

УДК 629.3.025

¹В.В. Чиковани, д.т.н.

²В.Г. Цирук, к.т.н.

³С.П. Маляров

⁴Ю.Н. Кохан

СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА КОРИОЛИСОВОГО ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА

¹Национальный авиационный университет, e-mail:chikovani-valeriy@rambler.ru

^{2,3,4}ВАТ КЗА им. Г.И.Петровского

В работе анализируется система стабилизации амплитуды колебаний вибрационного гироскопа с металлическим цилиндрическим резонатором. Показана слабая чувствительность запасов по фазе и амплитуде системы к изменению таких параметров резонатора как добротность, резонансная частота и коэффициент преобразования пьезокерамических электродов.

Ключевые слова: кориолисовый вибрационный гироскоп, резонатор, система стабилизации, регулятор.

Ведение

Кориолисовый вибрационный гироскоп (КВГ) может иметь два режима работы: режим измерения угловой скорости и режим измерения угла поворота (режим интегрирующего гироскопа).

Принцип работы КВГ в режиме измерения угловой скорости состоит в том, что в цилиндрическом резонаторе (возможны и другие геометрии резонатора), возбуждается радиальная упругая стоячая волна на второй (эллиптической) моде колебаний, которая характеризуется четырьмя пучностями (максимумы) и четырьмя узлами (минимумы) колебаний. При вращении резонатора вокруг оси симметрии цилиндра возникает сила Кориолиса равная $F_c = 2mV\Omega$, где $V=A_0\omega_r\sin(\omega_r t)$ – линейная скорость элементарных масс резонатора в процессе вибраций, A_0 – амплитуда вибраций, ω_r – резонансная частота второй моды колебаний резонатора, Ω – измеряемая угловая скорость вращения. Сила Кориолиса измеряется и подается в систему управления волной КВГ, которая вырабатывает сигнал обратной связи так, что колебания, вызванные силой Кориолиса, демпфируются, а амплитуда сигнала обратной связи, которая демпфирует кориолисовые колебания, пропорциональна угловой скорости.

Как видно из приведенных соотношений сила Кориолиса модулирована по амплитуде измеряемой угловой скоростью, при этом, резонансная частота является несущим сигналом. Сила Кориолиса пропорциональна угловой скорости при условии, что амплитуда колебаний A_0 постоянная.

Настоящая работа посвящена анализу системы стабилизации амплитуды колебаний резонатора КВГ. Показана низкая чувствительность системы к изменению таких параметров резонатора как добротность, резонансная частота и коэффициент преобразования пьезокерамических электродов, которые могут изменяться от температуры и других факторов окружающей среды. Задача осложняется тем, что при наличии в системе управления модулятора и демодулятора система является нелинейной. Поэтому система сначала линеаризуется и анализ проводится на линеаризованной системе.

Цель работы

Цель работы состоит в том, чтобы показать, что при настройке регулятора системы стабилизации амплитуды колебаний резонатора КВГ на полосу частот 100-150 Гц, система сохраняет слабую чувствительность к изменению параметров резонатора (управляемого объекта), т.е. обладает свойством робастности и, следовательно, будет устойчиво работать при температурных и других колебаниях параметров объекта управления.

Результаты исследования

Уравнения динамики и линеаризация передаточной функции. Модель динамики резонатора КВГ, представленную в виде уравнений (1), назовем обобщенной моделью [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2k\Omega\dot{y} + c_{11}\dot{x} + c_{12}\dot{y} + k_{11}x + k_{12}y &= f_x \\ \ddot{y} + 2k\Omega\dot{x} + c_{21}\dot{x} + c_{22}\dot{y} + k_{21}x + k_{22}y &= f_y \end{aligned} \quad (1)$$

где x – координата отклонения элементов масс резонатора по оси возбуждения, y – координата отклонения элементов масс резонатора по оси кориолисовых колебаний, k – коэффициент Брайана, примерно равный 0.4, c_{11} – коэффициент демпфирования колебаний по оси возбуждения, c_{12} – перекрестное демпфирование, $k_{11}=\omega_l^2$ – квадрат резонансной частоты по оси возбуждения, k_{12} – перекрестная жест-

кость, $c_{21}=c_{12}$, c_{22} – коэффициент демпфирования колебаний по оси кориолисовых колебаний, $k_{21}=k_{12}$, $k_{22}=\omega_2^2$ – квадрат собственной частоты по оси кориолисовых колебаний.

Уравнения (1) описывают колебания моды возбуждения (первое уравнение) и кориолисовой моды (второе уравнение). Они называются уравнениями в «быстрых» переменных, так как отклонения x и y от равновесного положения резонатора по обеим осям колебаний происходят с резонансными частотами, которые в реальном резонаторе немного отличаются ($\omega_1 \neq \omega_2$), из-за погрешностей изготовления резонатора.

Так как сигналы x и y , поступающие с резонатора являются амплитудно-модулированными, при этом, несущая является резонансной частотой, а угловая скорость огибающая (модулирующая), то для измерения угловой скорости необходимо демодулировать сигналы, поступающие с резонатора. Демодулированные компоненты сигналов имеют малую частоту, поэтому уравнения динамики для демодулированных сигналов называют уравнениями динамики в «медленных» переменных. Поведение именно медленных (т.е. демодулированных) переменных определяют точностные характеристики КВГ. По медленным переменным формируются управляющие сигналы, но перед тем, как подать их на резонатор они вновь модулируются резонансной частотой нужной фазы. Так как система управления с модулятором и демодулятором является нелинейной, то анализировать такие уравнения сложно и, как правило, результаты не обладают наглядностью. Кроме того, использовать стандартные методы настройки регулятора нелинейной системы невозможно, что приводит к дополнительным сложностям практической реализации системы управления. Однако, кроме начального переходного процесса, который начинается при подаче напряжения на КВГ, резонатор работает на резонансной частоте, а на регулятор поступают демодулированные, т.е. медленно изменяющиеся сигналы. При работе с медленно изменяющимися сигналами, система управления оказывается линейной. Чтобы показать это и получить линейную передаточную функцию резонатора с включенным в него модулятором и демодулятором, получим уравнения динамики резонатора в медленных переменных.

Для вывода уравнений для медленных переменных введем преобразование быстрых переменных x , y в медленные X , Y , каждая из которых имеет синусную компоненту X_s , Y_s и косинусную компоненту X_c , Y_c [2]:

$$\begin{aligned} x &= X_s \sin(\omega t) + X_c \cos(\omega t); \\ y &= Y_s \sin(\omega t) + Y_c \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (2)$$

После дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega[X_s \cos(\omega t) - X_c \sin(\omega t)] + \dot{X}_s \sin(\omega t) + \dot{X}_c \cos(\omega t); \\ \dot{y} &= \omega[Y_s \cos(\omega t) - Y_c \sin(\omega t)] + \dot{Y}_s \sin(\omega t) + \dot{Y}_c \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (3)$$

Условие установления стоячей волны в резонаторе записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}_s \sin(\omega t) + \dot{X}_c \cos(\omega t) &= 0; \\ \dot{Y}_s \sin(\omega t) + \dot{Y}_c \cos(\omega t) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом этого условия первые и вторые производные по времени быстрых переменных имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega[X_s \cos(\omega t) - X_c \sin(\omega t)]; \\ \dot{y} &= \omega[Y_s \cos(\omega t) - Y_c \sin(\omega t)]; \\ \ddot{x} &= -\omega^2[X_s \sin(\omega t) + X_c \cos(\omega t)] + \omega[X_s \cos(\omega t) - X_c \sin(\omega t)]; \\ \ddot{y} &= -\omega^2[Y_s \sin(\omega t) + Y_c \cos(\omega t)] + \omega[Y_s \cos(\omega t) - Y_c \sin(\omega t)]; \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь подставим (5) в (1), после преобразований и усреднения по периоду быстрых колебаний, с учетом того, что за период быстрых колебаний медленные переменные практически не изменяются, и следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t dt &= 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt = 0; \quad \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt &= \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

получим четыре дифференциальных уравнения первого порядка для медленных переменных:

$$\begin{aligned} \dot{X}_s &= -\frac{c_{11}}{2} X_s - \frac{k_{11} - \omega^2}{2\omega} X_c - \frac{c_{12} - 2k\Omega}{2} Y_s - \frac{k_{12}}{2\omega} Y_c + \frac{F_{xc}}{2\omega}, \\ \dot{X}_c &= \frac{k_{11} - \omega^2}{2\omega} X_s - \frac{c_{11}}{2} X_c + \frac{k_{12}}{2\omega} Y_s - \frac{c_{12} - 2k\Omega}{2} Y_c - \frac{F_{xs}}{2\omega}, \\ \dot{Y}_s &= -\frac{c_{21} - 2k\Omega}{2} X_s - \frac{k_{21}}{2\omega} X_c - \frac{c_{22}}{2} Y_s - \frac{k_{22} - \omega^2}{2\omega} Y_c + \frac{F_{yc}}{2\omega}, \\ \dot{Y}_c &= \frac{k_{21}}{2\omega} X_s - \frac{c_{21} - 2k\Omega}{2} X_c + \frac{k_{22} - \omega^2}{2\omega} Y_s - \frac{c_{22}}{2} Y_c - \frac{F_{ys}}{2\omega}, \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь F_{xc} , F_{xs} , F_{ys} , F_{yc} – амплитуды косинусной и синусной компонент сил f_x и f_y действующих на резонатор со стороны электродов возбуждения и компенсации силы Кориолиса, соответственно.

Заметим, что при работе на резонансной частоте $k_{11}=k_{22}=\omega_r^2$ и при отсутствии погрешностей изготовления резонатора, т.е. когда $k_{12}=k_{21}=0$ и $c_{12}=c_{21}=0$, получим простое уравнение, которое после применения преобразования Лапласа определяет линейную передаточную функцию резонатора. Так как первое уравнение системы (7) определяет амплитуду возбуждения, то из первого уравнения следует:

$$\dot{X}_s = -\frac{c_{11}}{2} X_s + \frac{F_{xc}}{2\omega}, \rightarrow \frac{\Im\{X_s\}}{\Im\{F_{xc}\}} = \frac{1}{s + \frac{c_{11}}{2}} = \frac{Q}{\omega_r^2} \frac{P_0}{\omega_r s + 1} \quad (8)$$

Здесь $\Im\{X_s\}$ и $\Im\{F_{xc}\}$ – преобразования Лапласа соответствующих функций. Кроме того, использовались соотношения $c_{11}=2/\tau$ и $\tau=2Q/\omega_r$, Q – добротность резонатора, и введен дополнительно коэффициент P_0 , характеризующий коэффициент преобразования пьезокерамики. Теперь выражение (8) для линеаризованной передаточной функции чувствительного элемента КВГ совпадает с аналогичным выражением из работы [3], полученным другим способом.

Значение P_0 определяется по экспериментальным данным путем вычисления отношения R входного напряжения $V_{вх}(t)=F_{xc}(t)$, подаваемого на пьезоэлектрод возбуждения к выходному напряжению $V_{вых}(t)$ которое поступает на демодулятор. Из практики известно, что $V_{вх}/V_{вых}=R=0.3-0.7$ и изменяется от резонатора к резонатору. С учетом этого для коэффициента P_0 , можно записать следующее соотношение:

$$\frac{QP_0}{\omega_r^2} = R \rightarrow P_0 = \frac{\omega_r^2}{Q} R = \frac{(2.5 \cdot 10^4)^2}{3 \cdot 10^4} (0.3 \div 0.7) = (0.6 \div 1.4) \cdot 10^4 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)^2 \quad (9)$$

Расчеты проведены для значений резонансной частоты $\omega_r=2.5 \cdot 10^4$ рад/с ($f=4$ кГц) и добротности $Q=3 \cdot 10^4$. В связи с тем, что эти параметры могут варьироваться от образца к образцу в достаточно широких пределах, особенно добротность, то систему управления следует проектировать так, чтобы она была слабо чувствительна к изменению параметров управляемого объекта, т.е. обладала свойством робастности.

Система стабилизации амплитуды колебаний. Получив линеаризованную модель резонатора с демодулятором и модулятором, приступим к проектированию регулятора, передаточную функцию которого обозначим $G(s)$. Он будет удерживать амплитуду колебаний резонатора на стабильном и наперед заданном значении A_0 . Прежде всего, отметим, что реальная система управления реализуется в цифровом виде. При этом, для того чтобы результаты аналогового моделирования, которые будут представлены в этой работе, могли использоваться для построения цифровой системы необходимо выбирать частоту дискретизации намного превышающую частоту, которую требует теорема Найквиста о дискретизации. Для резонаторов с резонансной частотой 4-6 кГц, теорема Найквиста требует минимальную частоту дискретизации 8-12 кГц. Так что, если выбрать частоту дискретизации 100 кГц (т.е. на порядок больше), то результаты, полученные для аналоговой системы будут близки к цифровой.

Систему стабилизации амплитуды колебаний резонатора построим по принципу автоматической регулировки усиления (АРУ). На рис.1 представлена система стабилизации амплитуды колебаний резонатора КВГ с модулятором и демодулятором.

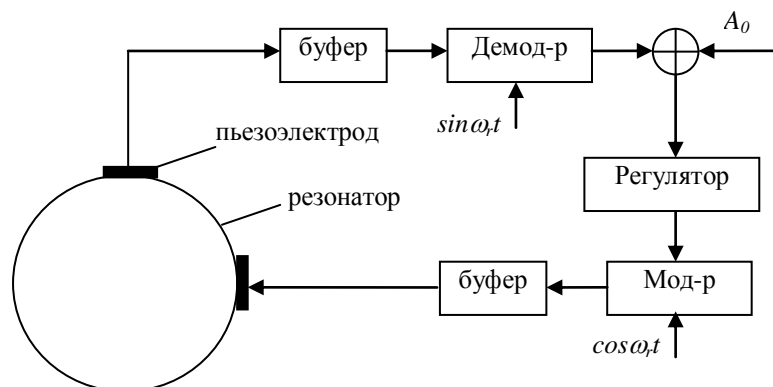


Рис.1. Блок схема системы стабилизации амплитуды колебаний резонатора КВГ.

Эту схему можно представить в форме, представленной на рис.2 удобной для анализа методами теории автоматического управления.

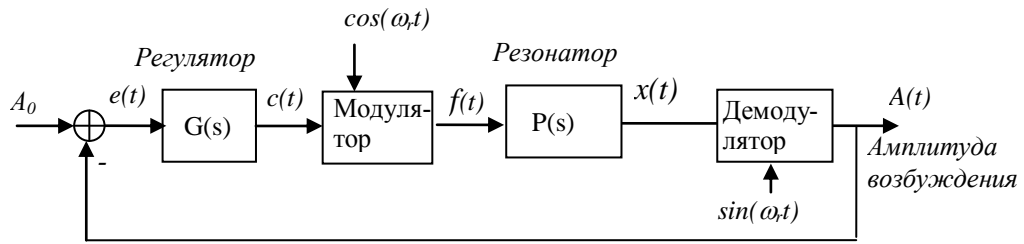


Рис.2. Формализованная блок схема системы управления амплитудой.

Цепь отрицательной обратной связи управляется регулятором $G(s)$ и стабилизирует амплитуду колебаний на значении A_0 . Для определения передаточной функции контроллера, т.е. закона управления, необходимо знать как изменения в сигнале, подаваемом на возбуждение, повлияют на амплитуду колебаний резонатора. Другими словами, необходимо резонатор, демодулятор и модулятор заменить одним блоком $H(s)$, передаточная функция которого определяется выражением (8). Такая замена представлена на рис.3.

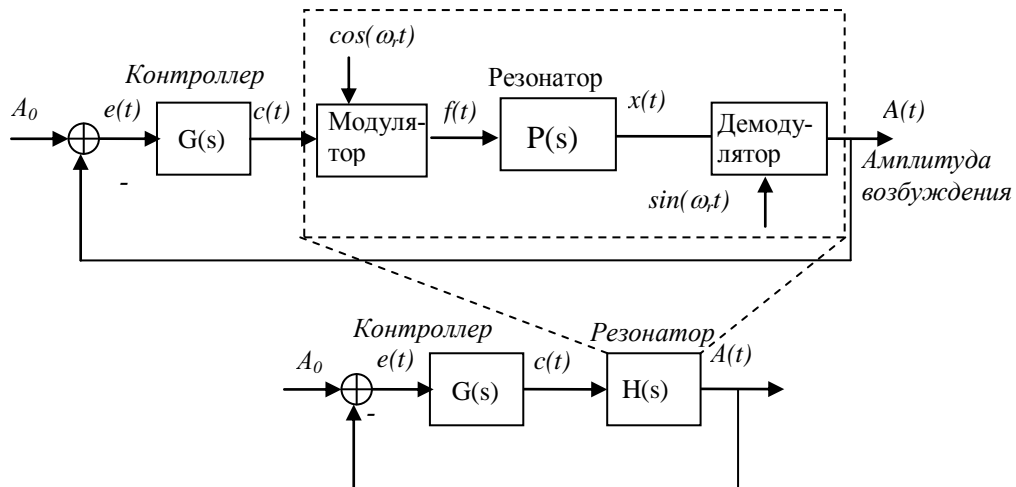


Рис.3. Приведенная схема системы стабилизации амплитуды.

Таким образом, структурная схема АРУ с регулятором в виде пропорционального и интегрирующего (ПИ) звена управления представляется так, как показано на рис. 4.

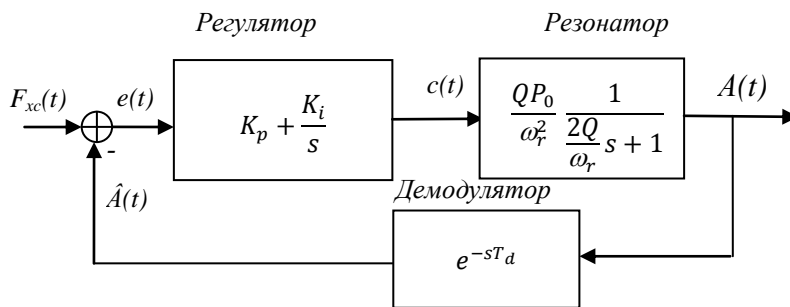


Рис.4. Структурная схема АРУ с ПИ регулятором.

ПИ регулятор обладает, в данном применении, двумя преимуществами. Одно из них состоит в том, что он обнуляет систематическую составляющую погрешности стабилизации и, таким образом, минимизирует смещение нуля гироскопа. Второе преимущество состоит в том, что ПИ регулятор может компенсировать добавочный полюс системы путем введения нуля на высокой частоте, для увеличения полосы пропускания гироскопа. В структурной схеме, представленной на рис.4, введено дополнительное звено временной задержки $D(s)=e^{-sT_d}$, которое учитывает динамику демодулятора. Так как демодулятор содержит фильтр низких частот, который приводит к фазовому запаздыванию, то время запаздывания пропорционально запаздыванию по фазе $T_d = \Delta\phi/\omega$. В цифровом варианте АРУ, время задержки T_d складывается из двух компонентов: время выполнения вычислительных операций по алгоритму демодуляции и времени обусловленном фазовой задержкой фильтра. Время выполнения вычислительных операций зависит от частоты системных часов процессора, обычно это несколько десятков мегагерц (20-25 МГц), количеством вычислительных операций, которое зависит от слож-

ности алгоритма демодуляції. Для класического алгоритма, состоящего из операции умножения на опорную частоту и фильтра низких частот четвертого порядка с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) составляет 5 тактов системной частоты, т.е. $5/(20 \cdot 10^6) = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 0.25 \text{ мкс}$. Время задержки фильтра определяется частотой f_s дискретизации АЦП, что значительно ниже частоты системных часов, и порядком фильтра. Для $f_s = 100 \text{ кГц}$ и порядка БИХ фильтра $N=4$ получим $T_d = 4/10^5 \text{ с} = 40 \text{ мкс}$, а для КИХ (конечная импульсная характеристика) фильтра $(N-1)/2$, где N равен порядку КИХ-фильтра, для $N=21$ и $f_s=100 \text{ кГц}$, получим $T_d=100 \text{ мкс}$. Из этих оценок ясно, что в цифровом варианте АРУ время задержки определяется в основном порядком фильтра и частотой работы АЦП. Так как от времени задержки зависит устойчивость системы управления, то следует тщательно выбирать частоту дискретизации АЦП и сложность алгоритмов обработки так, чтобы сохранить устойчивость системы управления и получить достаточную точность при вычислении параметров управляющих сигналов.

Задача состоит в том, чтобы выбрать два коэффициента K_i и K_p так, чтобы система удовлетворяла заданным техническим требованиям. Передаточная функция разомкнутой системы, представленной на рис.4, запишется в виде:

$$L(s) \approx \frac{Q P_0 K_i}{\omega_r^2} \frac{K_p s + 1}{s \left(\frac{2Q}{\omega_r} s + 1 \right)} e^{-s T_d} \quad (10)$$

Из этого выражения видно, что путем выбора двух коэффициентов K_i и K_p можно управлять коэффициентом усиления системы и расположением нуля системы.

Так как резонаторы при производстве имеют разброс параметров, кроме того, их параметры могут изменяться со временем и от температуры, то важно определить запасы устойчивости (по фазе и амплитуде) и рассмотреть наихудшие случаи их изменения, чтобы гарантировать стабильность системы управления в условия эксплуатации. Чтобы гарантировать стабильность работы системы стабилизации в условиях эксплуатации и от времени, выберем коэффициенты регулятора так, чтобы полоса пропускания системы была 100 Гц, а запасы по фазе и амплитуде не менее 45° и 20 дБ, соответственно.

На рис.5 представлена диаграмма Бode АРУ с параметрами: $\omega_r = 25132,74 \text{ рад/с}$; $Q = 3 \cdot 10^4$; $P_0 = 10^4$, $T_d = 10^{-4} \text{ с}$, $K_p = 4000$, $K_i = 500$, обеспечивающие полосу пропускания по входу-выходу не менее 100 Гц, а запасы устойчивости по амплитуде и фазе равны соответственно A_m - неопределенно большое значение, $\varphi_m = 175 \text{ град.}$, перерегулирование равно нулю.

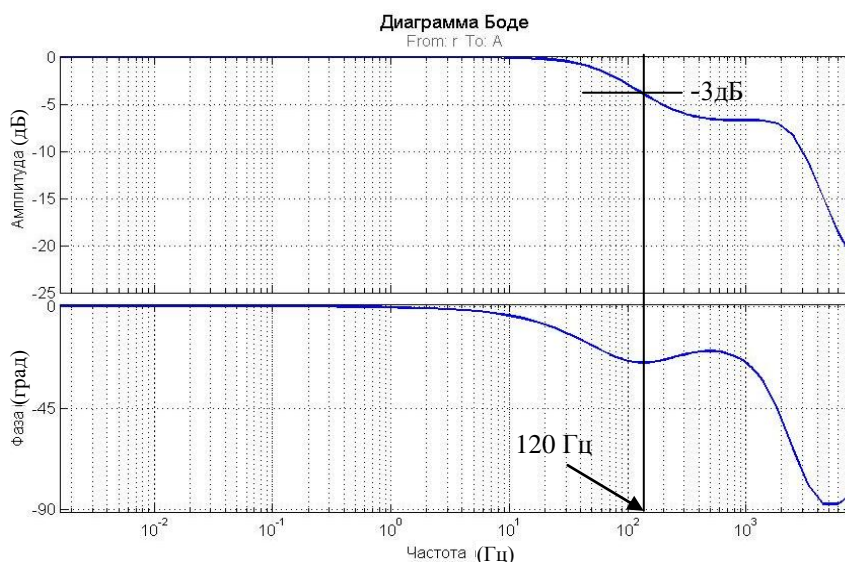


Рис.5. Диаграмма Бode системы стабилизации амплитуды колебаний резонатора по входу-выходу с ПИ регулятором.

Исходя из выражения (8) для передаточной функции $H(s)$, есть только три параметра в линеаризованной системе управления, которые изменяются со временем и от температуры – это добротность резонатора Q , резонансная частота ω_r и коэффициент P_0 . Другие параметры, такие как T_d , K_i , K_p устанавливаются разработчиком системы и могут изменяться, при необходимости, по заданной программе.

Добротность Q может изменяться от резонатора к резонатору в диапазоне [25000 – 50000] единиц, а от температуры и времени на 50%. На рис.6 показаны запасы устойчивости по амплитуде и фазы

разомкнутої системи стабілізації амплітуди коливань для різних значень добротності Q : крива 1 для $Q=25000$, крива 2 для $Q=50000$. Як видно, запаси устойчивості слабо залежать від параметра Q і рівні 24 дБ по амплітуді та 84.3 град по фазі.

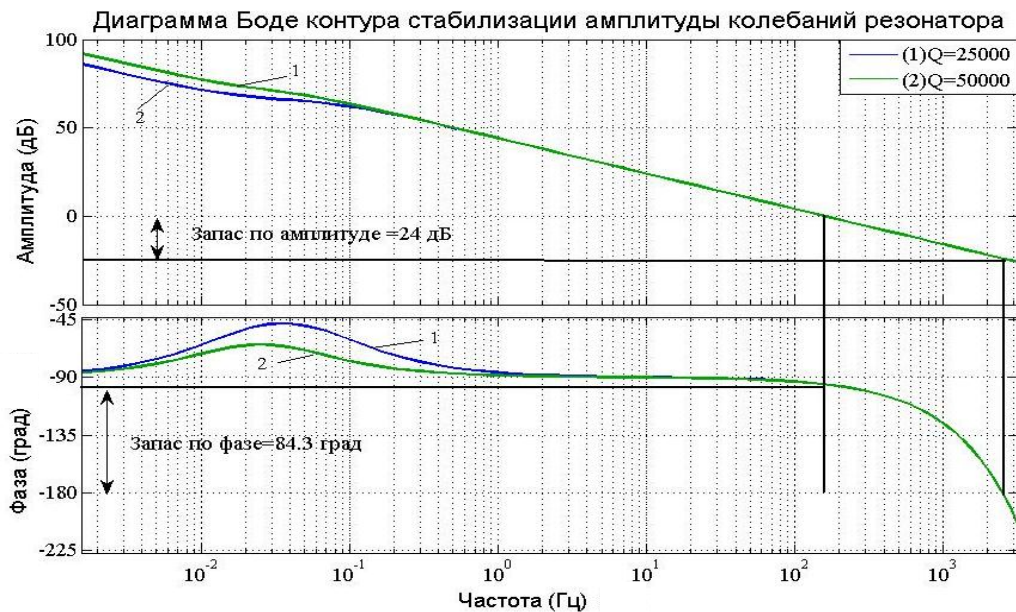


Рис.6. Запаси по фазі та амплітуді при варіації добротності резонатора.

Варіація резонансної частоти від резонатора до резонатора може досягати ± 150 Гц, а від температури до 20 Гц. На рис. 7 показані запаси устойчивості по амплітуді та фазі системи стабілізації амплітуди коливань для різних значень резонансної частоти, $f_1=5000$ Гц, $f_2=5300$ Гц. Як видно криві для різних частот практично злилися в одну з запасами устойчивості по фазі 85 град та амплітуді 26 дБ.

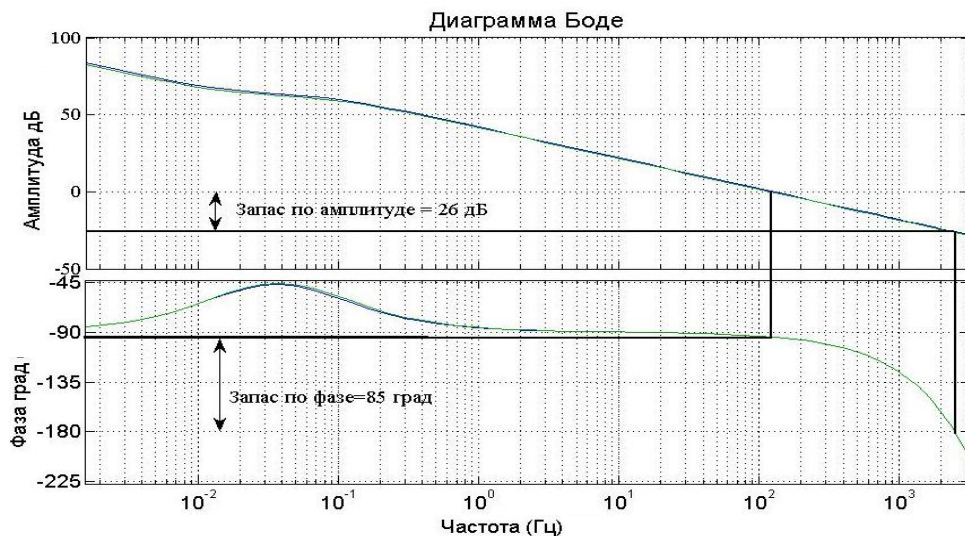


Рис.7. Запаси устойчивості АРУ для резонаторів з частотами 5 та 5.3 кГц.

Величина P_0 визначається відношенням ω^2/Q (см. вираження (9)) та залежить від діаметра резонатора, а R є функція розмірів пьезоелектродів та її коефіцієнта передачі. Практика показала, що коефіцієнт R змінюється в діапазоні 0.3-0.7 для резонатора діаметром 25 мм, т.е. P_0 змінюється в діапазоні 6000-14000.

На рис. 8. представлені криві діаграмми Боде та визначені запаси устойчивості системи стабілізації амплітуди коливань резонатора для $P_0=6000$ та $P_0=14000$. Як видно з рисунка, запаси устойчивості близькі між собою та визначаються наступними значеннями: запас по амплітуді при $P_0=6000$ дорівнює 21 дБ, а при $P_0=14000$ дорівнює 28 дБ; запас по фазі при $P_0=6000$ дорівнює 82 град, а при $P_0=14000$ дорівнює 85 град.

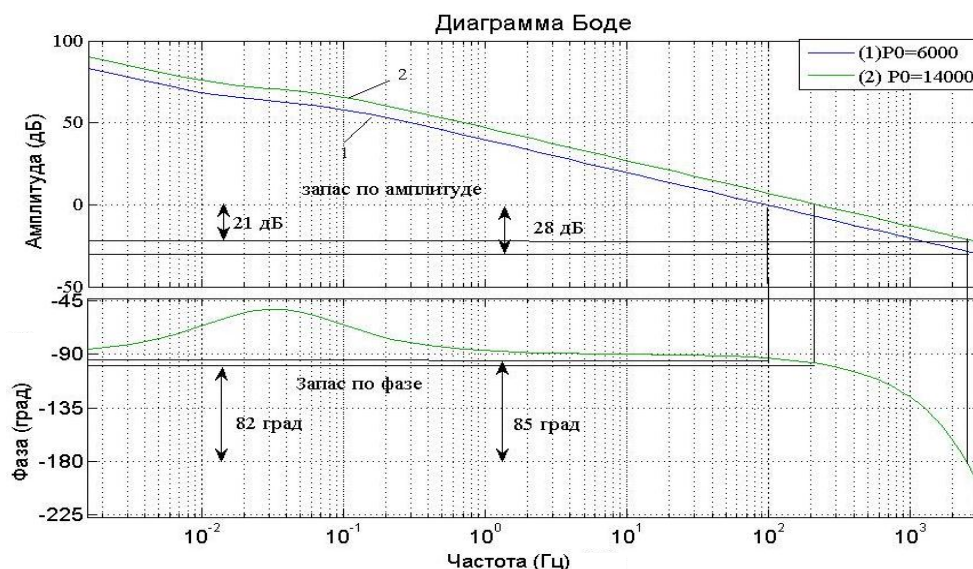


Рис.8. Запасы устойчивости при вариациях коэффициента P_0 .

Однако, следует учитывать, что, если вышеуказанные конструктивные параметры Q , ω_r и P_0 будут существенно изменяться, например, при увеличении добротности резонатора до 100000 единиц, что возможно при переходе на другой более добротный материал, или при увеличении (уменьшении) резонансной частоты в 2-3 раза, что возможно при уменьшении (увеличении) диаметра резонатора, а также коэффициента P_0 при изменении геометрических размеров пьезоэлектродов, то необходимо пересчитывать параметры устойчивости или перенастраивать коэффициенты регулятора.

Выводы

Таким образом, показано, что при изменении параметров резонатора в широком диапазоне их значений запасы устойчивости по фазе и амплитуде системы стабилизации амплитуды колебаний резонатора с ПИ регулятором существенно не изменяются и имеют вполне удовлетворительные значения, т.е система является робастной, так как ее запасы устойчивости слабо зависят от параметров управляемого объекта.

Список литературы:

1. D.D. Lynch "Coriolis Vibratory Gyros". – Symposium Gyro Technology, Stuttgart, Germany, 21-23 Sept., 1998, pp. 3.1-3.14.
2. P.W. Loveday "Analysis and compensation of imperfection effects in piezoelectric vibratory gyroscopes.- PhD. Dissertation in Mechanical Engineering, Virginia polytechnic institute and State university, Feb. 1999, p.132.
3. L. G. Brooks "Amplitude and Frequency Demodulation Controller for MEMS Accelerometer".- Dissertation Bachelor of Science and Master of Engineering in Computer Science and Engineering, MIT, Feb. 2000, p.122.