1.Методи умовної оптимізації при наявності автономних обмежень-нерівностей і обмежень типу зв'язків

Крім методу множників Лагранжа, призначеного для розв’язку задач оптимізації з обмеженнями типу рівностей, існує два основних підходи до розв’язку задач умовної оптимізації.

Перший полягає в тому, що задача на екстремум при наявності обмежень зводиться до задачі безумовної оптимізації за допомогою спеціальних, так званих *штрафних функцій*. Методи, що використовують такі функції, називають методами штрафних функцій.

Другий підхід полягає в тому, що рух до екстремуму здійснюється по послідовності припустимих точок, тобто точок, що задовольняють обмеженням задачі з монотонно спадаючими (зростаючими) значеннями цільової функції. Цей підхід ілюструє метод проекції градієнта.

Методи штрафних функцій

Ці методи можуть використовуватися як при лінійних, так і при нелінійних обмеженнях типу рівностей і нерівностей.

Зміст методів полягає в тому, що вихідна цільова функція $f_0(u)$ розширюється за рахунок введення додаткових коефіцієнтів і функцій, що враховують вплив обмежень таким чином, що при порушенні обмежень різко зростає (спадає) значення розширеної цільової функції $I_p(u)$. Тим самим рішення задачі умовної оптимізації $f_0(u)$ зводиться до розв’язку задачі безумовної оптимізації $I_p(u)$.

Математична постановка задачі умовної оптимізації:

$$f_{\circ}(\bar{u}) \min, \; V = \bar{u} \in R^n \,\Big|\, g(\bar{u}) \geq 0, \; j=\overline{1,m}; \; h(\bar{u}) = 0, \; i=\overline{m+1,s} \tag{8.1}$$

де $f_o(\bar{u})$- цільова функція;

V_u- область, на якій може приймати значення вектор u ;

$g_j(\bar{u}) \geq 0, \; j=\overline{1,m}$ - умови типу нерівності;

$h_i(\bar{u}) = 0, \; i=\overline{m+1,s}$ - умови типу рівності.

Припускається, що для вектора $\bar{u}^*$, який є рішенням цієї задачі, відоме деяке початкове наближення $\bar{u}^{(0)}$, можливо неприпустиме, тобто таке, що не задовольняє умовам типів рівності та нерівності задачі. За допомогою алгоритмів, які розглядаються нижче, у просторі R^n будується кінцева послідовність точок $\bar{u}^{(i)}$, $i=1,N$, яка починається із заданої точки $\bar{u}^{(0)}$ та завершується точкою $\bar{u}^{(N)}$, яка дає найкраще наближення до $\bar{u}^*$ серед усіх точок побудованої послідовності. У якості $\bar{u}^{(i)}$, $i=\overline{1,N}$ беруться стаціонарні точки так званої штрафної функції – цільової функції допоміжної задачі безумовної мінімізації. За допомогою штрафної функції вихідна задача умовної мінімізації перетворюється у послідовність задач безумовної мінімізації. Конкретні методи, побудовані на вказаній загальній схемі, визначаються видом штрафної функції, а також правилами, за якими проводиться перерахунок штрафних параметрів по закінченню чергового циклу безумовної мінімізації. Штрафна функція, яка дозволяє обмежитися рішенням лише одної задачі безумовної мінімізації, називається точною.

Методи штрафних функцій мають просту реалізацію. Важлива їх якість також у тому, що вони дають досліднику багатий матеріал безумовної оптимізації.

Штрафна функція визначається виразом

$$F(\bar{u}) = f(\bar{u}) + P\big(r, g(\bar{u}), h(\bar{u})\big) \qquad (8.2)$$

де r - набір штрафних параметрів.

Функція $PP\big(r, g(\bar{u}), h(\bar{u})\big)$ називається штрафом.

Розрізняють два методи штрафних функцій – метод внутрішньої точки (бар’єрних точок) та метод зовнішньої точки.

Метод внутрішньої точки (бар’єрних точок)

Розглянемо графічну інтерпретацію задачі на прикладі.

Приклад: $f(u) = u \to \min_u, \; u - 2 \leq 0$.

Графічно задачу зображено на рис. 5.17.

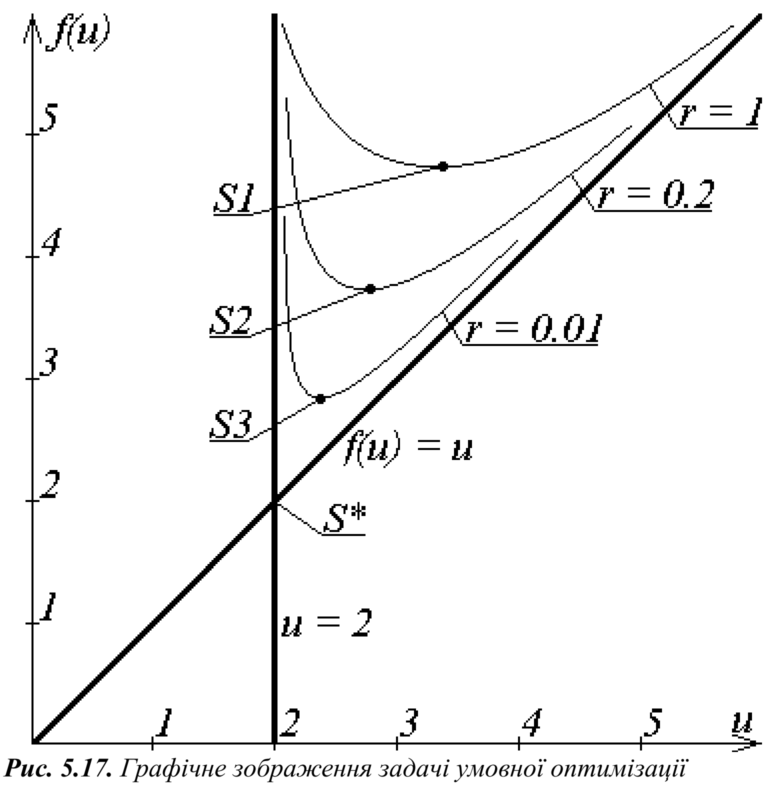


Рис. 5.17. *Графічне зображення задачі умовної оптимізації*

Складемо штрафну функцію: $F(u) = u + \dfrac{r}{u-2}$. Лінії рівня для r = 1; 0,2; 0,01 зображені на рис. 5.17.

Легко бачити, що послідовність точок S_1, S_2, S_3 прямують до точки S^* - мінімуму функції за наявністю обмежень.

Таким чином, задача з обмеженнями перетворюється у послідовність підзадач безумовної оптимізації.

При розв'язуванні задачі необхідно обрати початкове значення штрафного параметра r та змінювати його після кожної під задачі безумовної оптимізації так, щоб забезпечити збіжність послідовності стаціонарних точок $\vec{u}^{(k)}$ до оптимального значення.

__Недоліки метода:__

1. Необхідність пошуку допустимої точки, щоб використати її у якості початкової.

2. Штрафна функція $\mathrm{F}(\vec{u})$ має чітко виражену «яружну» структуру при малих r_k, що ускладнює рішення задач безумовної оптимізації $\mathrm{F_k}(\vec{u})$.

3. Метод призначений для рішення задач нелінійного програмування з обмеженнями типу нерівності.

Метод передбачає побудову штрафів таким чином, щоб при наближенні вектора $\vec{u} \in \mathrm{V}_u$ до границі області V_u величина $\mathrm{P}(\vec{u}, r)$ необмежено зростає.

Траєкторія пошуку мінімуму, якщо пошук почався з внутрішньої точки, повністю буде лежати у V_u. Звідси і назва метода. Границя області V_u є своєрідним бар'єром, який неможна перейти у процесі пошуку. Звідси друга назва метода.

Для задачі

$$f(\vec{u}) \to \min_{\vec{u}},\ g_{\mathrm{i}}(\vec{u}) \ge 0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}$$

$$P(\vec{u}, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\vec{u})} \tag{8.3}$$

$$P(\vec{u}, r_k) = -r_k \sum_{i=1}^{m} \ln g_i(\vec{u}) \tag{8.4}$$

$$f(\vec{u}) \to \min_{\vec{u}},\ g_{\mathrm{i}}(\vec{u}) \le 0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}$$

у якості штрафу може бути використано

$$P(\vec{u},\ r_k) = \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{m} \left(g_i(\vec{u})\right)^2,$$

де $g_i(\vec{u}) = \max\{0,\ g_i(\vec{u})\},\ \overline{\mathrm{i}=1,\mathrm{m}}$.

Алгоритм оптимізації методом штрафних функцій:

1. Задання вихідних величин.

2. Побудувати $F(\vec{u},\ r_k)$.

3. Знайти $\vec{u}^{(k)} = \arg\min_{\vec{u}} F(\vec{u},\ r_k)$ при фіксованому r_k з використанням метода безумовної оптимізації.

4. Перевірити умову

$$\left|F\left(\vec{u}^{(k+1)},\ r_k\right) - F\left(\vec{u}^{(k)},\ r_k\right)\right| \le \varepsilon_3,$$

а також, можливо

$$\left\|\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^{k}\right\| < \varepsilon_4,$$

$$\left|f\left(\vec{u}^{k+1}\right) - f\left(\vec{u}^{k}\right)\right| < \varepsilon_5,$$

$$\left|r_{k+1} - r_k\right| < \varepsilon_6.$$

Умови виконуються: Кінець.

Умови не виконуються: Перехід до наступного кроку.

5. $r_{k+1} = r_k + \Delta r_k$. Перехід до кроку 2.

Комбіновані алгоритми методу штрафних функцій

Перетворена цільова функція може бути представлена у наступному вигляді:

$$f(\vec{u}) \to \min_{\vec{u}},\ g_i(\vec{u}) \le 0,\ i=\overline{1,m}$$

у якості штрафу може бути використано

$$P(\vec{u},\ r_k) = \frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{m}\left(g_i(\vec{u})\right)^2, \tag{8.5}$$

де $g_i(\vec{u}) = \max\{0,\ g_i(\vec{u})\},\ \overline{i=1,m}$.

Метод зовнішньої точки

Метод передбачає побудову штрафів таким чином, щоб значення перетвореної цільової функції $F(\vec{u},\ r)$ у допустимій області точно або наближено дорівнювали початковій цільовій функції $f(\vec{u})$, а зовні допустимої області – значно перевищували значення $f(\vec{u})$.

Для задачі

$$f(\vec{u}) \to \min_{\vec{u}\in V_u},\ Vu = \left\{\vec{u} \in R^m \middle| h_j(\vec{u}) = 0,\ j=\overline{1,m}\right\}$$

можуть бути використані наступні штрафи:

$$P(\vec{u},\ r_k) = \frac{1}{r_k}\sum_{j=1}^{m} h_j(\vec{u}); \tag{8.6}$$

$$P(\vec{u},\ r_k) = \frac{1}{r_k}\sum_{j=1}^{m}\left|h_j(\vec{u})\right|^P, \tag{8.7}$$

де P – довільне фіксоване число.

безумовної оптимізації.

$$\mathrm{F}(\vec{u}) = f(\vec{u}) - r_k \sum_{j=1}^{m1} \frac{1}{g_i(\vec{u})} + \frac{1}{r_k} \sum_{i=1}^{m2} h_i^2(\vec{u}) \quad (8.8)$$

2.Багатокритеріальна оптимізація

Найбільш поширеним евристичним прийомом вирішення тієї чи іншої конкретної багатокритеріальної задачі є її зведення до рішення деякої скалярної (однокритеріальної) задачі, цільова функція якої найчастіше являє собою певну комбінацію наявних критеріїв $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Такий прийом носить назву скаляризації багатокритеріальної задачі. Залежно від способу комбінування наявних декількох критеріїв в єдиний скалярний, отримуємо той чи інший тип скаляризації, який обираємо виходячи із суті розв'язуваної задачі і наявності додаткової інформації про переваги.

Найпростіший спосіб скаляризації заснований на використанні так званої лінійної згортки критеріїв:

$$F_l(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i * f_i(x) \to min,$$

$$\alpha_i \geq 0, i=1,\ldots m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

На практиці процес скаляризації починають з підбору коефіцієнтів лінійної згортки, тобто чисел $\alpha_i, i=1,\ldots,m.$ Ці числа трактують, як якісь «ваги» або «коефіцієнти важливості» відповідних критеріїв, так що більш важливому з них призначають більший коефіцієнт в лінійній згортці критеріїв, а менш важливому менший.

Даний метод зручний у використанні, бо дозволяє зберегти лінійність вихідних функцій. Іншими словами, коли вихідні критерії лінійні, тоді результуючий критерій також буде лінійним.

Але метод має недоліки:

1. Низьку оцінку по одному критерію можна компенсувати високою оцінкою по-іншому.
2. Не завжди вдається коректно оцінити вагу критеріїв. [5]

2.1.Зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної

Зведемо багатокритеріальну задачу до однокритеріальної за допомогою методу лінійної згортки.

Математична модель задачі багатокритеріальної оптимізації, представляє собою чотирикомпонентну сумішеву систему, яка складається із двох полімерів та двох модифікуючих добавок, одна з яких знаходиться у наностані. x_1, x_2, x_3, x_4 – відповідно вмісти компонентів суміші. На вміст компонентів в суміші накладено обмеження. Контроль якості отриманого полімерного композиту відбувається за наступними показниками:

y_1 –середній діаметр мікроволокон;

y_2 – масова частка безперервних волокон;

y_3 –фільєрна витяжка.

І має наступний вигляд:

$$y_1 = 3.12 * x_1 + 3.16 * x_2 + 3.09 * x_3 + 1.04 * x_4 + 3.24 * x_1 * x_2 + 3 * x_1 * x_3 - 3.23 * x_1 * x_4 - 24.5 * x_2 * x_3 - 2.42 * x_2 * x_4 - 4.7 * x_3 * x_4 - 74.03 * x_1 * x_2 * x_3 - 16.3 * x_1 * x_2 * x_4 + 0.54 * x_1 * x_3 * x_4 + 151.26 * x_2 * x_3 * x_4 \to min$$

$$y_2 = 63.9 * x_1 + 61.5 * x_2 + 64.2 * x_3 + 48.7 * x_4 + 73 * x_1 * x2 + 69.1 * x_1 * x_3 + 92.275 * x_1 * x_4 + 152.7 * x_2 * x_3 + 49.136 * x_2 * x_4 + 149.54 * x_3 * x_4 + 1764 * x_1 * x_2 * x_3 - 89 * x_1 * x_2 * x_4 + 34.7 * x_1 * x_3 * x_4 + 379.18 * x_2 * x_3 * x_4 \to max$$

$$y_3 = 8365.5 * x_1 + 8344.1 * x_2 + 8460.2 * x_3 + 9780.7 * x_4 + 8613.1 * x_1 * x_2 + 8599.4 * x_1 * x_3 + 11149.9 * x_1 * x_4 + 36824.3 * x_2 * x_3 + 13952 * x_2 * x_4 + 20227.5 * x_3 * x_4 + 168363 * x_1 * x_2 * x_3 + 18664 * x_1 * x_2 * x_4 + 4166.2 * x_1 * x_3 * x_4 - 311057 * x_2 * x_3 * x_4 \to max$$

$$0.2 \leq x_1 \leq 0.35$$
$$0.65 \leq x_2 \leq 0.8$$
$$0.001 \leq x_3 \leq 0.01$$
$$0.01 \leq x_4 \leq 0.04$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Задаємо вагові коефіцієнти, які визначають ступінь важливості кожного критерію:

$$\alpha_1 = 0.34$$
$$\alpha_2 = 0.33$$
$$\alpha_3 = 0.33$$

Враховуючи, що всі цільові функції потрібно мінімізувати, для цього ті функції, що прямують до максимуму були перетворені на функції, що прямують до мінімуму, за наступною формулою $min\, y = -max(y)$.

Мінімізуємо лінійну комбінацію цільових функцій, тобто розв'язуємо задачу:

$$F = \alpha_1 * y_1 + \alpha_2 * y_2 + \alpha_3 * y_3 \rightarrow min$$

Одержуємо математичну модель задачі однокритеріальної оптимізації наступного вигляду:

$$\begin{gathered} F = -2780.6412 * x_1 - 2772.7736 * x_2 - 2812.0014 * x_3 - 3243.3484 * x_4 \\ - 2865.3114 * x_1 * x_2 - 2859.585 * x_1 * x_3 - 3711.01595 * x_1 * x_4 \\ - 12210.74 * x_2 * x_3 - 4621.19768 * x_2 * x_4 - 6726.0212 * x_3 * x_4 \\ - 56167.0802 * x_1 * x_2 * x_3 - 6135.292 * x_1 * x_2 * x_4 - 1386.1134 \\ * x_1 * x_3 * x_4 + 102575.109 * x_2 * x_3 * x_4 \rightarrow min \\ 0.2 \leq x_1 \leq 0.35 \\ 0.65 \leq x_2 \leq 0.8 \\ 0.001 \leq x_3 \leq 0.01 \\ 0.01 \leq x_4 \leq 0.04 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{gathered}$$

Отримана в результаті однокритеріальна задача оптимізації представляє собою задачу умовної оптимізації (так як містить обмеження на змінні), і потребує подальшого розв'язання за допомогою методу штрафних функцій, що буде наведено у відповідному розділі.

2.3.Однокритеріальна оптимізація системи

Задача однокритеріальної оптимізації формулюється наступним чином: мінімізувати задану функцію $f(x): X \rightarrow R$, де X – область допустимих значень функції f.

Пошук рішень в однокритеріальних задачах (задачах скалярної оптимізації) залежить від виду математичної моделі і опису її виразів. Це можуть бути наступні задачі оптимізації:

- пошуку екстремуму алгебраїчної функції – залежності критерію від параметрів системи $K=f(x)$. Для задачі із плавною зміною функції екстремум знаходиться диференціюванням. Рішення– конкретне чисельне значення;
- варіаційного числення, якщо критерій описується функціоналом, тобто інтегралом від виразу, який залежить від параметрів, їх функції і похідних. Рішення має вигляд функціональної залежності (аналітичного рівняння);

- лінійного програмування, коли критерій та умови, які накладаються на розв'язання задачі, є лінійними функціями параметрів (рівності або нерівності). Рішення – чисельне значення;
- нелінійного програмування;
- пошуку варіантів рішень методами часткового чи повного перебору.

До переваг скалярної оптимізації можна віднести: відносну простоту; наявність розроблених і випробуваних методик; наявність прикладних пакетів програм.

До недоліків відносяться наступні: чутливість до порушення передумов (умов правильного застосування); не працює при наявності багатьох критеріїв оптимізації; не охоплює слабо характеризуючі задачі, що вимагають участі людини.

Задачі однокритеріальної оптимізації діляться на задачі умовної (шукається оптимальне рішення, що задовольняє деякі обмеження й цільову функцію) і безумовної (коли шукається оптимальне рішення, що задовольняє цільову функцію) оптимізації.

3.Множина Парето

Відома множина f цільових функцій $f_j(\bar{x})$, заданих на множині D, де

$$f = \left\{ f_j(\bar{x}) \,\middle|\, j = \overline{1,n};\ x \in D \right\}$$

$$D = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, x^{-} \le x \le x^{+} \right\}$$

Знайдемо таку множину Г значень $\bar{x}^* \in D$, яка ділить початкову множину D на дві множини: множина П і множина $\overline{D}$, де

$$\Pi \bigcup \overline{D} = D; \Pi \bigcap \overline{D} = 0 \quad (3)$$

Множина П складається з таких значень $\bar{x}_{k_1} \in D$, для яких для всіх $j = \overline{1,n}$ виконується умова

$$f_j(\bar{x}_{k_1}) \ge f_j(\bar{x}^*) \quad (4)$$

Множина П визначається співвідношенням

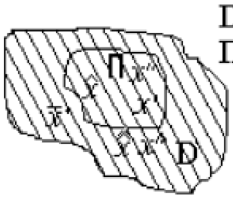
$$\Pi = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, \bar{x} = \bar{x}_{k_1};\ \bar{x}_{k_1} \in D;\ f_j(\bar{x}_{k_1}) \ge f_j(\bar{x}^*);\ j = \overline{1,n} \right\}$$

Множина $\overline{D}$ складається з таких $\bar{x}_{k_2} \in D$, для яких хоч би для однієї функції $f_j(\bar{x}_{k_2})$ виконується умова $f_j(\bar{x}_{k_2}) > f_j(\bar{x}^*)$. Множина $\overline{D}$ описується таким чином

$$D = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, \bar{x} = \bar{x}_{k_2};\ \bar{x}_{k_2} \in D;\ f_j(\bar{x}_{k_2}) < f_j(\bar{x}^*);\ j = [1,n] \right\}$$

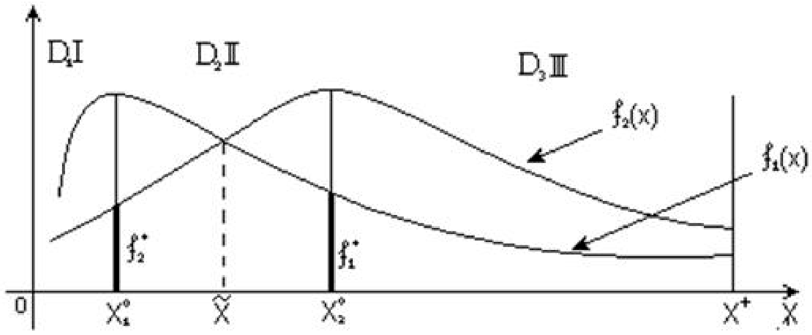
Вектор $\bar{x}^* \in D$ прийнято називати вектором непокращуваних для множини f результатів, а множину Π, що задовольняє умові (4), називають множиною Парето.

Через умову (4) множина Γ є межею множини Парето. У відповідності з (3) маємо $\overline{D} = D \setminus n$.



Тому всі варіанти, які належать $\overline{D}$, виключаються з розгляду.

<u>Приклад.</u>Хай потрібно виділити множина Парето в області $D \in [0, x^{+}]$



Розіб'ємо задану множину D на три множини: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. $D_1 \in [0, x_1^0)$

де, x_2^0 точка значення x, при якому $f_1(x)$ досягає максимуму

$f_1(x_1^0) = \max_{x \in D} f(x)$, $x \in [0, x_1^0)$

$D_2 \in [x_1^0, x_2^0]$, де x_2^0 таке значення x , при якому $f_2(x)$ досягає максимуму

$f_2(x_2^0) = \max_{x \in D} f(x)$, $x \in [x_1^0, x_2^0]$.

$D_3 \in (x_2^0, x^{+})$. Порівнюючи значення функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$ у областях D_1 та D_2 , маємо $f_2(x)|_{x \in D_1} < f_2(x)|_{x \in D_2}$ тобто значення функції $f_2(x)$ для будь-якого $x \in D_1$ менше, ніж значення $f_2(x)$ для будь-якого $x \in D_2$.
Для $f_1(x)$ маємо $f_1(x)|_{x \in D_1} \leq f_1(x)|_{x \in D_2}$ (соїзмеріми), тобто область D_1 свідомо гірше за область D_2 по цільовій функції $f_2(x)$.

Аналогічно, для області D_3 значення функції $f_1(x)$ для будь-якого $x \in D_3$ менше, ніж значення $f_1(x)$ для будь-якого $x \in D_2$, тобто $f_1(x)|_{x \in D_3} < f_1(x)|_{x \in D_2}$. А для $f_2(x)$ маємо $f_2(x)|_{x \in D_3} \leq f_2(x)|_{x \in D_2}$ (соїзмеріми), тобто область D_3 свідомо гірше за область D_2 по цільовій функції $f_1(x)$. Таким чином, з області D виключається область D_1 і область D_3 . Область D_2 є множиною Парето. Для даної області виконуються критерії:

$f_1(x)|_{x \in D_2} \geq f_1^{+}$

$f_2(x)|_{x \in D_2} \geq f_2^+$.

Відповідно до принципу Парето раціональне рішення модельної задачі (раціональний компроміс в багатоцільовому завданні) необхідно шукати серед X , що належать множині Парето. Принцип Парето не виділяє єдиного рішення, але він дозволяє звузити множина можливих альтернативних рішень. У даному прикладі раціональне рішення необхідно шукати в області D_2 . Але питання про те, яке рішення (або яке значення $x \in D_2$) є оптимальним - залишається відкритим.

У всіх даних випадках множина Парето дозволяє отримати додаткову інформацію, яка дає якісну оцінку при зіставленні різних варіантів. На розглянутому прикладі видно, що в крапці $\tilde{x}$ має місце рівність

$f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$.

Який з розглянутих варіантів є переважним визначає ЛПР. Якщо ЛПР вважає, що критерії рівносильні, то раціональним є варіант $\tilde{x}$, коли $f_1(\tilde{x}) = f_2(\tilde{x})$. Якщо важливішою є мета $f_1(x)$, то, очевидно, раціональне рішення лежить в інтервалі $[x_1^0, \tilde{x})$. Якщо важливішою є мета $f_2(x)$, то раціональне рішення лежить в інтервалі $(x, x_2^0]$. Проте, в двох останніх випадках конкретний ступінь переваги єдиній меті над іншою залишається суб'єктивною мірою ЛПР.