^2 y},\quad u(x,y)=\int\left(3x^2-\operatorname{tg}y\right)dx=$$

$$=x^3-x\operatorname{tg}y+\varphi(y),\quad \varphi'(y)=0,\quad \varphi(y)=C.$$

Загальний інтеграл рівняння (4): $x^3-x\operatorname{tg}y=C$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 188-190, 198-199], [4, задачі 177-179, 196-197].

Практичне заняття № 5. Метод послідовних наближень

План.

1. Метод послідовних наближень Пікара
2. Оцінка точності методу Пікара

Теоретичні відомості: [1, с. 62-65], [4, с. 15-16].

Перше питання.

Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти розв’язок рівняння $y' = y$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв’язання. Очевидно, що для цього рівняння на всій площині xOy виконані умові теореми про існування та єдиність розв’язку задачі Коші. Побудуємо послідовність $y_n(x)$ функцій, які визначені співвідношенням:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

прийняв за нульове наближення $y_0(x) \equiv 1$:

$$y_0(x) \equiv 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t)dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)dt = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

У загальному випадку маємо

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Тобто $y_n(x) \to e^x$ при $n \to \infty$. Безпосередньо перевіряємо, що функція $y(x) = e^x$ є розв’язком поставленої задачі Коші.

Друге питання.

Приклад 2. Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$ і $y_2(x)$ до розв’язку задачі Коші

$$y' = 1 - (1+x)y + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Оцінити різницю між $y_2(x)$ і точним розв'язком вказаної задачі на відрізку $[-0.25, 0.25]$.

Розв'язання. Послідовні наближення до розв'язку цієї задачі Коші визначаємо за формулою: $y_0(x) = 1$,

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x \left(1 - (1+t)y_{n-1}(t) + y_{n-1}^2(t)\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots .$$

При $n = 1$ маємо $y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(1 - (1+t) + 1\right) dt = 1 + x - \dfrac{x^2}{2}$.

Знайдемо $y_2(x)$:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 - (1+t)y_1(t) + y_1^2(t)\right) dt =$$

$$= 1 + \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2}\right)\right] dt = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}.$$

Для оцінки різниці між $y_2(x)$ і точним розв'язком $y(x)$ вказаної задачі Коші знайдемо $y(x)$. Записав вихідне рівняння у вигляді $(y - x - 1)'_x = y(y - x - 1)$, бачимо, що $y(x) = x + 1$. Таким чином,

$$|y(x) - y_2(x)| = \frac{|x|^3}{2}\left|\frac{1}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{10}\right|.$$

Вираз $\left|\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{10}\right|$ приймає найбільше значення на відрізку $[-0.25, 0.25]$ в точці $x = 0.25$; тому

$$|y(x) - y_2(x)| \le \frac{1}{2 \cdot 4^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16} - \frac{1}{160}\right) < 0.0032,$$

тобто $|y(x) - y_2(x)| < 0.0032 \quad \forall x \in [-0.25, 0.25]$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 41-45], [4, задачі 221 (а-г)].

Практичне заняття № 6. Рівняння Лагранжа і Клеро

План.

1. Рівняння Лагранжа
2. Рівняння Клеро

Теоретичні відомості: [1, с. 39-47], [2, с. 95-96].

Перше питання.

Приклад 1. Розв’язати рівняння Лагранжа $y = 2xy' + \ln y'$.

Розв’язання. Покладаємо $p = y'$, тоді $y = 2xp + \ln p$. Після диференціювання останньої рівності маємо:

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p},$$

звідки $p\dfrac{dx}{p} = -2x - \dfrac{1}{p}$ або $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{2}{p}x - \dfrac{1}{p^2}$. Ми отримали диференціальне рівняння 1-го порядку, лінійне відносно x. Його загальний розв’язок $x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}$. Знайдене значення x покладемо у вираз для y і отримаємо розв’язок вихідного диференціального рівняння в параметричній формі:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2.$$

Друге питання.

Приклад 2. Розв’язати рівняння Клеро $y = xy' + \dfrac{a}{2y'}$ $(a = \mathrm{const})$.

Розв’язання. Покладаємо $p = y'$, тоді $y = xp + \dfrac{a}{2p}$. Диференціюючи останнє рівняння і замінюючи dy на pdx, маємо $pdx = pdx + xdp - \dfrac{a}{2p^2}dp$, звідки $dp\left(x - \dfrac{a}{2p^2}\right) = 0$. Якщо $dp = 0$, то $p = C$ і загальним розв’язком вихідного рівняння є $y = Cx + \dfrac{a}{2C}$, тобто однопараметричне сімейство прямих.

Якщо прирівняти до нуля другий множник, то отримуємо $x = \dfrac{a}{2p^2}$. Після виключення p із цього рівняння і із рівняння $y = xp + \dfrac{a}{2p}$, маємо $y^2 = 2ax$ – це також розв'язок вихідного рівняння (особливий розв'язок).

З геометричної точки зору крива $y^2 = 2ax$ є огинальна крива сімейства прямих, що задані загальним розв'язком.

Приклад 3. Розв'язати рівняння Лагранжа $y' + y = x(y')^2$.

Розв'язання. Покладаємо $p = y'$, тоді $y = xp^2 - p$. Диференціюючи по x, маємо

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx} \quad \text{або} \quad p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}.$$

Отримуємо лінійне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Його розв'язок $x = \dfrac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}$.

Оскільки $y = xp^2 - p$, то розв'язок вихідного диференціального рівняння отримуємо в параметричній формі:

$$x = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}, \quad y = \frac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}p^2 - p.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y(y')^2 + 2xy' - y' = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = y^2$. Тоді $z' = 2yy'$ і вихідне рівняння набуває вигляду $(z')^2 + 4xz' - 4z = 0$, тобто вихідне рівняння перетворюється у рівняння Клеро. Розв'язав його, знаходимо $z = Cx + \dfrac{C^2}{4}$ і $z = -x^2$. Оскільки $z = y^2$, то $y^2 = Cx + \dfrac{C^2}{4}$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 287-296].

ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Практичне заняття № 1. Існування і єдиність розв'язку

План.

1. Задача Коші
2. Загальний розв'язок диференціального рівняння

Теоретичні відомості: [1, с. 47-61], [4, с. 148, 150-151, 152-153].

Перше питання.

Приклад 1. Дослідити задачу Коші

$$\begin{cases} y'' = \sin y' + e^{-x^2 y} \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}. \tag{1}$$

Розв'язання. В даному випадку $f(x, y, y') \equiv \sin y' + e^{-x^2 y}$. Ця функція є визначеною та неперервною при всіх значеннях x, y, y'. Її частинні похідні по y та y' становлять відповідно:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y',$$

дані похідні є неперервними та обмеженими функціями при всіх значеннях своїх аргументів. З цього слідує, що якими б не були початкові умови

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y'_0,$$

існує єдиний розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам.

Друге питання.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку виду $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ називається множина всіх його розв'язків, що визначається формулою $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$, яка містить n довільних сталих, таких, що якщо задані початкові умови виду

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\,,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \dots\,,\ \ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}\ ,$$

то знайдуться такі значення $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$,...,$\tilde{C}_n$, що $y=\varphi\left(x,\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,...,\tilde{C}_n\right)$ буде розв'язком рівняння, що задовольняє початковим умовам.

Будь-який розв'язок, що можна отримати з загального розв'язку при конкретних значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ називається частинним розв'язком диференціального рівняння.

Приклад 2. Показати, що $y = C_1x + C_2$ є загальним *розв'язком* диференціального рівняння $y'' = 0$.

Розв'язання. Покажемо, що $y = C_1x + C_2$ задовольняє даному рівнянню за будь-яких значень C_1 та C_2. Справді, оскільки $y' = C_1$, то $y'' = 0$.

Нехай тепер будуть задані довільним чином вибрані початкові умови $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$. Покажемо, що сталі C_1 та C_2 можна підібрати так, що $y = C_1x + C_2$ задовольнятиме цим умовам. Отримуємо, $y = C_1x + C_2$, $y' = C_1$. Вважаючи, що $x = x_0$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = C_1x_0 + C_2\,, \\ y_0' = C_1\,, \end{cases}$$

з якої однозначно визначається $C_1 = y_0'$, $C_2 = y_0 - x_0y_0'$. Таким чином, розв'язок $y = y_0'\left(x - x_0\right) + y_0$ задовольняє поставленим початковим умовам.

Геометрично, це означає, що через кожну точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ площини xOy із заданим кутовим коефіцієнтом y_0' проходить єдина пряма.

Задання однієї початкової умови, наприклад $y\big|_{x=x_0} = y_0$, визначає пучок прямих з центром в точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$, тобто однієї початкової умови недостатньо для виділення єдиного розв'язку.

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 316-317, 767, 769].

Практичне заняття № 2. Пониження порядку рівняння

План.

1. Рівняння, що допускають пониження порядку
2. Знаходження інтегрованих комбінацій
3. Симетрична форма системи диференціальних рівнянь

Теоретичні відомості: [2, с. 258-259], [4, с. 158, 161-162, 167].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Розв'язання. Дане рівняння не містить незалежної змінної x. Вважаючи, що $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, отримаємо рівняння Бернуллі

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

Підстановкою $p^2 = z$ воно зводиться до лінійного рівняння

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

загальний розв'язок якого $z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$. Замінивши z на $p^2 = (y')^2$, отримуємо $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$.

Розділяючи змінні та інтегруючи, будемо мати

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1},$$

звідки

$$e^{y} + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2,$$

де $\tilde{C}_1 = \dfrac{C_1}{4}$. Це й буде загальним інтегралом даного рівняння.

Друге питання.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1. \qquad (1)$$

Розв'язання. Віднімаємо з першого рівняння друге. Маємо $\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0$, тобто першим інтегралом системи (1) є $x_1 - x_2 = C_1$. Поклавши в друге і третє рівняння системи (1) $x_1 = x_2 + C_1$, отримаємо систему з двох рівнянь

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{x_3 - t} \quad \frac{dx_3}{dt} = C_1 + 1. \tag{2}$$

З другого рівняння системи (2) знаходимо $x_3 = (C_1 + 1)t + C_2$. Покладаючи цей вираз в перше рівняння системи (2), маємо $\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}$, $x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3$. Таким чином, одержуємо

$$x_1 - x_2 = C_1, \quad x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3, \quad x_3 = (C_1 + 1)t + C_2,$$

звідки знаходимо загальний розв'язок системи (1):

$$x_1 = \ln|C_1 t + C_2| + C_1 + C_3, \quad x_2 = \ln|C_1 t + C_2| + C_3, \quad x_3 = (C_1 + 1)t + C_2.$$

Третє питання.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}. \tag{3}$$

Розв'язання. Перша інтегруюча комбінація $\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t}$. Знаходимо перший інтеграл $t(\ln t - 1) + x^2 = C_1$. Другу інтегруючу комбінацію знаходимо за допомогою пропорції

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{dt + dx + dy}{0},$$

звідки $d(t + x + y) = 0$, тобто другий перший інтеграл $t + x + y = C_2$. Тоді загальний інтеграл системи (3) такий

$$x^2 + t(\ln t - 1) = C_1, \quad x + y + t = C_2,$$

з якого знаходимо загальний розв'язок системи (3):

$$x = \pm\sqrt{C_1 + t(1 - \ln t)}, \quad y = C_2 - t \mp \sqrt{C_1 + t(1 - \ln t)}.$$

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 345, 348, 787, 789, 798-803].

Практичне заняття № 3. Властивості розв'язків рівняння

План.

1. Лінійна незалежність функцій
2. Визначник Вронського
3. Визначник Грама

Теоретичні відомості: [1, с. 91-98], [2, с. 142], [4, с. 79-80].

Перше питання.

Приклад1. Показати, що система функцій $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, де числа k_1, k_2, k_3 попарно відмінні, лінійно незалежна на інтервалі $-\infty < x < +\infty$.

Розв'язання. Припустимо протилежне, тобто, що дана система функцій лінійно залежна на даному інтервалі. Тоді

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} \equiv 0. \tag{1}$$

на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, до того ж, хоча б одне з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є відмінним від нуля, наприклад, $\alpha_3 \neq 0$. Поділивши обидві частини тотожності (1) на $e^{k_1 x}$ отримаємо

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0.$$

Диференціюючи дану тотожність, матимемо

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0. \tag{2}$$

Ділимо обидві частини тотожності (2) на $e^{(k_2 - k_1)x}$:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0. \tag{3}$$

Диференціюючи (3) отримуємо

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0,$$

це є неможливим, оскільки згідно припущення $\alpha_3 \neq 0$, а $k_3 \neq k_1$, $k_3 \neq k_2$ згідно умови, і $e^{(k_3 - k_2)x} \neq 0$.

Отже, наше припущення щодо лінійної залежності даної системи привело до протиріччя, відповідно, дана система функцій є лінійно незалежною на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тобто тотожність (1) виконуватиметься лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Друге питання.

Визначник Вронського характеризується наступною структурою:

$$W\left[y_1, y_2, \dots, y_n\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ . & . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти визначник Вронського для функцій $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$, $y_3(x) = e^{k_3 x}$.

Розв'язання. Будуємо вронскіан

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)$$

Третє питання.

Визначник

$$\Gamma\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ . & . & \dots & . \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

називається визначником Грама системи функцій $y_k(x)$.

Приклад 3. Показати, що функції $y_1 = x,\ y_2 = 2x$ лінійно залежні на відрізку $[0,1]$.

Розв'язання. Знаходимо елементи визначника Грама

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad (y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3};$$

$$(y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}, \quad \Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

З цього слідує, що функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними.

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 375, 379, 392-394, 675-679].

Практичне заняття № 4. Однорідні рівняння. Метод Ейлера

План.

1. Випадок дійсних і різних коренів характеристичного рівняння
2. Випадок кратних коренів
3. Випадок комплексних коренів
4. Випадок кратних комплексних коренів

Теоретичні відомості: [1, с. 85-91], [2, с. 141-142].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Знаходимо його корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Оскільки вони дійсні та різні, то загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y_{заг} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Друге питання.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Корні дійсні, до того ж один із них, а саме $\lambda = -1$, двократний, тому загальний розв'язок має вид

$$y_{заг} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3.$$

Третє питання.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

має корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2-3i$, $\lambda_2 = -2+3i$.

Тоді загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$y_{заг} = C_1 + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x.$$

Четверте питання.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

або

$$(\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0.$$

Тоді корені даного рівняння є наступними: $\lambda = 2$ – однократний, та $\lambda = \pm i$ – пара двократних уявних коренів.

Отже, загальний розв'язок є таким

$$y_{заг} = C_1 e^{2x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5 x\right)\sin x.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. Складуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

або $\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)^2 = 0$.

Дане рівняння має двократні комплексні корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1-i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1+i$. З цього слідує, що загальний розв'язок буде таким

$$y_{заг} = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 x e^{-x}\cos x + C_4 x e^{-x}\sin x.$$

Провівши алгебраїчні перетворення, загальний розв'язок рівняння можна представити в такому виді:

$$y_{заг} = e^{-x}\left(C_1 + C_3 x\right)\cos x + e^{-x}\left(C_2 + C_4 x\right)\sin x.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 525-528], [4, задачі 410, 423, 434-439]

Практичне заняття № 5.
Неоднорідні рівняння. Метод підбору

План.

1. Випадок різних коренів характеристичного рівняння
2. Випадок кратних коренів

Теоретичні відомості: [2, с. 170-172], [4, с. 89-91].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x\,.$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має наступні корені: $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -i,\ \ \lambda_3 = i$, тому загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння буде наступним

$$y_{заг.одн.} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x\,.$$

Оскільки нуль не є коренем характеристичного рівняння, то його окремий розв’язок $y_{окр.}$ шукатимемо в такому виді:

$$y_{окр.} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3\,,$$

де A_1, A_2, A_3 – невідомі сталі, значення яких слід знайти. Підставляючи вираз для $y_{окр.}$ в вихідне рівняння, отримуємо

$$-A_1 x^2 + \left(2A_1 - A_2\right)x + \left(A_2 - 2A_1 - A_3\right) = x^2 + x\,,$$

Звідки, прирівнюючи зліва та справа коефіцієнти при однакових степенях x, матимемо:

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему отримаємо, що $A_1 = A_3 = -1$, $A_2 = -3$. Відповідно окремий розв’язок буде таким: $y_{окр.} = -x^2 - 3x - 1$.

Таким чином $y_{заг.неодн.} = y_{заг.одн.} + y_{окр.}$ та становить:

$$y_{заг.неодн.} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1 .$$

Друге питання.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x .$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ має наступні корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y_{заг.одн.} = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{3x} .$$

Оскільки числа $1 \pm i$ не є коренями характеристичного рівняння, то окремий розв'язок $y_{окр.}$ шукатимемо в такому виді:

$$y_{окр.} = e^x \left(a \cos x + b \sin x\right).$$

Підставляючи цей вираз $y_{окр.}$ в рівняння та скоротивши його обидві частини на e^x, отримуємо

$$\left(3a - 4b\right)\cos x + \left(4a + 3b\right)\sin x = 25 \sin x .$$

Тобто маємо наступну систему

$$\begin{cases} 3a - 4b = 0, \\ 4a + 3b = 25, \end{cases}$$

Внаслідок розв'язання системи знаходимо, що $a = 4$, $b = 3$. Тоді окремий розв'язок $y_{окр.}$ становить

$$y_{окр.} = e^x \left(4 \cos x + 3 \sin x\right).$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння буде таким

$$y_{заг.неодн.} = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{3x} + e^x \left(4 \cos x + 3 \sin x\right).$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 550-554], [4, задачі 520-524].

Практичне заняття № 6. Метод Лагранжа

План.

1. Принцип суперпозиції
2. Рівняння Ейлера
3. Формула Остроградського-Ліувілля
4. Метод Лагранжа

Теоретичні відомості: [4, с. 98-99, 103-104, 105-107, 112].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''-6y'+9y=4e^x-16e^{3x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2-6\lambda+9=0$ має кратний корінь $\lambda_1=\lambda_2=3$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким: $y_{заг.одн.}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

Для знаходження окремого розв'язку вихідного рівняння знайдемо окремі розв'язки двох наступних рівнянь: $y''-6y'+9y=4e^x$, $y''-6y'+9y=-16e^{3x}$. Перше рівняння має окремий розв'язок $y_1=e^x$. Окремий розв'язок другого рівняння $y_2=-8x^2e^{3x}$.

За принципом суперпозиції розв'язків окремий розв'язок $y_{окр.}$ вихідного рівняння буде дорівнювати сумі окремих розв'язків y_1 та y_2, тобто: $y_{окр.}=y_1+y_2=e^x-8x^2e^{3x}$.

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння буде таким

$$y_{заг.неодн.}=\left(C_1+C_2x-8x^2\right)e^{3x}+e^x.$$

Друге питання.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x^2y''+2xy'-6y=0.$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння в виді $y=x^k$, де k – це невідоме число. Знаходимо $y'=kx^{k-1}$, $y''=k(k-1)x^{k-2}$. Підставивши ці значення в рівняння, отримуємо наступне:

$x^2k(k-1)x^{k-2}+2xkx^{k-1}-6x^k=0$, або $x^k\left[k(k-1)+2k-6\right]=0$.

Оскільки $x^k\neq 0$, то $k(k-1)+2k-6=0$. Корені останнього рівняння $k_1=-3,\ k_2=2$. Їм відповідає фундаментальна система розв'язків $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^2$. Загальний розв'язок вихідного рівняння Ейлера буде становитиме $y = C_1 x^{-3} + C_2 x^2$.

Третє питання.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння $y'' - \mathrm{tg}x\, y' + 2y = 0$ за відомим його окремим розв'язком $y_1 = \sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Остроградського-Ліувілля, знайдемо лінійно незалежний розв'язок y_2 для вихідного рівняння $y_2 = \sin x \int \frac{dx}{\sin^2 x\, e^{-\int \mathrm{tg}\, x dx}} = \sin x \ln\left|\mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right| - 1$.

Отже, загальний розв'язок досліджуваного диференціального рівняння буде таким

$$y = C_1\left(\sin x \ln\left|\mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x}\right| - 1\right) + C_2 \sin x.$$

Четверте питання.

Приклад 4. Розв'язати методом Лагранжа лінійне неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ такий: $y_{заг.одн.} = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Вважаємо, що сталі C_1, C_2 є функціями від x. Сформуємо систему Лагранжа:

$$\begin{cases} e^x C_1'(x) + x e^x C_2'(x) = 0, \\ e^x C_1'(x) + e^x C_2'(x) + x e^x C_2'(x) = x^{-1} e^x. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що $C_1'(x) = -1$, $C_2'(x) = x^{-1}$. Як наслідок, $C_1(x) = -x + C_1$, $C_2(x) = \ln|x| + C_2$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{заг.неодн.} = (-x + C_1)e^x + x e^x\left(\ln|x| + C_2\right) = e^x\left[C_1 + x\left(C_2 + \ln|x| - 1\right)\right].$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 575-577, 593, 595, 648-650], [4, задачі 620, 622, 682].

Практичне заняття № 7.
Лінійні однорідні системи рівнянь з постійними коефіцієнтами. Метод Ейлера

План.

1. Метод Ейлера. Випадок дійсних простих коренів.
2. Випадок кратних коренів.

Теоретичні відомості: [1, с. 99-104], [2, с. 276-278].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = -x + 5y - z, \\ \dot{z} = x - y + 3z \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0,$$

або $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$. Це рівняння має наступні корені: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$. Їм відповідають такі вектори стовпчики, які отримуються після підстановки значень коренів в характеристичну систему рівнянь та її розв'язання:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідні частинні розв'язки:

$$X_1 = Y_1 e^{2t}, \quad X_2 = Y_2 e^{3t}, \quad X_3 = Y_3 e^{6t}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи рівнянь буде таким:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y = \qquad\quad C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases}$$

Друге питання.

Приклад 2. Розв'язати лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 6r + 9 = 0\,,$$

корені є кратними $r_1 = r_2 = 3$. Шукаємо розв'язок в такому виді:

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^{3t}\,,\; y = (\lambda_2 + \mu_2 t)e^{3t}\,. \qquad (2)$$

Підставляючи x та y в перше рівняння системи (1), отримуємо

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t)\,. \qquad (3)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в лівій та правій частині (3), маємо:

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2\,, \quad 3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2\,,$$

звідки $\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1$, $\mu_2 = \mu_1$. Величини λ_1 та μ_1 залишаються довільними. Позначаючи їх відповідно через C_1 та C_2, отримуємо загальний розв'язок системи (1):

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 798-802], [4, задачі 807-811].

Практичне заняття № 8.
Лінійні неоднорідні системи рівнянь з постійними коефіцієнтами. Метод Лагранжа

План.

1. Метод Лагранжа (метод варіації сталої).

Теоретичні відомості: [2, с. 294-295], [4, с. 175-177].

Перше питання.

Приклад 1. Розв’язати лінійну неоднорідну систему методом варіації сталої

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{1}$$

Розв’язання. Спочатку розв’яжемо однорідну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases} \tag{2}$$

З другого рівняння системи (2) маємо $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, так що $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2}$. Підставимо ці вирази для x та $\dfrac{dx}{dt}$ в перше рівняння системи (2):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0 .$$

Загальний розв’язок останнього рівняння такий

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} .$$

Оскільки $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, то матимемо

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} .$$

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (2) такий:

$$\begin{cases} x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}. \end{cases}$$

Розв'язок неоднорідної системи (1) шукаємо в виді

$$\begin{cases} x = -C_1(t) e^{2t} + 4C_2(t) e^{-3t}, \\ y = C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{-3t}. \end{cases} \tag{3}$$

Підставивши (3) в (1), отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} -C_1'(t) e^{2t} + 4C_2'(t) e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{-3t} = \dfrac{3}{2} t^2, \end{cases}$$

звідки

$$C_1'(t) = \frac{\left(6t^2 - 4t - 1\right) e^{-2t}}{5}, \quad C_2'(t) = \frac{\left(3t^2 + 8t + 2\right) e^{3t}}{10}.$$

Інтегруючи отримані рівняння, знайдемо наступне

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{5}\left(t + 3t^2\right) e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) = \dfrac{1}{10}\left(2t + t^2\right) e^{3t} + C_2, \end{cases} \tag{4}$$

де C_1 та C_2 довільні сталі. Підставивши (4) в (3), отримаємо загальний розв'язок системи (1):

$$\begin{cases} x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \dfrac{1}{2} + t^2. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 846-850], [4, задачі 812-816].

Практичне заняття № 9.
Лінійні неоднорідні системи рівнянь з постійними коефіцієнтами. Метод Д'Аламбера

План.

1. Метод Д'Аламбера

Теоретичні відомості: [4, с. 182-183].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати лінійну неоднорідну систему звичайних диференціальних рівнянь методом Д'Аламбера.

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} = -2x + 2y + t, \\ t\dfrac{dy}{dt} = -x - 5y + t^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $t = e^{\tau}$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{d\tau}$$

і система прийме наступний вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = -2x + 2y + e^{\tau}, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -x - 5y + e^{2\tau}. \end{cases} \tag{1}$$

Для розв'язання системи (1) використаємо метод Д'Аламбера. Помножимо друге рівняння системи на λ та додамо почленно до першого:

$$\frac{d}{d\tau}(x + \lambda y) = (-2 - \lambda)x + (2 - 5\lambda)y + e^{\tau} + \lambda e^{2\tau},$$

або

$$\frac{d}{d\tau}(x + \lambda y) = (-2 - \lambda)\left[x + \frac{2 - 5\lambda}{-2 - \lambda}y\right] + e^{\tau} + \lambda e^{2\tau}. \tag{2}$$

Виберемо λ так, щоб коефіцієнт при y в квадратній дужці був рівний λ, тобто $\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}=\lambda$, чи $\lambda^2-3\lambda+2=0$, звідки $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. При $\lambda_1=1$ з (2) отримуємо наступне рівняння

$$\frac{d(x+y)}{d\tau}=-3(x+y)+e^{\tau}+e^{2\tau},$$

звідки матимемо

$$x+y=e^{-3\tau}\left\{C_1+\int\left(e^{\tau}+e^{2\tau}\right)e^{3\tau}d\tau\right\}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$x+y=C_1e^{-3\tau}+\frac{1}{4}e^{\tau}+\frac{1}{5}e^{2\tau}. \tag{3}$$

При $\lambda_2=2$ з (2) аналогічно знайдемо

$$x+2y=C_2e^{-4\tau}+\frac{1}{5}e^{\tau}+\frac{1}{3}e^{2\tau}. \tag{4}$$

Розв'язавши систему (3) – (4) відносно x та y, отримуємо загальний розв'язок системи (1):

$$\begin{cases} x=2C_1e^{-3\tau}-C_2e^{-4\tau}+0,3e^{\tau}+\frac{1}{15}e^{2\tau}, \\ y=-C_1e^{-3\tau}+C_2e^{-4\tau}-0,05e^{\tau}+\frac{2}{15}e^{2\tau}. \end{cases}$$

Повертаючись до змінної t $\left(e^{\tau}=t\right)$, отримаємо загальний розв'язок вихідної системи

$$\begin{cases} x=\frac{2C_1}{t^3}-\frac{C_2}{t^4}+\frac{3t}{10}+\frac{t^2}{15}, \\ y=-\frac{C_1}{t^3}+\frac{C_2}{t^4}-\frac{t}{20}+\frac{2t^2}{15}. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи: [4, задачі 827-831].

Практичне заняття № 10.
Лінійні системи рівнянь з постійними коефіцієнтами.
Метод матричної експоненти

План.

1. Метод матричної експоненти

Теоретичні відомості: [2, с. 277-278], [3, с. 80-81].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати лінійну систему методом матричної експоненти

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння матриці A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

корені є такими $\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$.

Для кожного із власних значень знайдемо власний вектор. Для цього, як і в попередніх методах, підставимо значення отриманих коренів в систему $(A - \lambda I)V = 0$ та розв'яжемо її.

В результаті для $\lambda_1 = 5$ маємо $V_1 = (1,1)^T$, для $\lambda_2 = -1$ відповідно $V_2 = (-1,1)^T$.

Складемо матрицю H зі знайдених власних векторів V_1 та V_2, та обчислимо H^{-1}:

$$H^{-1} = \frac{1}{\Delta(H)} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в даному прикладі власні числа є простими коренями характеристичного рівняння, то можна відразу записати жорданову форму матриці A, яка матиме простий діагональний вид:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{5} & 0\\ 0 & \boxed{-1}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо це, використовуючи формулу переходу від вихідної матриці A до нормальної жорданової форми J:

$$J=H^{-1}AH=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{5} & 0\\ 0 & \boxed{-1}\end{pmatrix}.$$

Складемо тепер матрицю $\exp(tJ)$, її також можна назвати матричною експонентою:

$$\exp(tJ)=\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Обчислимо матричну експоненту $\exp(tA)$:

$$\exp(tA)=H\exp(tJ)H^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи записується в виді

$$X(t)=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\exp(tA)\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix},$$

де C_1 та C_2 довільні сталі.

Отже, загальний розв'язок досліджуваної системи буде таким:

$$X(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}(C_1+C_2)+e^{-t}(C_1-C_2)\\ e^{5t}(C_1+C_2)-e^{-t}(C_1-C_2)\end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 854-857, 867-869, 874].

Практичне заняття № 11.
Розв'язання крайових задач другого порядку і задач Штурма-Ліувілля

План.

1. Розв'язання крайових задач другого порядку
2. Розв'язання задач Штурма-Ліувілля

Теоретичні відомості: [1, с.108-128], [2, с. 247-248], [3, с.71-72].

Перше питання.

Приклад 1. Розв'язати крайову задачу другого порядку

$$y'' - y = 0 , \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1 .$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' - y = 0$. Запишемо його характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 1 = 0$. Його корені матимуть такі значення: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

Отже, розглянуте однорідне рівняння має наступний загальний розв'язок:

$$y_{заг.одн.} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} .$$

Щоб знайти значення констант C_1 і C_2 та задовольнити крайові умови, знайдемо $y'_{заг.одн.}$:

$$y'_{заг.одн.} = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} .$$

Знайдемо $y'(0)$ та $y(1)$:

$$y'(0) = -C_1 + C_2 = 0 , \quad y(1) = C_1 e^{-1} + C_2 e = 1 .$$

Розв'яжемо утворену лінійну систему та знайдемо значення C_1 та C_2:

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-1} + C_2 e = 1. \end{cases}$$

В результаті розв'язання даної системи, встановлюємо, що

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2\text{ch}(1)} .$$

Тоді загальний розв’язок досліджуваного рівняння буде таким

$$y_{заг.одн.} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(1)}\left(2\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(1)}.$$

Друге питання.

Приклад 2. Розв’язати задачу Штурма-Ліувілля

$$y'' + \lambda^2 y = 0\,, \quad y'(0) = 0, \;\; y(\pi) = 0\,.$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальний розв’язок рівняння $y'' + \lambda^2 y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 + \lambda^2 = 0$. Корені цього рівняння $k_{1,2} = \pm i\lambda$.

Загальний розв’язок рівняння $y'' + \lambda^2 y = 0$ буде таким:

$$y_{заг.одн.} = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x\,.$$

Щоб задовольнити крайові умови знаходимо $y'_{заг.одн.}$:

$$y'_{заг.одн.} = -C_1\lambda \sin\lambda x + C_2\lambda\cos\lambda x\,.$$

Знайдемо $y'(0)$ та $y(\pi)$:

$$y'(0) = \lambda C_2 = 0\,,$$

$$y(\pi) = C_1\cos\lambda\pi + C_2\sin\lambda\pi = 0\,.$$

Розв’яжемо утворену лінійну систему та знайдемо значення C_1 та C_2:

$$\begin{cases}\lambda C_2 = 0,\\ C_1\cos\lambda\pi + C_2\sin\lambda\pi = 0.\end{cases}$$

Оскільки, $\lambda \neq 0$, то з першого рівняння маємо $C_2 = 0$. Тоді з другого рівняння випливає, що $C_1\cos\lambda\pi$ =0. Таким чином,

$$\lambda_k = k + \frac{1}{2}, \qquad y_k = \cos\lambda_k x = \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\,, \quad k = 0,1,\dots\,.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 751-754, 782, 783], [4, задачі 714-718].

ТЕМА 3. ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

Практичне заняття № 1. Перший метод Ляпунова

План.

1. Стійкість точки спокою системи рівнянь
2. Параметрична стійкість розв'язків системи рівнянь

Теоретичні відомості: [1, с. 137-140], [2, с. 312].

Перше питання.

Приклад 1. Дослідити на стійкість точку спокою $(0,0)$ системи

$$\frac{dx}{dt}=-x+z\,,\quad \frac{dy}{dt}=-2y-z\,,\quad \frac{dz}{dt}=y-z\,. \qquad (1)$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0\,,$$

або $(1+\lambda)(\lambda^2+3\lambda+3)=0$. Корені цього рівняння дорівнюють $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ та мають від'ємні дійсні частини. Отже, точка спокою системи (1) асимптотична стійка.

Друге питання.

Приклад 2. Знайти всі дійсні значення параметрів α і β, при яких розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=-x+\alpha y+\beta z\,,\quad \frac{dy}{dt}=-\alpha x-y+\alpha z\,,\quad \frac{dz}{dt}=-\beta x-\alpha y-z\,. \qquad (2)$$

Розв'язання. Власні значення матриці коефіцієнтів системи (2) визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-\lambda & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-\lambda \end{vmatrix}=0\,,$$

тобто $(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1+\beta^2+2\alpha^2)=0$. Для будь-яких дійсних α і β дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні. Тому розв'язки системи (2) асимптотичне стійки для будь-яких дійсних α і β.

Приклад 3. Дослідити на стійкість розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y\,, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y\,. \tag{3}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння матриці коефіцієнтів системи (3):

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 2\alpha + 5 = 0\,.$$

Корені цього рівняння мають від'ємні дійсні частини якщо одночасно $2+\alpha<0$ і $2\alpha+5>0$, тобто якщо $-2{,}5<\alpha<-2$. При таких α розв'язки системи (3) асимптотичне стійки. Якщо $2\alpha+5<0$, тобто $\alpha<-2{,}5$, або $\alpha>-2$, то при таких значеннях α характеристичне рівняння має або один додатний корінь, або пару комплексних коренів з додатною дійсною частиною. В цьому випадку розв'язки системи (3) нестійкі.

При $\alpha=-2{,}5$ один із коренів характеристичного рівняння дорівнює 0, а другий $-0{,}5$, тобто розв'язки системи (3) при $\alpha=-2{,}5$ стійки. Розв'язки стійки також при $\alpha=-2$, оскільки в цьому випадку корені характеристичного рівняння уявні.

Приклад 4. При яких дійсних a,b і c розв'язки системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by\,, \quad \frac{dy}{dt} = -bx + cy \tag{4}$$

асимптотичне стійки?

Розв'язання. Власні значення матриці коефіцієнтів системи рівнянь (4) визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ -b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac + b^2 = 0\,.$$

Дійсні частини цього рівняння від'ємні тоді і тільки тоді, коли

$$a + c < 0 \quad \text{і} \quad ac + b^2 > 0\,. \tag{5}$$

Таким чином, розв'язки системи рівнянь (4) асимптотично стійки, якщо одночасно виконуються нерівності (5).

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 846-850], [4, задачі 896 (а-д)].

Практичне заняття № 2. Стійкість за першим наближенням

План.

1. Стійкість за першим наближенням точки спокою системи
2. Стійкість за першим наближенням декількох станів рівноваги

Теоретичні відомості: [1, с. 135-137], [2, с. 323].

Перше питання.

Приклад 1. Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y-5y^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y+\dfrac{x^3}{2} \end{cases}. \tag{1}$$

Розв'язання. Система першого наближення

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y \end{cases}. \tag{2}$$

Нелінійні члени задовольняють потрібним умовам: її порядок більше або дорівнює 2. Складаємо характеристичне рівняння для системи (2):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{або} \quad \lambda^2-3\lambda-1=0. \tag{3}$$

Корні характеристичного рівняння (3)

$$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

дійсні і $\lambda_1>0$. Тобто, нульовий розв'язок системи (1) нестійкий.

Друге питання.

Приклад 2. Дослідити стійкість станів рівноваги математичного маятника з тертям:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\sin x=0, \quad k>0. \tag{4}$$

Розв'язання. Рівняння (4) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - 2ky. \tag{5}$$

Стан рівноваги системи (5) визначається з рівнянь $y = 0$, $\sin x + 2ky = 0$. Тоді $x = n\pi$, $y = 0$, $n \in Z$. В силу періодичності правих частин системи (5) по x, достатньо дослідити стійкість двох її розв'язків: $x = 0$, $y = 0$ (нижнє положення рівноваги маятника) і $x = \pi$, $y = 0$ (верхнє положення рівноваги маятника).

Лініаризуємо систему (5) в околі точки (0,0). Для цього виділимо з функції $\sin x$ її лінійну частину: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$.

Система першого наближення для рівнянь (5) така:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2ky.$$

Корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0,$$

при умові $k > 0$ мають від'ємні дійсні частини. Тому розв'язок $x = 0$, $y = 0$ рівнянь (5) асимптотичне стійкий.

Дослідимо тепер стійкість верхнього положення рівноваги маятника, тобто стійкість розв'язку $x = \pi$, $y = 0$ системи (5). Оскільки в околі точки $x = \pi$ має місце розвинення

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \ldots,$$

то система перших наближень для рівнянь (5) має вигляд:

$$\frac{d(x - \pi)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (x - \pi) - 2ky. \tag{6}$$

Характеристичним рівнянням системи (6) є $\lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0$. Це рівняння має дійсні корені різних знаків, а тому розв'язок $x = \pi$, $y = 0$ системи рівнянь (5) (верхнє положення маятника) нестійкий.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 899-904], [4, задачі 912-916].

Практичне заняття № 3. Другий метод Ляпунова

План.

1. Використання першої теореми Ляпунова
2. Використання другої теореми Ляпунова
3. Використання третьої теореми Ляпунова

Теоретичні відомості: [1, с. 140-145], [2, с. 330-331].

Перше питання.

Приклад 1. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(y), \tag{1}$$

де функція $f(x)$ така, що $f(0)=0$, $f(x)>0$ при $x \neq 0$.

Розв'язання. Система (1) має перший інтеграл

$$v(x,y) \equiv \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(t)dt = C.$$

Оскільки функція $v(x,y)$ є додатно визначеною і її похідна, складена за системою (1), $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial y}(-f(x)) = f(x)y - yf(x) = 0$, то, в силу першої теореми Ляпунова, точку спокою системи (1) стійка.

Друге питання.

Приклад 2. Дослідити на стійкість точку спокою $(0,0)$ системи

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \tag{2}$$

Розв'язання. В якості функції Ляпунова беремо $V(x,y) = x^2 + y^2$. Тоді похідна $\frac{dV}{dt} = 2x(y-x^3) + 2y(-x-3y^3) = -2(x^4+3y^4)$, складена за системою (2), буде від'ємно визначеною. З другої теореми Ляпунова випливає, що точка спокою $(0,0)$ системи рівнянь (2) асимптотичне стійка.

Приклад 3. За допомогою функції Ляпунова дослідити на стійкість тривіальний розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2 y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3 y}{2}. \tag{3}$$

Розв'язання. Будемо шукати функцію Ляпунова в вигляді $V(x, y) = ax^2 + by^2$, де $a > 0$, $b > 0$ – параметри. Тоді складена за системою (3) похідна дорівнює

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2ax\left(-x - 2y + x^2 y^2\right) + 2by\left(x - \frac{y}{2} - \frac{x^3 y}{2}\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + by^2\right) + \left(2xy - x^3 y^2\right)(b - 2a).$$

Покладаючи $b = 2a$, маємо $\frac{dV}{dt} = -2a\left(x^2 + y^2\right) \le 0$. Таким чином, при будь-якому $a > 0$ і $b = 2a$ функція $V(x, y) = ax^2 + 2ay^2$ буде додатно визначеною, а її похідна $\frac{dV}{dt}$, складена за системою (3), від'ємно визначена. З другої теореми Ляпунова випливає, що тривіальний розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системи рівнянь (3) асимптотичне стійкий. Зауважимо, що якщо в указаному вигляді функцію V не вдається знайти, її потрібно шукати у формі $V = ax^4 + by^4$ або $V = ax^4 + by^2$ і т.д.

Третє питання.

Приклад 4. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y. \tag{4}$$

Розв'язання. Беремо функцію $v(x, y) = x^2 - y^2$. Тоді похідна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

є додатно визначеною функція. Оскільки у будь якому околі точки $(0,0)$ знайдуться точки, у яких $v > 0$ (наприклад, $v = x^2 > 0$ вдовж прямої $y = 0$), то виконані всі умови третьої теореми Ляпунова і точка спокою системи рівнянь (4) нестійка (сідло).

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 923-927], [4, задачі 897-901].

Практичне заняття № 4. Критерій Рауса-Гурвица

План.

1. Складання та обчислення мінорів Гурвіца
2. Визначення області стійкості нульового розв'язку рівняння

Теоретичні відомості: [2, с. 314], [3, с. 90-91].

Перше питання.

Приклад 1. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^{(4)}+5y'''+13y''+19y'+10y=0\,. \qquad (1)$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$f(\lambda)=\lambda^4+5\lambda^3+13\lambda^2+19\lambda+10=0\,.$$

Тут $a_0=1$, $a_1=5$, $a_2=13$, $a_3=19$, $a_4=10$. Обчислимо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}5&1&0&0\\19&13&5&1\\0&10&19&13\\0&0&0&10\end{vmatrix}=4240>0\,,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}5&1&0\\19&13&5\\0&10&19\end{vmatrix}=424>0\,,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5&1\\19&13\end{vmatrix}=46>0\,,\quad \Delta_1=5>0\,,$$

тобто $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$, $\Delta_4>0$. За критерієм Гурвіца тривіальний розв'язок $y\equiv 0$ рівняння (1) є асимптотично стійким.

Обчислення можна організувати, наприклад, так. Складаємо спочатку старший мінор Гурвіца Δ_n. З нього легко отримати послідовно мінори Δ_{n-1}, …, Δ_1. Далі починаємо обчислювати послідовно Δ_1, Δ_2 і т.д. Якщо зустрінеться від'ємний мінор, то розв'язок нестійкий і подальші підрахунки не потрібні.

Друге питання.

Приклад 2. При яких параметрах a і b буде асимптотично стійкій нульовий розв'язок рівняння

$$ay^{(4)}+y'''+y''+y'+by=0\,. \qquad (2)$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$f(\lambda)=a\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+b=0.$$

Тут $a_0=a$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, $a_4=b$. Обчислимо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-a,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & b & 1\end{vmatrix}=1-a-b,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & b & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & b\end{vmatrix}=b(1-a-b).$$

Згідно критерію Гурвіца, для асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння (2) необхідно і достатньо щоб виконувалися нерівності $1-a>0$, $1-a-b>0$, $b(1-a-b)>0$, $a>0$. Розв'язав цю систему нерівностей, отримуємо умови: $a>0$, $b>0$, $a+b<1$.

Приклад 3. Знайти область значень параметрів a,b асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння

$$y'''+3y''+ay'+by=0. \qquad (3)$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$f(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+a\lambda+b=0.$$

Тут $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=a$, $a_3=b$. Обчислимо діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1=3>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ b & a\end{vmatrix}=3a-b,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ b & a & 3\\ 0 & 0 & b\end{vmatrix}=b(3a-b).$$

Згідно критерію Гурвіца, для асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння (3) необхідно і достатньо щоб виконувалися нерівності $3a-b>0$, $b(3a-b)>0$. Тобто, область значень параметрів a,b асимптотичної стійкості нульового розв'язку рівняння (3) така: $3a>b>0$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 938-942], [4, задачі 931-935].

Практичне заняття № 5. Класифікація точок спокою

План.

1. Складання характеристичних рівнянь системи
2. Поведінка розв'язків системи в околі точки спокою

Теоретичні відомості: [1, с. 146-151], [2, с. 339-340].

Перше питання.

Приклад 1. Визначити характер точки спокою $(0,0)$ системи

$$\frac{dx}{dt} = 5x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y. \tag{1}$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння системи (1)

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ дійсні, різні, додатні. Отже, точка спокою $(0,0)$ – нестійкий вузол. Поведінка траєкторій розв'язків в околі нестійкого вузла зображена на рис. 1.

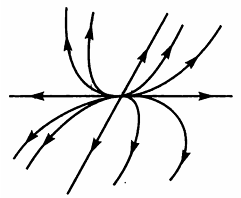

Рис. 1. Поведінка траєкторій розв'язків в околі нестійкого вузла

Друге питання.

Приклад 2. Дослідити рівняння пружних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0 \tag{2}$$

з урахуванням тертя та опору середовища (при $\alpha > 0$).

Розв'язання. Перейдемо від рівняння (2) до еквівалентної йому системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x. \tag{3}$$

Для визначення характеру точки спокою $(0,0)$ системи (3) складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0,$$

корені якого дорівнюють

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{4}$$

Розглянемо такі випадки:

а) $\alpha = 0$ (опір середовища відсутній). З (4) маємо $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Отже, точка спокою є центром (всі рухи періодичні, рис. 2,а);

б) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Корені (4) комплексно-спряжені, $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Точка спокою є стійким фокусом (коливання згасають, рис. 2,б);

в) $\alpha < 0$ (випадок «від'ємного тертя»), $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Корені λ_1 і λ_2 комплексно-спряжені, причому $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Точка спокою є нестійким фокусом (рис. 2,в);

г) $\alpha > 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \ge 0$ (опір середовища великий). Корені λ_1 і λ_2 дійсні і від'ємні. Точка спокою є стійким вузлом (всі рухи згасаючі і неколивні, рис. 2,г);

д) $\alpha < 0$, $\alpha^2 - \beta^2 \ge 0$ (велике «від'ємне тертя»). Корені λ_1 і λ_2 дійсні і додатні. Точка спокою є нестійким вузлом (рис. 1).

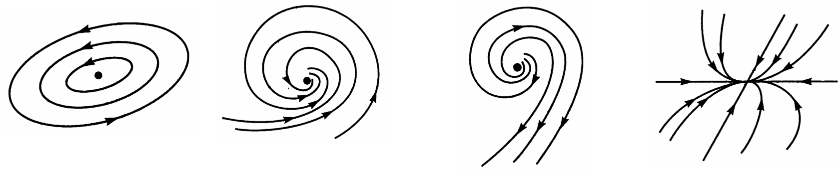

Рис. 2. Поведінка траєкторій розв'язків в околі точки спокою:
а) центр, б) стійкий фокус, в) нестійкий фокус, г) стійкий вузол.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 961-965], [4, задачі 888-892].

ТЕМА 4. РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Практичне заняття № 1. Лінійні рівняння

План.

1. Лінійне однорідне рівняння
2. Лінійне неоднорідне рівняння

Теоретичні відомості: [1, с. 212-216], [2, с. 362-363].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння в частинних похідних

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \qquad (1)$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} . \qquad (2)$$

Переписуємо рівняння (2) у вигляді: $xdx + ydy = 0$. Проінтегруємо це рівняння. Його перший інтеграл $x^2 + y^2 = C$. Отже, загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $z = F(x^2 + y^2)$, де F – довільна неперервно диференційована функція.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 , \quad z = 2x \text{ при } y = 1 . \qquad (3)$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} . \qquad (4)$$

Проінтегруємо рівняння (4): $\ln|x| = -\ln|y| + \ln|C|$. Звідси маємо перший інтеграл $xy = C$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3) такий: $z = \Psi(xy)$. Запишемо систему: $xy = C$, $y = 1$, $z = 2x$. З неї випливає, що $z = 2C$. Підставивши в цю формулу замість C його значення, що визначене першим інтегралом $C = xy$, одержимо розв'язок задачі Коші (3): $z = 2xy$.

Друге питання.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння в частинних похідних

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y\,. \tag{5}$$

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{x-y}\,. \tag{6}$$

Перше рівняння $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$ дає перший інтеграл $x^2-y^2=C_1$. Перетворимо його: $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{d(x-y)}{x-y}$. Отже, $\frac{dz}{x-y}=\frac{d(x-y)}{x-y}$. Звідси $dz=d(x-y)$ і маємо другий перший інтеграл системи рівнянь (6): $z-x+y=C_2$. Тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (5) у неявному вигляді записується у вигляді:

$$F(x^2-y^2,z-x+y)=0\,. \tag{7}$$

Якщо функція F така, що рівняння (7) розв'язується відносно другої змінної, тобто $z-x+y=f(x^2-y^2)$, то загальний розв'язок рівняння (5) можна представити у вигляді $z=x-y+f(x^2-y^2)$, де f – довільна неперервно диференційована функція.

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x\,,\quad z=y^2 \text{ при } x=0\,. \tag{8}$$

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь характеристик для (8) $\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{x}$. З перших двох співвідношень одержуємо $y^2-x^2=C_1$. З другого і третього співвідношення маємо $z-\ln|y|=C_2$. Загальний розв'язок $\Psi(y^2-x^2,z-\ln|y|)=0$. Розв'язок задачі Коші: $z=\ln|y|-\ln\sqrt{y^2-x^2}+y^2-x^2$.

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 1171-1175, 1189-1194].

Практичне заняття № 2. Перші інтеграли рівнянь

План.

1. Правило рівних дробів
2. Критерій незалежності перших інтегралів

Теоретичні відомості: [1, с. 216-220], [3, с. 119].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти перші інтеграли системи рівнянь

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}. \qquad (1)$$

Розв'язання. Перші дві дробі в (1) утворюють інтегровану комбінацію. Скорочуючи рівність $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$ на $\frac{1}{z}$ і інтегруючи, отримаємо перший інтеграл:

$$\frac{x}{y}=C_1. \qquad (2)$$

Щоб знайти другу комбінацію, яка інтегрується, використаємо правило рівних дробів: якщо $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=t$, то для будь яких чисел k_1, k_2,…, k_n має місто рівність

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n}=t.$$

За цим правилом з рівностей (1) випливає, що $\frac{y\cdot dx+x\cdot dy}{y\cdot xz+x\cdot yz}=\frac{dz}{-xy}$. Отже, $\frac{d(xy)}{2xyz}=\frac{dz}{-xy}$, $d(xy)=-2zdz$ і отримуємо такий перший інтеграл:

$$xy+z^2=C_2. \qquad (3)$$

Очевидно, що перший інтеграл (2) і перший інтеграл (3) незалежні. Зауважимо, що замість того, щоб шукати другу інтегровану комбінацію, можна, за допомогою першого інтеграла (2), виключити з системи рівнянь (1) одну із змінних, наприклад, x. З (2) маємо

$x = C_1 y$. Покладаючи в друге рівняння (1), маємо $\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1 y^2}$. Звідси: $-C_1 y dy = z dz$, $z^2 = -C_1 y^2 + C_2$. Покладаючи сюди вираз для C_1 з формули (2), маємо ще один перший інтеграл $z^2 + xy = C_2$.

Друге питання.

Приклад 2. Знайти перші інтеграли системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 2(x^2 + y^2)t, \quad \frac{dy}{dt} = 4xyt. \tag{4}$$

Розв'язання. Сума рівнянь (4) дає

$$\frac{d(x+y)}{dt} = 2(x+y)^2 t,$$

отже,

$$-\frac{1}{x+y} = t^2 - C_1, \quad \text{або} \quad \frac{1}{x+y} + t^2 = C_1.$$

Різниця рівнянь (4) дає

$$\frac{d(x-y)}{dt} = 2(x-y)^2 t,$$

отже,

$$\frac{1}{x-y} + t^2 = C_2.$$

Таким чином, знайдено два перших інтегралів системи (4):

$$\psi_1(t,x,y) \equiv t^2 + \frac{1}{x+y} = C_1, \quad \psi_2(t,x,y) \equiv t^2 + \frac{1}{x-y} = C_2,$$

які є незалежними, оскільки якобіан

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Загальний інтеграл системи (4) складається з перших інтегралів:

$$t^2 + \frac{1}{x+y} = C_1, \quad t^2 + \frac{1}{x-y} = C_2.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 1151-1155], [4, задачі 771-775].

Практичне заняття № 3. Квазілінійні рівняння

План.

1. Загальний розв'язок рівняння
2. Інтегральна поверхню рівняння

Теоретичні відомості: [1, с. 220-226], [3, с. 122-123].

Перше питання.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy\,, \tag{1}$$

а також інтегральну поверхню, що проходе через криву

$$y=x^2,\quad z=x^3\,. \tag{2}$$

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик для (1)

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}$$

і знаходимо перші інтеграли цієї системи

$$\frac{x}{y}=C_1,\quad z^2+xy=C_2\,. \tag{3}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) можна записати в неявному вигляді

$$F\left(\frac{x}{y},\,z^2+xy\right)=0\,,$$

де F – довільна функція. Оскільки z є тільки в одному з перших інтегралів (3), то загальний розв'язок рівняння (1) можна записати також в явному вигляді:

$$z^2+xy=f\left(\frac{x}{y}\right),\quad z=\pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right)-xy}\,,$$

де f – довільна функція. Щоб знайти інтегральну поверхню, яка проходе через криву (2), запишемо цю лінію в параметричній формі, взяв, наприклад, в якості параметра x: $x=x$, $y=x^2$, $z=x^3$. Підставив ці вирази в (3), маємо $\dfrac{1}{x}=C_1$, $x^6+x^3=C_2$. Вилучаючи

x, отримаємо $\frac{1}{C_1^6}+\frac{1}{C_1^3}=C_2$. Поклавши замість C_1 і C_2 ліві частини перших інтегралів (3), знаходимо шуканий розв'язок

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6+\left(\frac{y}{x}\right)^3=z^2+xy .$$

Друге питання.

Приклад 2. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \tag{4}$$

яка проходе через криву $x=t$, $y=t^2$, $z=0$.

Розв'язання. Складаємо рівняння характеристик для (4):

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,. \tag{5}$$

З першого рівняння (5) маємо перший інтеграл $\frac{y}{x}=C_1$. Застосував правило рівних дробів до системи (5), маємо

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2-z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,. \tag{6}$$

З третього рівняння (6) випливає, що

$$\left(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(xdx+ydy+zdz\right)=\left(x^2+y^2+z^2-z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dz$$

Звідси $d\left(x^2+y^2+z^2\right)=-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$, тобто другий перший інтеграл системи (5) дорівнює $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2$. Тоді для визначення інтегральної поверхні маємо систему рівнянь:

$$x=t\,,\quad y=t^2\,,\quad z=0\,,\quad \frac{y}{x}=C_1\,,\quad z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2\,,$$

з якої випливає, що $C_2^2=C_1^2+C_1^4$. Шукана інтегральна поверхня задається рівнянням:

$$\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^4}{x^4}\,.$$

Завдання для самостійної роботи: [3, задачі 1200-1209].

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. –176 с.

4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

Додаток

Таблиця невизначених інтегралів

1.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10.	$\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C$
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	11.	$\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + C$
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	12.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
4.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	13.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C$
5.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
6.	$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	15.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
7.	$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$
8.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	17.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$

Правила інтегрування

1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. $\int C f(x)dx = C\int f(x)dx$
3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$
4. $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$