1.Статична оптимізація

У практичній діяльності часто зустрічаються задачі оптимізації, у яких змінні стану та керування не залежать від часу. Такі задачі називаються *статичними*. Розв’язок статичної задачі оптимізації забезпечує знаходження незалежних змінних, оптимальних, з погляду якихось прийнятих умов. Прикладами статичних задач оптимізації можна назвати:

- задачі вибору сталих режимів технологічних процесів;
- задачі оперативного керування, зокрема розподілу матеріальних і енергетичних ресурсів, планування ремонтів і перевезень (оптимальний розподіл і планування);
- задачі вибору оптимальних параметрів окремих виробів, настройок регуляторів САР (оптимальне проектування), та ін.

Математичною основою розв’язання таких задач є методи оптимізації функцій.

Ціль навчального посібника – ознайомлення з методикою формалізації оптимізаційних задач і способами їх розв’язання.

Основна увага приділяється методам і алгоритмам, які використовуються в інженерній практиці при дослідженні, проектуванні, експлуатації, аналізі функціонування технічних об’єктів і систем. Головним чином розглядаються методи оптимізації, орієнтовані на розв’язок задач з неперервними змінними, обмеженнями і з однією дійсною цільовою функцією, тобто математичні методи, часто об’єднувані в рамках теорії нелінійного і лінійного програмування.

Робота методів і алгоритмів проілюстрована великою кількістю числових прикладів.

Розглянуто приклади використання методів оптимізації в задачах ідентифікації і оптимізації технологічних процесів, оптимізації настройок систем керування, побудови функціонально адаптивних систем регулювання.

В посібнику наведено приклади і вправи, які рекомендується використовувати при самостійній роботі, а також задачі, які допоможуть викладачу при проведенні семінарських занять і розробці завдань для самостійної роботи студентів.

2.Основні поняття та визначення

У будь-якій задачі статичної оптимізації доводиться оперувати наступними основними елементами. По-перше, наборами незалежних змінних (керуючих параметрів) u_i (i=1,2,…,m), які утворюють m-мірний вектор незалежних змінних u . По-друге, наборами залежних змінних (вихідних величин) $y_i\left(i=1,2,...n\right)$, які утворюють n-мірний вектор залежних змінних y , до того ж вважаючи, що матриця спостерігача C у виразі $y = C \cdot x$, де x – вектор змінних стану, є одиничною, будемо надалі оперувати з n - мірним вектором x . По-третє, деяким функціональним виразом I , що включає в себе розглянуті змінні, і повинен бути мінімізований або максимізований. Цей вираз називають *цільовою функцією* (функцією мети), *критерієм оптимальності* або *показником якості* і записують у вигляді:

$$I = f_0(x,u). \qquad (1.1)$$

Цільова функція є скалярною мірою ефективності знайденого розв’язку задачі.

Постановка будь-якої задачі оптимізації включає в себе умови, які характеризують прийнятні значення змінних, і називаються обмеженнями задачі. Обмеження містять у собі рівняння зв'язку між залежними та незалежними змінними у вигляді рівнянь а також функціональні та параметричні обмеження у вигляді нерівностей. Обмеження у вигляді рівнянь записуються в такий спосіб:

$f_j(x,u) = 0,$ $\qquad j = 1,2,...,m_1.$ (1.2)

Аналогічно, обмеження у вигляді нерівностей мають вигляд:

$G_j(x,u) \le 0,$ $\qquad j = m_1 + 1,...,m_2.$ (1.3)

Будь-яке обмеження у вигляді нерівності за допомогою введення додаткової змінної z_j можна звести до еквівалентного обмеження типу рівняння: $G(x, u) + z = 0$.

З урахуванням вищесказаного, задачу статичної оптимізації можна сформулювати в такий спосіб: мінімізувати (або максимізувати) критерій (1.1)

$$I = f_0(\vec{x},\vec{u}) \to \min_u(\vec{x},\vec{u}), \tag{1.4}$$

за умови:

$f_j(x,u) = 0, j = 1, 2,..., m_1,$

$G_j(x,u) \le 0, j = m_1 + 1,..., m_2,$

скорочено можна записати:

$$I_{\min} = \min_u \left\{ f_0(x,u) \mid f_j(x,u) = 0,\ j = 1,...,m_1;\quad G_j(x,u) \le 0;\quad j = m_1 + 1,...,m_2 \right\}. \tag{1.5}$$

Іноді зустрічається інший вигляд запису постановки задачі:

$$I = f_0(\dot{x},\mathring{u}) \to \min_u;\quad \dot{x} \in D_x,\quad \mathring{u} \in D_u \tag{1.6}$$

де D_x і D_y – області допустимих розв’язків для змінних x і y відповідно, що визначаються умовами (1.2), (1.3), тобто:

$$D_x = \left\{ x:\ f_j(x,u) = 0,\ j = 1,...,m_1;\ G_j(x,u) \le 0;\ j = m_1 + 1,...,m_2 \right\} \tag{1.7}$$

$$D_u = \left\{ u:\ f_j(x,u) = 0,\ j = 1,...,m_1;\ G_j(x,u) \le 0;\ j = m_1 + 1,...,m_2 \right\} \tag{1.8}$$

Необхідно відзначити, що задача мінімізації функції $f_0(\dot{x},\mathring{u})$ еквівалентна задачі максимізації функції $-f_0(\dot{x},\mathring{u})$, а обмеження $G_j(\dot{x},\mathring{u}) \le 0$ еквівалентні обмеженням $-G_j(\dot{x},\mathring{u}) \ge 0$. Це дозволяє замість задачі мінімізації розв’язувати задачу максимізації та навпаки.

Розв’язок статичної задачі оптимізації дозволяє визначити оптимальну точку($\dot{x}_{опт}$, $\mathring{u}_{опт}$) в області допустимих розв’язків D_x і D_u, у зв'язку з чим задачу статичної оптимізації можна сформулювати трохи інакше: знайти значення незалежних змінних $\mathring{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ і відповідні їм значення залежних змінних $\dot{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, що забезпечують мінімальне (максимальне) значення критерію оптимальності $f_0(\dot{x},\mathring{u})$ при виконанні умов (1.2) і (1.3).

Необхідно підкреслити, що в результаті розв’язання статичної задачі оптимізації визначається оптимальна точка у просторі розв’язків $(\dot{x}_{опт}, \mathring{u}_{опт})$, у той час як у випадку динамічної задачі оптимізації визначаються функції від часу $x_{опт}(t)$ і $u_{опт}(t)$.

В залежності від числа незалежних змінних і наявності або відсутності обмежень розрізняють наступні задачі оптимізації.

Якщо число незалежних змінних (керуючих параметрів) більше одного $(m \ge 2)$, то вона називається *багатопараметричною (багатомірною)* задачею оптимізації, а при $m = 1$ ця задача буде називатись *однопараметричною (одномірною)* задачею оптимізації.

При відсутності обмежень (1.2) і (1.3) задача називається задачею *безумовної оптимізації*, у протилежному випадку – задачею *умовної оптимізації*.

3.Необхідні і достатні умови мінімуму

Ідеї оптимізації з 1939 року почали глибоко проникати до багатьох галузей наукових досліджень, різних сфер практичної діяльності: управління соціально-економічними процесами; бізнес; керування виробничими процесами, об'єктами та інших. Того же року професор Л. В. Канторович розробив алгоритм знаходження екстремуму лінійної функції на множині точок багатокутника. Перебрати всі вершини багатокутника було майже неможливо через їхню велику кількість. Л. В. Канторович запропонував метод для розв'язання таких задач, заклавши основи нового напрямку *лінійного програмування* в теорії екстремальних задач. За цей напрямок Л. В. Канторович разом з американським економістом Т. Ч. Купмансом у 1975 році були відзначені Нобелівською премією.

На цей же час розпочався інтенсивний розвиток інших розділів теорії оптимізації, *опуклого аналізу* і *нелінійного програмування*. Опуклий аналіз – розділ математики, в якому вивчаються опуклі множини і функції. Там встановлені необхідні й достатні умови екстремуму на основі теорії субдиференціального числення, розроблена теорія складності задач опуклого програмування та створені ефективні чисельні методи розв'язання задач оптимізації. Нелінійне програмування як розділ теорії екстремальних задач розвивається на базі досліджень американських вчених Г. Куна і А. Таккера, які узагальнили класичний принцип Ейлера-Лагранжа на випадок задачі опуклого програмування з обмеженнями – нерівностями.

Останнім часом математичне програмування розвивається у напрямку дослідження все більш спеціальних класів екстремальних задач, розробки чисельних методів, які долають не гладкість, не опуклість, а яристість, розривність цільових функцій, а також враховують багатоекстремальність, можливу нечітку і стохастичну природу оптимізаційних задач. Значний внесок у розвиток цих напрямків в теорії оптимізації внесли українські вчені: В. М. Глушков, В. С. Михалевич, Ю. М. Єрмолаєв, Б. М. Пшеничний, Н. З. Шор та інші.

Багато задач оптимізації пов'язано з управлінням різноманітними об'єктами, процесами, системами, приладами. Зусиллями Л. С. Понтрягіна, В. Г. Болтянського та інших стала розроблятися *теорія оптимального управління* на основі *принципу максимуму Понтрягіна*, який встановлює необхідні умови оптимальності в задачах такого класу.

Так сформувалися основні розділи сучасної теорії екстремальних задач: математичне програмування, варіаційне числення та теорія оптимального управління.

Поширення розвитку теорії і практики теорії оптимізації стало можливим завдяки наступним факторам.

По-перше, більшість питань оптимізації практичної діяльності можуть бути подані у вигляді екстремальної задачі: знайти екстремум (мінімум або

Задача мінімізації записується в вигляді

$f(x) \to \min, x \in X$, або $\min\limits_{x \in X} f(x)$, (1.1)

де функція $f(x)$ називається *цільовою*, X – *допустимою множиною*, а будь-який елемент $x \in X$ — *допустимою точкою* цієї множини.

Якщо $X \neq 0$, то задача (1.1) називається *сумісною*, в протилежному випадку – *несумісною*.

Якщо $X = R^n$, то задача (1.1) називається задачею *без обмежень* на змінні або *задачею безумовної оптимізації*, у протилежному випадку – *задачею з обмеженнями на змінні* або *задачею умовної мінімізації*.

Цільова функція $f(x)$ (*критерій якості*, або *критерій ефективності*) є математичним описом мети, досягнення якої вимагається при розв'язанні реальної задачі. Множина *X* визначає умови, за яких відбувається процес, що досліджується, і яким має задовольняти розв'язок задачі.

Точка $x^* \in X$ називається *розв'язком задачі* (1.1), або *точкою глобального мінімуму*, якщо $\le F(x), \forall x \in X\, f(x^*)$

$\in X$

. (1.2)

Точка x^* називається *точкою локального мінімуму* або *локальним розв'язком задачі* (1.1), якщо існує таке число $\varepsilon\rangle 0$, що

$$f(x^*) \le f(x), \forall x \in X \cap U_\varepsilon(x^*), \qquad (1.3)$$

де $U_\varepsilon(x^*)$ – ε-окіл точки x^*.

Якщо у виразах (1.2) і (1.3) нерівність виконується як строга при $x \ne x^*$, то x^* називається відповідно *точкою строгого глобального* або *строгого локального мінімуму*. Точка глобального мінімуму завжди є точкою локального мінімуму, але не навпаки.

Існують функції, для яких будь-яка точка локального мінімуму є водночас і точкою глобального мінімуму. До таких функцій належать опуклі донизу функції.

Функція $f(x)$ називається *опуклою донизу* якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з області її визначення здійснюється нерівність

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

для всіх $\alpha \in 0;1$.

Той факт, що точка $x^* \in X$ є точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині X, записується у вигляді (x).

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x), \text{ або } x^* = \arg\min_{x\in X} f$$

Множину всіх точок глобального мінімуму позначають як

$$Arg\min_{x\in X} f(x) = x^* \in X \mid f(x^*) = \min_{x\in X} f(x) \;.$$

У залежності від властивостей допустимої множини X і цільової функції $f(x)$ множина всіх точок глобального мінімуму $Arg\min f(x)$ може бути $x\ X$ $\in$ скінченною, нескінченною або порожньою.

У тих випадках, коли множина всіх точок глобального мінімуму є порожньою, тобто $Arg\min_{x\in X} f(x) = \varnothing$, природним узагальненням поняття найменшого значення (мінімуму) функції є поняття нижньої межі.

Функція $f(x)$, визначена на множині $X \subseteq R^n$, називається обмеженою знизу (зверху) на множині X, якщо існує таке дійсне число M, що $f(x) \ge M \; (f(x) \le M)$ для всіх $x \in X$. У протилежному випадку функція $f(x)$ називається *необмеженою знизу (зверху)*. Функція $f(x)$, обмежена на множині $X \subseteq R^n$ як знизу, так і зверху, називається *обмеженою* на множині X.

Очевидно, що функція $f(x)$ обмежена на множині $X \subseteq R^n$ тоді і тільки тоді, коли існує таке дійсне число $M \ge 0$, що $|f(x)| \le M$ для всіх $x \in X$.

Якщо функція $f(x)$ обмежена знизу на множині $X \subseteq R^n$, то дійсне число f^* називається *точною нижньою межею* функції $f(x)$ на X:

1) при $f^* \le f(x)$ для всіх $x \in X$;

2) для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon\rangle 0$ знаходиться точка $x_\varepsilon \in X$, для якої $\varepsilon \langle \; +\varepsilon$

$f(x\ \ ) f^*$.

Якщо функція $f(x)$ необмежена знизу на X, то нижньою межею вважають $f^* = -\infty$.

Точну нижню межу f^* функції $f(x)$ на X позначають через $\inf_{x \in X} f(x)$.

Послідовність $x^k \subset X$ називається мінімізуючою для функції $f(x)$ на множині X, якщо $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \inf_{x\in X} f(x)$.

Аналогічно вводяться поняття *точної верхньої межі функції* $f(x)$ на $X \subseteq R^n$ і *максимізуючої* послідовності. Якщо функція $f(x)$ необмежена зверху на X, то точною верхньою межею вважається $+\infty$. Точну верхню межу на X $f(x)$ позначають через $\sup_{x\in X} f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ у точці $x^* \in X$ набуває найменшого значення на множині X, тоді

$$f(x^*) = \min_{x\in X} f(x) = \inf_{x\in X} f(x).$$

У цьому випадку вважають, що функція нижньої межі. $f(x)$ досягає своєї точної

Необхідно підкреслити, що $\inf_{x\in X} f(x)$ і $\sup_{x\in X} f(x)$ завжди існують, проте $\min_{x\in X} f(x)$ і $\max_{x\in X} f(x)$ існують не завжди.

На практиці розрізняють два типи задач мінімізації. У задачах першого типу шукають точні або наближені значення величини f^* незалежно від того, буде множина $Arg \min_{x\in X} f(x)$ або досить близька до неї. У цьому випадку

4.Критерий Сильвестра

Тип квадратичной формы можно определить, не приводя ее к каноническому виду. Следующий ниже критерий Сильвестра позволяет определить тип квадратичной формы по знакам угловых миноров ее матрицы.

Рассмотрим угловые миноры $\Delta_k = \det A^{(k)}$ ($k = \overline{1, n}$), являющиеся определителями подматриц $A^{(k)} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k}$ матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ квадратичной формы:

$$\Delta_1 = \det A^{(1)} = a_{11},\ \Delta_2 = \det A^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 6 (критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы). Квадратичная форма $L\left(\overline{x}\right) = x^T A x$ является:

1) положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры Δ_k матрицы A положительны:

$$\Delta_k > 0\ (k = \overline{1, n})$$

2) отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры Δ_k матрицы A отличны от нуля и их знаки чередуются, начиная со знака минус:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \left(-1\right)^n \cdot \Delta_n > 0.$$

В заключение приведем таблицу оценки знакоопределенности квадратичных форм по двум основным критериям.

Квадратичная форма	Обозна-чение	Оценка знакоопределенности формы	
		по главным минорам матрицы квадратичной формы	**по собственным значениям матрицы квадратичной формы**
положительно определенная	$L\left(\overline{x}\right) > 0$	если все угловые миноры Δ_k матрицы положительны: $\Delta_k > 0\ (k = \overline{1, n})$	если все собственные значения положительны
отрицательно определенная	$L\left(\overline{x}\right) < 0$	если все угловые миноры Δ_k матрицы отличны от	если все собственные значения отрицательны

		нуля и их знаки чередуются, начиная со знака минус: $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ (-1)^n \cdot \Delta_n > 0$	
неотрицательно определенная	$L(\overline{x}) \geq 0$	если все угловые миноры Δ_k матрицы неотрицательны: $\Delta_k \geq 0$ $(k = \overline{1,\ n})$	если все собственные значения неотрицательны
неположительно определенная	$L(\overline{x}) \leq 0$	если в угловых минорах Δ_k матрицы чередуются знаки, причем: $\Delta_1 \leq 0,\ \Delta_2 \geq 0,\ \ldots,\ (-1)^n \cdot \Delta_n \geq 0$	если все собственные значения неположительны
знакопеременная			среди собственных значений имеются как положительные, так и отрицательные