Лекція 11. Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна

Був розроблений Л.С. Понтрягіним та його школою у 1961 р. для розв'язку задач оптимального управління та й досі є актуальним завдяки чіткому та компактному формулюванню основного результату. На противагу класичному варіаційному численню (метод Ейлера, множників Лагранжа, Якобі, Вейєрштраса), де функція оптимального керування шукається в класі неперервних функцій, в принципі максимуму функція керування може належати кусково-неперервним функціям, з точками розриву першого роду або сукупності ізольованих точок. Наприклад, оптимальне керування можна шукати в класі релейних функцій.

Для процесів, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь принцип максимуму формулюється як необхідна умова оптимальності. Для системи лінійних диференціальних рівнянь принцип максимуму є достатньою умовою оптимальності. Принцип максимуму розповсюджується на процеси з розподіленими параметрами, що описуються рівняннями в частинних похідних.

З багатьох задач оптимального керування існує три основні задачі, що розв'язуються за принципом максимуму: задача керування за максимальної швидкодією; задача керування кінцевим станом; задача керування з мінімізацією інтегралу. Саме тому принцип максимуму набув широкого розповсюдження.

Сформулюємо задачу оптимального управління.

Нехай процес описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n, u_1, u_2 \ldots u_m), \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\right) \qquad (11.1)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – n-вимірні вектори, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ – m-вимірний вектор управління. Вектор **x** називається фазовим вектором системи або вектором стану.

Передбачено, що вектор управління **u** може приймати свої значення з деякої множини U. Також передбачається, що функції f_i ($i=1,2,\ldots,n$) неперервні за всіма своїми змінними та неперервно-диференційовані за змінними вектора **x** . Допустимі управління є кусково-неперервними функціями u_v ($v=1,2,\ldots m$), що задовольняють умові $\mathbf{u}(t) \in U$.

Векторний простір з декартовими координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається фазовим простором системи (11.1) і позначається X. Кожному вектору **x** в фазовому просторі відповідає деяка точка (фазова точка). Якщо заданий вектор $\mathbf{u}(t)$ та початкові умови $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то системурівнянь (11.1) можна розв'язати. Різним вектор-функціям $\mathbf{u}(t)$ будуть відповідати різні розв'язки $\mathbf{x}(t)$ рівняння , тобто вибором $\mathbf{u}(t)$ можна керувати рухом системи. Розв'язку $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, у фазовому просторі X відповідає деяка лінія, що називається фазовою траєкторією системи.

Нехай у фазовому просторі X задані дві точки $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ та $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1\right)$. Розглянемо наступну задачу. Необхідно серед допустимих керувань $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, тобто кусково-неперервних вектор-функцій $\mathbf{u}(t) \in U$ (моменти t_0, t_1 – не фіксовані), що переводять фазову точку системи (3.1) з заданого початкового положення $\mathbf{x}^0$ $\left(\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0\right)$ в задане кінцеве положення $\mathbf{x}^1$ $\left(\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1\right)$, знайти управління та траєкторію, які досягають мінімум функціоналу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m)dt \qquad (11.2)$$

Управління $\mathbf{u}(t)$ та фазова траєкторія $\mathbf{x}(t)$, що розв'язують дану задачу називаються оптимальними.

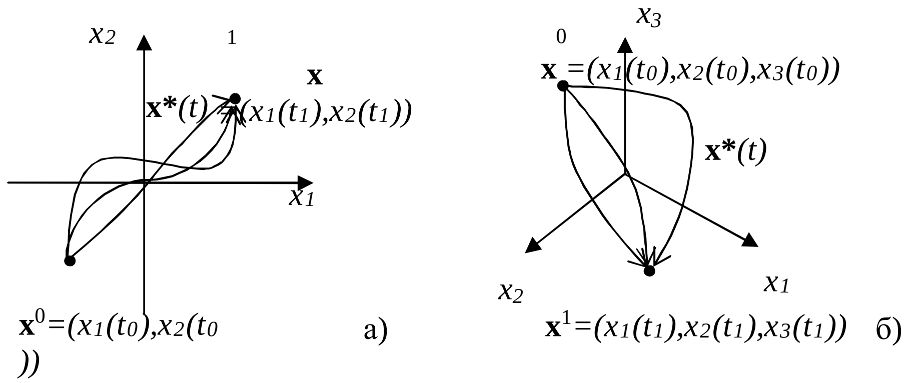

Рис.4. Приклади фазових траєкторій: а) n=2; б) n=3.

Принцип максимуму передбачає використання додаткових процедур:

— вводиться додаткова штучна змінна стану x_0:

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (11.3)$$

де: $f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})$ відповідає підінтегральному виразу з (11.2);

— вводяться допоміжні функції $\psi_0,\psi_1...\psi_n$, ,які визначаються лінійними однорідними рівнянням, що мають єдине рішення:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_0}{dt}=0 \\ \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j\dfrac{\partial f_j(x_1...x_n,u_1..u_m)}{\partial x_i}, i=1,2,...,n \end{cases} \qquad (11.4)$$

— приєднується вираз (11.3) до системи (11.1), що утворює системуз (n+1) рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2...x_n,u_1,u_2...u_m), \quad i=0,1,...,n \qquad (11.5)$$

— вводиться допоміжна функція H (функція Гамільтона) у вигляді (11.6)

$$H(\mathbf{ш},\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{j=0}\psi_j f_j(\mathbf{x},\mathbf{u});$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося, що рівняння (11.4) може бути переписане:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_0}{dt}=0 \\ \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\dfrac{\partial H(\mathbf{ш},\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i}, i=1,2,...,n \end{cases} \qquad (11.7)$$

а рівняння (3.1) перепишеться:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H(\mathbf{ш},\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \psi_i}, i=0,1,...,n. \qquad (11.8)$$

При фіксованих векторах **ш** та **x** функція Н (ш, x,u) стає функцією вектора **u** . Введемо:

$$M(\mathbf{ш},\mathbf{x})=\max_{u\in U} H(\mathbf{ш},\mathbf{x},\mathbf{u}). \qquad (11.9)$$

Теорема (принцип максимуму Понтрягіна). Нехай, $\mathbf{u}(t)$, $t_0\le t\le t_1$ – допустиме управління, а $\mathbf{x}(t)$ – відповідна їй траєкторія, що переводить фазову точку **x** системи з заданого початкового стану $\mathbf{x}^0$ в заданий кінцевий стан $\mathbf{x}^1$, де $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^1$. Якщо $\mathbf{u}(t)$ та $\mathbf{x}(t)$ – оптимальні керування та траєкторія, то знайдеться така неперервна вектор-функція $\mathbf{ш}=\psi_0,\psi_1,...,\psi_n$, яка задовольняє рівнянням , що:

1) в кожен момент часу *t*, $t_0\le t\le t_1$, функція $H(\mathbf{ш}(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$, що розглядається як функція змінної $\mathbf{u}$, досягає в точці $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ максимуму

$$H(\mathbf{ш}(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))=M(\mathbf{ш}(t),\mathbf{x}(t)); \qquad (11.10)$$

2) виконана умова не тривіальності розв’язку системи рівнянь (11.7):

$\mathbf{ш}(t) \neq 0$;

3) в кінцевий момент часу t_1

$$\psi_0(t_1) \le 0, \quad M(\mathbf{ш}(t_1), \mathbf{x}(t_1)) = 0 \,. \tag{11.11}$$

Максимум неперервної функції $H(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ може досягатися як в точках локального максимуму цієї функції, в яких частинна перша похідна дорівнює нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1,2,...,m \tag{11.12}$$

та друга частинна похідна менша за нуль, так і на границях області *U*.

Отже, центральним моментом в принципі максимуму є вираз

$$\max_{\mathbf{u}\in U} H(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\psi},\ \psi_0,\ \mathbf{u}) = 0 \,, \tag{11.13}$$

який означає, що якщо $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ - оптимальні керування, а $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ - оптимальні траєкторії, то знайдуться така постійна $\psi_0 < 0$ та такі розв'язки $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ системи (11.7), що функція *H* від змінних $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, при всіх $t \in [t_0,\ t_1]$ буде досягати максимуму на *U* саме при оптимальних керуваннях $u_1(t), \ldots, u_m(t)$.

<u>Застосування принципу максимуму.</u>

1. На початку, вважаючи $\mathbf{x},\ \psi,\ \psi_0$ параметрами, вирішують задачу максимізації функції *H* і знаходять

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},\ \boldsymbol{\psi},\ \psi_0) \in U, \tag{11.14}$$

на якій досягається найбільше значення функції *H*.

2. Якщо ця функція відома та ((11.7)-(11.8)):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H(\mathbf{ш}, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{ш}))}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{d\psi_i}{dt} = -\dfrac{\partial H(\mathbf{ш}, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{ш}))}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad (11.15)$$

розв'язуючи яку з крайовими умовами $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ та $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$ знаходять вектор $\mathbf{ш}$, який в свою чергу підставляючи в рівняння (11.12) знаходять оптимальне управління $\mathbf{u}^*(t)$.

Таким чином, принцип максимуму дозволяє звести розв'язок задачі оптимального програмного керування до розв'язку крайової задачі.

Якщо явний вигляд оптимального керування (11.14) отримати неможливо, то система Гамільтона разом з умовами максимуму (11.12) або створюють крайову задачу принципу максимуму.

Задача на швидкодію.

В задачах на швидкодію критерій оптимальності перепишеться:

$f_0=1$; $\quad I = \int_{t_0}^{t_1} 1dt = t_1 - t_0$, (11.16)

тоді гамільтоніан прийме вигляд:

$$H(\mathbf{ш}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad (11.17)$$

Введемо n-вимірний вектор $\psi_1 \ldots \psi_n$ та функцію:

$$\overline{H}(\mathbf{ш}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad (11.18)$$

У відповідності з вектор $\mathbf{ш}$ задається рівняннями:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}(\mathbf{ш}, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n \quad (11.19)$$

Якщо $H(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t)) = M(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t))$, то і

$\overline{H}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t)) = \overline{M}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t))$ (3.20)

Теорема (принцип максимуму в задачах на швидкодію). Нехай, $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ – допустиме управління, а $\mathbf{x}(t)$ – відповідна їй траєкторія, що переводить фазову точку $\mathbf{x}$ системи (11.1) з заданого початкового стану $\mathbf{x}^0$ в заданий кінцевий стан $\mathbf{x}^1$. Якщо $\mathbf{u}(t)$ та $\mathbf{x}(t)$ – оптимальні керування та траєкторія за швидкодією, то знайдеться така неперервна вектор-функція $\mathbf{ш} = (\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t))$, яка задовольняє рівнянням що:

1) в кожен момент часу t, $t_0 \le t \le t_1$, функція $\overline{H}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u})$, що розглядається як функція змінної $\mathbf{u}$, досягає в точці $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ максимуму

$\overline{H}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \overline{M}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t))$;(11.21)

2) виконана умова не тривіальності розв'язку системи рівнянь (11.19): $\mathbf{ш}(t) \ne 0$;

3) в кінцевий момент часу t_1

$$\overline{M}(\mathbf{ш}(t_1), \mathbf{x}(t_1)) \ge 0 . \qquad (11.22)$$

Як у випадку попередньої теореми, якщо виконано співвідношення (11.21) та (11.22) ((11.7) та (11.9)), то функція $\overline{M}(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t))$ ($M(\mathbf{ш}(t), \mathbf{x}(t))$) на оптимальній траєкторії постійна. Тому, співвідношення (11.22) ((11.10)) можна перевіряти на всьому проміжку $t \in [t_0, t_1]$.

В теоремі принципу максимуму передбачається, що вектор $\mathbf{ш}(t)$ визначається з точністю до постійного додатного множника, тому завжди можна покласти $|\mathbf{ш}(t_0)| = 1$.

Необхідною умовою мінімуму функціоналу є умова Вейєрштраса, яку можна записати у вигляді:

$$\sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_l} \delta u_k \delta u_l \le 0 , \qquad (11.23)$$

де δu_k ($k=1,2,\dots m$)– нескінченно мала варіація оптимального керування.

Приклад.

Записати крайову задачу принципу максимуму для кожухотрубного теплообмінника, що описується системою диференціальних рівнянь у відхиленнях (знак D - опущено):

$$\begin{cases} 10\dfrac{d\theta}{dt} + \theta = 1.2\theta_n - 1.3G, \\ 4\dfrac{d\theta_n}{dt} + \theta_n = 9G_n; \end{cases} \qquad (11.24)$$

де перше рівняння описує ємність нагріваємої рідини, а друге – ємність теплоносія (пари); θ – температура рідини; θ_n – температура пари; G – витрата рідини; G_n – витрата пари, що надходить в міжтрубний простір; t – час. Оптимальне керування, обмежене виразами

$$|\mathbf{u}(t)| \le \mathbf{u}^*, \text{ де } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} G \\ G_n \end{bmatrix}, \qquad (11.25)$$

повинно переводити об’єкт з початкового стану $\mathbf{x}^0$ в кінцевий $\mathbf{x}^1$ за мінімальний час.

Розв’язання.

1. Приводимо об’єкт до безрозмірної форми:

$$\begin{cases} x_1' = -0.1x_1 + 0.12x_2 - 0.13u_1, \\ x_2' = -0.25x_2 + 2.25u_2; \end{cases} \qquad (11.26)$$

2. Складаємо функцію Гамільтона:

$$\overline{H}(\text{ш},\mathbf{x},\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \psi_1(-0.1x_1 + 0.12x_2 - 0.13u_1) + \psi_2(-0.25x_2 + 2.25u_2) \quad (11.27)$$

3. Оптимальне керування має вигляд:

$$u_1(t) = u_1 * sign(-0.13\psi_1(t));$$
$$u_2(t) = u_2 * sign(2.25\psi_2(t)). \qquad (11.28)$$

4. Складаємо систему спряжених рівнянь за (11.19):

$$\begin{cases} \psi'_1 = 0.1\psi_1, \\ \psi'_2 = -0.12\psi_1 + 0.25\psi_2. \end{cases} \qquad (11.29)$$

Отже, отримуємо доточкову крайову задачу (2n+r-рівнянь):

$$\begin{cases} x_1'(t) = -0.1x_1(t) + 0.12x_2(t) - 0.13u_1(t), & x_1(t_0) = x_1^0, \\ x_2'(t) = -0.25x_2(t) + 2.25u_2(t), & x_2(t_0) = x_2^0, \\ u_1(t) = u_1 * sign(-0.13\psi_1(t)), & \\ u_2(t) = u_2 * sign(2.25\psi_2(t)), & \\ \psi'_1(t) = 0.1\psi_1(t), & x_1(t_1) = x_1^1, \\ \psi'_2(t) = -0.12\psi_1(t) + 0.25\psi_2(t), & x_2(t_1) = x_2^1, \end{cases} \qquad (11.30)$$

розв’язавши яку визначаються оптимальна траєкторія $\mathbf{x}(t)$ та функції $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$, які підставляють у рівняння оптимального керування (11.28).

Відмітимо, якщо початковий вектор $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ не визначений, то крайову задачу доповнюють умовою:

$$\mathbf{ш}(t_0) = 0. \qquad (11.31)$$