Алгебраїчні критерії в задачах управління. Спостережуваність та ідентифікованість лінійних систем. Теореми Калмана про спостереження та управління. Спостерігачі. Принцип подвійності завдань управління і спостереження

1.Алгебраїчні критерії в задачах управління

Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні та достатні умови стійкості на основі визначників, складених з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Англійський математик Є.Раус (1877 р.) та швейцарський математик А.Гурвіц (1893 р.) в різній формі запропонували критерій, згідно якого умови стійкості зводяться до виконання нерівностей, які зв'язують коефіцієнти рівняння системи. Для розв'язання прикладних задач ці критерії об'єднують в один – Рауса-Гурвіца. В загальному випадку ці критерії призначались для розв'язання чисто математичної задачі – дослідження стійкості розв'язків лінійного диференціального рівняння. Вище було показано, що за допомогою такого рівняння описується поведінка лінійної АСР.

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \qquad (4.11)$$

складається визначник:

$$\Delta_n = \begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & & a_4 & a_2 & a_0 \end{matrix} \qquad (4.1)$$

Вираз (4.12) називається визначником Гурвиця і при його складанні виконуються правила:

- визначник має n рядків та n стовпців, в першому рядку розташовуються "непарні" коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа n нулями;
- другий рядок включає всі "парні" коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа n;
- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;
- в головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім a_n.

Критерій стійкості Рауса-Гурвиця формулюється так: автоматична система, яка описуються характеристичним поліномом (4.11) стійка, якщо при $a_n > 0$ визначник Δ_n та всі його діагональні мінори додатні. (Мінор – визначник, складений з елементів, розташованих на перетині будь-яких k рядків та k стовпців визначника). У виразі (4.12) мінори виділені пунктиром.

Останній стовпець визначника Δ_n має лише один елемент $a_0 > 0$, тому використовується відома залежність:

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}, \quad (4.13)$$

яка розподається на дві за умови $\Delta_n = 0$: $a_0 = 0, \Delta_{n-1} = 0$. Коли $\Delta_n = 0$, система знаходиться на межі стійкості. При цьому при $a_0 = 0$ існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при $\Delta_{n-1} = 0$ існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості).

Розглянемо використання алгебраїчного критерія для системи різних порядків. Для системи першого порядку характеристичний поліном має вигляд:

$$D(\lambda) = a_1\lambda + a_0 \quad (4.14)$$

а умова стійкості:

$$\Delta_1 = a_0, a_1 > 0 \quad (4.15)$$

Для системи другого порядку:

$$D(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (4.16)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0, \Delta_1 = a_1, a_2 > 0, a_0 > 0 \quad (4.17)$$

Таким чином, для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи третього порядку:

$$D(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (4.18)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

Умови стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0, \Delta_3 = a_0\Delta_2 > 0 \quad (4.20)$$

Остання нерівність за умови $a_0 > 0$ потребує $\Delta_2 > 0$. Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лише додатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядка:

$$D(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{4.21}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \tag{4.22}$$

Умова стійкості:

$$a_4 > 0; \Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = a_2a_3 - a_1a_4 > 0;$$
$$\Delta_3 = a_1\Delta_2 - a_3\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & 0 \end{vmatrix} = a_1\Delta_2 - a_3^2a_0 > 0; \Delta_4 = a_0\Delta_3 > 0 \tag{4.23}$$

Для систем високих порядків ($n \geq 3$) використання алгебраїчного критерія Рауса-Гурвиця стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості.

В теорії автоматичного керування використовується також алгебраїчний критерій Льєнара-Шіпара (1914 р.), який спрощує використання критерія Рауса-Гурвиця. Доведено, що необхідною і достатньою умовою стійкості при $a_i > 0$ є вимога додатності всіх визначників з парними індексами $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0 \ldots$ або всіх визначників з непарними індексами $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0 \ldots$.

2.Теореми Калмана про спостереження та управління

Стохастична теорія управління вивчає динамічні системи, які описуються різницевими чи диференціальними рівняннями з врахуванням діючих завад, які розглядаються як стохастичні процеси. Ця теорія розроблена для того, щоб дати відповіді на такі питання: якими є стохастичні властивості параметрів системи; яким чином підлаштовувати параметри, щоб оптимізувати систему відносно заданого критерію; яким чином, за умови заданих система та критеріїв знайти закон управління, який мінімізує заданий критерій. Однією з найважливіших проблем стохастичної теорії управління є теорія фітрації та попередження, розроблені Вінером та Колмогоровим. Ця теорія дає можливість виділити сигнал на фоні завад. Значний вплив на розвиток стохастичної теорії управління виявило використання цифрових обчислювальних машин для розв’язку проблем аналізу та синтезу. Великий внесок в розв’язок проблеми фільтрації зробили Калман та Б’юсі, в їхніх теоретичних розробках задачі попередження та фільтрації розв’язуються рекурентними методами, що дає можливість використати цифрові обчислювальні машини. Результати, отримані Калманом та Б’юсі поширюються також на нестаціонарні процеси. На основі відповідної прогноз здійснюється на базі вихідної змінної лінійної динамічної системи, коли управління реалізується за спостереженнями.

Стохастичне оптимальне управління базується на положеннях динамічного програмування. Для лінійних систем з квадратичним критерієм розв'язок дається *теоремою розділення*, яка дає можливість будувати оптимальну стратегію з двох частин, рис. 4.1.: оптимального фільтра, який визначає оцінки стану як умовне середнє за умови умовного заданих спостережень вихідних сигналів, та лінійного зворотнього зв'язку від оцінюваного стану до сигналу управління.

За цих умов лінійний зворотний зв'язок такий же, яким би він був за умови відсутності завад та точного виміру стану системи. Лінійний зворотний зв'язок можна визначити шляхом розв'язку задачі детермінованого управління. Умовне середнє значення стану характеризує вихідну змінну фільтру Калмана, який є математичною моделлю системи, коли управління здійснюється за спостереженнями. Характеристики фільтру залежать від завад та динамічних властивостей системи, але не залежать від критерію.

Таким чином, теорема розділення забезпечує зв'язок між теорією фільтрації та теорією стохастичного оптимального управління. Оптимальна стратегія розв'язку задачі стохастичного управління для лінійних систем з квадратичним критерієм складається з лінійної динамічної системи з можливо залежними від часу параметрами. До цього класу стратегії відносяться стратегії, які протягом багатьох років використовувалися на

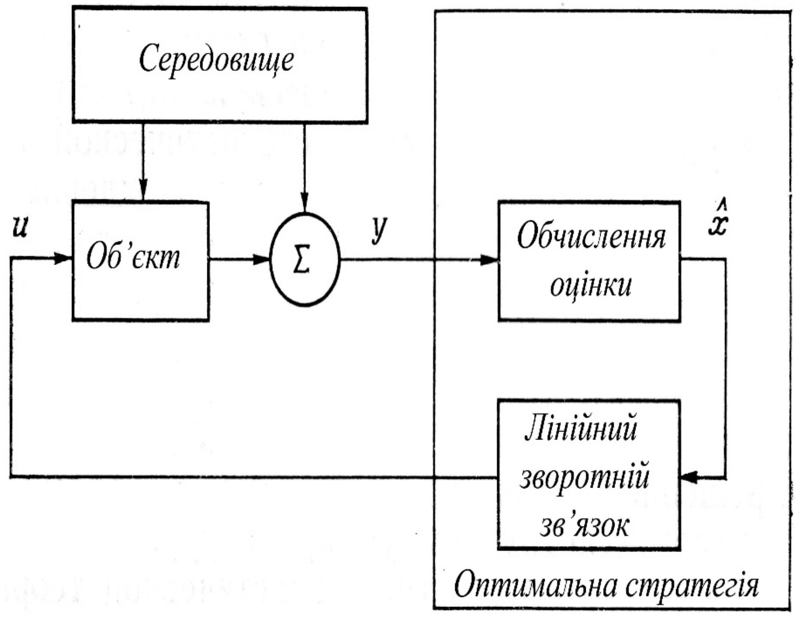

Рис. 4.1. Блок-схема, яка ілюструє теорему розділення: *u*–сигнал управління;*y* – вихідна змінна; $\overline{x}$ - оцінка змінної стану

практиці, проте їх отримання здійснювалося окремими методами. Оскільки перехід до систем з багатьма входами та виходами не викликає ускладнень, то лінійна стохастична теорія є засобом розв'язування задач управління. Лінійна стохастична теорія управління має особливості, необхідні для теорії регулювання із зворотним зв'язком. В ній враховуються різниця між розімкненими та замкнутими системами; робота системи критично залежить від інформації, отримуваної в той момент часу, коли визначається сигнал управління. Оптимальний зворотний зв'язок представляє собою лінійну динамічну систему.

3.Спостерігачі

Створення нечутливої до розмірності моделі виробничої системи, оптимальної адаптивної з системою спостерігачів, що «обслуговують» кожну підсистему і систему в цілому. Для вирішення проблеми потрібно вирішення наступних задач:

– розробка параметризованих модулів «оптимальне агрегування підсистеми»;
– динаміка оптимально агрегованої підсистеми;
– спостерігач стану і параметрів підсистеми.

Новизна: перші дві задачі – покращення, третя задача – новий результат.

На рис. 1 подано прототип – базову схему і математичну модель нелінійного спостерігача стану і параметрів для нелінійного об'єкту. Математична модель складається з різницевих параметризо- ваних рівнянь об'єкта і спостерігача і рівнянь регуляторів для основного контуру і контуру спостері- гача.

В пошуку знайдено велику кількість публікацій з аналізу, синтезу, досліджень і застосування спо- стерігачів. На рис. 2 подано типову схему виробничої системи з двома спостерігачами стану. Для цієї схеми проведені досить складні обгрунтування і дослідження, суть яких – підвищення точності в оці- нці певних складових. Це приклад того, що за допомогою спостерігачів можна отримувати додаткову інформацію про об'єкт.

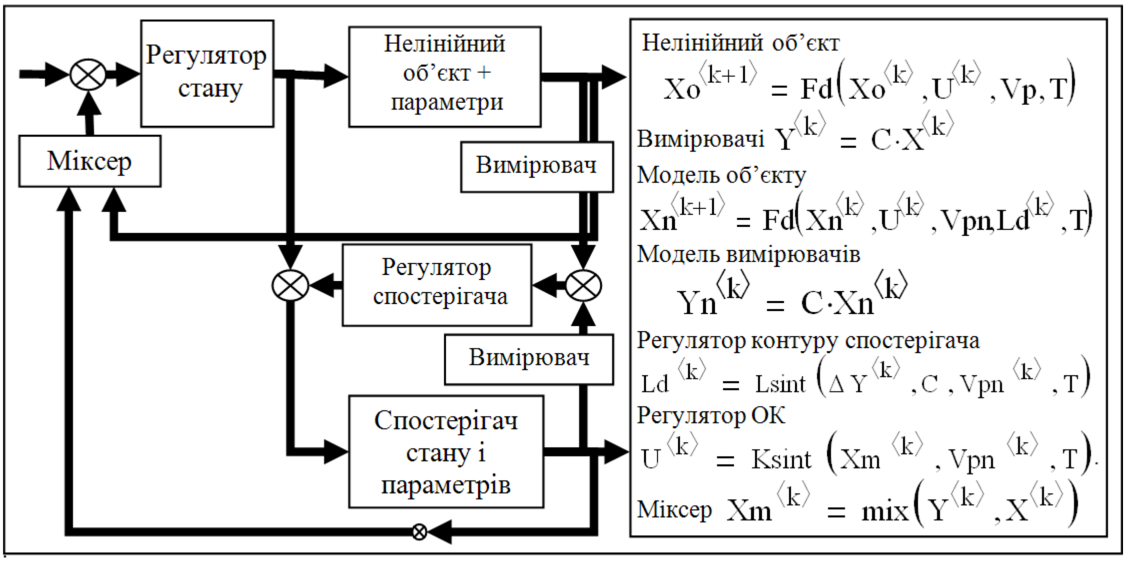

Рис. 1. Модель спостерігача стану і параметрів нелінійного об’єкта

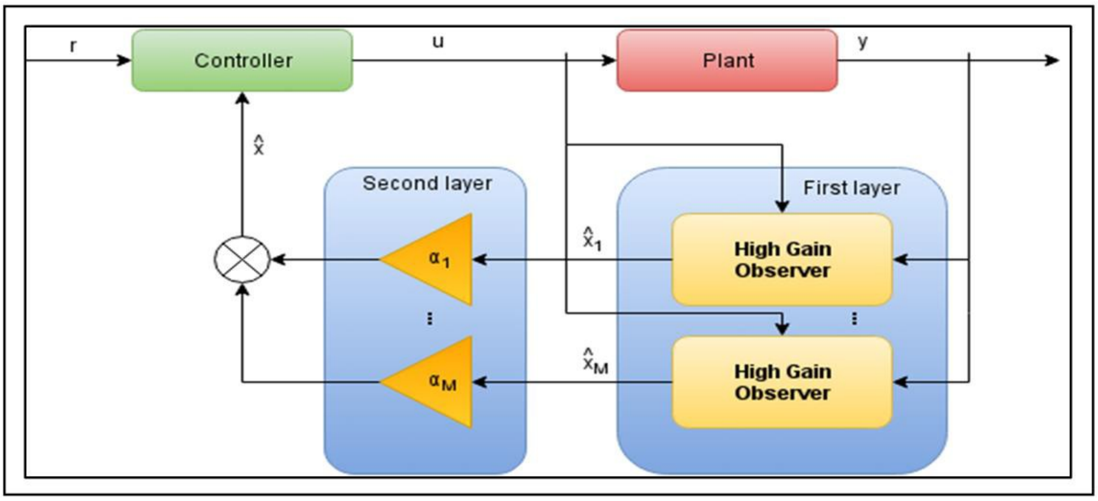

Рис. 2. Аналог. Схема системи АСУП з системою спостерігачів стану

На рис. 3 подано приклад застосування системи спостерігачів для підвищення ефективності об’єкта.

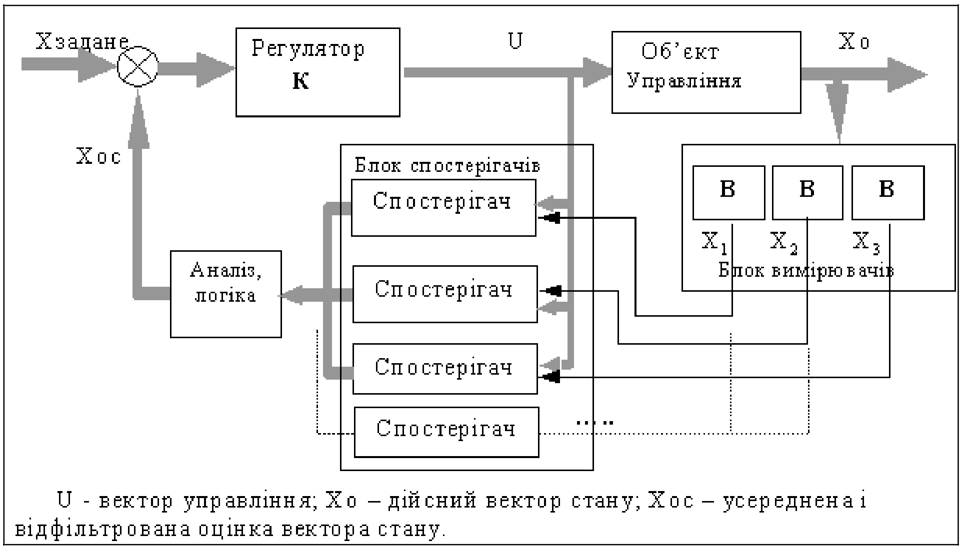

Рис. 3. Аналог. Схема відмовостійкої САУ з системою спостерігачів

На рис. 3 подана система управління з трьома вимірювачами трьох змінних стану – нерезервова- ними. Для підвищення надійності і живучості до кожного вимірювача додано спостерігач, що віднов- лює повний вектор стану по одній вимірюваній змінній. Спостерігач – це програма в мікроконтролері – це суттєво дешевше резервування вимірювачів.

На рис. 4 на простому прикладі подано нове науково-практичне рішення з покращення системи управління.

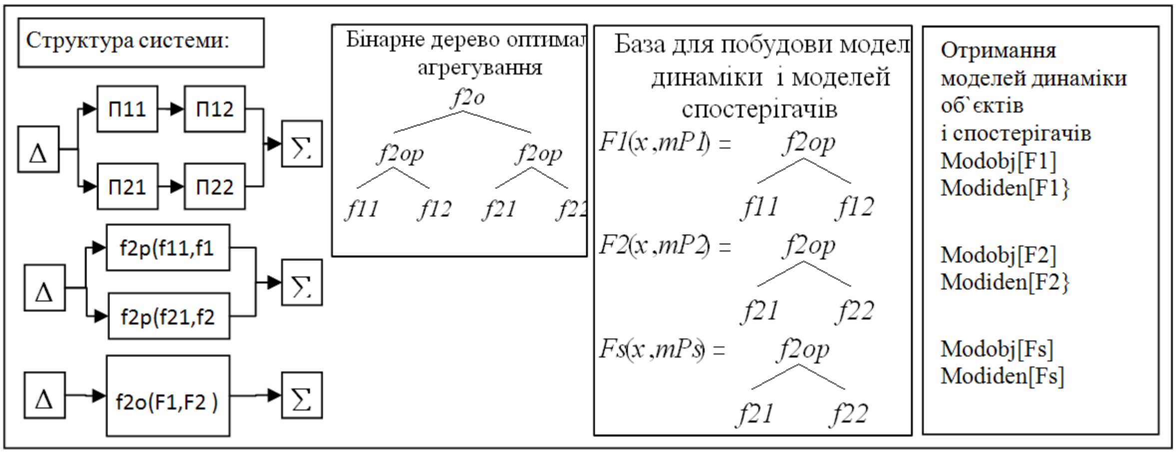

Рис. 4. Нова розробка: оптимально агрегована виробнича система з системою спостервгачів

На рис. 4 подано схему операцій, результатом якого є оптимальна адаптивна система управління виробництвом. Схема складається з: – послідовності агрегувань, – бінарного дерева оптимального аг- регування, що є рішенням задачі нелінійного програмування, послідовності однорівневих оптима- льних агрегувань, отримання моделей об’єктів та спостерігачів для відповідних підсистем. Схема на рис. 4 – не декларація. Всі кроки схеми відпрацьовані – реалізовані програмними модулями: оптима- льне агрегування, параметризація, отримання моделей динаміки і моделі нелінійного спостерігача стану і параметрів (розроблено і досліджено в бакалаврській роботі.