Лекція 10. Варіаційні задачі на умовний екстремум

Зазвичай в задачах оптимального керування функціонали залежать від декількох функцій, причому залежних одне від одного.

Нехай $I = I(\vec{x}, \vec{u})$.

Траєкторія $\vec{x}(t)$ є наслідком керування $\vec{u}(t)$. Тому $\vec{x}, \vec{u}$ не можуть варіюватися незалежно. Для визначення екстремума не можна застосовувати рівняння Ейлера.

У найпростіших випадках можна виключити залежність функції, і тоді екстремаль знаходиться як звичайно рішенням рівняння Ейлера.

У всіх інших випадках виникає задача відшукання екстремума функціонала, що залежить від декількох функцій, які зв'язані між собою додатковими умовами, тобто задача на умовний екстремум.

1. 1.7.1. Постановка задачі

Нехай заданий функціонал

$$I(\vec{x}, \vec{x}, \vec{u}, \vec{u}) = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x}, \vec{x}, \vec{u}, \vec{u})dt, \qquad (10.1)$$

а також рівняння зв'язку між функціями виду кінцевих рівностей (голономні зв'язки),

$$\varphi_j(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \;\; j = 1, 2, \ldots m_1 \qquad (10.2)$$

диференціальних рівнянь (диференціальні або неголономні зв'язки)

$$\varphi_j(\vec{x}, \vec{u}, \vec{x}, \vec{u}) = 0, \;\; j = m_1 + 1, \ldots, m_2 \qquad (10.3)$$

інтегральних залежностей (інтегральні або ізопериметричні зв'язки)

$$\psi_j = \int_{t_н}^{t_к} \varphi_j(\vec{x}, \vec{u}, \vec{x}, \vec{u})dt = \theta_j, \;\; j = m_2 + 1, \ldots, m_3 \qquad (10.4)$$

Функція f_0 безперервна по всім змінним і має безперервні часткові похідні до другого порядку включно. Функції $x_i(t), u_l(t)$ безперервні разом зі своїми першими похідними. Вектори $\vec{x}_н$ й $\vec{x}_к$ задані.

2. 1.7.2. Рівняння Ейлера-Лагранжа

При рішенні задач на умовний екстремум використовують метод множників Лагранжа.

Складається допоміжний функціонал

$$I_{ВП} = \int_{t_н}^{t_к} L dt = \int_{t_н}^{t_к} (f_0 + \sum_{j=1}^{m_u} \lambda_j(t)\varphi_j)dt \qquad (10.5)$$

де $\lambda_j(t)$ - невизначені функції або множники Лагранжа, $f_0 + \sum_{j=1}^{m_u} \lambda_j(t)\varphi_j = L(\vec{x}, \vec{\lambda}, t)$ - функція Лагранжа, $m_4 = m_1 + m_2 + m_3$.

Цей функціонал досліджується на безумовний екстремум з урахуванням рівнянь зв'язку

$$\varphi_j = 0 \text{ або } \theta_j - \psi_j = 0. \tag{10.6}$$

Рівняння Ейлера складають для функції Лагранжа

$$\begin{aligned} Lx_i - L\dot{x}_i = 0,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n, \\ Lu_l - L\dot{u}_l = 0,\ l = 1,\ 2, \ldots,\ m, \end{aligned} \tag{10.7}$$

де Lx_i - частинна похідна від L по змінній, зазначеній за допомогою індексу.

Рівняння називаються рівняннями Ейлера-Лагранжа. Вони визначають умови стаціонарності функціонала .

Вирішуючи можна знайти оптимальні функції $\vec{x}_{опт}(t)$ й $\vec{u}_{опт}(t)$.

3. 1.7.3. Основні задачі класичного варіаційного обчислення

У класичному варіаційному обчисленні розглядається три основні загальні задачі на умовний екстремум: Лагранжа, Майєра та Больца. Сформулюємо їх відносно проблеми оптимального керування.

Задача Лагранжа пов'язана з визначенням керування $\vec{u}(t)$, що забезпечує екстремум інтегрального критерію оптимальності.

Задано об'єкт керування

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \tag{10.8}$$

і систему початкових і кінцевих умов

$$\begin{aligned} x_i(t_н) = x_{iн},\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n, \\ x_i(t_к) = x_{iк}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Визначено критерій оптимальності

$$I_i = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)dt. \tag{10.10}$$

Визначити функції $\vec{u}_{опт}(t)$ з умови

$$I_{i\min} = \min_u \{\int_{t_н}^{t_к} f_0(\cdot)dt.\}, \tag{10.11}$$

і задовольняючі рівнянням

Задача Майєра полягає у визначенні керування $u(t)$, яке забезпечує мінімізацію заданої функції $G(\vec{x}(t), u(t), t)$ в кінцевій точці $t_к$. Причому, $G(\cdot)$ містить деякі змінні, кінцеві значення яких не задані.

Нехай визначений об'єкт керування

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, \vec{u}, t), \tag{10.12}$$

і початкові умови

$$x_i(t_н) = x_{iн}, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{10.13}$$

Відомі кінцеві умови

$$x_j(t_к) = x_{jк}, \ j = 1, 2, ..., n_1, \ n_1 \le n, \tag{10.14}$$

$t_к$ - не задано.

Визначено критерій оптимальності

$$I_2 = G(\vec{x}, \vec{u}, t)\Big|_{t_н}^{t_к}. \tag{10.15}$$

Знайти $\vec{u}_{опт}(t)$ за умови

$$I_{2\min} = \min_u G(\cdot). \tag{10.16}$$

Задача Больца полягає у визначенні $\vec{u}(t)$, що забезпечує екстремум критерію оптимальності $I_3 = I_1 + I_2$.

Математичне формулювання задачі має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, \vec{u}, t); \ x_i(t_н) = x_{in}, \\ &x_j(t_к) = x_{jк}, \ j = 1, 2, ..., n_1, \ n_1 \le n, \end{aligned} \tag{10.17}$$

$t_к$ - не задано.

$$I_{3\min} = \min\{I_1 + I_2\} = \min\{G(\vec{x}, \vec{u}, t)\Big|_{t_н}^{t_к} + \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\,dt\} \tag{10.18}$$

Задача Больца є узагальненням задачі Майєра й Лагранжа. Слід зазначити, що шляхом введення деяких допоміжних змінних можна від однієї задачі перейти до будь-якої іншої.

2. 1.8. *Канонічна форма рівнянь Ейлера. Рівняння Гамільтона*

Введемо в рівняння Ейлера

$$f_{0x_i} - \frac{d}{dt}(f_{0x_i}) = 0, \ i = 1, 2, ..., n, \tag{10.19}$$

змінні P, які називають канонічними

$$P_i = f_{0x_i}, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{10.20}$$

Введемо в розгляд функцію Гамільтона

$$H = -f_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{x}_i. \tag{10.21}$$

З рівняння одержимо

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_i}; \ \frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{x}_i. \tag{10.22}$$

Підставивши в рівняння Ейлера, знайдемо

$$f_{0x_i} = \dot{P}_i. \tag{10.23}$$

Тоді замість рівнянь одержимо нову систему диференціальних рівнянь, які називаються *канонічними рівняннями Гамільтона*

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i};\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \qquad (10.24)$$

Функція H володіє однією важливою властивістю. Вона досягає екстремума по x за тих самих умов, що й функціонал I .

3. 1.9. Необхідні умови в канонічній формі для задачі Лагранжа

Для задачі Лагранжа канонічні змінні $P_i(t)$ дорівнюють множникам Лагранжа. Таким чином, рівняння Ейлера-Лагранжа у канонічній формі набувають наступного виду

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i - L(\vec{x}, \vec{u}, t, \vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i - (f_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i),$$

$$\varphi_i(\vec{x}, \vec{x}, \vec{u}) = \dot{x}_i - f_i(\vec{x}, \vec{u}),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i(\vec{x}, \vec{u}), \\ \dot{\lambda}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial u_i} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial f_i}{\partial u_i} = \dfrac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \\ \textit{или} \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \dfrac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad j = 1,\ 2,\ ...,\ m. \end{cases} \qquad (10.25)$$

У результаті рішення рівнянь може бути знайдене оптимальне керування об'єктом у динаміці.

Рівняння можна записати в більш компактній формі. Введемо множник $\lambda_0 = -1$. Тоді одержимо

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_j(\cdot)}{\partial x_i},\ i = \overline{1,\ n},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial u_i} = 0,\ j = \overline{1,\ m},\ H = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(\cdot).$$

Рівняння (58) є рівняннями варіаційної задачі. Її порядок дорівнює $2n$. При рішенні її відносно $\vec{x}(t)$, $\vec{\lambda}(t)$ при фіксованих $\vec{x}_н$ і $\vec{x}_к$ розглядається двоточкова крайова задача, причому $\lambda_i(t_н)$ невідоме. Це викликає необхідність у багаторазовому рішенні при різних $\lambda_i(t_н)$, щоб задовольнити задані вимоги.

4. 1.10. Необхідні умови в канонічній формі для задачі Больца

Розглянемо задачу визначення $\vec u_{опт}$, що оптимізує функціонал

$$I = G(\vec x, t)\Big|_{t=t_н}^{t=t_к} + \int_{t_н}^{t_к} f_0(\vec x, \vec u, t)\,dt. \tag{10.26}$$

Об'єкт керування заданий диференціальним рівнянням

$$\vec x = f_0(\vec x, \vec u),\ \vec x(t_н) = \vec x_н. \tag{10.27}$$

Складемо функції Лагранжа

$$L = f_0(\vec x, \vec u, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\dot x_i - f_i(\vec x, \vec u, t)), \tag{10.28}$$

і виразимо її через Гамільтоніан

$$L = -\{-f_0(\vec x, \vec u, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(\vec x, \vec u, t)\} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot x_i = -H(\vec x, \vec u, \vec\lambda, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot x_i. \tag{10.29}$$

Функціонал (1.54) приймає наступний вид

$$I = G(\vec x, t)\Big|_{t=t_н}^{t=t_к} + \int_{t_н}^{t_к} \{-H(\vec x, \vec u, \vec\lambda, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot x_i\}dt. \tag{10.30}$$

Проінтегруємо останній член підінтегрального виразу, тоді

$$I = \{G(\vec x, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\}\Big|_{t=t_н}^{t=t_к} + \int_{t_н}^{t_к} \{-H(\vec x, \vec u, \vec\lambda, t) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot x_i\}dt. \tag{10.31}$$

Запишемо першу варіацію для функціонала (1.59)

$$\delta I = \delta \vec x^T \{\frac{\partial G(\vec x, t)}{\partial x} + \vec\lambda\}\Big|_{t=t_н}^{t=t_к} - \int_{t_н}^{t_к} \{\delta \vec x^T [\frac{\partial H}{\partial \vec x} + \dot\lambda] + \delta \vec u^T [\frac{\partial H}{\partial \vec u}]\}dt. \tag{10.32}$$

Необхідна умова екстремума функціонала (1.54) для довільних варіацій $\delta\vec x$ і $\delta\vec u$ - рівність нулю його першої варіації. Тоді

$$\delta x^T[\frac{\partial G(\vec x, t)}{\partial \vec x} + \vec\lambda] = 0,\ t = t_н, t_к.$$

$$\dot{\vec\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \vec x};\ \frac{\partial H}{\partial \vec u} = 0. \tag{10.33}$$

Для розглянутої задачі $x(t_н)$ задане, а $x(t_к)$ - довільне.

Крайові умови згідно (1.61) і (1.55) приймають вид

$$\vec x(t_н) = \vec x_н,\ \vec\lambda(t_к) = -\frac{\partial G(\vec x(t_к), t_к)}{\partial \vec x(t_к)}. \tag{10.34}$$

Якщо $G(\vec x, t) = 0$, то $\dot{\vec\lambda}(t_к) = 0$.

У тому випадку, коли $\vec x_н$ й $\vec x_к$ не задані, а $G(\vec x, t) = 0$, тоді $\dot{\vec\lambda}(t_н) = \dot{\vec\lambda}(t_к) = 0$.

Розглянемо випадок, коли умови на початку й кінці траєкторії задані за допомогою рівнянь

$$\begin{aligned} &\vec G^{н}(\vec x, t) = 0,\ t = t_н, \\ &\vec G^{к}(\vec x, t) = 0,\ t = t_к. \end{aligned} \tag{10.35}$$

Введемо ці умови у функції G за допомогою множників Лагранжа. Тоді функціонал приймає вид

$$I = G(\vec{x}, t)\Big|_{t=t_н}^{t=t_к} - \sum_{j=1}^{m_1} P_j^H G_j^H(\vec{x}, t)_{t=t_н} + \sum_{j=1}^{m_2} P_j^K G_j^K(\vec{x}, t)_{t=t_к} + \int_{t_н}^{t_к} \Big(-H(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i\Big)dt \qquad (10.36)$$

Скористаємося варіаційним методом і одержимо умови на початку й кінці траєкторії

$$\begin{aligned}
&\vec{\lambda}(t_н) = \Big[-\frac{\partial G}{\partial \vec{x}} + \sum_{j=1}^{m_1} P_j^H \frac{G_j^H(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}\Big]\Big|_{t=t_н},\\
&G_j^H(\vec{x}, t)_{t=t_н} = 0,\\
&\vec{\lambda}(t_к) = \Big[-\frac{\partial G}{\partial \vec{x}} - \sum_{j=1}^{m_2} P_j^K \frac{G_j^K(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}\Big]\Big|_{t=t_к},\\
&G_j^K(\vec{x}, t)_{t=t_к} = 0.
\end{aligned} \qquad (10.37)$$

Розглянемо задачу Больца за умови, що $t_к$ не фіксовано, а умови на кінці траєкторії задані рівнянням

$$G_l^K(\vec{x}(t), t)_{t=t_к} = 0, \; l = 1, 2, ..., L.$$

Застосовуючи варіаційний метод, одержимо систему рівнянні, що визначають оптимальне керування й оптимальну траєкторію

$$\begin{aligned}
&H = -f_0(\vec{x}, \vec{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(\vec{x}, \vec{u}, t),\\
&\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = \dot{x}_i = f_i(\vec{x}, \vec{u}, t),\\
&-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \dot{\lambda}_i = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\partial x_i},\\
&\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 = -\frac{\partial f_0(\vec{x}, \vec{u}, t)}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \;\; j = 1, 2, ..., m.
\end{aligned} \qquad (10.38)$$

Умови в початковий момент $\vec{x}(t_н) = \vec{x}_н$.

Умови в кінцевий момент (умови трансверсальності)

$$\begin{aligned}
&\vec{G}^к(\vec{x}(t_к), t_к) = 0,\\
&\vec{\lambda}(t_к) = -\frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}(t)} - \sum_{l=1}^{m_1} \frac{\partial G_l^K(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}(t)} P_l^K, \; t = t_к.
\end{aligned} \qquad (10.39)$$

Умова для знаходження часу досягнення

$$H(\vec{x}(t_к), \vec{u}(t_к), \vec{\lambda}(t_к), t_к) + \frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial t_к} + \sum_{l=1}^{m_1} \frac{\partial G_l^K(\vec{x}(t_к), t_к)}{\partial t_к} P_l^K = 0 \qquad (10.40)$$

5. 1.11. Дискретне рівняння Ейлера

Розглянемо задачу знаходження екстремума функції

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} f_0[\vec{x}[k], \vec{x}[k+1], k] = \sum_{k=0}^{n-1} f_{0k}, \qquad (10.41)$$

де $\dot{x}[k] = \dot{x}[kT]$, T - період квантування.

Функція f_{0k} являє собою приріст критерію I на одному кроці процесу дискретизації.

Нехай розмірність векторів $\dot{x}[k], \dot{x}[k+1]$ дорівнює 1.

Зробимо варіацію дискретних функцій

$$x[k] = \hat{x}[k] + \delta x[k],\ x[k+1] = \hat{x}[k+1] + \delta x[k+1].$$

Перша варіація функції (1.69) має вигляд

$$\delta I = \sum_{k=0}^{N-1}\{\frac{\partial f_{0k}}{\partial x[k]}\delta x[k] + \sum_{k=0}^{N-1}\{\frac{\partial f_{0k}}{\partial x[k+1]}\delta x[k+1]\}. \quad (10.42)$$

Необхідною умовою існування екстремума функції є рівність нулю її першої варіації.

Перетворимо другий доданок у рівнянні (1.70)

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial f_{0k}}{\partial x[k+1]}\delta x[k+1] = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial f_0(x[k-1],\ x[k],\ k-1)}{\partial x[k]}\delta x[k] + \\ + \frac{\partial f_0(x[k-1],\ x[k],\ k-1)}{\partial x[k]}\delta x[k]\,|_{k=0}^{k=N} = \sum_{k=0}^{N}\frac{\partial f_0(x[k-1],\ x[k],\ k-1)}{\partial x[k]}\delta x[k]. \quad (10.43)$$

Тоді перша варіація (1.70) прийме вид

$$\delta I = \sum_{k=0}^{N}\delta x[k](\frac{\partial f_{0k}}{\partial x[k]} + \frac{\partial f_{0(k-1)}}{\partial x[k]}) + \frac{\partial f_{0(k-1)}}{\partial x[k]}\,|_{k=0}^{k=N} = 0 \quad (10.44)$$

Для того, щоб при довільних варіаціях була виконана умова (10.44) необхідно

$$\frac{\partial f_{0k}}{\partial x[k]} + \frac{\partial f_{0(k-1)}}{\partial x[k]} = 0 \quad (10.44)$$

$$\delta x[k]\frac{\partial f_{0(k-1)}}{\partial x[k]} = 0,\ \text{для}\ k = \overline{0,\ N} \quad (10.45)$$

Рівняння зветься дискретним рівнянням Ейлера.

Рівняння - умова трансверсальності.

При $n > 1$ умова приймає наступний вид

$$\delta \vec{x}^{T}[k]\frac{\partial f_{0(k-1)}}{\partial \vec{x}[k]} = 0,\ \ k = 0,\ N.$$

6. 1.12. Область застосування методів варіаційного обчислення

Методи варіаційного обчислення можуть застосовуватися для рішення задач оптимального керування в тому випадку, якщо f_0 безперервне по всіх аргументах і має безперервні часткові похідні до другого порядку включно, функції $x(t)$ й $u(t)$ безперервні разом зі своїми першими похідними, а на координати й керування не накладені обмеження.

Якщо на керуючі впливи накладені обмеження, то, застосовуючи спеціальне перетворення, задачу можна звести до класичної варіаційної, однак у кожному конкретному випадку варто застосовувати свій підхід. При наявності хоча б одного обмеження типу нерівності не виконується теорема

Ейлера, відповідно до якої рішеннями варіаційної задачі є екстремалі, що задовольняють рівнянням Ейлера.

Для замкнутої припустимої області справедлива узагальнена теорема Ейлера, що розглянута нижче.

Техніка рішення задач із обмеженнями ілюструється прикладом (5). У більшості випадків при наявності обмежень на координати й керування варто рекомендувати застосовувати принцип максимуму

7. 1.13. Застосування варіаційного обчислення для рішення задач із обмеженнями

Розглянемо задачу про екстремум функціонала при наявності одного обмеження типу нерівності

$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(x, \dot{x})dt, \qquad x - F(t) \geq 0. \tag{10.46}$$

Зробимо заміну змінної в оптимізуємому функціоналі. Введемо в розгляд змінну Ψ

$$\Psi^2 = x - F(t).$$

На Ψ не накладено ніяких обмежень, а границі припустимої області відповідає значення $\Psi = 0$.

Оптимізуємий функціонал приймає вид

$$I = \int_{t_н}^{t_к} f_0(\Psi^2 + F(t),\ 2\Psi\dot{\Psi} + \dot{F})\,dt.$$

Екстремаль для отриманого функціонала може бути знайдена зі звичайного рівняння Ейлера, що після підстановки часткових похідних $\dfrac{\partial f_0}{\partial \dot{\Psi}}$ і $\dfrac{\partial f_0}{\partial \Psi}$ приймає вид

$$\Psi\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

Це рівняння включає рівняння Ейлера для вихідного функціонала й рівняння границі припустимої області $\Psi = 0$.

Таким чином, якщо екстремум вихідного функціонала існує й досягається в класі кусково-гладких функцій, то при наявності обмежень типу нерівностей, вона може досягатися лише на кривих, складених із частин екстремалей і частин границі припустимої області.

Цей результат являє собою узагальнену теорему Ейлера й справедливий також для загальної задачі Лагранжа.

Методика рішення задач із обмеженнями полягає в наступному.

Визначаються екстремалі без врахування обмежень. Потім будується крива, що доставляє екстремум функціоналу, з ділянок екстремалей і границі припустимої області.