Томащук О.П.
Національний авіаційний університет
Репета В.К.
Національний авіаційний університет
Лещинський О.Л.
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

ОСНОВНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЛАСТІ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Стаття знайомить читачів із основними методами знаходження області значень функції та відповідними твердженнями, на яких ґрунтуються ці методи. Розглядається значна кількість задач на знаходження області значень функції.

Ключові слова: *властивості функцій, область значень функції, методи.*

Одним із важливих умінь, яким повинні володіти випускники середніх загальноосвітніх навчальних закладів, є вміння розв'язувати задачі на знаходження області значень функції. На жаль, у більшості учнів такі задачі викликають значні труднощі. Підтвердженням цього є результати зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики. Наприклад, завдання «Знайти область значень функції $y=\sqrt{x^2+9}-6$» правильно розв'язали лише 26% абітурієнтів. По іншим завданням такого типу результати не є кращими. На нашу думку, такі невтішні результати пов'язані з тим, що в школі дуже мало уваги приділяють розв'язуванню задач на знаходження області значень функції. У школі основну увагу приділяють розв'язуванню задач на знаходження області визначення функції. Навчити розв'язувати задачі такого типу значно простіше, оскільки для цього учні повинні знати області визначення основних елементарних функцій та вміти розв'язувати різни види рівнянь і нерівностей. Розв'язувати ж задачі на знаходження області значень функції у школі практично не вчать. Хоча шкільні підручники і містять задачі такого типу, але пояснення, які є у розв'язаннях цих задач, не є логічно досконалими. Здебільшого вони ґрунтуються на твердженнях, що попередньо не були сформульованими. Крім цього, шкільні підручники не містять матеріалу, який би знайомив учнів з основними методами знаходження області значень функції.

Мета цієї статті – ознайомити учнів і вчителів із основними методами знаходження області значень функції та відповідними твердженнями, на яких ґрунтуються ці методи.

Спочатку розглянемо необхідні поняття.

Залежність змінної y від змінної x називають *функцією*, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y. Змінну x називають *незалежною змінною* або *аргументом*, y – *залежною змінною*.

Множину всіх значень, яких набуває незалежна змінна x, називають *областю визначення функції* і позначають $D(y)$.

Множину всіх значень залежної змінної y, яких вона набуває при всіх значеннях x з області визначення функції, називають *областю значень функції* і позначають $E(y)$.

Функції: стала ($y=c$), степенева ($y=x^{\alpha}, \alpha\in R$), показникова ($y=a^x, a>0, a\neq 1$), логарифмічна ($y=\log_a x, a>0, a\neq 1$), тригонометричні ($y=\sin x, y=\cos x, y=\text{tg}x, y=\text{ctg}x$), обернені тригонометричні ($y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\text{arctg}x, y=\text{arcctg}x$) називають *основними елементарними функціями*. З основних елементарних функцій за допомогою арифметичних операцій та операції утворення складеної функції можна утворювати нові функції. При цьому, якщо кількість таких операцій є скінченною, то утворену функцію називають *елементарною*. Наприклад, функції $y=\dfrac{2\sin x-3}{x^5+3x}$, $y=\lg\left(\sin^2 x\right)$ є елементарними.

Нагадаємо області значень основних елементарних функцій та деяких елементарних функцій:

$E(c)=\{c\}$; $E\left(x^{2n-1}\right)=(-\infty;+\infty)$, $n\in N$; $E\left(x^{2n}\right)=[0;+\infty)$, $n\in N$;

$E\left(\dfrac{1}{x^{2n-1}}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $n\in N$; $E\left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right)=(0;+\infty)$, $n\in N$;

$E\left(x^{\alpha}\right)=[0;+\infty)$, α – неціле додатне число;

$E\left(x^{\alpha}\right)=(0;+\infty)$, α – неціле від'ємне число;

$E\left(a^x\right)=(0;+\infty)$; $E(\log_a x)=(-\infty;+\infty)$; $E(\sin x)=[-1;1]$; $E(\cos x)=[-1;1]$;

$E(\text{tg}x)=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\}$, $E(\text{ctg}x)=R\setminus\{\pi k, k\in Z\}$; $E(\arcsin x)=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$E(\arccos x)=[0;\pi]$; $E(\text{arc tg}x)=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; $E(\text{arcc tg}x)=(0;\pi)$;

$E(kx+b)=(-\infty;+\infty), k\neq 0$; $E(kx+b)=\{b\}, k=0$; $E\left(\dfrac{k}{x}\right)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty), k\neq 0$;

$E\left(ax^2+bx+c\right)=[y_0;+\infty), a>0$; $E\left(ax^2+bx+c\right)=(-\infty;y_0], a<0$ (y_0 – ордината вершини параболи $y=ax^2+bx+c$).

Основні властивості, які використовують при знаходженні області значень функції.

Властивість 1. Якщо P – область значень функції $y=f(x)$, то область значень функцій $y=f(-x)$, $y=f(x+a)$, $y=f(ax)$ ($a\neq 0$) також є множина P.

Наприклад, областю значень функції $y=\sin x$ є відрізок $[-1;1]$. Тоді для функцій $y=\sin(-x)$, $y=\sin(x-3)$, $y=\sin(2x)$ областю значень також є відрізок $[-1;1]$.

Властивість 2. Якщо областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $\langle c;d\rangle$*, де

* Під позначенням $\langle c;d\rangle$ розуміють відрізок $[c;d]$ або інтервал $(c;d)$, або піввідрізок $[c;d)$, або півінтервал $(c;d]$, причому c і d можуть бути як скінченними числами, так і дорівнювати нескінченності.

$c < d$, то областю значень функції $y = -f(x)$ є проміжок $\langle -d; -c \rangle$.

Наприклад, $E(5^x) = (0; +\infty)$. Тоді $E(-5^x) = (-\infty; 0)$.

Властивість 3. Якщо областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок $\langle c; d \rangle$, де $c < d$, то областю значень функції $y = f(x) + a$ ($a \in R$) є проміжок $\langle c + a; d + a \rangle$. При цьому, якщо $c = -\infty$ ($d = +\infty$), то $c + a = -\infty$ ($d + a = +\infty$).

Наприклад, $E(x^2) = [0; +\infty)$. Тоді $E(x^2 - 1) = [0 - 1; +\infty - 1) = [-1; +\infty)$.

Властивість 4. Якщо областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок $\langle c; d \rangle$, де $c < d$, то областю значень функції $y = af(x)$ ($a > 0$) є проміжок $\langle ac; ad \rangle$. При цьому, якщо $c = -\infty$ ($d = +\infty$), то $ac = -\infty$ ($ad = +\infty$).

Наприклад, $E(\operatorname{arc\,tg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Тоді $E(2 \operatorname{arc\,tg} x) = (-\pi; \pi)$.

Властивість 5. Кожна елементарна функція є неперервною на своїй області визначення.

Наприклад, функція $y = \sqrt{x + 4}$ – елементарна, тому вона є неперервною на проміжку $[-4; +\infty)$, який є областю визначення цієї функції.

Розглянемо основні методи знаходження області значень функції.

1. Використання властивостей неперервності і монотонності функції.

Цей метод ґрунтується на таких теоремах:

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і зростає на проміжку $\langle a; b \rangle$, то її областю значень на цьому проміжку є проміжок $\langle f(a); f(b) \rangle$. При цьому, якщо $a = -\infty$ ($b = +\infty$), то під записом $f(a)$ $\left(f(b)\right)$ розуміють $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right)$.

Наприклад, функція $f(x) = \sqrt{x} + 2$ неперервна і зростає на проміжку $[0; +\infty)$, який є її областю визначення. Оскільки $f(0) = 2$ і $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + 2\right) = +\infty$, то областю значень функції $f(x) = \sqrt{x} + 2$ є проміжок $[2; +\infty)$.

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і спадає на проміжку $\langle a; b \rangle$, то її областю значень на цьому проміжку є проміжок $\langle f(b); f(a) \rangle$. При цьому, якщо $a = -\infty$ ($b = +\infty$), то $f(a) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\left(f(b) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right)$.

Наприклад, функція $f(x) = 3 \arccos x$ неперервна і спадає на відрізку $[-1; 1]$, який є її областю визначення. Оскільки $f(-1) = 3 \arccos(-1) = 3\pi$ і $f(1) = 3 \arccos 1 = 0$, то областю значень функції $f(x) = 3 \arccos x$ є відрізок $[0; 3\pi]$.

Теорема 3. Сума скінченої кількості функцій, зростаючих на множині P, є зростаючою функцією на цій множині.

Наприклад, функція $y = x^3 + 3^x + \mathrm{arctg}x$ зростає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, оскільки кожна із функцій $y = x^3$, $y = 3^x$, $y = \mathrm{arctg}x$ зростає на цьому інтервалі.

Теорема 4. Сума скінченої кількості функцій, спадних на множині P, є спадною функцією на цій множині.

Наприклад, функція $y = 0,5^x + \mathrm{arcctg}x$ спадає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, оскільки кожна із функцій $y = 0,5^x$, $y = \mathrm{arcctg}x$ спадає на цьому інтервалі.

Теорема 5. Нехай функція $y = f(t)$ монотонна на проміжку $\langle c; d\rangle$, а функція $t = g(x)$ монотонна на проміжку $\langle a; b\rangle$ і $g(x) \in \langle c; d\rangle$ для всіх $x \in \langle a; b\rangle$. Тоді складена функція $y = f(g(x))$ монотонна на проміжку $\langle a; b\rangle$, а саме:

а) зростає, якщо функції f і g одночасно зростають або одночасно спадають;

б) спадає, якщо одна з функцій f і g зростає, а інша спадає.

Наприклад, функція $y = \log_5^3 x$ зростає на інтервалі $(0; +\infty)$, який є її областю визначення, оскільки внутрішня функція $t = \log_5 x$ і зовнішня функція $y = t^3$ є зростаючими. Функція $y = 3^{\frac{1}{x}}$ визначена і спадає на кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, оскільки внутрішня функція $t = \dfrac{1}{x}$ є спадною, а зовнішня $y = 3^t$ – зростаючою.

Приклад. Знайти область значень функції:

$$\text{а) } f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \log_2 x; \qquad \text{б) } f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2^x.$$

Розв'язання. а) Знайдемо область визначення функції:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; +\infty).$$

Отже, $D(y) = [2; +\infty)$.

Функція $y = \sqrt[4]{x-2}$ зростає на проміжку $[2; +\infty)$. Функція $y = \log_2 x$ зростає на інтервалі $(0; +\infty)$, а, отже, зростає на проміжку $[2; +\infty)$. Тоді за теоремою 3 функція $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \log_2 x$ зростає на $[2; +\infty)$. Оскільки ця функція елементарна, то вона неперервна на своїй області визначення, тобто на проміжку $[2; +\infty)$. Оскільки $f(2) = \sqrt[4]{2-2} + \log_2 2 = 1$, $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt[4]{x-2} + \log_2 x\right) = +\infty$, то за теоремою 1 областю значень заданої функції є проміжок $[1; +\infty)$.

б) Областю визначення функції $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2^x$ є інтервал $(-\infty; +\infty)$. Ця функція є складеною. Внутрішня функція $t = 2^x$ є зростаючою, а зовнішня функція $y = \mathrm{arcctg}\, t$ є спадною. Тому за теоремою 5 функція $f(x) = \mathrm{arcctg}\, 2^x$ спадає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Крім цього, ця функція є елементарною. Тому вона неперервна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Оскільки

$f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}2^x=\operatorname{arcctg}0=\dfrac{\pi}{2}$ (бо $2^x\to 0$, коли $x\to-\infty$) і $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}2^x=0$ (бо $t=2^x\to+\infty$, коли $x\to+\infty$ і $\operatorname{arcctg}2^x=\operatorname{arcctg}t\to 0$, коли $t\to+\infty$), то за теоремою 2 областю значень заданої функції є інтервал $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: а) $[1;+\infty)$; б) $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Метод послідовного знаходження області значень проміжних функцій, із яких утворена складена функція. Зміст цього методу розглянемо на прикладах.

Приклад. Знайти область значень функції:

$$\text{а) } y=\sqrt{x^2+9}-6 \text{ (ЗНО);} \quad \text{б) } y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5|\operatorname{tg}x|}.$$

Розв'язання. а) Послідовно знайдемо області значень проміжних функцій, із яких утворена задана функція:

$$E\left(x^2\right)=[0;+\infty), \qquad E\left(x^2+9\right)=[9;+\infty) \text{ (вл.3).}$$

Позначимо $x^2+9=t$. Тоді $y=\sqrt{x^2+9}=\sqrt{t}$, де $t\in[9;+\infty)$. На проміжку $[9;+\infty)$ функція $y=\sqrt{t}$ неперервна і зростає. Тому за теоремою 1 її областю значень є проміжок $\left[\sqrt{9};\sqrt{+\infty}\right)=[3;+\infty)$. Тоді $E\left(\sqrt{x^2+9}-6\right)=[3-6;+\infty-6)=[-3;+\infty)$.

б) $E(\operatorname{tg}x)=(-\infty;+\infty)$, $E(|\operatorname{tg}x|)=[0;+\infty)$, $E(5|\operatorname{tg}x|)=[0;+\infty)$ (вл.4),

$E(-5|\operatorname{tg}x|)=(-\infty;0]$ (вл.2), $E(2-5|\operatorname{tg}x|)=(-\infty;2]$ (вл.3).

Позначимо $2-5|\operatorname{tg}x|=t$. Тоді $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-5|\operatorname{tg}x|}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$, де $t\in(-\infty;2]$. Функція $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ неперервна і спадає на проміжку $(-\infty;2]$. Тому за теоремою 2 її областю значень є проміжок $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^2;\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\infty}\right)=\left[\dfrac{1}{9};+\infty\right)$.

Відповідь: а) $[-3;+\infty)$; б) $\left[\dfrac{1}{9};+\infty\right)$.

3. Метод оцінювання. Цей метод ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 6. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a;b\rangle$, $A\le f(x)\le B$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$ та існують $x_1, x_2\in\langle a;b\rangle$ такі, що $f(x_1)=A$ і $f(x_2)=B$, то областю значень функції $y=f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ є відрізок $[A;B]$.

Приклад. Знайти область значень функції $y=3-2\cos^2x$.

Розв'язання. $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ справедливі нерівності:

$-1\le\cos x\le 1$, $0\le\cos^2x\le 1$, $0\le 2\cos^2x\le 2$, $-2\le-2\cos^2x\le 0$, $1\le 3-2\cos^2x\le 3$.

Оскільки $y(0)=3-2\cos^2 0=1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3-2\cos^2\frac{\pi}{2}=3$ і функція $y=3-2\cos^2 x$ неперервна на інтервалі $x\in(-\infty;+\infty)$, то за теоремою 6 її областю значень є відрізок $[1;3]$.

Відповідь: $[1;3]$.

Зауваження. Досить часто, довівши справедливість нерівності $A\le f(x)\le B$ для всіх $x\in D(f)$, помилково роблять висновок, що $E(f)=[A;B]$. Насправді, такий висновок можна зробити лише тоді, коли додатково обґрунтовано, що функція $y=f(x)$ неперервна на області визначення, та існують значення з області визначення, в яких функція набуває значень A і B. Як приклад, розглянемо функцію $y=12\sin x+5\cos x$. Для всіх $x\in D(y)=(-\infty;+\infty)$ справедливі нерівності:

$$-1\le\sin x\le 1,\quad -12\le 12\sin x\le 12,\quad -1\le\cos x\le 1,\quad -5\le 5\cos x\le 5,$$
$$-12-5\le 12\sin x+5\cos x\le 12+5,\quad -17\le 12\sin x+5\cos x\le 17.$$

Однак, областю значень функції $y=12\sin x+5\cos x$ не є відрізок $[-17;17]$, оскільки не має таких значень з області визначення, в яких би ця функція набувала значень -17 і 17. Насправді областю значень функції $y=12\sin x+5\cos x$ є відрізок $[-13;13]$. Доведемо це. Для цього спочатку перетворимо цю функцію, увівши допоміжний кут φ.

$$y=12\sin x+5\cos x=\sqrt{12^2+5^2}\left(\frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}\cos x\right)=$$
$$13\cdot\left(\frac{12}{13}\sin x+\frac{5}{13}\cos x\right).$$

Оскільки $\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$, то числа $\frac{12}{13}$ і $\frac{5}{13}$ можна розглядати як $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ деякого допоміжного кута φ: $\cos\varphi=\frac{12}{13}$ і $\sin\varphi=\frac{5}{13}$.

Тоді $y=13(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=13\sin(x+\varphi)$ і для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ справедливі нерівності: $-1\le\sin x\le 1$, $-1\le\sin(x+\varphi)\le 1$, $-13\le 13\sin(x+\varphi)\le 13$.

Функція $y=13\sin(x+\varphi)$ неперервна на інтервалі $x\in(-\infty;+\infty)$.

З рівностей $\cos\varphi=\frac{12}{13}$ і $\sin\varphi=\frac{5}{13}$ маємо $\mathrm{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{5}{12}$, звідки $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$. Якщо вибрати $x=-\frac{\pi}{2}-\varphi$ і $x=\frac{\pi}{2}-\varphi$, то $y\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=13\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi+\varphi\right)=13\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-13$ і $y\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=13\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi+\varphi\right)=13\sin\frac{\pi}{2}=13$, тобто існують такі значення з області визначення заданої функції, в яких вона набуває значень -13 і 13. Отже, за теоремою 6 областю значень функції $y=12\sin x+5\cos x$ є відрізок $[-13;13]$.

Зауваження. При знаходженні області значень функції, яка містить різні тригонометричні функції, доцільно її звести до функції з однією тригонометричною функцією.

Приклад. Знайти область значень функції $y=\left(\sin x+\cos x\right)^2$ (ЗНО).

Розв'язання. Спочатку перетворимо задану функцію:

$$y=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x .$$

Для всіх $x\in D\left(y\right)=\left(-\infty;+\infty\right)$ справедливі нерівності:

$$-1\le\sin x\le 1,\quad -1\le\sin 2x\le 1,\quad 0\le 1+\sin 2x\le 2 .$$

Функція $y=1+\sin 2x$ неперервна на інтервалі $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$ і $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2\right)=2$. Тому за теоремою 6 її областю значень є відрізок $\left[0;2\right]$.

Відповідь: $\left[0;2\right]$.

4. Графічний метод. Зміст цього методу полягає в тому, що спочатку будуть графік функції, потім проектують його на вісь ординат. Одержана множина є областю значень заданої функції. При побудові графіка функції часто використовують геометричні перетворення відомих графіків функцій.

Приклад. Знайти область значень функції $y=2^{-|x|}$ (ЗНО).

Розв'язання. Послідовно побудуємо графіки функцій (рис. 1):

1) $y=2^x$;

2) $y=2^{-x}$ (перетворення $y=f\left(-x\right)$);

3) $y=2^{-|x|}$ (перетворення $y=f\left(\left|x\right|\right)$).

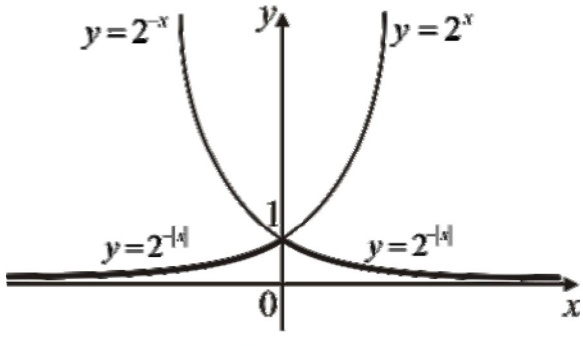

Рис.1

Спроектувавши графік функції $y=2^{-|x|}$ на вісь ординат, одержимо проміжок $\left(0;1\right]$, який є областю значень цієї функції.

Відповідь: $\left(0;1\right]$.

5. Використання похідної. Цей метод ґрунтується на такій теоремі:

Теорема 7. Якщо функція $y=f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$ і $m=\min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)$, $M=\max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)$ – її найменше і найбільше значення на цьому відрізку, то областю значень функції $y=f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$ є відрізок $\left[m;M\right]$.

При цьому найменше (найбільше) значення функція набуватиме або у внутрішній точці відрізка $\left[a;b\right]$ (але тоді вона обов'язково є критичною точкою функції f), або на одному з кінців відрізка $\left[a;b\right]$.

Знаходження найменшого і найбільшого значень функції $y=f\left(x\right)$, неперервної на відрізку $\left[a;b\right]$, здійснюють за таким алгоритмом:

1. Знайти область визначення функції f.

2. Знайти $f'(x)$.

3. Знайти критичні точки функції f і відібрати ті з них, які належать відрізку $[a; b]$.

4. Обчислити значення функції f у відібраних критичних точках і на кінцях відрізка $[a; b]$, тобто в точках $x = a$ і $x = b$.

5. Серед знайдених значень функції f вибрати найменше і найбільше. Це будуть найменше і найбільше значення функції f на відрізку $[a; b]$.

Приклад. Знайти область значень функції $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення цієї функції:

$$4 - x^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \le 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-2; 2].$$

Отже, $D(f) = [-2; 2]$.

Функція $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ – елементарна, а тому вона неперервна на своїй області визначення, тобто неперервна на відрізку $[-2; 2]$. Знайдемо найменше і найбільше значення цієї функції на відрізку $[-2; 2]$. Для цього скористаємося алгоритмом, наведеним вище.

1. $D(f) = [-2; 2]$.

2. $f'(x) = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4 - x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

3. Знайдемо критичні точки функції f, тобто внутрішні точки з області визначення цієї функції, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

У точках $x = -2$ і $x = 2$, які належать $D(f)$, похідна $f'(x)$ не існує. Але ці точки не є критичними точками функції f, бо вони не є внутрішніми для області визначення цієї функції. Отже, $x = 0$ – єдина критична точка функції f і вона належить відрізку $[-2; 2]$.

4. $f(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2$, $f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} = 0$, $f(2) = \sqrt{4 - 2^2} = 0$.

5. $m = \min\limits_{[-2;\,2]} f(x) = 0$, $M = \max\limits_{[-2;\,2]} f(x) = 2$.

Тоді за теоремою 7 областю значень функції $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ є відрізок $[0; 2]$.

Відповідь: $[0; 2]$.

6. Метод оберненої функції. Використовуючи цей метод до знаходження області значень функції $y = f(x)$, розв'язують рівняння $y = f(x)$ відносно x. Якщо це рівняння має єдиний розв'язок $x = g(y)$, то область значень $E(f)$ заданої функції $f(x)$ збігається з областю визначення $D(g)$ оберненої функції $g(y)$. Якщо ж рівняння $y = f(x)$ має декілька розв'язків $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, …, $x=g_n(y)$, то $E(f)$ є об'єднанням областей визначення функцій $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, …, $x=g_n(y)$.

Приклад. Знайти область значень функції $y=\dfrac{x^2+5}{2x-4}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $y=\dfrac{x^2+5}{2x-4}$ відносно x:

$$y(2x-4)=x^2+5 \Leftrightarrow 2xy-4y=x^2+5 \Leftrightarrow x^2-2yx+4y+5=0.$$

Останнє рівняння є квадратним відносно x. Його дискримінант $D=4y^2-4(4y+5)=4(y^2-4y-5)$. Якщо $D\ge 0$, то

$$x_{1,2}=\frac{2y\pm\sqrt{4(y^2-4y-5)}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-4y-5}.$$

Отже, рівняння $y=\dfrac{x^2+5}{2x-4}$ відносно x має два розв'язки: $x=g_1(y)=y-\sqrt{y^2-4y-5}$ і $x=g_2(y)=y+\sqrt{y^2-4y-5}$. Області визначення функцій $g_1(y)$ і $g_2(y)$ визначаються нерівністю $y^2-4y-5\ge 0$. Розв'язавши її, одержимо: $y\in(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. Тоді $D(g_1)=D(g_2)=(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$

Отже, $E(y)=D(g_1)\cup D(g_2)=(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$.

Пропонуємо читачам задачі для самостійного розв'язування.

Знайти область значень функції:

1) $y=\cos 5x$; 2) $y=\log_7(-x)$; 3) $y=\operatorname{arctg}(x-4)$; 4) $y=-\sqrt{x}$; 5) $y=5^x+3$; 6) $y=4\arccos x$; 7) $y=5-x^4$; 8) $y=0,7^{x-2}-2$; 9) $y=\sqrt{x+3}+2^x$; 10) $y=\log_{\frac{1}{2}}x+\operatorname{arcctg}x$;

11) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg}x}$; 12) $y=x^2-4x+1$; 13) $y=7+2x-x^2$; 14) $y=5\cos(4x+3)$; 15) $y=4-3\operatorname{ctg}^2x$;

16) $y=-\dfrac{3}{x^2+2}$; 17) $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}$; 18) $y=\log_{\frac{1}{9}}(5+4x-x^2)$; 19) $y=\sin x+\cos x$;

20) $y=2^{1+\sin^2x-\cos^2x}$; 21) $y=\sqrt{9\sin^2x-2\cos^2x}$; 22) $y=\cos 2x+2\cos x$; 23) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$;

24) $y=\dfrac{x+1}{2x-x^2-6}$; 25) $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\dfrac{3\sin x-4\cos x+10}{5}$; 26) $y=\sqrt{10+3x-x^2}$.

Відповіді: 1) $[-1;1]$; 2) $(-\infty;+\infty)$; 3) $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $(-\infty;0]$; 5) $(3;+\infty)$; 6) $[0;4\pi]$; 7) $(-\infty;5]$; 8) $(-2;+\infty)$; 9) $\left[\dfrac{1}{8};+\infty\right)$; 10) $(-\infty;+\infty)$; 11) $(0;+\infty)$; 12) $[-3;+\infty)$; 13) $(-\infty;8]$; 14)

$[-5;5]$; 15) $(-\infty;4]$; 16) $[-1,5;0)$; 17) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$; 18) $[-1;+\infty)$; 19) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$; 20) $[1;4]$; 21) $[0;3]$; 22) $[-1,5;3]$; 23) $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; 24) $[-0,5;0,1]$; 25) $[-2;0]$;26) $[0;3,5]$.

Список використаної літератури

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіак–ЕКО, 2000. – 608 с.
2. Михалін Г.О., Томащук О.П. Що повинен знати вчитель математики про елементарні функції: Навч.-метод. посібник. – К.: УДПУ, 1995. – 101 с.
3. Сильвестров В.В. Множество значений функции: Учебное пособие. – Чебоксары, 2004. – 64 с.

Томащук А.П., Репета В.К., Лещинский О.Л. Основные методы нахождения множества значений функции.

Статья знакомит читателей с основными методами нахождения области значений функции и соответствующими утверждениями, на которых основываются эти методы. Рассматривается значительное количество задач на нахождение области значений функции.

Ключевые слова: *свойства функцій, область значения функции, методы.*

Tomashchuk O.P., Repeta V.K., Leshchynskyi O.L. Main methods of finding of the area of function values.

The article introduces readers to the basic techniques of the finding the area of the values of function and the relevant statements, which are the base for these methods. We consider a large number of tasks to find the area of the function values.

Keywords: *function properties, area of function values, methods.*