

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра прикладної математики

ДОПУСТИТИ ДО ЗАХИСТУ

Завідувач кафедри

_____ П.О. Приставка

" ___ " _____ 2020 р.

ДИПЛОМНА РОБОТА

(ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)

ВИПУСКНИКА ОСВІТНЬОГО СТУПЕНЯ

“Магістр”

Тема: Дифузійне згладжування 3D об’єктів

Виконавець:

Салов А.О.

Керівник:

п.ф.-м.н., В.Б. Василик

Нормоконтролер:

к.ф.-м.н., доц. Іллічева Л.М.

Київ 2020

НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет

Кібербезпеки, комп'ютерної

та програмної інженерії

Кафедра

Прикладної математики

Спеціальність

113 «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ П.О. Приставка

« ____ » _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ

на виконання дипломної роботи

Салова Артура Олександровича

1. Тема дипломної роботи: Дифузійне згладжування 3D об'єктів, затверджена наказом ректора від «4» листопада 2020 р. №. 2576/ст.
2. Термін виконання роботи: з 15 жовтня 2019 р. по 9 лютого 2020 р.
3. Вихідні дані до роботи: згладжена модель тривимірного об'єкта.
4. Зміст пояснювальної записки:
 - вивчення теоретичних відомостей (означення та теореми), що стосуються операторів згладжування 3D об'єктів;
 - розробка на їх основі алгоритму для згладжування 3D об'єктів;
 - розробка автоматизованої системи для згладжування 3D об'єктів;
 - тестування ефективності створеного програмного забезпечення для прикладних задач.
5. Календарний план-графік

№ п/п	Завдання	Термін виконання	Відмітка про виконання
1.	Отримання індивідуального завдання	15.10.2019	Виконано
2.	Огляд літератури за темою дипломної роботи	15.10.2019 – 28.10.2019	Виконано
3.	Аналіз методів дифузійного, що знаходяться у відкритому доступі. Розширення існуючого набору	28.10.2019 – 11.11.2019	Виконано
4.	Розробка автоматизованої системи згладжування	11.11.2019 – 30.12.2019	Виконано
5.	Тестування програмного забезпечення	30.12.2019 – 06.01.2020	Виконано
6.	Оформлення пояснювальної записки	06.01.2020 – 23.01.2020	Виконано
7.	Створення презентації	23.01.2020- 26.01.2020	Виконано
8.	Передзахист дипломної роботи	27.01.2020	Виконано
9.	Захист дипломної роботи	05.02.2020	

6. Дата видачі завдання: «15» жовтня 2020 р.

Керівник дипломної роботи

В.Б. Василик

Завдання прийняв до виконання

А.О. Салов

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка до дипломної роботи на тему: «Згладжування 3D об'єктів методами дифузії»: 84 сторінки, 32 рисунків, 69 використаних джерел.

Ключові слова: ЗГЛАДЖУВАННЯ, ДИФУЗИЯ, 3D МОДЕЛЬ, 3D ОБ'ЄКТ, ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА, ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА-БЕЛЬТРАМІ, ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛЛІ, ТРИАНГУЛЯЦІЯ, 3D-СКАНЕР, СІТКА, ЕКСПОНЕНТА МАТРИЦІ, РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ, ДИСКРЕТИЗАЦІЯ, АВТОМАТИЗОВАНА СИСТЕМА, C#.

Об'єкт дослідження: тривимірна модель фізичних тіл.

Предмет дослідження: метод згладжування даних 3D об'єктів за допомогою дифузійної моделі з використанням оператора Лапласа-Бельтрамі.

Середовище розробки, що використовувалося в процесі виконання дипломної роботи – Microsoft Visual Studio.

Мета: на основі ідеї згладжування використовуючи дифузійну модель реалізувати метод, що базується на знаходженні матричної експоненти, за допомогою перетворення Келі, та оператора Лапласа-Бельтрамі, розробити автоматизовану систему для згладжування поверхні тривимірних об'єктів, провести тестування.

Результатом виконання дипломної роботи є створена автоматизована система для згладжування 3D об'єктів на основі методу дифузії.

Галузь застосування: Результат виконання дипломної роботи може бути використаний для: вирішення задач, обробки 3D об'єктів які потребують згладжування, наприклад тривимірних сегментованих медичних даних.

Наукова новизна та практичне значення : уперше застосовано знаходження матричної експоненти за допомогою перетворення Келі для дифузійного згладжування тривимірних об'єктів.

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ	4
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	7
ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1	15
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ТРИВИМІРНІ ОБ’ЄКТИ ТА ДИФУЗИЮ .	15
1.1. Основні поняття тривимірної комп’ютерної графіки	15
1.2. Типи представлення тривимірних об’єктів.	17
1.3. Використання рівняння дифузії для згладжування об’єктів	22
1.4. Методи дискретизації рівняння дифузії, що задане на поверхні	25
1.5. Підходи до обчислення матричної експоненти.....	31
1.5.1. Системи лінійних диференціальних рівнянь	34
1.5.2. Метод апроксимації Ейлера	34
1.6. Перетворення Келі	36
Висновки до розділу 1	41
РОЗДІЛ 2	42
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИФУЗІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ	
ОБ’ЄКТІВ	42
2.1. Методи згладжування дифузійного згладжування	42
2.2. Дифузійне згладжування тривимірних об’єктів	43
2.3. Послідовність дій дифузійного згладжування тривимірних об’єктів	
46	
Висновки до розділу 2.....	47
РОЗДІЛ 3	49
ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ЗГЛАДЖУВАННЯ	49
3.1. Опис алгоритму згладжування.....	49
3.2. Процес роботи з розробленим програмним забезпеченням	50
3.3. Основні вимоги до робочої станції для роботи з програмним	
забезпеченням.....	54
3.4. Розроблене програмне забезпечення	55
3.5. Інструкція користувача.....	55
3.6. Тестування розробленого програмного забезпечення	59

Висновки до розділу 3	76
ВИСНОВКИ.....	77
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	78

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Для створення програмного забезпечення, яке дає можливість згладжувати поверхні тривимірних об'єктів, будемо розглядати об'єкти задані набором координат в тривимірному просторі та сіткою, яка описує як задані точки поверхні з'єднані між собою, застосовуючи рівняння дифузії на поверхні та його наближення за допомогою дискретизації, необхідно виконати наступні задачі:

1. Проаналізувати типи представлення тривимірних об'єктів та існуючі методи згладжування для роботи з тривимірними об'єктами.
2. Проаналізувати методи дискретизації рівняння дифузії, що задане на поверхні.
3. Порівняти підходи до обчислення матричної експоненти.
4. Реалізувати знаходження матричної експоненти за допомогою методу перетворення Келі.
5. Розробити програмне забезпечення для реалізації дифузійного згладжування на основі матричної експоненти.
6. Провести експерименти на тривимірних моделях.
7. Результати досліджень оформити у вигляді дипломної роботи, згідно вимогам.

ВСТУП

В наш час використання 3D моделей є розповсюдженим в різних галузях. І з кожним роком їх використання стає більш популярним. В медицині знімки за допомогою проведення магнітно-резонансної томографії(МРТ) або позитронно-емісійної томографії(ПЕТ) в результаті обстеження отримують 3D моделі органів, м'язів, зубів, кісток та інших частин тіла.

Комп'ютерна томографія 3D технології – це золотий стандарт діагностування. Тривимірне сканування поступово витісняє плівкові площинні знімки. Такі апарати мають високий потенціал, активно використовуються в стоматологічних дослідженнях, щелепно-лицевій хірургії. Дозволяють поставити максимально точний діагноз, що є гарантією повної впевненості в ефективності, якості медичних послуг. Тривимірні моделі, створені на основі комп'ютерної томографії в комплексі з тривимірним друком – незамінне досягнення в галузі медицини.

3D моделювання в медицині дозволяє створювати об'ємні моделі. Тривимірні знімки пацієнтів, зроблені за допомогою комп'ютерної томографії, трансформуються в зображення з хорошим розрішенням, а потім – в тривимірні тверді 3D моделі.

Це дозволяє більш якісно вивчити особливості хвороби, а також підготуватися до проведення операції. Так, для хірурга важливо знати форму, контури, особливості пухлини в тривимірному вимірюванні, щоб знати, як краще діяти під час операції.

За допомогою застосування 3D технологій складні операції проводяться за наступною схемою:

- сканування;
- виготовлення пластикової моделі;
- вивчення та вибір методу лікування;
- власне лікування.

3D принтери використовують в поєднанні з сучасними системами проектування. Так, з їх допомогою роздруковують клон пухлини перед

операцією, щоб краще знати, з чим доведеться зіткнутися і належним чином підготуватися перед проведенням операції.

3D томографія є сучасним стандартом діагностики, що дозволило вийти якості діагностики та лікування на абсолютно новий рівень. Перевага тривимірних знімків – можливість виявити дефекти, які часто не видно в звичайних зображеннях. Це дозволяє визначити комплексну морфологію проблемних зон, встановити більш точне лікування.

3D томографія – це якісне зображення, мінімум опромінення, а також швидкість дослідження і достовірна діагностика без додаткових досліджень.

Те що ще зовсім недавно було фантазією, вже перетворилося в реальність. У медицині застосування тривимірних технологій розвивається відразу в декількох напрямках:

- Сканування органів.
- Випуск 3D моделей відсканованих органів. Це дозволяє більш точно вивчити патологію, а також дає можливість попрактикуватися перед проведенням операції.
- Створення імплантів на основі тривимірних зображень пацієнта з урахуванням його функціональних особливостей.
- Створення штучних кісток, тканин, кровоносних судин, вен і навіть органів пацієнта.

3D-модельовання людського тіла. Таке ноу-хау гарантує прорив у багатьох галузях, особливо, якщо йдеться про відновлювальну медицину, фітнес та ринопластику.

Перспективи 3D технологій величезні. Варто врахувати той факт, що вони, постійно вдосконалюючись, швидко дешевшають. Використання 3D технологій в медицині дозволяє скоротити ймовірність помилки до мінімуму. Це великий прорив в області медицини. Так, маючи макет органу, який будуть оперувати, хірург може набагато краще підготуватися до проведення операції.

В промисловості 3D моделі використовують для контролю якості виробів, або для розрахунку місткості складів. Для створення 3D моделей

використовують 3D-сканери. Сучасне виробництво неможливо уявити без промислового моделювання продукції. З появою 3D-технологій виробники отримали можливість значної економії матеріалів і зменшення фінансових витрат на інженерне проектування.

З допомогою 3D-моделювання, дизайнери-графіки створюють тривимірні зображення деталей і об'єктів, які в подальшому можна використовувати для створення прес-форм і прототипів об'єкту. До недавнього часу такі серйозні проекти як будівництво мостів, дамб, гребель не проходило без будь-яких несподіванок навіть в країнах з дуже розвиненими будівельними технологіями. У наш час будівельні компанії багатьох держав стали користуватися системами інженерного проектування з візуальним відображенням.

Сучасні програми інженерної графіки не тільки здійснюють різні будівельні розрахунки (втім це могли робити і програми попереднього покоління), але й візуалізувати відбуваються будівельні процеси. Програми показують не тільки можливе навантаження на окремі частини конструкцій, а й розраховують різні непередбачені явища, пов'язані наприклад з явищами резонансу в процесі будівництва. Приклад з абсолютно побутової сфери: компанії з продажу квартир, а так само дизайну і пов'язаним з ним ремонтом стали використовувати комп'ютерні програми тривимірного моделювання для представлення клієнту найбільш точної інформації про майбутній проект. Тим самим дохід цих компаній став збільшуватися за рахунок економії часу, що витрачається на непотрібні креслення.

Перевага комп'ютерного моделювання оцінили не тільки люди, пов'язані з нерухомістю, а й великі компанії, які бажають скоротити свої витрати за рахунок застосування сучасних програм комп'ютерного конструювання, а так само автоматизування процесу виробництва.

Вся сучасна кіноіндустрія орієнтується на кіно у форматі 3D. Для подібних зйомок використовуються спеціальні камери, здатні знімати в 3D-форматі. Крім того, за допомогою тривимірної графіки, для кіноіндустрії

створюються окремі об'єкти і повноцінні ландшафти. До недавнього часу роботу зі створення спецефектів в кінематографії виконували у спеціальних павільйонах з використанням фізичних моделей, методів прозорою фотографії і дорогих оптичних принтерів. Тепер ця проблема вирішена за допомогою сучасних програм.

Вже не потрібно витратити тисячі людино-годин на побудову моделей, наприклад динозаврів, які потрібно потім встановити на сцені, висвітлити, відзняти і скомбінувати з іншими учасниками епізоду. Досить посадити одну людину за звичайний персональний комп'ютер, щоб створити спецефекти, створюють повне відчуття реальності. Нашестя візуальних ефектів вже ніхто не дивується. Ефекти в блокбастерах (бойовиках) і романтичних казках, іграх та мультимедійних презентаціях, помітні і непомітні, в кіно і на телебаченні, тривимірні і мультиплікаційні. Всіх їх об'єднує лише одне: вони створені за допомогою комп'ютерів.

Головною проблемою використання 3D моделей є складність операцій над 3D об'єктами. Однією з найважливіших операцій є згладжування знімків, бо при скануванні 3D-сканером, або МРТ часто отримують результати з артефактами, які не властиві об'єкту який був сканований.

Є різні методи згладжування 3D об'єктів. В більшості з яких є велика складність обчислень. Що потребує великих обчислювальних потужностей. Тому постає потреба в розробці методів, що матимуть меншу складність.

Завдяки сучасним пристроям збору даних, дані 3D-поверхні стали більш поширеними. При роботі з подібними даними, наприклад, отриманими лазерним сканером або системою стерео зору, завдання згладжування поверхні терміново виникає з різних причин.

По-перше, реальні дані мають тенденцію бути зашумленими та зіпсованими сторонніми людьми. Таким чином, щоб проаналізувати та візуалізувати дані, першим кроком попередньої обробки доводиться боротися із видаленням шуму та перешкод.

По-друге, система сканування може надати більше даних, ніж насправді потрібно для даного завдання. У цьому випадку згладжування може призвести до спрощення, видаляючи дрібні деталі, зберігаючи грубу структуру.

Нарешті, було визнано, що важливі особливості візуальних даних існують в різних масштабах одночасно. У комп'ютерному зорі це спостереження призвело до впровадження масштабно-просторової техніки, яка додає масштабу як додатковий вимір даним [1].

У обробці зображень та комп'ютерному зорі методи згладжування та масштабування простору для двовимірних плоских зображень мають довгу історію. Отже, були розроблені методи згладжування поверхні, що імітують ці класичні методи обробки зображень. Простий спосіб вирівнювання сірих зображень - це згортання з ядром Гауса[2][3]

$$g(x, t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)}. \quad (1)$$

Це ж ядро можна використовувати для побудови лінійної теорії масштабу-простору. Простір лінійних масштабів зображення визначається як стек згладжених зображень, створений за допомогою перетворення зображення з гауссовими функціями різних масштабів. Цей набір ідентичний розв'язкам лінійного рівняння дифузії

$$k\Delta u(x, t) = \partial_t u(x, t) \quad (2)$$

для різних часів t з вихідним зображенням як початкова умова [4]. Тут, Δ оператор Лапласа і ∂_t позначає часткову похідну відносно t . Ядро Гауса (1) - це функція Гріна (2), тобто його рішення δ -impulse(= $g(x, t)|_{t \rightarrow 0}$) як початкова умова.[5]

Хоча відмінність між величиною, що проходить процес дифузії (тут, інтенсивність зображення), з одного боку, і базовим доменом (тут, площиною зображення), з іншого, є очевидним у наведеному вище випадку, вона стає більш заплутаною для встановлення згладжування поверхні. У рівнянні дифузії (2) u - величина, яку слід розсіяти, тоді як форма оператора Лапласа[6]

залежить від (метричного тензора) базової області. Ця відмінність не завжди чітко виражена в літературі щодо поверхневої дифузії. Можна виділити три різні підходи:

- 1) Три функції координат згорнуті двовимірним гаусіаном[6][7] (1). В даному випадку домен - це простір 2D-параметрів, який вважається рівним. Величини, які слід розсіяти, - це три координатні функції[8][9][10].
- 2) Величини, що підлягають дифузії, є 3D декартовими координатами ($x = (x, y, z)$) поверхневих точок, тоді як сам поверхневий многовид є базовою областю. Оскільки дифузійні величини (поверхневі координати) та площина (поверхня) переплітаються, форма лапласіана фактично змінюється в процесі дифузії. Узагальнений пошук Гаусса на довільній поверхні M передбачає пошук власних функцій оператора Лапласа[11][12][13] на M , що неможливо для нетривіальних поверхонь. З цієї причини всі підходи в цій обстановці, починаючи з багатокутної сітки використовують дискретні локальні наближення лапласіанів[14]. Оскільки лапласіани змінюються після кожного етапу застосовують ітераційні процедури, як правило, з дуже невеликими часовими кроками[15][16][17].
- 3) Найбільш тісно пов'язане з лінійною дифузією при обробці зображення, - це об'ємна дифузія. Тут поверхні визначаються як набори рівнів функції 3D-щільності. Це призводить до отримання стандартного ядерного згладжування 3D-гаусса, де функція густини є коефіцієнтом дифузії[18][19].

В роботі «Geometric Surface Smoothing via Anisotropic Diffusion of Normals» [20] отримані результати застосування дифузійних методів згладжування на основі оператора Лапласа, «Diffusive smoothing of 3D segmented medical data»[21] проаналізував використання дифузійних методів

на сигментованих медичних даних, наведено алгоритми згладжування 3D об'єктів, за допомогою оператора Лапласа-Бельтрамі[22].

Метою дипломної роботи є проаналізувати дифузійні методи згладжування. Розробити ефективне рішення згладжування 3D об'єктів. Розробити алгоритм згладжування 3D об'єктів та на його основі розробити програмне забезпечення(ПЗ).

Для досягнення даної мети необхідно вирішити наступні задачі:

- 1) Проаналізувати типи представлення тривимірних об'єктів та існуючі методи згладжування для роботи з тривимірними об'єктами.
- 2) Проаналізувати методи дискретизації рівняння дифузії, що задане на поверхні.
- 3) Порівняти підходи до обчислення матричної експоненти.
- 4) Реалізувати знаходження матричної експоненти за допомогою методу перетворення Келі[19].
- 5) Розробити програмне забезпечення для реалізації дифузійного згладжування на основі матричної експоненти[8][18][20].

Об'єктом дослідження є зашумлені 3D об'єкти.

Предметом дослідження є згладжування 3D об'єктів.

Практична цінність дипломної роботи полягає у створенні програмного забезпечення для згладжування 3D об'єктів, які при скануванні мали дефекти, в порівнянні з реальним об'єктом. Розроблене ПЗ дасть можливість подальшої обробки 3D об'єктів, які не матимуть дефектів.

Дипломна робота складається з трьох розділів. Повний обсяг роботи складає сторінки з рисунками. Список літератури містить джерело.

РОЗДІЛ 1.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ТРИВИМІРНІ ОБ'ЄКТИ ТА ДИФУЗІЮ

Головною метою цього розділу є розгляд основних понять та задач роботи з тривимірними об'єктами та дифузійного згладжування. У підрозділі 1.1 розглянуто основні поняття тривимірної комп'ютерної графіки[21]. У підрозділі 1.2 розглянуто основні типи представлення тривимірних об'єктів. У підрозділі 1.3 наведено теоретичні відомості використання рівняння дифузії для згладжування[22]. Матеріал підрозділу 1.4 містить у собі підходи дискретизації рівняння дифузії[22][23]. Підходи до обчислення матричної експоненти наведені в підрозділі 1.5. У підрозділі 1.6 деталізовано підхід обчислення експоненти матриці за допомогою перетворення Келі[24][25][26].

1.1. Основні поняття тривимірної комп'ютерної графіки

Термін тривимірна графіка, або 3Dграфіка зазвичай трактують, як розділ комп'ютерної графіки, що являє собою набір утиліт і методів, головною задачею яких є представлення об'ємних об'єктів. Частіше всього цей набір інструментів використовують для проектування об'єктів, які потім експортують в зображення, щоб потім відобразити на екрані чи інших пристроях відображення[21].

Відображення тривимірного об'єкту на площині має різницю від зображення тим, що має геометричну проекцію моделі(сцени) на площину використовуючи спеціалізовані програми. Модель, буває відображенням як реальних об'єктів, так абстракцій(наприклад проекція фрактала).

Кроки, які потрібно виконати для отримання зображення тривимірного об'єкту:

- Моделювання — це процес розробки сцени, що є тривимірною математичною моделлю та об'єктів, що в ній знаходяться[27].
- Рендеринг (візуалізація) — процес розрахунку проекцій[28].

- Зображення результату на пристрій відображення[29].

Наступним етапом є моделювання

Невід'ємною часткою моделювання є сцена. В неї включаються наступні категорії:

- Геометрія (модель, що будується використовуючи різних технології створення тривимірних об'єктів, наприклад будівля)
- Матеріали (так називають інформацію про характеристики моделі, це може бути колір, коефіцієнти заломлення та відбиття)
- Джерела світла (керування напрямками, сила світла та спектр освітлення)

Головною задачею моделювання тривимірних об'єктів — максимально описати і розмістити об'єкти у сцені використовуючи геометричні перетворення щоб наблизитись до вимог поставлених для виведення зображення.

Рендеринг

Головною задачею цього етапу є перетворення просторового об'єкту на плоске двовимірне зображення. При створенні фільму потрібно зарендерити всі кадри, що являють собою послідовність зображень, які виникли в результаті перетворення. Структурно дані зображення представлені матрицею, що складається з точок, які мають інтенсивності. Тобто рендеринг це процес перетворення тривимірної векторної структури в набір пікселів, матрицю. Такий процес є обчислювально складним, що є помітно при обробці великих тривимірних моделей.

Часто використовують наступні технології візуалізації, які комбінуються разом. Наприклад:

- Z-буфер (цю технологію використовують в OpenGL та DirectX10);[30]
- Сканлайн (scanline) — або як ще називають Ray casting (цей алгоритм є спрощеним алгоритмом зворотнього трасування

променів) — обчислення кольору пікселя картинки за допомогою спрямування променя з точки, яку називають камерою.[31][32]

- Трасування променів — робота методу схожа на Ray casting, але розрахунок кольорів є більш точним в силу того, що аналізується більша кількість променів, в тому числі тих, що заломилися.[31][33]
- Глобальне освітлення — метод працює за рахунок розрахунку, як взаємодіють поверхонь та середовища між собою у видимому спектрі випромінювання, та обчислюється використовуючи інтегральні рівняння.[31][34]

В силу того, що при рендеренгу багато обчислень є однотипними, то він зазвичай розпаралелюється.

1.2. Типи представлення тривимірних об'єктів.

3D-модельовання визначення комп'ютерної графіки зазвичай трактують як процес розробки математичного уявлення тривимірної поверхні об'єкту використовуючи спеціалізоване програмне забезпечення. В результаті модельовання на виході отримуємо 3D-модель. Моделі зазвичай представлені в різних форматах, деякі з них описані нижче. Відповідно до формату модель можна відкрити за допомогою спеціальних програм відображення 3D-моделей. Ці моделі створюватися трьома способами: вручну, автоматично, або за допомогою сканера.

Формат VRML (мова модельовання віртуальної реальності)

Файли VRML частіше всього мають розширення WRL. В ньому використовується формат кодування ASCII, тобто представлений як текстовий файл в якому описані об'єкти, що часто назвають вузлами (nodes). Цими

вузлами VRML 2.0 є 3D-геометрія, коефіцієнти освітлення, що формуються за допомогою VRML.[35]

Самі вузли можуть складати ієрархічну структуру, що означає - деякі вузли можуть успадковувати характеристики інших вузлів, що знаходяться на вищих ієрархічних рівнях.

Вузол має структуру, що полягає в типізації вузла, та даних вузла, що вказуються у фігурних дужках.

Типи даних:

Приватні значення поля, які захищені від зміни іншими вузлами. Також є тип полів, які, можуть змінюватись при дії на них іншими вузлами.

Поле задається наступними параметрами:

- тип поля;
- ім'я поля;

Вузли в VRML задаються в декартовій тривимірній системі координат.

Структура VRML-файлу така:

- перший рядок це заголовок, що є обов'язковим `#VRML V2.0 utf8`. (починається коментар з "#", його кінець є кінцем поточного рядка. Значення `utf8` показує, що в VRML рядки записані в кодуванні стандарту UTF-8 ISO 10646);
- за деякої кількості класів тривимірних або двовимірних об'єктів;
- вузли;

Формат 3DS

Один з найпопулярніших форматів 3D-графіки. Файли такого формату були створені разом з програмою 3D Studio. Найчастіше цей формат використовувався для розробки ігор. Даний формат кодувався по наступному принципу: спочатку були координати точок, а потім каркасні сітки, які являли собою саму 3D-модель.[35]

Формати MDL, MD2, MD3, SMD

Такі формати використовуються для представлення анімованих моделей, найчастіше анімації людей. Ці формати є досить популярними, адже для роботи з ними можна використовувати безкоштовні програмні комплекси для редагування тривимірних моделей. Ця анімована модель має досить великий дисковий об'єм. Адже кадри анімації зберігаються кожен окремо, тому відповідно кількість моделей в файлі залежить від кількості кадрів.[35]

Формат X

Формат X- формат «Direct» для тривимірних моделей.

Direct3D: - це набір API, що створений для написання програм зв'язаних з тривимірною графікою.

При наявності файлів у форматі 3DS, так само як і в форматі X, вводяться тексти в текстовому форматі. Сама структура (перетворена в формат BMP). Відображення формату X поля, в тому числі, для отримання додаткової інформації в 3dsconv, Який може бути конвертований в популярний формат 3DS в форматі X. Ви можете легко модернізувати в Kinetix 3D Studio MAX, Використовуючи для цього формат 3DS.[35]

Формат Obj

Формат OBJ — це формат файлу в якому описано геометрію об'єкту, вперше. Цей файл не кодується, тобто можна в текстовому редакторі побачити всі характеристики 3D- моделі.[35]

Типовий файл OBJ виглядає приблизно як на рисунку 1.1:

```

# це коментар
# Список вершин заданих координатами (x,y,z)
v 0.123 0.234 0.345
v ...
...

#Текстурні координати (u,v).
vt 0.500 -1.352
vt ...
...

#Нормалі (x,y,z); нормалі можуть бути не нормалізовані.
vn 0.707 0.000 0.707
vn ...
..

#Кожна грань задається множиною трьох індексів кожен з яких відповідає за вершину/текстуру/нормаль
#координати яких записані в списках вище
#Тому f 1/1/1 2/2/2 3/3/3 це трикутник, що має текстурні координати та нормалі для
#всіх трьох вершин
#ЗАУВАЖЕННЯ: Списки нумеруються починаючи з одиниці.

f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3
f ...

# Чотирикутники, та інші многокутники задаються відповідною кількістю вершин
f v1/vt1/vn1 v2/vt2/vn2 v3/vt3/vn3 v4/vt4/vn4
f ...
...

```

Рис. 1.1. Типовий вигляд файлу OBJ

Формат PLY [36]

PLY — формат опису геометрії тривимірних об'єктів, часто його називають Polygon File Format або Stanford Triangle Format. Його призначення полягає в зберіганні тривимірних даних які отримані з 3D-сканерів. В цьому форматі опис тривимірного об'єкту є відносно простим і представлений, як список плоских полігонів. PLY файл може бути розширеним додатковими характеристиками моделі, а саме: значеннями кольору, коефіцієнтом прозорості, заданими нормаллями до поверхні і т. д. Формат дозволяє мати різні властивості передньої і задньої грані полігону.

Початком файлу є заголовок, де описано які елементи потрібно використовувати при відображенні моделі. Найпростіша модель зазвичай має елементи полігональних сіток і їх типи. Елементами є, зазвичай, вершини(координати) і грані(набір точок). Перший рядок заголовку повинен мати слово ply, це дає змогу програмі відображення зрозуміти, яким способом

представлені дані. В другому рядку вказано до якого типу кодування належить даний файл, наприклад `format ascii 1.0`. Для того, щоб записати коментар, потрібно почати рядок зі слова `comment` та після нього описати коментар. Відповідно коментар не буде братись до уваги програмою відображення. Якщо рядок починається зі слова `element`, то це означає, що в ньому буде описано деякий елемент, що потрібний для відображення моделі, а також скільки таких елементів є у файлі. Наприклад нехай маємо файл, в якому 12 вершин, тобто точок, заданих нецілими координатами, тоді файл буде записано наступне:

```
element vertex 12
```

```
property float x
```

```
property float y
```

```
property float z
```

Після введення елемента, потрібно описати його властивості за допомогою слова `property`, в попередньому прикладі видно, що властивості вершини задаються, як координати. Типи властивостей задаються по аналогії з типізованими мовами програмування, а саме `char uchar short ushort int uint float double` або одним з `int8 uint8 int16 uint16 int32 uint32 float32 float64`. Частіше всього у файлі задаються грані. Вони, та їх властивості, зазвичай, представляють таким чином:

```
element face 10
```

```
property list uchar int vertex_indices
```

властивість `list`, тобто в перекладі список означає, що грані задаються списком значень, де перше число, означає кількість ввершин грані, а після вказані індекси вершин, що були задані до граней. Кінець заголовку можна розпізнати по рядку: `end_header`.

1.3. Використання рівняння дифузії для згладжування об'єктів

Анізотропна дифузія[37], або як її ще називають дифузія Перона–Маліка - це метод, що використовується в обробці зображень та комп'ютерному баченні, ціллю якого є зменшення шуму вхідного об'єкту, при цьому залишаючи важливі частини об'єкту, зазвичай це дані, які є важливими при інтерпритації об'єкта.

Процес анізотропної дифузії схожий на таку послідовність дій, спочатку створюється масштабований простір, в якому генерується сім'я розмитих об'єктів, за допомогою дифузійних процесів. Такий процес є лінійним та просторово-інваріантним до перетворень вихідного об'єкту. Анізотропна дифузія це узагальнення такого дифузійного процесу: використовуючи її створюється сімейство параметризованих об'єктів, але кожен отриманий об'єкт є поєднанням вихідного об'єкту та фільтру, що залежить від характеристик вихідного об'єкту. Тобто, анізотропна дифузія це нелінійна і просторово-варіантна трансформація вихідного об'єкту.

Формулювання, що представили Перон і Малік в 1987 році, просторово-варіантний фільтр - це ізоотропія, що є залежною від вмісту об'єкта, адже вона наближається до імпульсної функції по краям та інших структурах, що повинні були збережені в об'єкті на різних ієрархічних рівнях у результаті масштабування простору. Таке формування терміну анізотропної дифузії називають дифузію Перона і Маліка чи нелінійною і неоднорідною дифузією[37][38]. Більш загальна рецептура дозволяє фільтру, пристосованому до початкових умов, нагадувати анізотропні об'єкти лінійної структури, такі як ребра або лінії: його орієнтація визначається такою структурою, вона витягнута вздовж структури і має вузький перетин. Такі прийоми називають згладжуванням, адаптованим до форм. В результаті отримані зображення зберігають лінійні структури і в той же час згладжування виконується уздовж цих структур. Обидва випадки можна описати узагальненням звичайного рівняння дифузії, де коефіцієнт дифузії замість

того, щоб бути постійним скалярним, є функцією положення зображення і забезпечує матричні (або тензорні) значення (див. Структура тензора).

Хоча отримане сімейство зображень можна охарактеризувати як поєднання вихідних зображень та просторово-варіативних фільтрів, фільтр, адаптований до початкових умов та його поєднання із зображенням, не повинен бути реалізований на практиці[38][39]. Анізотропна дифузія зазвичай реалізується шляхом наближення узагальненого рівняння дифузії: кожне нове зображення в сім'ї обчислюється, застосовуючи це рівняння до попереднього зображення. Отже, анізотропна дифузія - це ітераційний процес, при якому для обчислення кожного наступного зображення в сім'ї використовується відносно простий набір обчислень, і цей процес триває до досягнення достатньої ступеня гладкості[40].

Формально нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ позначає підмножину площини та $I(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - сім'я об'єктів. Тоді анізотропну дифузію можна представити як

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}(c(x, y, t)\nabla I) = \nabla c \cdot \nabla I + c(x, y, t)\Delta I,$$

де Δ позначає оператор Лапласа, ∇ позначає градієнт, $\operatorname{div}(\dots)$ це дивергенція оператора і $c(x, y, t)$ – коефіцієнт дифузії. $c(x, y, t)$ контролює швидкість дифузії. Перона і Малік при представленні анізотропної дифузії запропонували наступні функції для визначення коефіцієнта дифузії:

$$c(\|\Delta I\|) = e^{-(\|\Delta I\|/K)^2}$$

та

$$c(\|\Delta I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\Delta I\|}{K}\right)^2}$$

Константа K визначає чутливість до країв і, як правило, визначається експериментально або ж як функція шуму на об'єкті.

Нехай M позначає копію гладких об'єктів. Тоді дифузійні рівняння, представлені вище, можуть бути інтерпретовані як рівняння градієнтного спуску для мінімізації енергії $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ визначеної як:

$$E[I] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(\|\Delta I(x)\|^2) dx$$

де $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є дійсною функцією і яка тісно пов'язана з коефіцієнтом дифузії. Тоді для будь-якої фінітної, нескінченно диференційовної тестової функції h , маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E[I + th] &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(\|\nabla(I + th)(x)\|^2) = \\ &= \int_{\Omega} g'(\|\nabla I(x)\|^2) \nabla I \cdot \nabla h dx = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(g'(\|\nabla I(x)\|^2) \nabla I) h dx \end{aligned}$$

де останній рядок впливає з багатовимірного інтегрування частинами. Через ∇E_I позначимо градієнт E щодо $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ грегільбетового простору оцінений в I . Це дає

$$\nabla E_I = -\operatorname{div}(g'(\|\Delta I(x)\|^2) \nabla I)$$

Таким чином, градієнтний спуск рівняння заданий як

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\nabla E_I = \operatorname{div}(g'(\|\Delta I(x)\|^2) \nabla I)$$

Тоді, взявши $c = g'$ ми отримуємо анізотропне рівняння дифузії[41].

Регуляризація Перона-Маліка. При такому підході невідоме згортається з Гаусіаном для отримання модифікованих рівнянь Перона-Маліка[38][42].

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|DG_{\sigma} * I|) \nabla I)$$

де $G_{\sigma} = C_{\sigma}^{-(1/2)} \exp(-|x|^2 / 4\sigma)$.

Коректність цього рівняння може бути досягнута шляхом регуляризації, а також використовуючи виведення ефектів розмитості, які є основними недоліками регуляризації. Також необхідно мати знання про рівень шуму, оскільки параметр регуляризації вибирається в залежності від рівня шуму.

Для видалення шумів із цифрових об'єктів можна використовувати анізотропну дифузію, при цьому вона не розмиває країв, якщо коефіцієнт дифузії задається функцією. Якщо коефіцієнт дифузії є константою, тоді анізотропні рівняння дифузії зводяться до рівнянь теплопровідності, що є еквівалентними Гаусовому розмиттю. Це підходить для видалення шумів, але і розмиває краї теж. Перон і Маліка в своїх роботах задають коефіцієнт дифузії функцією, пошуку границь, тоді отримані рівняння згладжують всередині областей. Тобто характеристики об'єкта можуть бути збережені при видаленні шуму об'єкта[42].

1.4.Методи дискретизації рівняння дифузії, що задане на поверхні

Рівняння дифузії являє собою окремий вид диференціального рівняння в часткових похідних. Буває нестационарним і стаціонарним.

В сенсі інтерпретації при вирішенні рівняння дифузії мова йде про знаходження залежності концентрації речовини (або інших об'єктів) від просторових координат і часу, причому заданий коефіцієнт (в загальному випадку також залежить від просторових координат і часу), що характеризує проникність середовища для дифузії. При вирішенні рівняння теплопровідності мова йде про знаходження залежності температури середовища від просторових координат і часу, причому встановлено теплоємність і теплопровідність середовища (також в загальному випадку неоднорідність)[46].

Фізично в тому і в іншому випадку передбачається відсутність або нехтування макроскопічними потокам речовини. Такими є фізичні межі

застосовності цих рівнянь. Також, представляючи безперервну межа зазначених завдань (тобто не більше, ніж деяке наближення), рівняння дифузії і теплопровідності в загальному не описують статистичних флуктуацій і процесів близьких за масштабом до довжини і часу вільного пробігу, також досить сильно відхиляючись від передбачуваного точного рішення задачі в тому, що стосується кореляцій на відстанях, порівнянних (і великих) з відстанями, прохідними звуком (або вільними від опору середовища частинками при їх характерних швидкостях) в даному середовищі за цей час.

Це в переважній частині випадків відразу ж означає і те, що рівняння дифузії і теплопровідності по області застосування далекі від тих областей, де стають суттєвими квантові ефекти або кінцівку швидкості світла, тобто в переважній частині випадків не тільки по своєму висновку, але і принципово, обмежуються областю класичної ньютонівської фізики[44].

Розглянемо ізотропний та анізотропний оператор Лапласа-Бельтрамі та представлення відповідної матриці Лапласа для поверхонь та об'ємів[45].

Нехай N - гладка компактна поверхня (з межею або без неї), можливо, з границею та розглянемо скалярний добуток $\langle f, g \rangle_2 = \int_N f(p)g(p)dp$,

визначений на просторі $L_2(N)$ квадратних інтегровних функцій на N і відповідної норми $\|\cdot\|_2$. Тоді внутрішній гладкий оператор Лапласа-Бельтрамі

$\Delta := -div(grad)$ задовольняє наступним властивостям:

- самоспряженість: $\langle f, g \rangle_2 = \langle f, \Delta g \rangle_2, \forall f, g;$
- позитивна напів-визначеність: $\langle \Delta f, f \rangle_2 \geq 0, \forall f;$. Зокрема, власні значення лапласіана є не меншими 0;
- нульове власне значення: найменше власне значення лапласіана є нульовим, а відповідна власна функція $\phi, \Delta \phi = 0$, є константою;
- локальність: значення $\Delta f(p)$ не залежить від $f(q)$ для будь-якої пари різних точок p, q ;

- лінійна точність: якщо N плоска, а f - лінійна, то $\Delta f = 0$.

Анізотропний оператор Лапласа-Бельтрамі визначається як $\Delta_D f = \text{div}(D\nabla f)$, де D - матриця 2×2 , застосована до векторів, що належать дотичній площині, і керує напрямом і силою відхилення від ізотропного випадку. Діагностування тензора $D := \text{diag}(\varphi_\alpha(k_m)\varphi_\alpha(k_M))$ враховує напрямки та значення m , M низької та високої кривизни, де фільтр $\varphi_\alpha(s) := (1 + \alpha |s|)^{-1}$, $\alpha > 0$. Якщо $\alpha \rightarrow 0$, ми отримуємо ізотропний оператор Лапласа-Бельтрамі (тобто, $D := I$). Альтернативне визначення анізотропного оператора Лапласа-Бельтрамі застосовує нелінійний коефіцієнт $D(v)$, який змінює величину $D(v)$ без зміни напрямку.

Розглянемо (трикутну, багатокутну, об'ємну) сітку $M := (P, T)$, що дискретизує простір N , де $P := \{p_i\}_{i=1}^n$ - це набір n вершин, а T - граф зв'язності (рис. 1.1). На M кусково-лінійна скалярна функція $f := M \rightarrow \mathbb{R}$ визначається лінійною інтерполяцією значень $f := (f(p_i))_{i=1}^n$ у вершинах, використовуючи барицентричні координати. Для наборів точок f визначається лише у P , а T - граф k -найближчих сусідів.

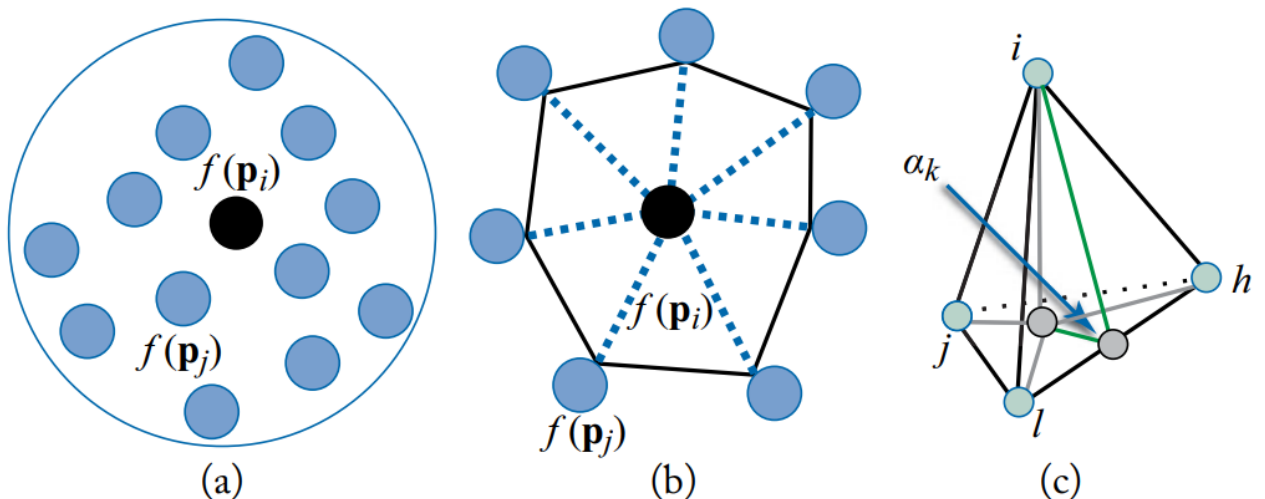


Рис. 1.1 Представлення сусідських вершин лапласіана для набору точок (а), (б) трикутника і (в) чотиригранної сітки.

Зобразимо оператора Лапласа-Бельтрамі на поверхневих і об'ємних сітках уніфікованим способом як $\tilde{L} = B^{-1}L$, де B - розріджена, симетрична, позитивно визначена матриця (матриця маси), а L - розріджена, симетрична та позитивно напів-визначена (стійкість матриця). Ми також вважаємо, що елементи B позитивні і що сума кожного рядка L є нульовою. Зокрема, ми розглянемо B -скалярний добуток $\langle f, g \rangle_B := f^T Bg$ та індуковану норму $\|f\|_B^2 := f^T Bf$. Аналогічно безперервному випадку матриця Лапласа задовольняє наступним властивостям:

- самоспряженість: \tilde{L} суміжний по відношенню до B -скалярного добутку; тобто $\langle Lf, g \rangle_B = \langle f, \tilde{L}g \rangle_B = f^T Lg$. Якщо $B := I$, то ця властивість зводиться до симетрії з L ;
- позитивна напів-визначеність: $\langle \tilde{L}f, f \rangle_B = f^T Lf \geq 0$. Зокрема, власні значення лапласіна є не меншими 0;
- нульове власне значення: за побудовою маємо, що $\tilde{L}1 = 0$;
- локальність: оскільки вага $\{w(i, j)\}_{i, j}$ $w(i, j)$ не є нульовим для кожного краю (i, j) , значення $(\tilde{L}f)_i$ залежить лише від значень f у p_i та його 1-зіркового сусіда $N(i) := \{j : (i, j)\}$.

Графи, сітки та простори Лапласа

Множина $\{w(i, j)\}_{i, j}$ додатніх ваг з гранями (i, j) на T , елементи матриці визначені як $L(i, j) = -\sum_{k \neq i} w(i, k) + w(i, j)$. Елементи матриці ваг B - це коефіцієнти нормалізації, що враховують геометрію вхідної області.

На графах ваг матриці стійкості дорівнюють 1 для кожного ребра і нулю в іншому випадку; кожен діагональні елементи матриці ваг дорівнює "важливості" відповідного вузла. На трикутних сітках матриця стійкості L та матриця ваг B лінійних FEM ваг Лапласа визначаються як

$$L(i, j) := \begin{cases} w(i, j) := -\frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2} & j \in N(i), i \neq j \\ -\sum_{k \in N(i)} w(i, k) & i = j \end{cases} \quad (1)$$

$$B(i, j) := \begin{cases} \frac{|t_r| + |t_s|}{12} & j \in N(i), i \neq j \\ \frac{\sum_{k \in N(i)} |t_k|}{6} & i = j \end{cases} \quad (2)$$

де $N(i)$ – кількість точок які входять в трикутники що містять i –ту точку; α_{ij}, β_{ij} - протилежні кути ребра (i, j) ; $|t_r|, |t_s|$ – площі трикутників, що містять ребро (i, j) . Приведення матриці вагів B до діагональної матриці D , $D(i, i) = \frac{1}{3} \sum_{t \in N(i)} |t|$, елементами якої є райони Вороного, \tilde{L} зводиться до матриці Лапласа $D^{-1}L$ з вагами Вороного-котангенсів, які розширюють введені в $(B := I)$ ваги котангенса. Ваги середнього значення отримані з теореми середнього значення для гармонічних функцій і завжди позитивні. У цьому, просте формулювання власної задачі Лапласа досягається шляхом вибору набору об'ємних тестових функцій, які обмежені вхідною формою. Для анізотропного оператора Лапласа записи L є варіантом ваг котангенсу (тобто відносно різних кутів), а записи діагональної матриці B - області регіонів Вороного.

Хоча оператор Лапласа-Бельтрамі залежить лише від метрики Рейманана (властивість), на її дискретизацію, як правило, впливає якість вхідної триангуляції. Наприклад, дві (спрощені) ізометричні поверхні з двома різними трикутниками пов'язані з двома різними матрицями Лапласа. Відповідно, ваги котангенсу є не від'ємними тоді і лише тоді, коли вхідна триангуляція - Делоне, і відповідна матриця Лапласа більш точна, ніж ті, що оцінюються на вихідній сітці.

Триангуляція кусково-плоскої поверхні - це триангуляція Делоне, якщо і лише тоді, коли всі її внутрішні краї є локально Делоне (тобто сума кутів,

протилежних ребру в сусідніх трикутниках, не перевищує π). Крім того, мінімум енергії Діріхле кусково-лінійної функції на всіх можливих трикутниках кусково-плоскої поверхні M досягається при триангуляції Делоне M і відповідний дискретний оператор Лапласа-Бельтрамі є властивим поверхні входу.

На полігональних сітках дискретизація Лапласа узагальнює матрицю Лапласа з котангенсними вагами до поверхневих сіток з невіпуклими гранями.

На об'єктах, представлених у вигляді тетраедричних сіток, записи матриці жорсткості є (рис. 1.4.1с)

$$L(i, j) := w(i, j) := \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n t_k \cot \alpha_k$$

для кожного краю (i, j) , $L(i, i) := -\sum_{j \in N(i)} w(i, j)$, а нуль в інших випадках; матриця діагональних мас B кодує об'єм тетраедра в кожній вершині.

Матриця Лапласа на множині точок

Оператор Лапласа-Бельтрамі на точковому наборі P дискретизовано як матриця Лапласа.

$$L(i, j) := \frac{1}{nt(4\pi t)^{3/2}} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\|p_i - p_j\|_2}{4t}\right) & i \neq j, \\ -\sum_{k \neq i} L(i, k) & i = j, \end{cases}$$

Для гарантування розрідженості матриці Лапласа, для кожної точки p_i ми розраховуємо лише записи $L(i, j)$ пов'язані з точками $\{p_j\}_{j \in N_{p_i}}$, які найближчі до p_i по за евклідовою відстанню. У цьому випадку ми вибираємо або k -найближчих сусідів, або точки, які є дотичними до сфери, розташованої в центрі p_i і з радіусом σ (рис. 1.1а). Вибір може бути адаптований до

локальної щільності вибірки $\psi := k(\pi\sigma^2)^{-1}$ і кривизни поверхні, що лежить в основі P . Обчислювальна складність для k -найближчих сусідів є $O(n \log n)$, де n - кількість вхідних точок.

Починаючи з цього підходу, нова дискретизація була досягнута завдяки більш тонкому наближенню локальної геометрії поверхні в кожній точці через її осередок Вороного. Точніше, якщо $t \rightarrow 0$ матриця стійкості та вагів визначається як

$$L(i, j) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi t^2} \exp\left(-\frac{\|p_i - p_j\|_2}{4t}\right) & i \neq j, \\ -\sum_{k \neq i} L(i, k) & i = j, \end{cases}$$

$$B(i, i) = v_i,$$

і v_i - регіон Вороного, пов'язана з точкою p_i . Регіон Вороного p_i наближається шляхом проектування точок сусіда p_i на оцінну дотичну площину на M при p_i . Якщо $B := I$, то це наближення зводиться до попереднього і обидва підходи переходять до оператора Лапласа-Бельтрамі, якщо $t \rightarrow 0$.

1.5. Підходи до обчислення матричної експоненти

Експонента матриці — функція на вхід до якої подається квадратна матриця. Експонента матриці має схожі властивості зі звичайною експоненційною функцією чи дійсних, чи комплексних чисел.

Нехай маємо квадратну матрицю дійсних або комплексних чисел X розмірності $n \times n$ тоді можна знайти експоненту від X , яку позначають як e^X або $\exp(X)$. Це матриця розміру $n \times n$, визначена за допомогою ряду:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k,$$

де X^k - k -та степінь матриці X .

Цей ряд є абсолютно збіжним. Якщо $\|X\| = \alpha$, де матрична норма узгоджена з векторною, то

$$\left\| \frac{1}{k!} X^k \right\|, \frac{1}{k!} \|X\|^k, \frac{1}{k!} \alpha^k.$$

Звідси

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\|, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X^k\|, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k = \\ & = e^{\alpha} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\|, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X^k\|, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k = e^{\alpha}, \end{aligned}$$

що показує що ряд абсолютно збігається і доводить коректність визначення.

Якщо матриця X має розмірність 1×1 , це означає, що матричною експонентою буде матриця розмірності 1×1 і її елемент це значення експоненти від єдиного значення матриці X .

Також експоненційну функцію можна представити як наступну рівність

$$\exp X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} X \right)^n,$$

де I – одинична матриця такої ж розмірності як і X .

Можна записати аналогічну рівність

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n,$$

що виконується як для дійсних, так і для комплексних чисел.

Для того, щоб довести рівність використаємо формулу

$$\left(1 + \frac{a}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!(m-k)!},$$

де a – може бути матрицею, або числом.

Тоді маємо, що для норми $\|X\| = \alpha$, буде виконуватись наступне

$$\left\| e^X - \left(I + \frac{1}{n} X \right)^n \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - \frac{a^k}{k!(n-k)!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, що відповідно означає, що твердження доведено.

Основні властивості

Нехай маємо матриці комплексних чисел X і Y розмірності $n \times n$, комплексні числа a та b , одиничну матрицю I і нульову матрицю 0 , тоді експонента матриці буде мати наступні властивості:

- $\exp 0 = I$;
- Матриці X і $\exp X$ комутують, тобто

$$X \exp(X) = \exp(X) X .$$

Це легко виводиться з визначення експоненти, як суми збіжного ряду, кожен доданок якого очевидно комутує з X ;

- $\exp aX \exp bX = \exp((a+b)X)$;
- $\exp X \exp(-X) = I$;
- Якщо $XY = YX$, то $\exp X \exp Y = \exp Y \exp X = \exp(X+Y)$;
- Якщо Y — невироджена матриця, то $\exp(YXY^{-1}) = Y \exp(X) Y^{-1}$.
- $\exp X^T = (\exp X)^T$, де X^T транспонована матриця до X , з цього випливає, що коли X -симетрична, то $\exp X$ теж симетрична;

1.5.1. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Найбільша важливість матричної експоненти полягає у використанні її для розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок такої системи

Одна з причин, які зумовлюють важливість матричної експоненти, полягає в тому, що вона може бути використана для розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок системи

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0,$$

де A – матриця, що задається виразом:

$$y(t) = e^{At} y_0.$$

Також матричну експоненту можна використовувати для знаходження рішень неоднорідних рівнянь наступного виду:

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t) + z(t), \quad y(0) = y_0.$$

Або коли не існує замкнутого аналітичного виразу для рішень неоднорідних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t), \quad y(0) = y_0,$$

де A — матриця елементи якої не є константами, але Розклад Магнуса дозволяє отримати подання розв'язку у вигляді нескінченної суми.

1.5.2. Метод апроксимації Ейлера

Апроксимація матричної експоненти методом Ейлера має наступний вигляд:

$$e^{At} \approx I_n + At + \frac{(At)^2}{2} + \dots + \frac{(At)^k}{k!} \equiv I_n + \sum_{i=0}^k \frac{(At)^i}{i!}$$

Що є апроксимацією Тейлора порядку k .

Знаходження експоненти матриці цим методом є досить точним якщо k було взято досить великим у відповідності до розмірності матриці A . Якщо $\|A\|$ є досить великою, алгоритм буде потребувати дуже великих обчислювальних потужностей.

1.5.3. Метод апроксимації Паде

Апроксимація матричної експоненти методом Паде має наступний вигляд: $e^{At} \approx F_{\mu\nu}(At)G_{\mu\nu}^{-1}(At)$, де

$$F_{\mu\nu}(x) = 1 + \frac{\mu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)\mu!}x^\mu,$$

$$G_{\mu\nu}(x) = 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)1!}x + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots$$

$$+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\mu+1)!}x^\nu,$$

Цей метод має меншу похибку апроксимації ніж метод Ейлера, але обчислювальна складність є теж досить велика

1.6. Перетворення Келі

Нехай X - банаховий простір векторно визначених функцій $u : R_+ \rightarrow X$, $t \rightarrow u(t)$, та A – оператор в X . Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0 \quad (3)$$

Оператором для цього рівняння є, за визначенням, операторна експонента або пів-група, яка за допомогою символічних позначень може бути записана у вигляді $T(t) = e^{-At}$. Для заданого оператора $T(t)$ розв'язок задачі Коші(3) задається рівністю $u(t) = T(t)u_0$.

При побудові таких алгоритмів корисним виявляється використання перетворення Келі оператора A :

$$T\gamma = (\gamma I - A)(\gamma I + A)^{-1}, \quad (4)$$

де I - тотожний оператор і γ - довільне комплексне число. Перетворення Келі добре відомо в теорії операторів і часто використовується для переходу від дослідження замкнутого, але, взагалі кажучи, необмеженого лінійного оператора з щільною областю визначення $D(A)$ в деякому гільбертовому просторі H , до вивчення обмежених операторів $T\gamma$.

Так, якщо A - щільно заданий строго дисипативний необмежений оператор в гільбертовому просторі H , то оператор $T\gamma$ – стискаючий. Перетворення Келі також може бути застосовано в теорії випадкових процесів для перетворення процесів з безперервним тимчасовим параметром в процеси з дискретним часом. У запропоновано замінювати за допомогою перетворення Келі пасивні лінійні стаціонарні системи з безперервним часом на еквівалентні системи з дискретним часом, які зберігають основні глобальні властивості систем. Нижче показаний метод, що використовується для подання точного і

наближеного рiшень задачі (1), в якій оператор - обмежений позитивно визначений оператор в гiльбертовому просторі. Дискретна задача Коші:

$$\begin{aligned} y_{\gamma, n+1} &= T_{\gamma} y_{\gamma, n}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ y_{\gamma, 0} &= x_0, \end{aligned}$$

розглядається разом із задачею(1). Для оператора T_{γ}^p має місце співвідношення: $y_{\gamma, p} = T_{\gamma}^p y_{\gamma, 0} = T_{\gamma}^p x_0$, а значить, цей оператор є розв'язуючим для дискретної задачі Коші(1). Він визначає також деяку дискретну пiв-групу. Доводиться, що рiшення задачі (1) і відповідні безперервна і дискретна пiв-групи $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ та $\{T_{\gamma}^n\}_{n \geq 0}$ зв'язані формулами:

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)x_0 = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \phi_p(2\gamma t) y_{\gamma, p} = \\ &= e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma, p} + y_{\gamma, p+1}), \\ y_{\gamma, p} &= T_{\gamma}^p y_{\gamma, 0} = (-1)^{p+1} \left[\int_0^{\infty} \psi_p(t) x\left(\frac{t}{2\gamma}\right) dt + x_0 \right], \end{aligned}$$

$$T(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \phi_p(2\gamma t) T_{\gamma}^p = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} L_p^{(0)}(2\gamma t) (T_{\gamma}^p + T_{\gamma}^{p+1}),$$

$$T_{\gamma}^p = (-1)^p \left[\int_0^{\infty} \psi_p(t) T\left(\frac{t}{2\gamma}\right) dt + I \right],$$

де

$$\phi_p(t) = -\frac{t}{p} e^{-t/2} L_{p-1}^{(1)}(t), \quad |\phi_p(t)| \leq 1, \quad \text{для всіх } p \geq 0,$$

$$\psi_p(t) = -e^{-t/2} L_{p-1}^{(1)}(t) = e^{-t/2} \frac{d}{dt} L_p^{(0)}(t),$$

$L_p^{(\alpha)}(t)$ - поліноми Лагерра. Якщо визначити наближене рішення x^N задачі (1) відрізком ряду

$$x^N(t) = \sum_{p=0}^N (-1)^p \phi_p(2\gamma t) y_{\gamma,p},$$

то доведено, що воно сходиться рівномірно по t до точного рішення $x = x(t)$ при $N \rightarrow +\infty$ зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $q_\gamma < 1$, що залежать від числа обумовленості оператора A .

Далі, отримані результати поширюються на випадок необмеженого самосопряженого позитивно визначеного оператора A зі щільною областю визначення $D(A)$. Ми покажемо, що наближене рішення x^N завдання (1), яке визначається рівністю

$$x^N(t) = T^N(t)x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}), \quad (5)$$

є найкраща апроксимація для точного розв'язку x в деякому гільбертовому просторі. Швидкість збіжності визначається гладкістю x_0 і має порядок $O(N^{\theta-\sigma})$ в деякій спеціальній слабкою нормі $\|\cdot\|_\theta$, при $\sigma \geq 0$, якщо $x_0 \in D(A^{\sigma-\frac{1}{2}})$. Для знаходження послідовності $\{y_{\gamma,p}\}_{p=0}^N$, яка бере участь в конструюванні наближеного рішення x^N завдання (14), потрібно вирішити рекурентні операторні рівняння (з одним і тим же оператором, але з різними правими частинами)

$$\begin{aligned} (\gamma I + A) y_{\gamma,p+1} &= (\gamma I - A) y_{\gamma,p}, \\ p &= 0, 1, \dots, y_{\gamma,0} = x_0. \end{aligned}$$

Поліноми Лагерра — ортогональні поліноми, названі на честь французького математика Едмона Лагерра.

Поліномами Лагерра називаються канонічні розв'язки диференційного рівняння

$$x y'' + (1 - x) y' + n y = 0$$

що є лінійним диференційним рівнянням другого порядку і має несингулярний розв'язок лише для невід'ємних цілих n . Для даних поліномів справедлива також явна формула Родрігеса:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

Поліноми Лагерра можна задати рекурсивно. Для цього слід взяти:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

і визначити наступні поліноми за допомогою формули:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} ((2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)).$$

Узагальнені поліноми Лагерра

Узагальненими поліномами Лагерра називаються поліноми визначені за допомогою узагальненої формули Родрігеса:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha e^{-x} / \Gamma(1 + \alpha) & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

Тоді звичайні поліноми Лагерра є частковим випадком:

$$E[L_n(X)L_m(X)] = 0, \text{ якщо } n \neq m$$

Узагальнений поліном Лагерра степеня n також можна визначити за допомогою формули:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!}$$

Також виконуються рекурентні співвідношення:

$$L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) = \sum_{i=0}^n L_i^{(\alpha)}(x)L_{n-i}^{(\beta)}(y),$$

Зокрема

$$L_n^{(\alpha+1)}(x) = \sum_{i=0}^n L_i^{(\alpha)}(x),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{\alpha - \beta + n - i - 1}{n-i} L_i^{(\beta)}(x),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{\alpha - \beta + n}{n-i} L_i^{(\beta-i)}(x);$$

Узагальнені поліноми Лагерра є ортогональними на проміжку $[0, \infty)$ з нормою $x^\alpha e^{-x}$:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{n,m},$$

Для звичайних поліномів Лагерра виконується рівність:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx.$$

Відмінні риси використовуваної техніки такі:

- 1) декомпозиція еволюційної задачі на послідовність стаціонарних задач ("виняток" однієї змінної t);
- 2) автоматична залежність швидкості збіжності від гладкості початкових даних або від розв'язку ("спектральна властивість");
- 3) використання тільки стискаючих операторів;
- 4) наближене рішення може бути знайдено в аналітичному вигляді за допомогою гібридного чисельного аналітичного комп'ютерно-алгебраїчного методу.

Висновки до розділу 1

У розділі 1 було розглянуто поняття які тривимірна комп'ютерна графіка, тривимірний об'єкт, рівняння дифузії, експонента матриці, згладжування за допомогою рівняння дифузії, методи знаходження експоненти матриці. На основі інформації даного розділу можна зробити наступні висновки:

1. Працюючи з тривимірною графікою потрібно мати великі обчислювальні потужності.
2. Згладжувати об'єкти можна за допомогою дифузійних методів.
3. Для згладжування зі збереженням розмірів об'єкту, можна виконувати дискретизацію за допомогою оператора Лапласа-Бельтрамі.
4. При згладжуванні за допомогою методів дифузії, можна знаходити розв'язки рівняння дифузії за допомогою матричної експоненти.
5. Знаходження матричної експоненти можна робити за допомогою різних методів, але оскільки така операція є обчислювально складною, то з наведених вище методів краще всього використовувати перетворення Келі.
6. Метод пошуку матричної експоненти за допомогою перетворення Келі є досить ефективним.

РОЗДІЛ 2.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИФУЗІЙНОГО ЗГЛАДЖУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ

Матеріали даного розділу присвячені розгляду методів дифузійного згладжування та розробці процесу згладжування тривимірних об'єктів. В підрозділі 2.1 розглядаються часто використовувані методи дифузійного згладжування. Про дифузійне згладжування тривимірних об'єктів розповідається в підрозділі 2.2. У підрозділі 2.3 показана загальна послідовність дій дифузійного згладжування розробленого методу.

2.1. Методи згладжування дифузійного згладжування

Для обчислення рішення дискретного рівняння тепла та ядра розглянемо лінійне, поліноміальне та раціональне наближення експоненціального фільтра. На обсягах ми отримуємо рішення рівняння тепла на основі аналітичного подання теплового ядра. За винятком усіченого спектрального методу, всі попередні наближення не залежать від оцінки спектра Лапласа зводяться до набору розріджених лінійних систем (табл. 2.1). Поліноміальне та раціональне наближення зазвичай забезпечують найкращий компроміс між точністю наближення та обчислювальною вартістю.

Лінійна апроксимація

Для рішення рівняння тепла ми розглядаємо усічене спектральне наближення, метод Ейлера назад, наближення Тейлора першого порядку та методи Крилова та Шура.

Метод усіченого спектрального наближення та потужності Обчислювальне вузьке вузол для оцінки всього спектру Лапласа покладає на нас розглянути лише невелику підмножину цього спектру. З моменту згасання фільтруючого коефіцієнта, де t збільшується разом з i , у спеціальному поданні розв'язку рівняння теплопровідності ми розглядаємо лише внесок, пов'язаний з першими k власними парами.

Урізане наближення є точним лише в тому випадку, якщо експоненціальний фільтр швидко розпадається (наприклад, великі значення

часу), а вплив вибраних власних пар на точність наближення неможливо оцінити без обчислення всього спектру. Оператори подовження мультироздільної здатності продовжують значення усіченого спектрального наближення, обчислені на поданні низької роздільної здатності вхідної форми, до початкового дозволу за допомогою ієрархії спрощених сіток. У цьому випадку кількість власних пар евристично адаптується до роздільної здатності поверхні та її глобальних / локальних особливостей

Це наближення не залежить від обчислення спектру Лапласіана, визначених користувачем параметрів та операторів мультирезультативного подовження, які евристично пристосовують кількість власних пар до роздільної здатності поверхні. Розріджені та добре кондиціоновані матриці попередніх лінійних систем мають однакову структуру та розрідженість матриці підключення вхідного домену, правильно кодують локальні та глобальні особливості в тепловому ядрі і можуть бути обчислені для будь-якого представлення вхідний домен і для будь-якого вибору ваг.

2.2. Дифузійне згладжування тривимірних об'єктів

Суть дифузійного згладжування полягає в тому, щоб представити тривимірний об'єкт таким чином, щоб застосувати до нього метод розв'язку рівняння дифузії, що є звичайним диференціальним рівнянням. Теорія звичайних диференціальних рівнянь зародилася ще у XVII столітті. Основними джерелами виникнення поняття «диференціальне рівняння» були так звані «обернені задачі на дотичні» (задачі відшукування кривих за відомими властивостями їх дотичних); та кінематичний спосіб побудови різних кривих, який спирався на поняття миттєвої швидкості [12]. Вже у XVIII столітті теорія звичайних диференціальних рівнянь розвинулася настільки, що її стали розглядати як самостійну наукову дисципліну. Велику роль у цьому зіграли праці І. Ньютона, Г. Лейбніца, Й. Бернуллі, Я. Бернуллі, Р. Декарта, Л. Ейлера,

Я. Ріккати, Ж. Д'Аламбера, Ж. Лагранжа. Термін «диференціальне рівняння» вперше ввів Г. Лейбніц у 1676 році. У цей самий час І. Ньютон запропонував метод відшукування розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів, а Г. Лейбніц поставив задачу знаходження розв'язків у скінченному вигляді. Велика заслуга у формуванні і розвитку теорії диференціальних рівнянь належить Л. Ейлеру. Саме він ввів поняття загального, частинного розв'язків та займався особливими розв'язками. Розвинув метод інтегруючого множника не лише для рівнянь першого, а й вищих порядків. Л. Ейлеру належить метод розв'язування однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння та з'ясування його загального розв'язку [40].

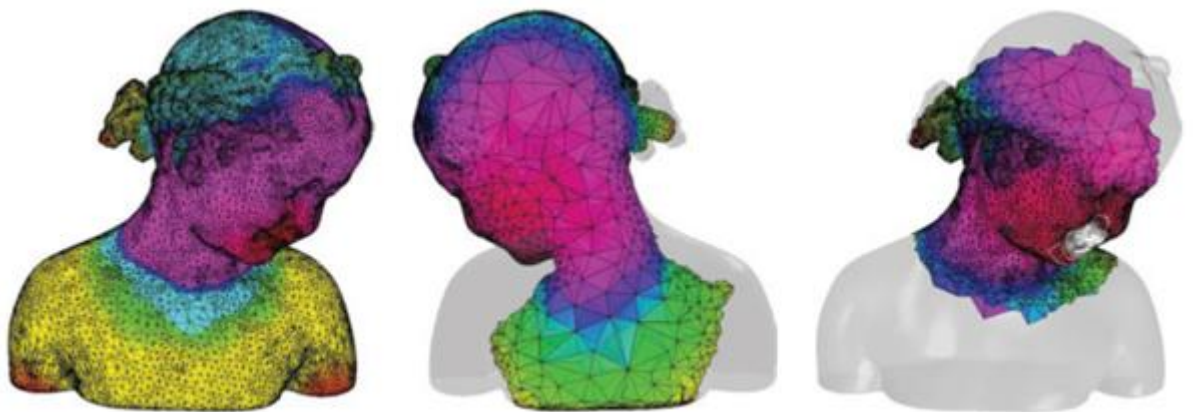
На поверхні функція $F(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i K_i(p_i, \cdot) f(p_i)$ апроксимується як лінійна комбінація базисних функцій.

Регіони v_i при p_i , K_i - матриця Грама для ядра Гауса, а невідомі визначаються шляхом наведення умови. Для подолання трудомісткого рішення n лінійної системи кількість умов зменшується або коефіцієнт матриці розширюється відповідно до експоненціального розпаду його записів. Альтернативно, об'ємне рівняння тепла вирішується дискретизацією оператора Лапласа-Бельтрамі з кінцевими елементами або з кінцевими різницями на наборі з 6 сусідів або з наближенням градієнтного поля, орієнтованого на геометрію.

Хоча дискретизація ядра тепла на сітці Вокселя є достатньо точною для оцінки дескрипторів діагностики, які кластеризовані в набори характеристик, обчислення рішення об'ємного рівняння тепла зазвичай вимагає більш точної дискретизації вхідний домен. Подовження лапласіанської, гармонічної та дифузійної функцій від межі обсягу до її внутрішнього простору через барицентричні координати чи нелінійне наближення досягає низької точності рішення в сусідній частині кордону. Спрощення мультироздільної здатності вхідного обсягу також забирає багато часу, а вибір роздільної здатності об'єму

щодо очікуваної точності наближення, як правило, керується евристикою. Дійсно, ці методи не мають наміру кількісно наблизити теплове ядро, але надають альтернативні підходи, які якісно поведуться, як теплові ядра за обсягами. Для підвищення точності розглянемо об'ємну матрицю Лапласа вхідної області та обчислимо апроксимацію Паде-Чебишева індукованого теплового ядра (рис. 2.6)

$$t = 0.1$$



$$t = 1$$

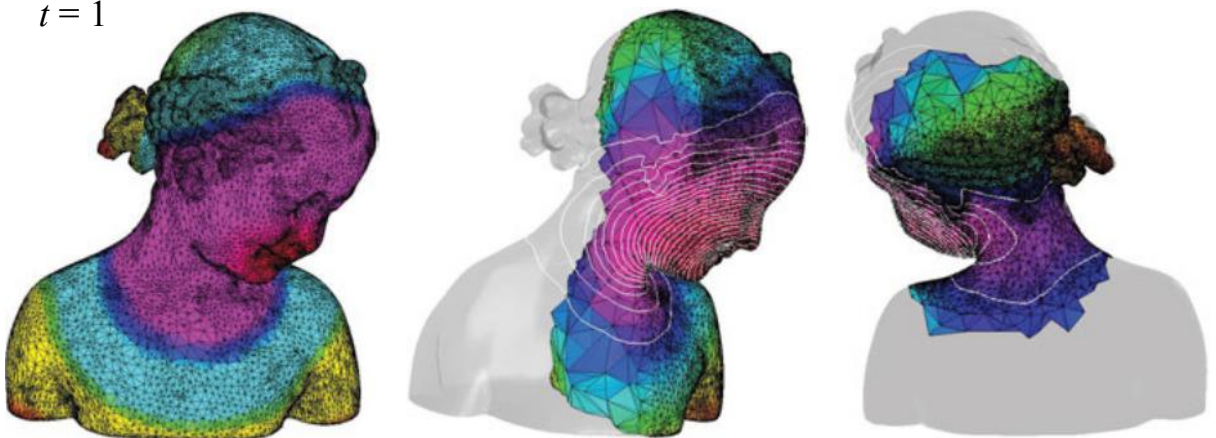


Рис 2.2: Об'ємне ядро тепла. Набори рівнів відповідають ізо-значенням, рівномірно відібраних у межах розчину, обмеженого до межі обсягу.

2.3. Послідовність дій дифузійного згладжування тривимірних об'єктів

Для згладжування тривимірних об'єктів методами дифузії потрібно дискретизувати модель, для цього було використано метод дискретизації за допомогою наближення оператора Лапласа-Бельтрамі. Використовуючи наступні формули:

$$L(i, j) := \begin{cases} w(i, j) := -\frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{2} & j \in N(i), i \neq j \\ -\sum_{k \in N(i)} w(i, k) & i = j \end{cases}$$

$$B(i, j) := \begin{cases} \frac{|t_r| + |t_s|}{12} & j \in N(i), i \neq j \\ \frac{\sum_{k \in N(i)} |t_k|}{6} & i = j \end{cases}$$

Та сформувані матрицю Лапласа $\tilde{L} = B^{-1}L$. Таким чином ми приводимо модель тривимірного об'єкту до представлення його, як наприклад, рівняння теплопровідності. Так як розв'язок рівняння теплопровідності можна знаходити за допомогою матричної експоненти, то за допомогою перетворення Келі, тобто використовуючи наступні формули:

$$x^N(t) = T^N(t)x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^N (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) (y_{\gamma,p} + y_{\gamma,p+1}),$$

де x_0 - координати вхідної моделі, N - кількість ітерації, $L_p^{(0)}$ - поліноми Лагерра, γ - параметр, що задається, має бути більше 0, t - параметр, за допомогою якого можна керувати силою згладжування, $y_{\gamma,p}$ - вектор значень, сформований у результаті перемноження матриці Лапласа в степені p та початкових координат об'єкту.

Поліноми Лагерра можна рахувати за наступним рекурсивним співвідношенням:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} \left((2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x) \right),$$

де $L_0(x) = 1$ $L_1(x) = 1 - x$.

В наступній діаграмі зображено послідовність дій для знаходження експоненти матриці. В нашому випадку на вхід подається матриця Лапласа, яка була сформована за допомогою оператора Лапласа-Бельтрамі.

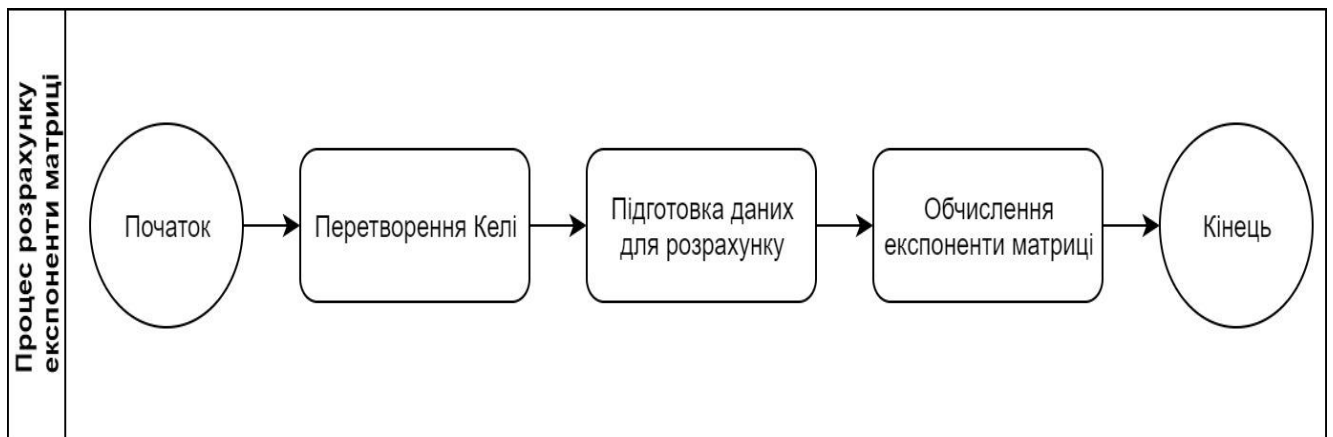


Рис.2.3. Послідовність дій для знаходження експоненти матриці

Висновки до розділу 2

У розділі 2 наведено результати аналізу літератури про дифузійне згладжування. Визначено особливості дифузійного згладжування. Зроблені наступні висновки:

1. На основі теоретичних відомостей вказаних в розділі 1 сформовано послідовність дій, для дифузійного згладжування тривимірних об'єктів.
2. Було проаналізовано методи дифузійного згладжування.
3. Розроблено власну обчислювальну схему згладжування тривимірних об'єктів на основі методів дифузійного згладжування.
4. Запропоновано метод обчислення за допомогою експоненти матриці.
5. Згладжування за допомогою дифузійних методів не зменшують масштаб тривимірного об'єкту.

РОЗДІЛ 3.

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ЗГЛАДЖУВАННЯ

Спираючись на загальні положення викладені в першому розділі та математичний апарат другого розділу, було створено програмне забезпечення для згладжування тривимірних об'єктів. У підрозділі 3.1 описано алгоритм, за допомогою якого проводиться процес дифузійного згладжування. У підрозділі 3.2 показано процес роботи з розробленим програмним забезпеченням

3.1.Опис алгоритму згладжування

Для згладжування тривимірних об'єктів, було розроблено алгоритм, на основі методів дифузійного згладжування.

Для згладжування тривимірного об'єкту було розроблено наступне послідовність дій:

- 1) формування з координат вершин матрицю;
- 2) знаходження площ всіх заданих трикутників;
- 3) знаходження кутів між всіма сусідніми вершинами;
- 4) дискретизація поверхні тривимірного об'єкту за допомогою оператора Лапласа-Бельтрамі;
- 5) використання перетворення Келі на дискретизованій поверхні;
- 6) отримання результату згладжування.

Розглянемо деякі пункт 4) більш детально. Для виконання пункту цього потрібно було підготувати дані, тривимірного об'єкту, якщо точніше, то те, що описано в пункті 3). Щоб провести дискретизацію поверхні потрібно використати формули (1) та (2), по принципу наведеному в розділі 1. На діаграмі !!! зображено процес дискретизації(!!!).

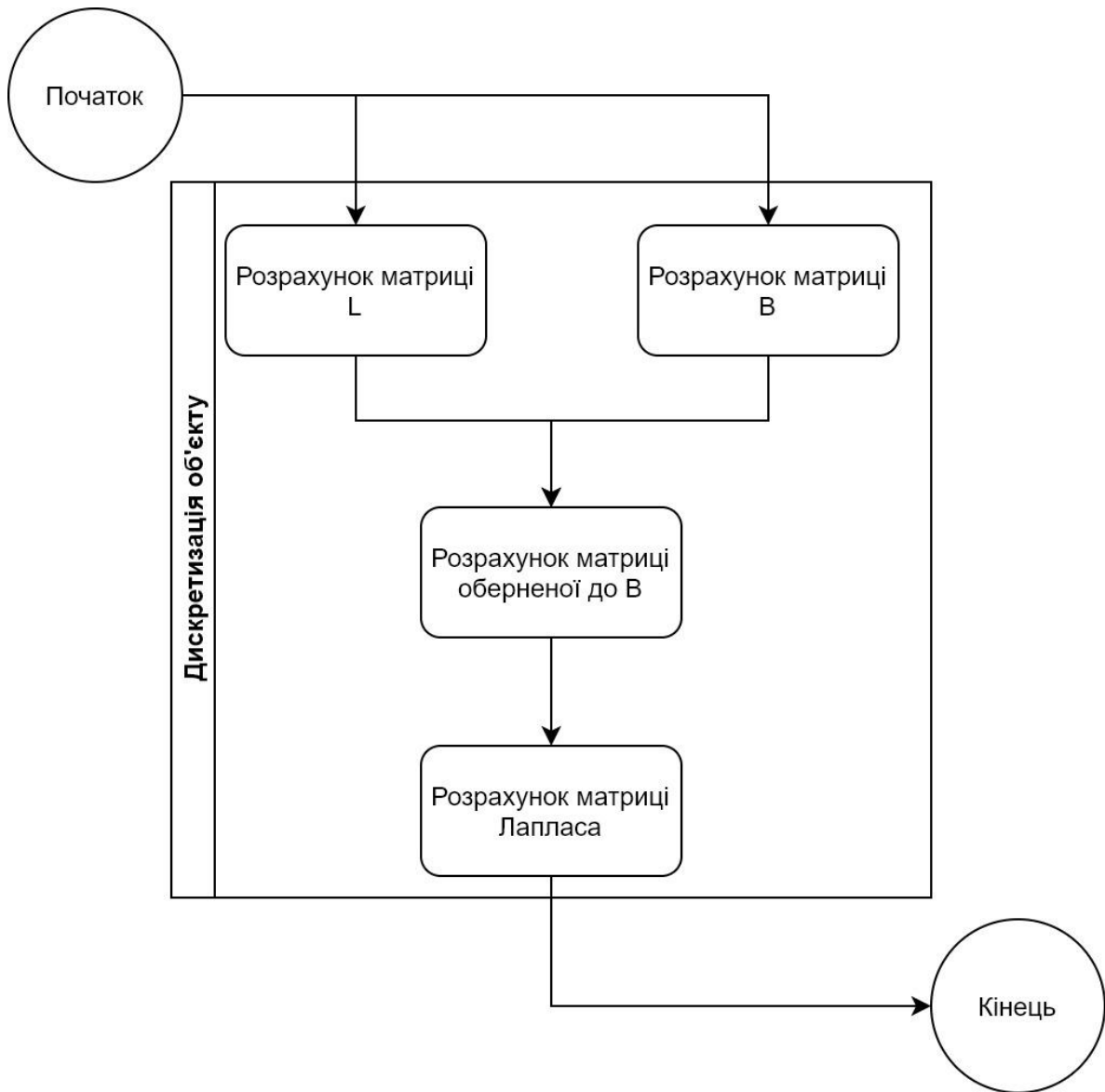


Рис.3.1. Послідовність дій для дискретизації тривимірного об'єкту.

3.2. Процес роботи з розробленим програмним забезпеченням

Спочатку опишемо процес зчитування тривимірного об'єкту. Для подання на вхід програмного забезпечення 3D модель повинна бути з розширенням *.ply. Адже зазвичай моделі в цьому форматі задаються в ASCII. На діаграмах зображена послідовність дій ПЗ для зчитування.

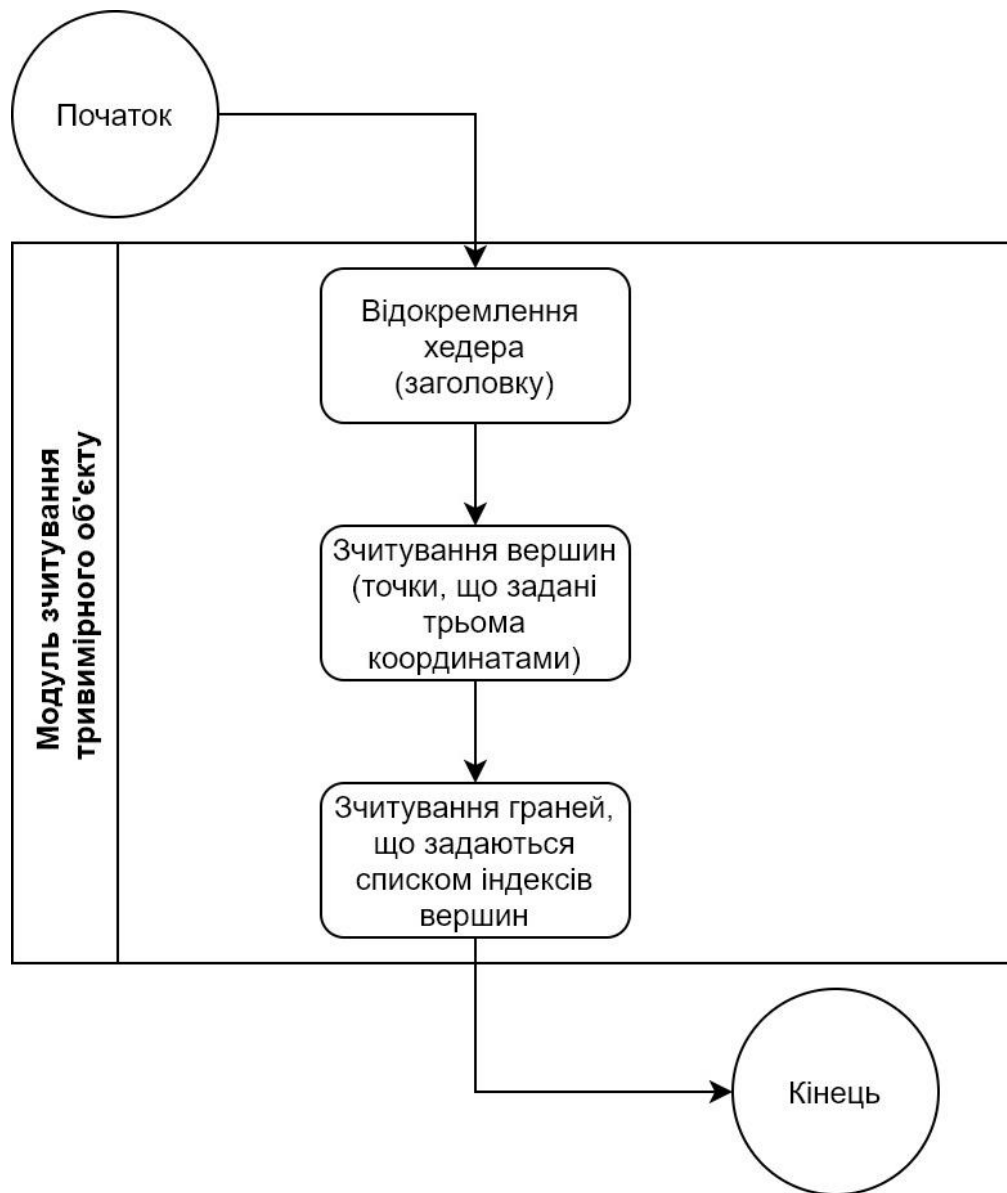


Рис.3.2. Послідовність дій при зчитуванні тривимірного об'єкту

Більш детально розглянемо зчитування елементів 3D об'єкту, тобто вершин та граней – в нашому випадку трикутників. Зчитування елементів наведено в блок-схемі на рисунку 3.3.

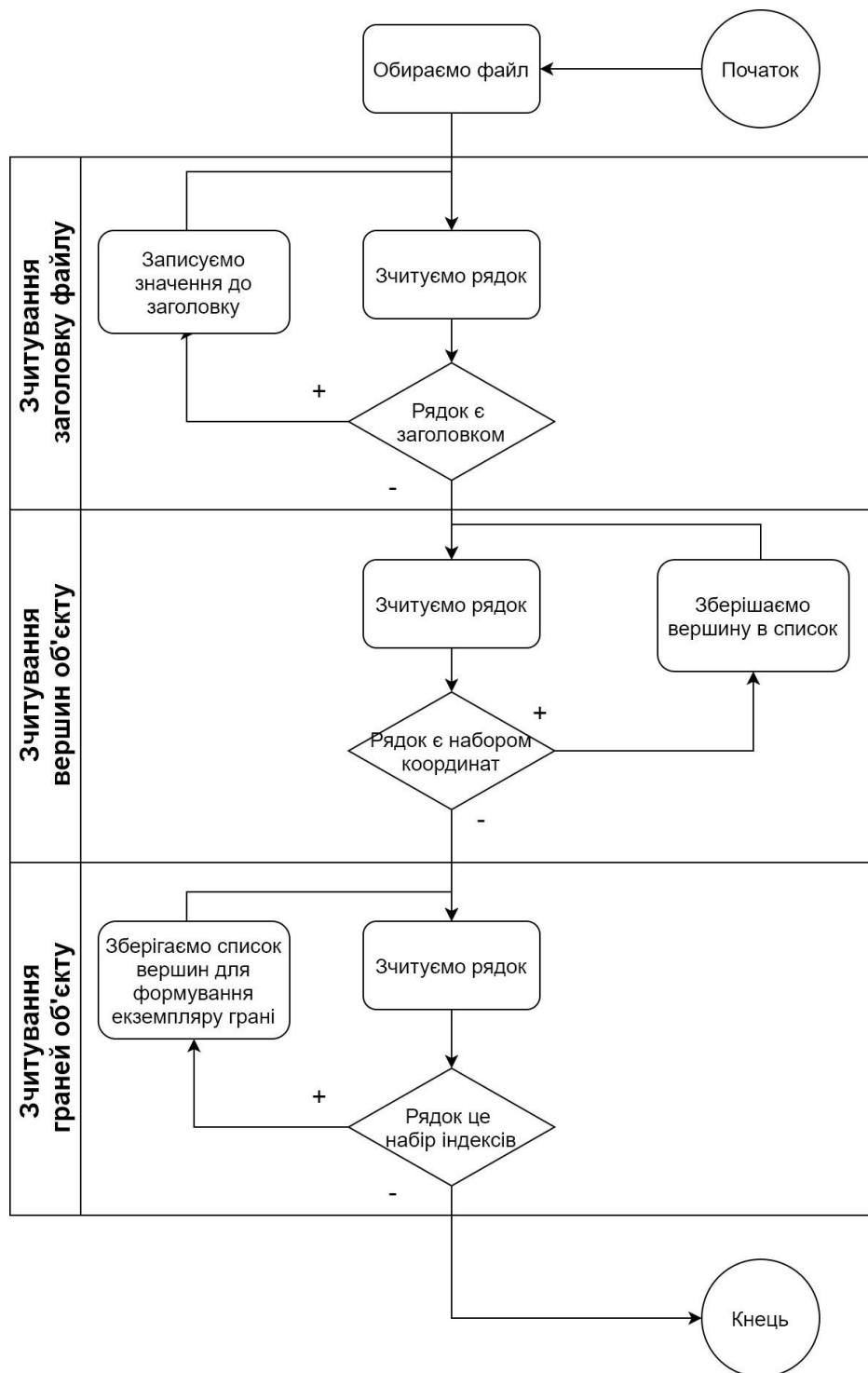


Рис.3.3. Блок-схема алгоритму зчитування тривимірного об'єкту

Для більшої швидкодії обчислень дискретизації було прийнято рішення сформуванню зв'язки між елементами тривимірного об'єкту. Ці зв'язки можна назвати у співвідношенні 1 до багатьох у випадку зв'язків точок до трикутників, та багато до багатьох при зв'язку трикутників з точками(Рис.)

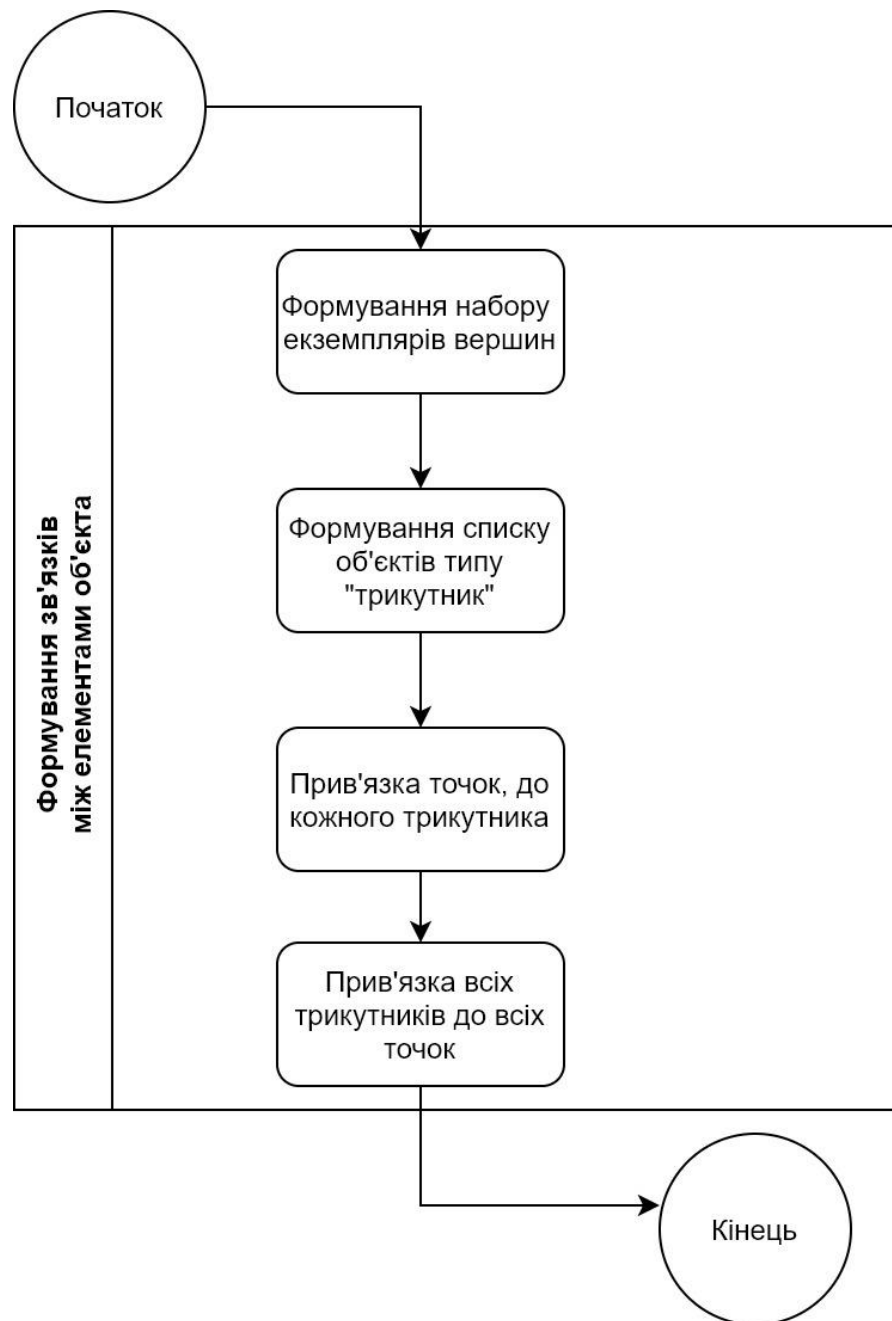


Рис.3.4. Послідовність дій для формування зв'язків між елементами тривимірного об'єкту

Загальну послідовність дій роботи розробленого програмного забезпечення можна побачити на рисунку 3.5.

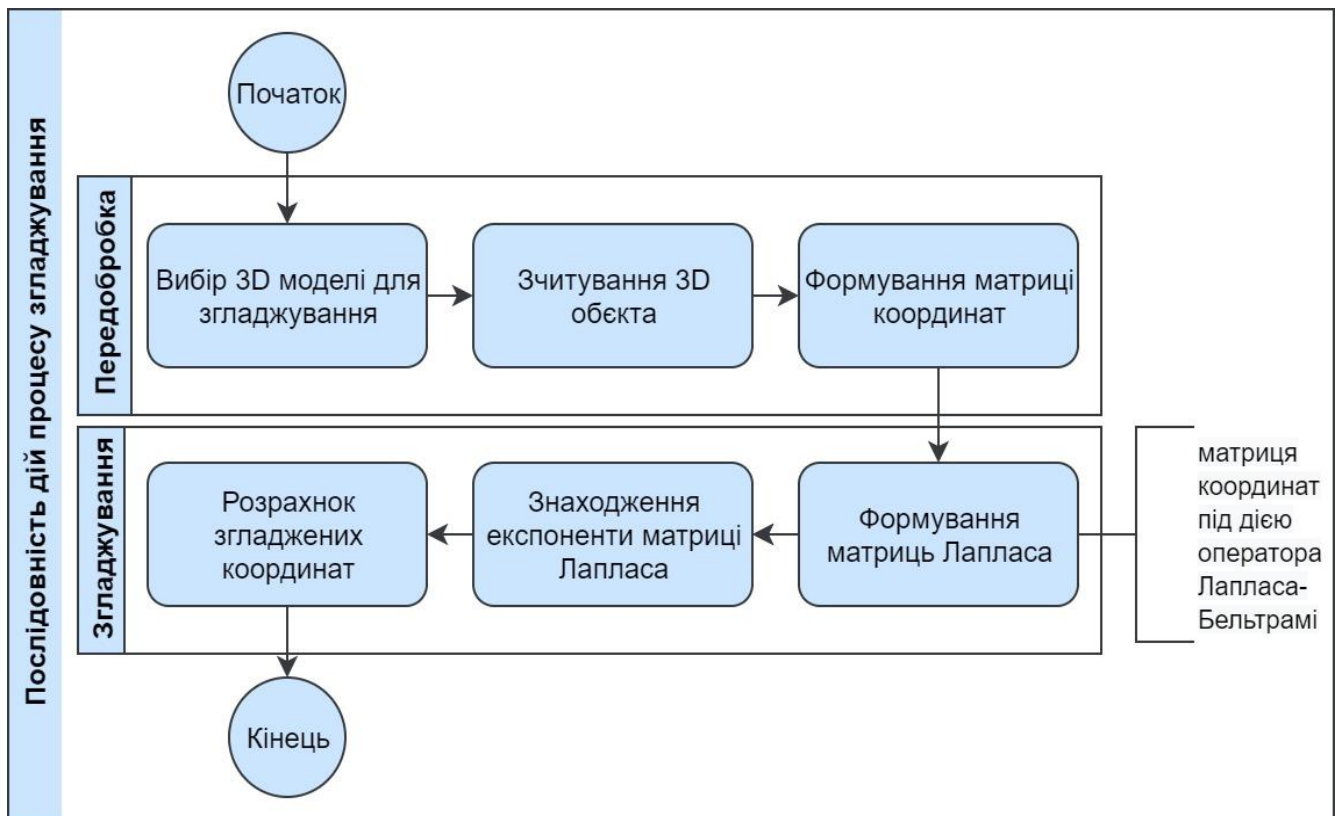


Рис. 3.5. Послідовність дій процесу згладжування.

3.3. Основні вимоги до робочої станції для роботи з програмним забезпеченням

Платформа: .NET (C#).

Середовище розробки: Microsoft Visual Studio 2017.

Мінімальні системні вимоги:

- 64 – бітна операційна система Windows;
- Microsoft .NET Framework 4.7;
- 70 КБ доступного простору на жорсткому диску;
- Обсяг оперативної 8 ГБ;

3.4. Розроблене програмне забезпечення

Для вирішення задачі згладжування було розроблено 3 додатки, кожен з яких виконує різні задачі. Їх можна використовувати як окремі рішення деяких задач.

Було розроблено комплекс програм для згладжування тривимірних об'єктів.

В цей комплекс входить:

- 1) Додаток згладжування тривимірного об'єкту.
- 2) Додаток дискретизації поверхні тривимірного об'єкту.
- 3) Додаток зашумлення тривимірного об'єкту.

Додаток 1) містить в собі, як підпрограму додаток 2), але доцільність виокремлення цього модуля, як окремого додатку є досить великою, адже процес дискретизації тривимірного об'єкту обчислювально є досить складним, тому скориставшись додатком 2) можна зберегти дані дискретизації для 3D моделей великого обсягу. Додаток 3) був розроблений для тестування додатку 1).

Надалі при використанні словосполучення програмне забезпечення(ПЗ) вважатимемо додаток 1).

Вхідні дані: тривимірний об'єкт.

Вихідні дані: результат згладжування.

3.5. Інструкція користувача

Для початку роботи програми потрібно задати тривимірну модель що має розширення файлу .ply. Для цього потрібно обрати пункт меню «Файл». Далі, в діалоговому вікні обрати ім'я файлу, який треба відкрити та натиснути кнопку «Відкрити». На рис.3.6 зображено головне вікно програми.

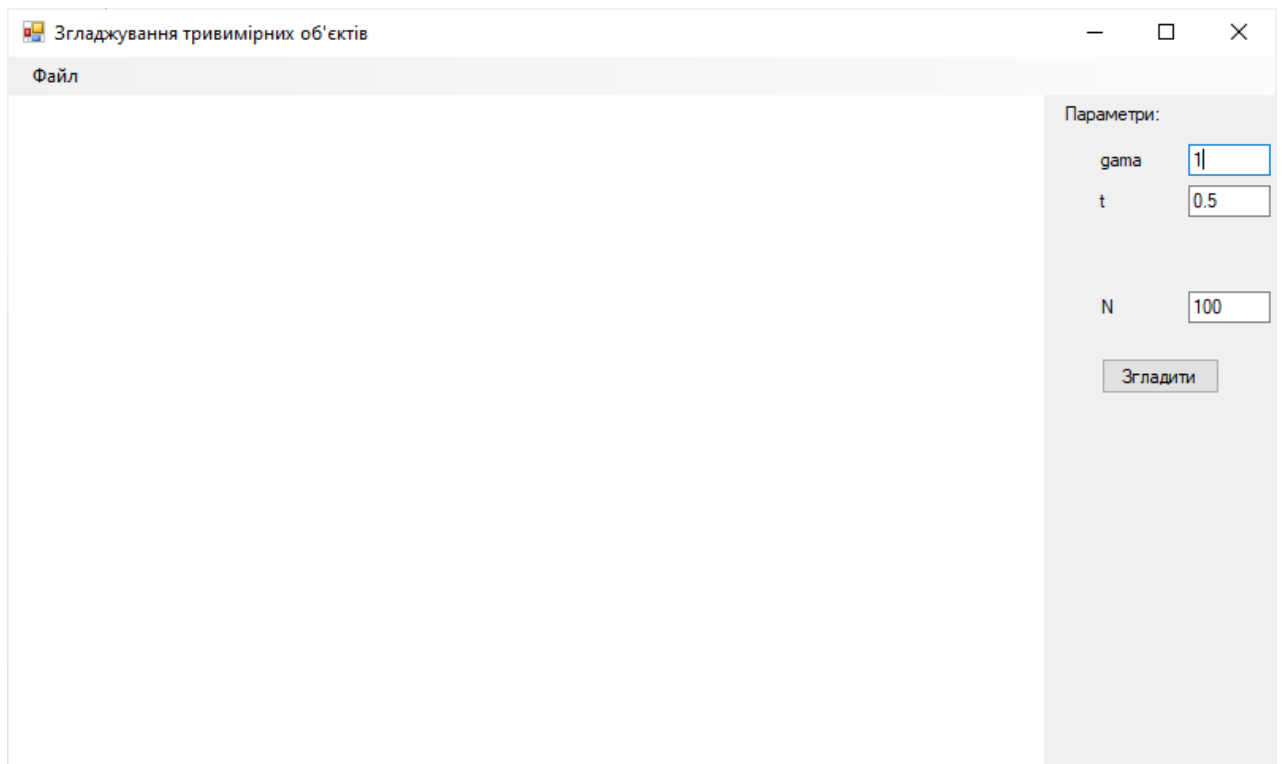


Рис.3.6. Головне вікно програми

Є можливість налаштування наступних параметрів, область введення зображена на рис.3.7:

- N – кількість ітерацій для дискретизації
- $gamma$ – деякий числовий параметер, що використовується для ущільнення при дискретизації
- t – деякий числовий параметер, за допомогою якого регулюється сила згладжування

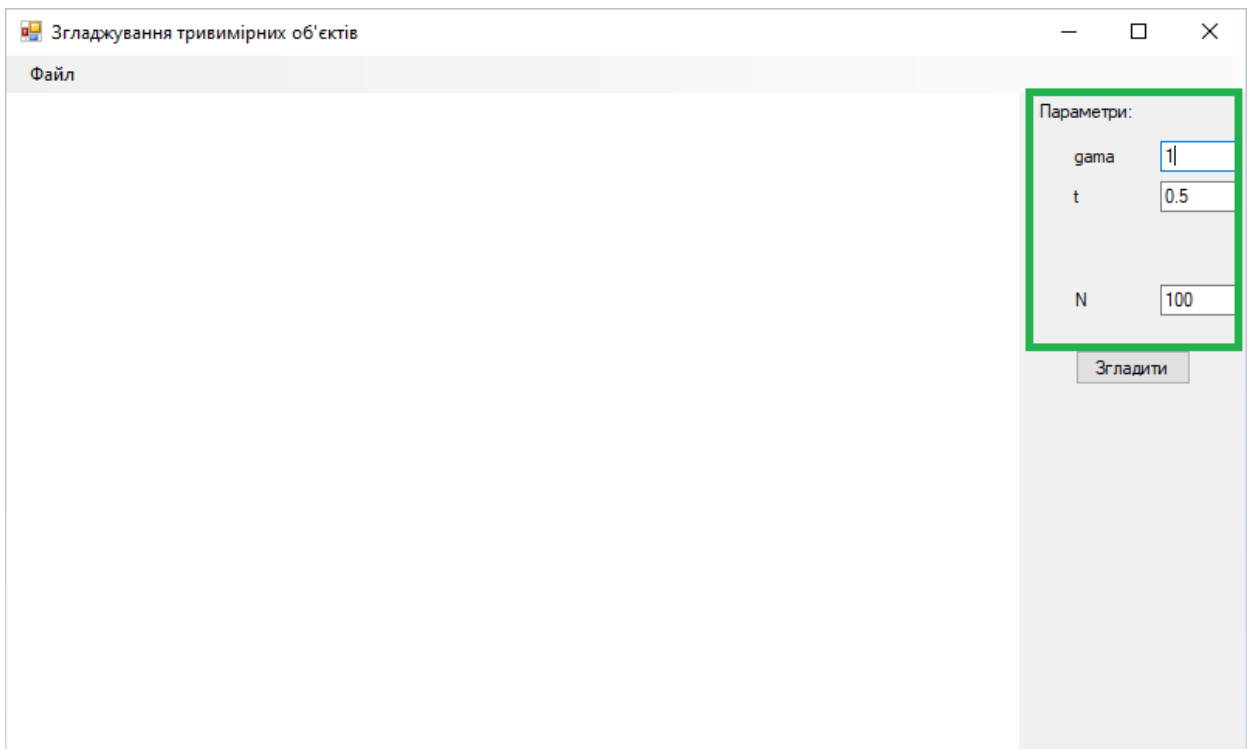


Рис.3.7. Область введення вхідних параметрів програми

На рис.3.8 зображено процес завантаження об'єкту в програму.

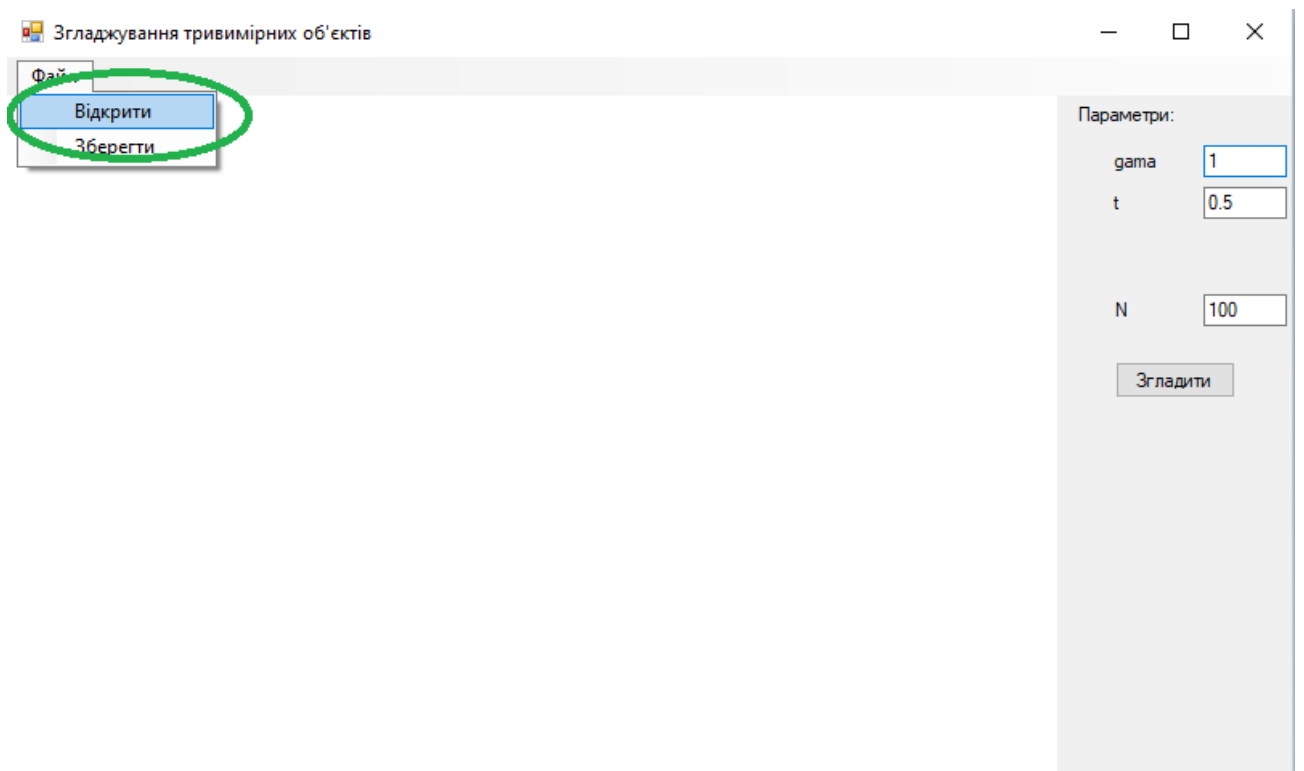


Рис.3.8. Відкриття об'єкту для обробки

На рис.3.9. зображено завантажений тривимірний об'єкт.

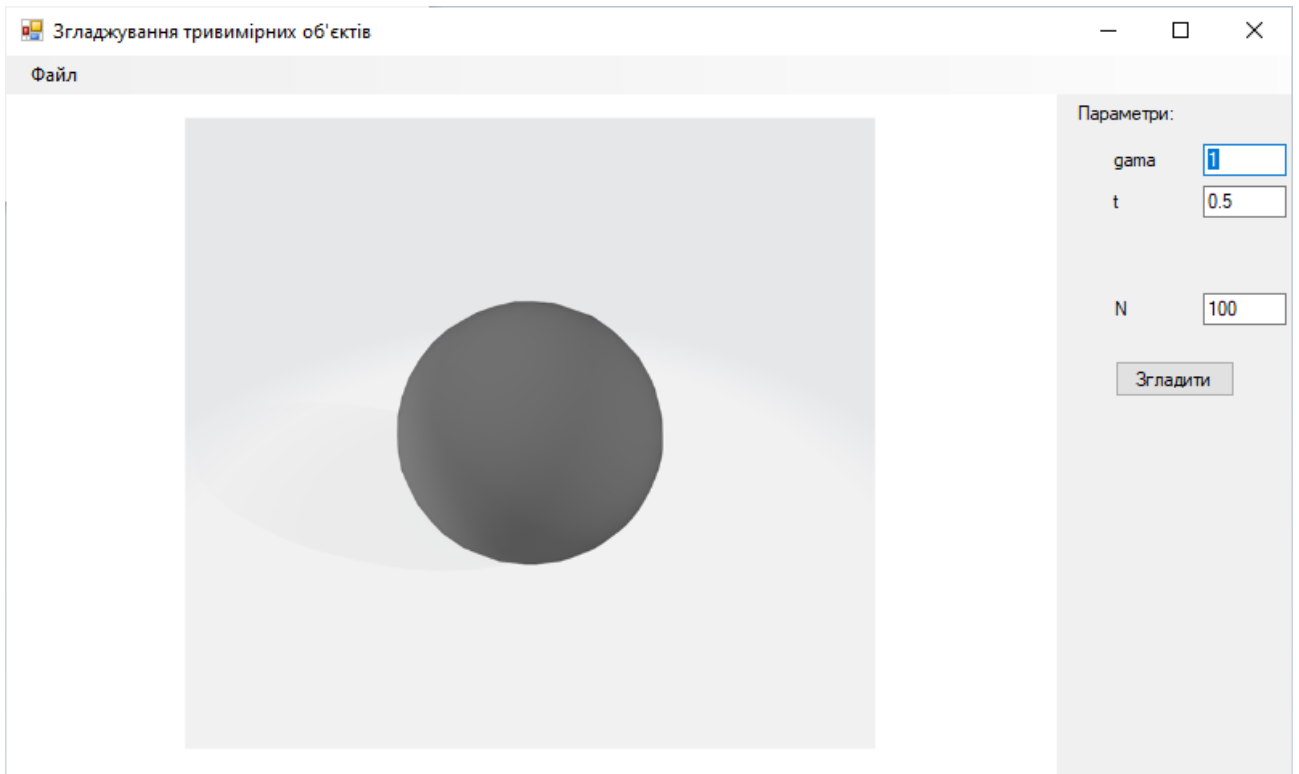


Рис.3.9. Приклад відкритої моделі

На рис.3.10. зображено кнопку, при натисканні на яку відбувається згладжування моделі, використовуючи уведені параметри.

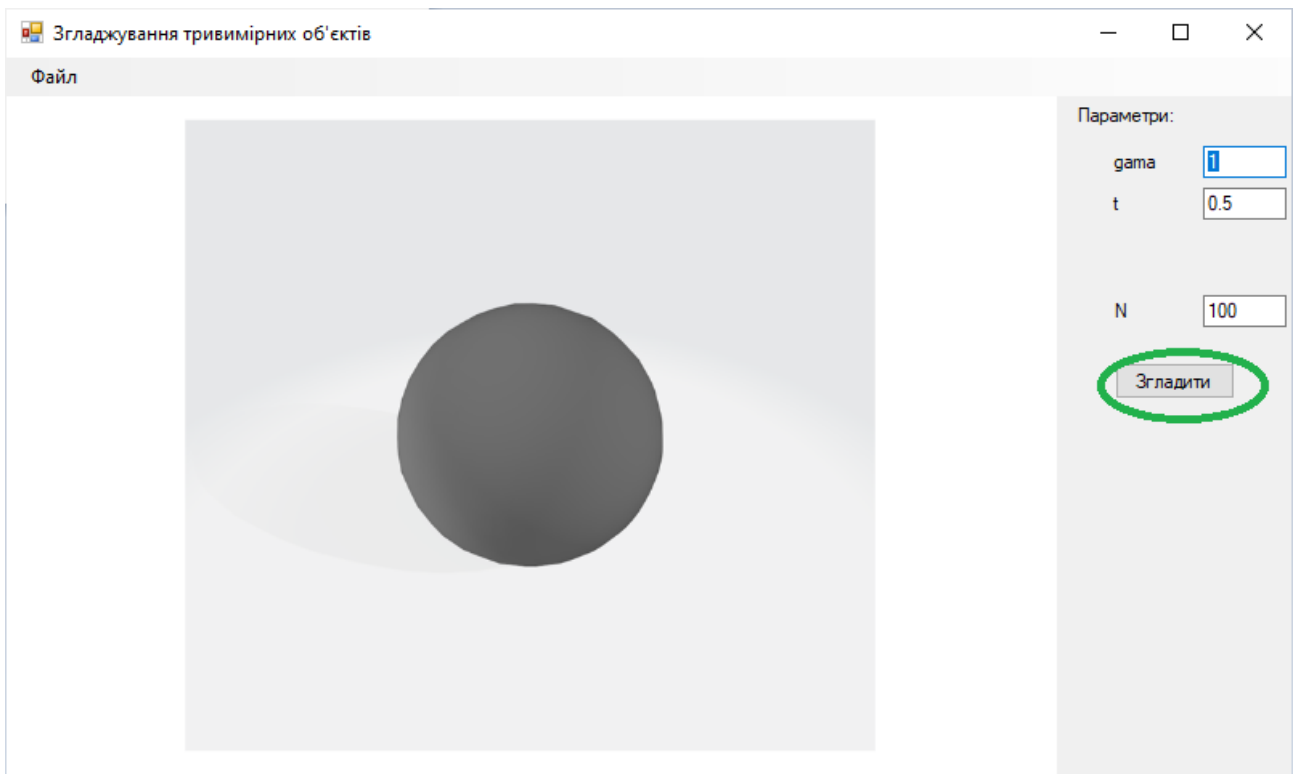


Рис.3.10. Кнопка «Згладити»

Уможливлено збереження обробленої моделі у файл (рис.3.11)

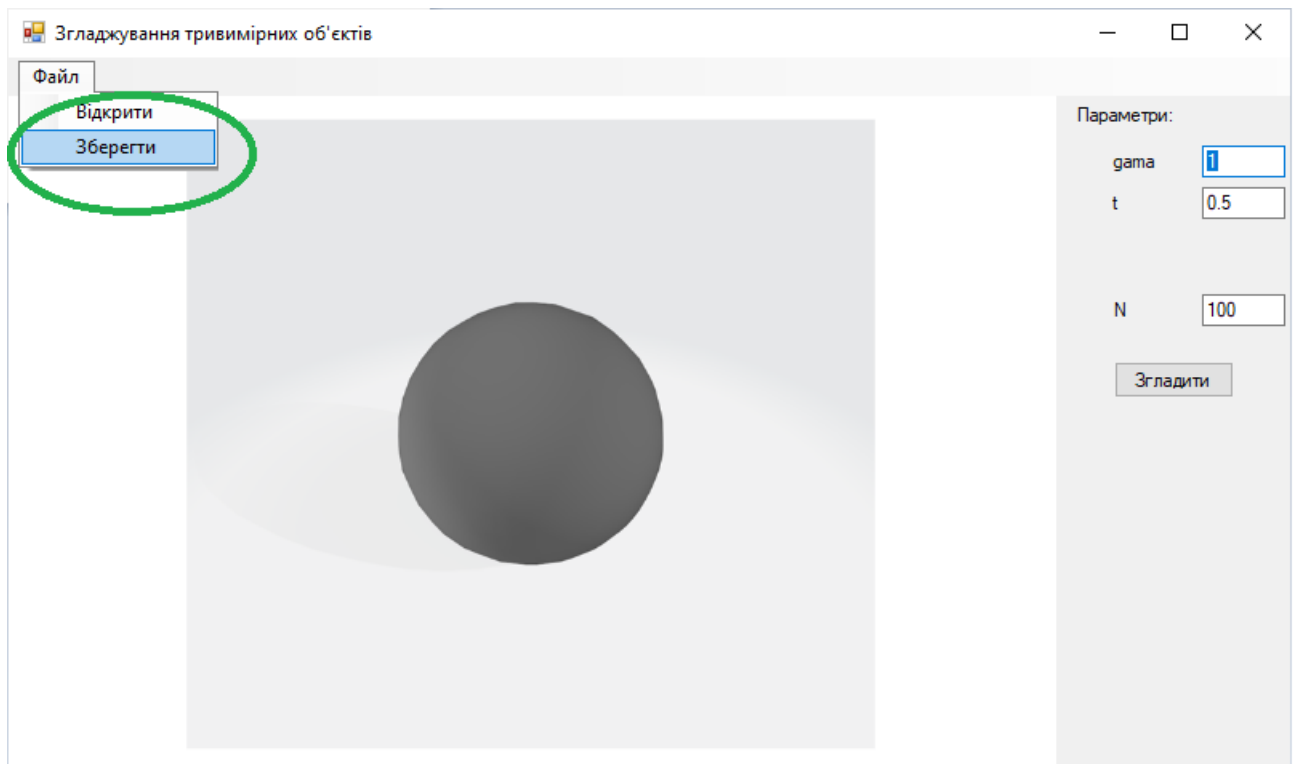


Рис.3.11. Збереження моделі у файл

3.6. Тестування розробленого програмного забезпечення

Розглянемо приклад №1:

Для цього візьмемо тривимірний об'єкт наступного виду(Рис.)

Дана модель має 422 вершини та 840 граней, заданих трикутниками.

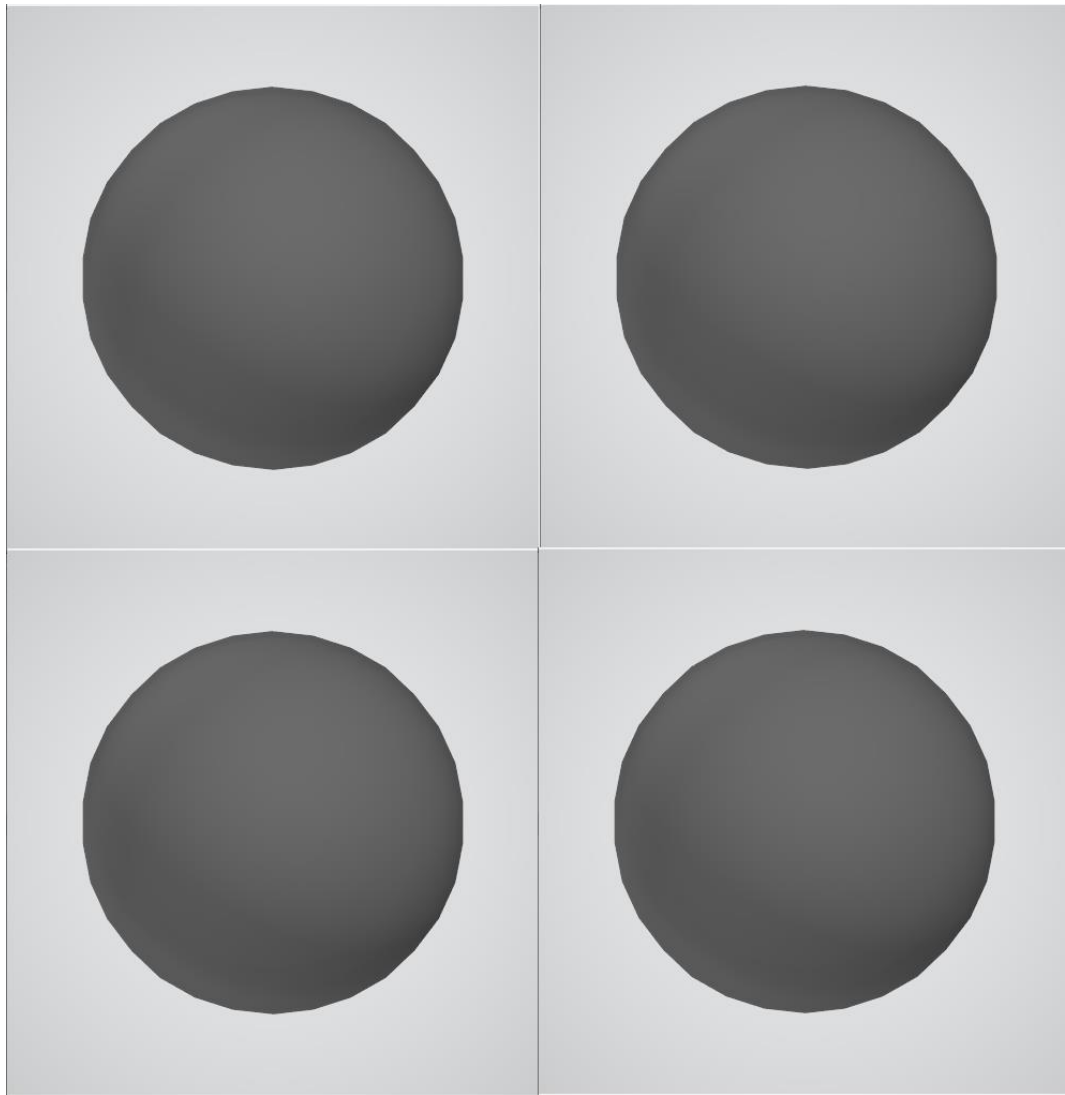


Рис.3.12. Вхідний тривимірний об'єкт прикладу №1

Так як ми бачимо він не є зашумленим, тому скористаємось розробленим додатком, для зашумлення. Тоді матимемо зашумлену сферу(Рис.!!!!).

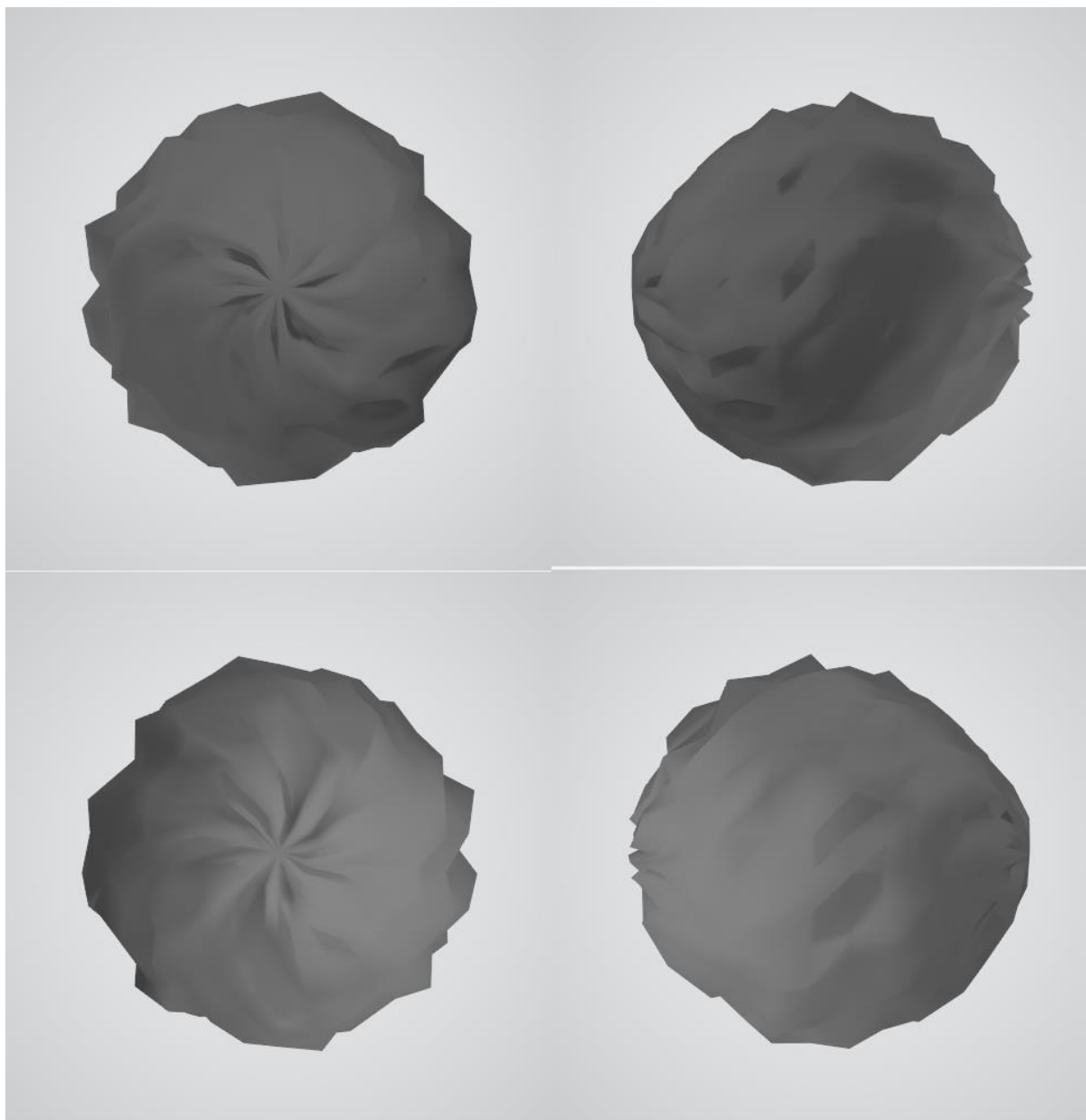


Рис.3.13 Зашумлений тривимірний об'єкт прикладу №1.

Проведемо експерименти з різним значенням параметрів для зашумленого тривимірного об'єкту.

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.1$
- $gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку !!!

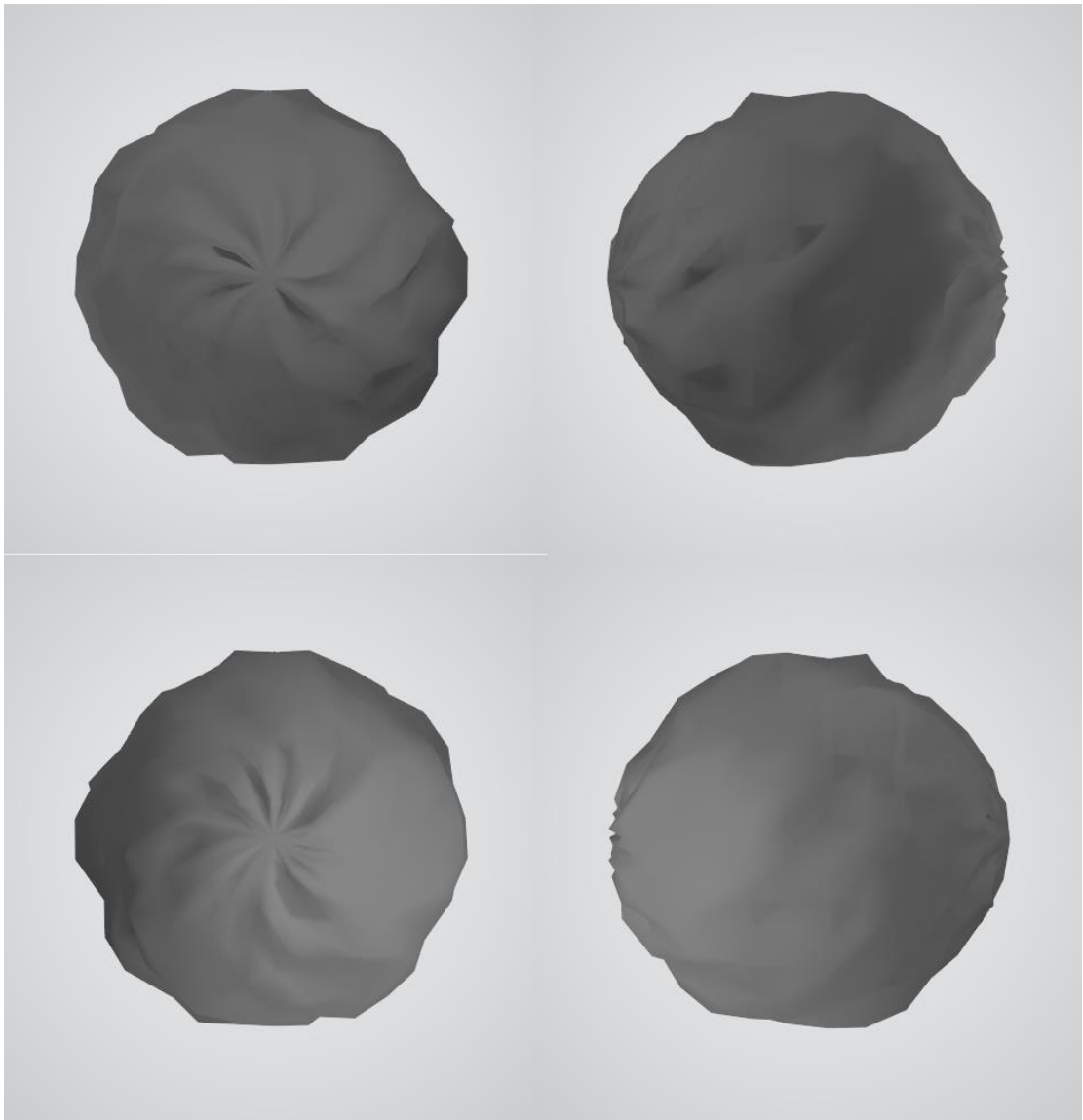


Рис.3.14. Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.2$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку !!!

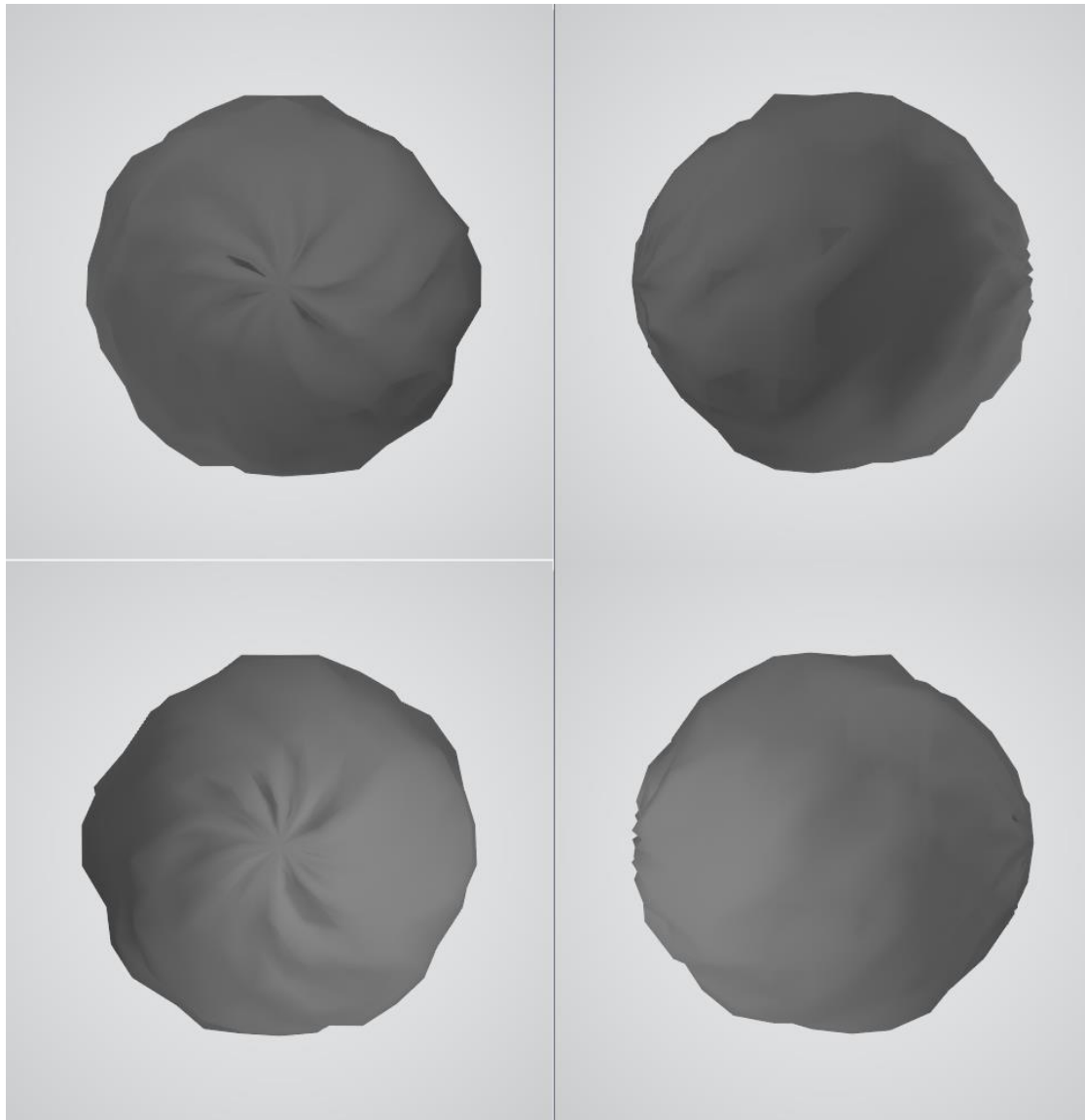


Рис.3.15. Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.5$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку !!!

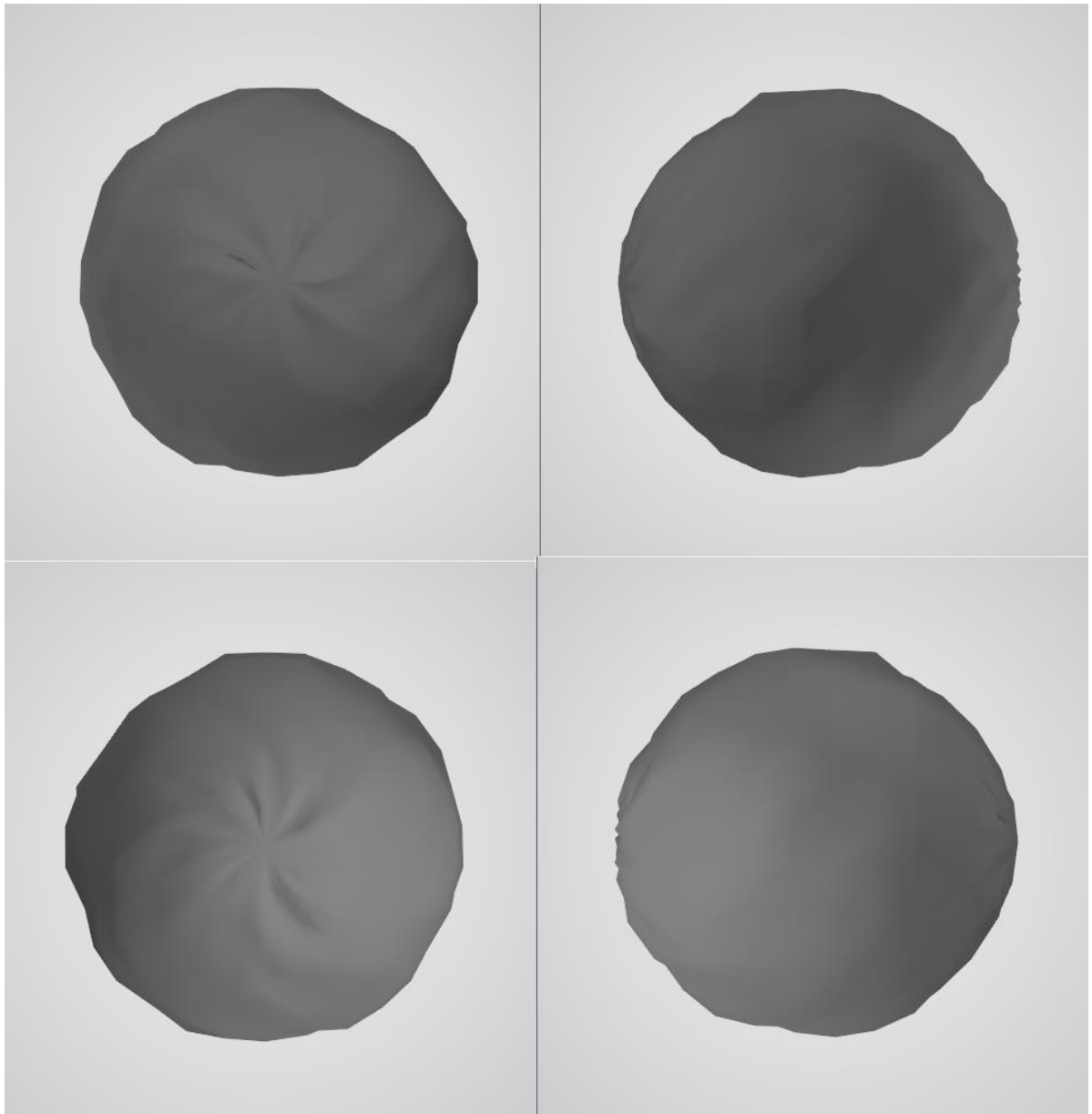


Рис.3.16. Згладжений тривимірний об'єкт

Як бачимо алгоритм відпрацював добре, зашумлена куля згладжується при різних параметрах. Але як можемо бачити, згладжування не обов'язково сильнішає при зменшенні(збільшенні) параметру t .

Розглянемо приклад №2

Для цього візьмемо тривимірний об'єкт наступного виду(Рис.)

Дана модель має 542 вершини та 950 граней, заданих трикутниками.

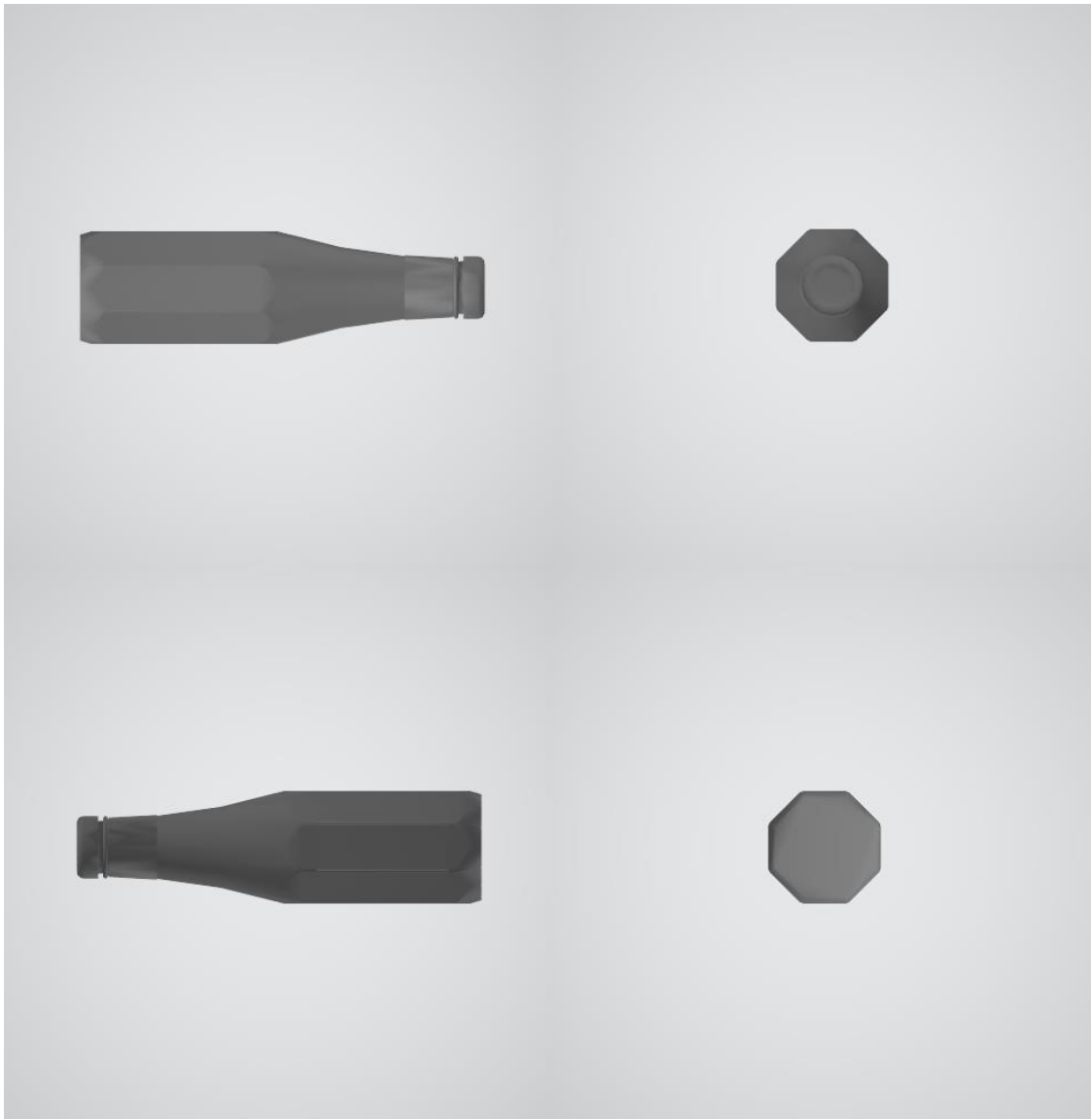


Рис. 3.17. вхідний тривимірний об'єкт

Так як ми бачимо він не є зашумленим, тому скористаємось розробленим додатком, для зашумлення. Тоді матимемо зашумлений об'єкт(Рис.3.18).

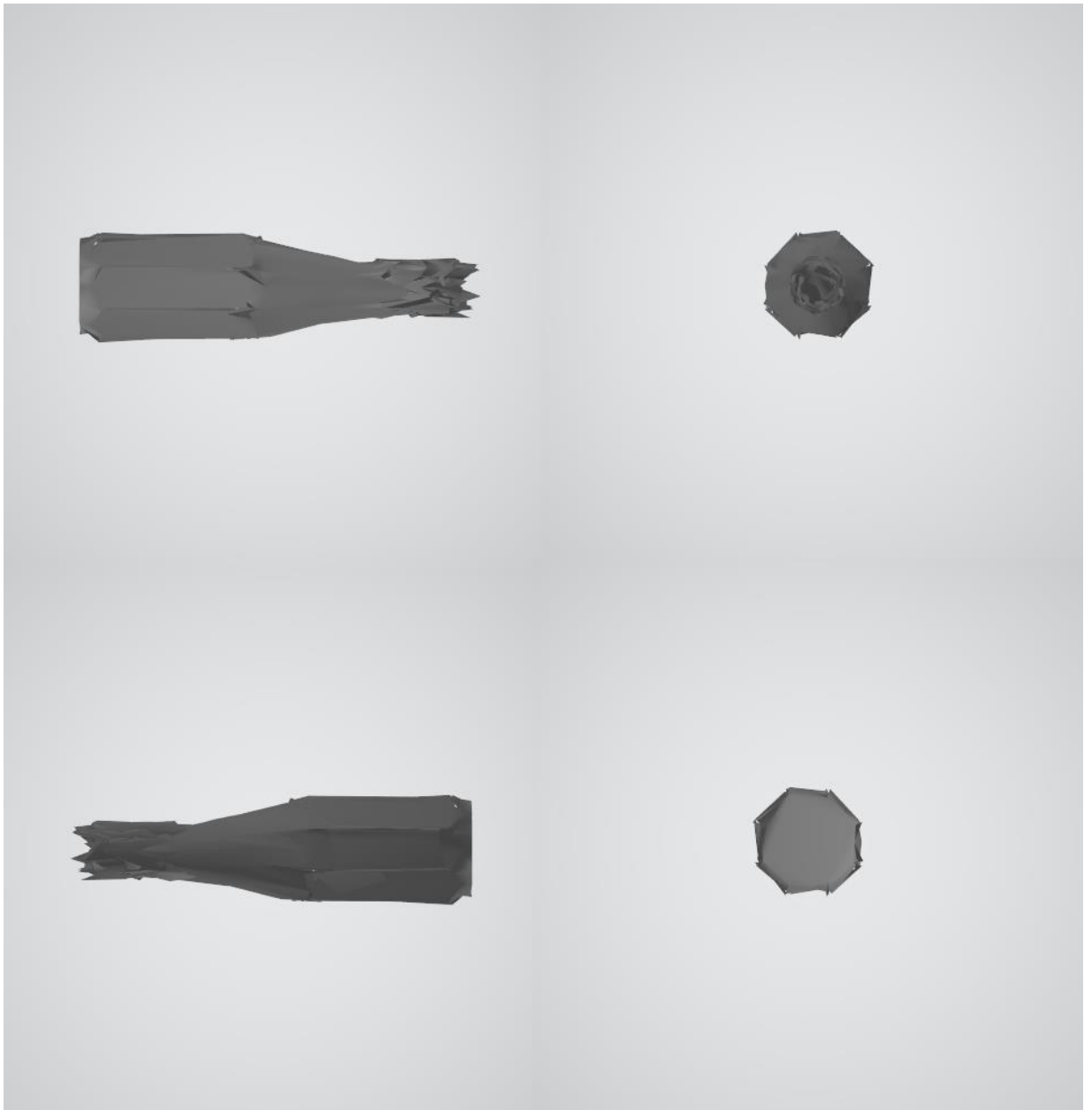


Рис.3.18. Зашумлений тривимірний об'єкт прикладу №2.

Проведемо експерименти з різним значенням параметрів для зашумленого тривимірного об'єкту.

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.1$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.19.

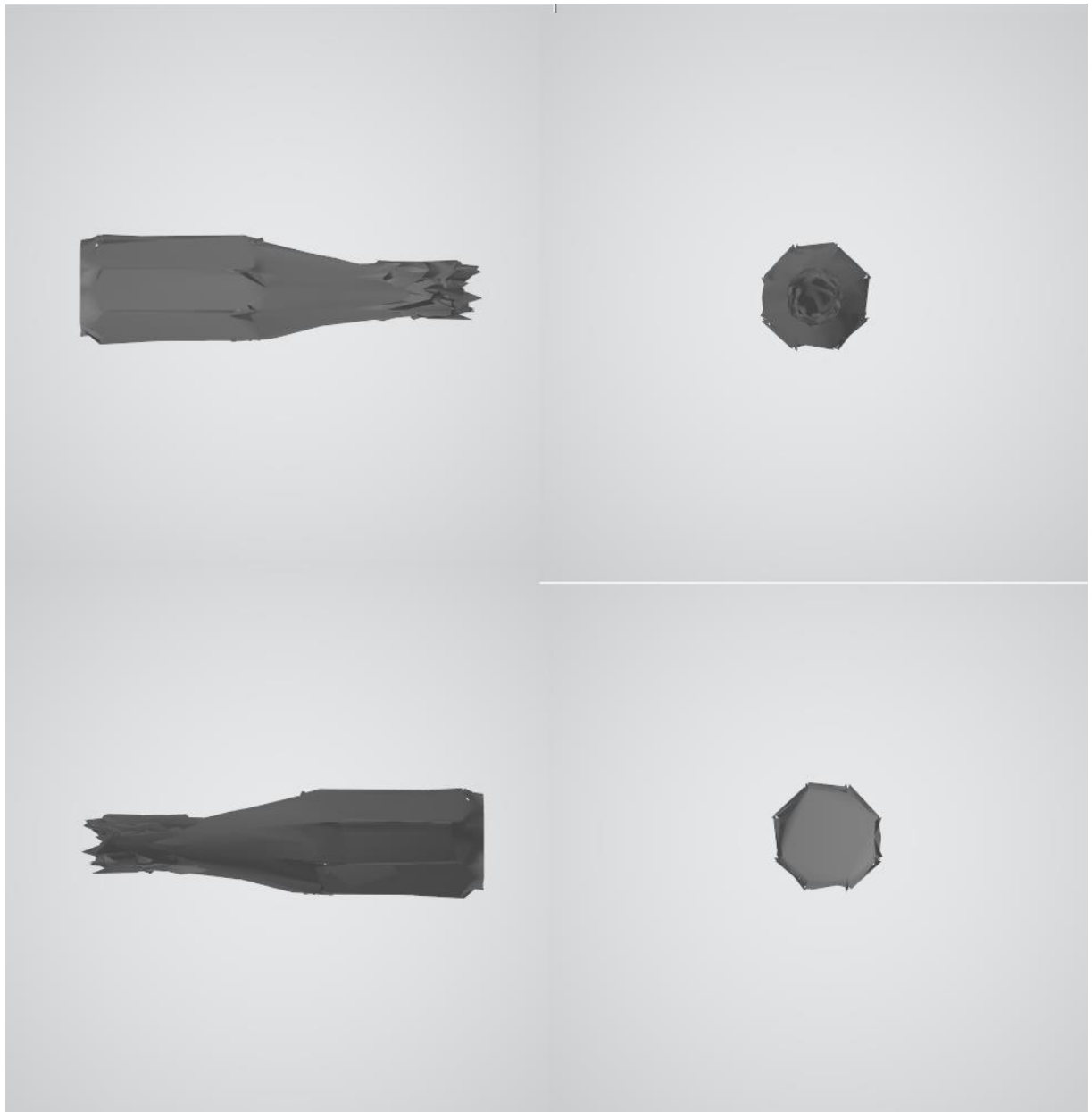


Рис.3.19. Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.2$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.20.

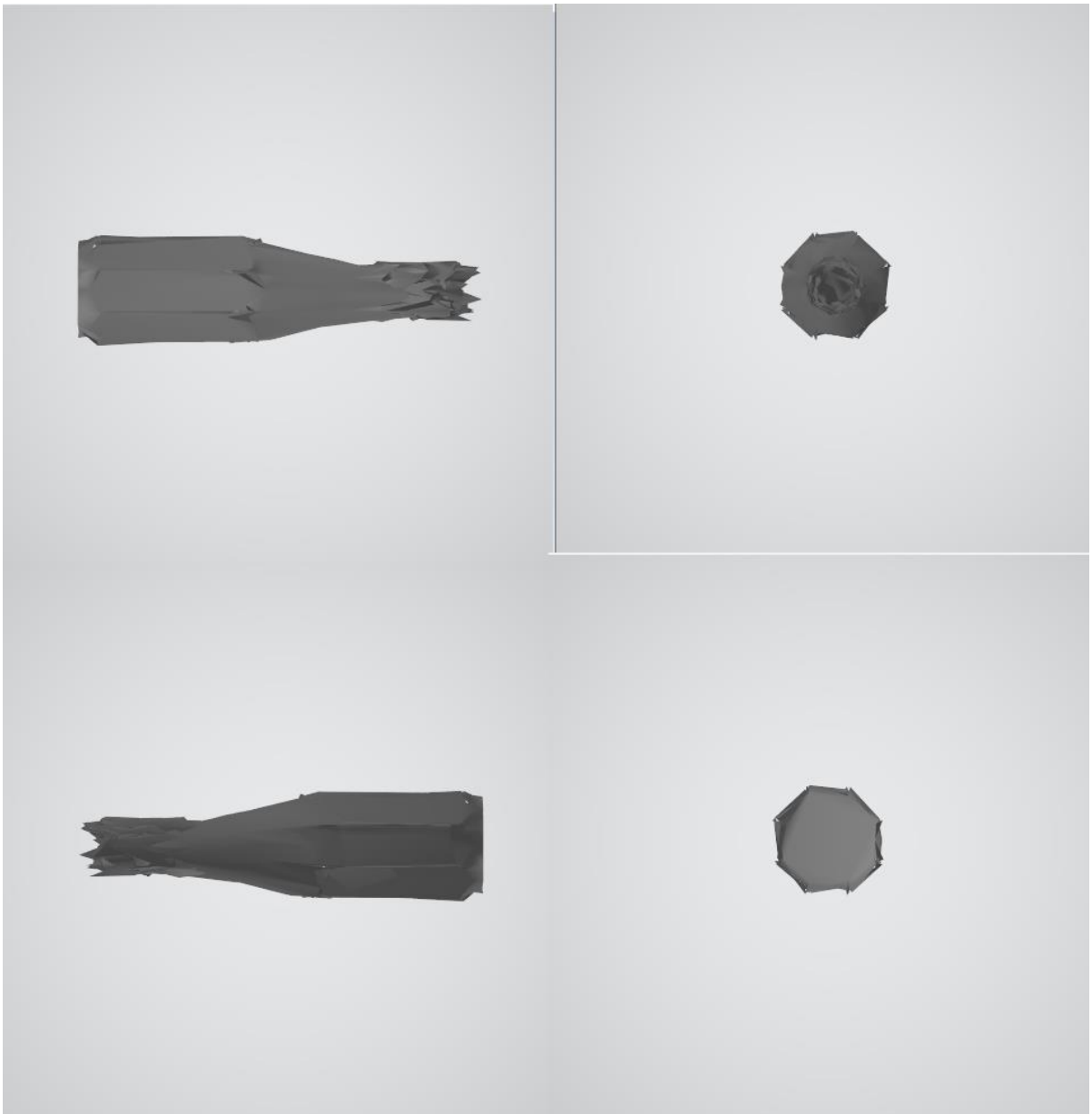


Рис. 3.20. Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.5$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.21.

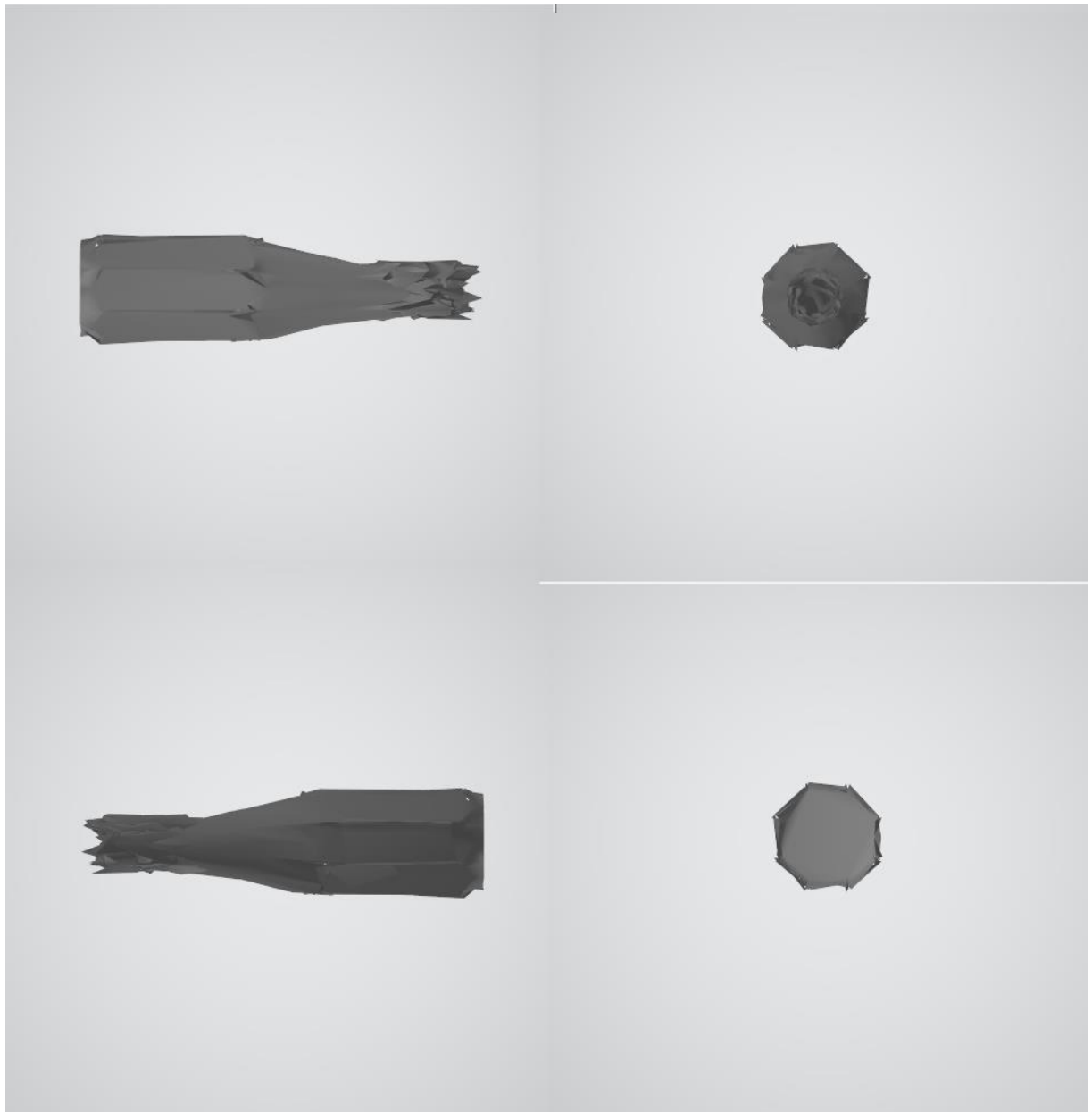


Рис. 3.21. Згладжений тривимірний об'єкт

Як бачимо при різних параметрах згладжування майже не відбувається. Базуючись на інформації попередніх розділів можна зробити висновок, що триангуляційна сітка є не найкращою, це можна помітити при зашумленні. Даний об'єкт має дуже багато трикутників в невеликій області(Рис 3.22) .

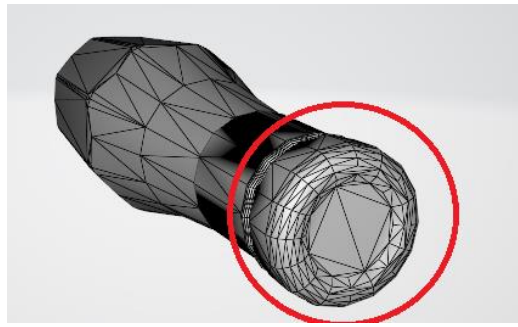


Рис. 3.22. Велика концентрація трикутників в невеликій області
Розглянемо приклад №3

Для цього візьмемо тривимірний об'єкт наступного виду(Рис. 3.23)
Дана модель має 468 вершин та 734 грані, задані трикутниками.

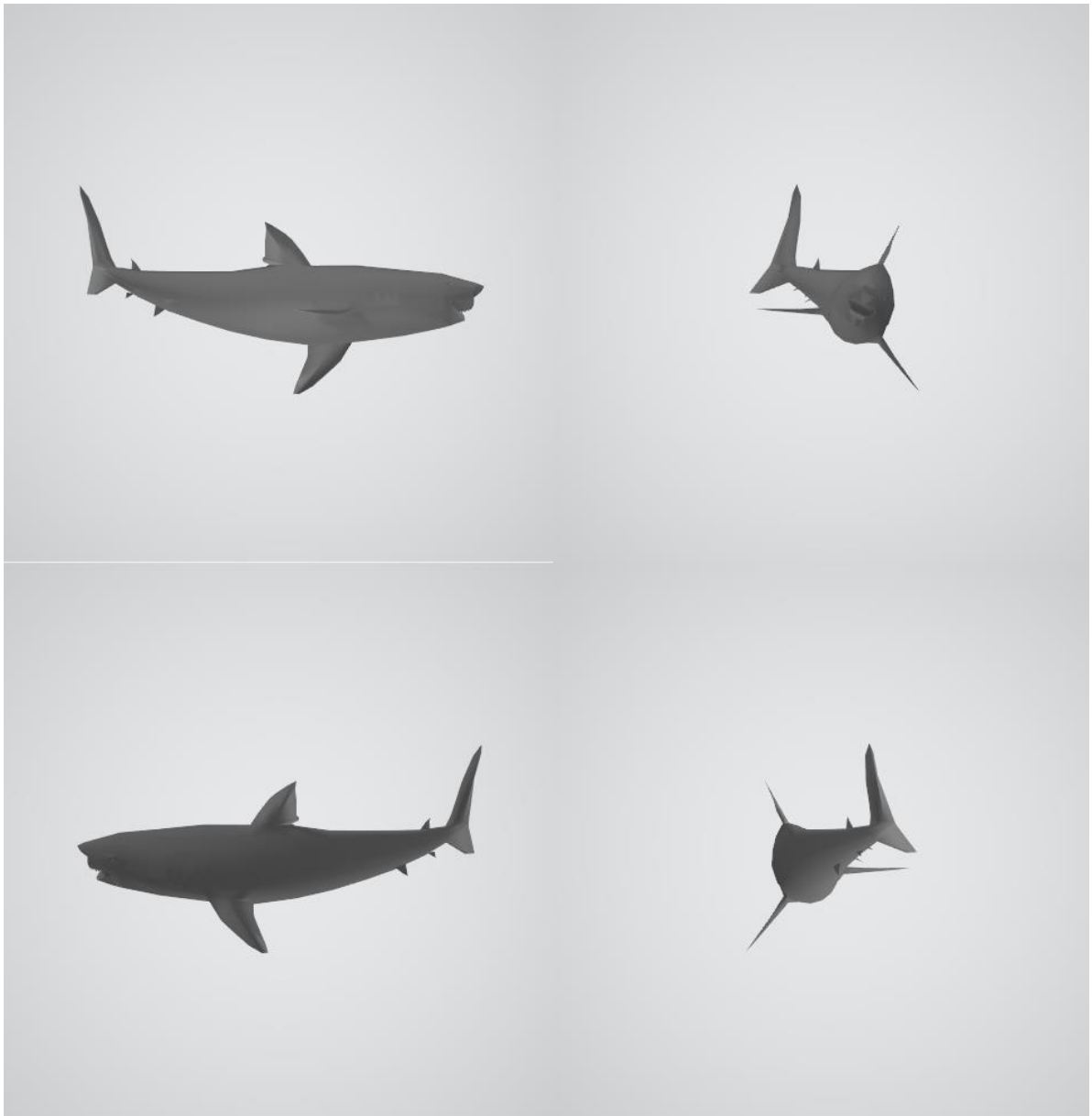


Рис. 3.23 вхідний тривимірний об'єкт

Так як ми бачимо він не є зашумленим, тому скористаємось розробленим додатком, для зашумлення. Тоді матимемо зашумлений об'єкт(Рис.3.24).

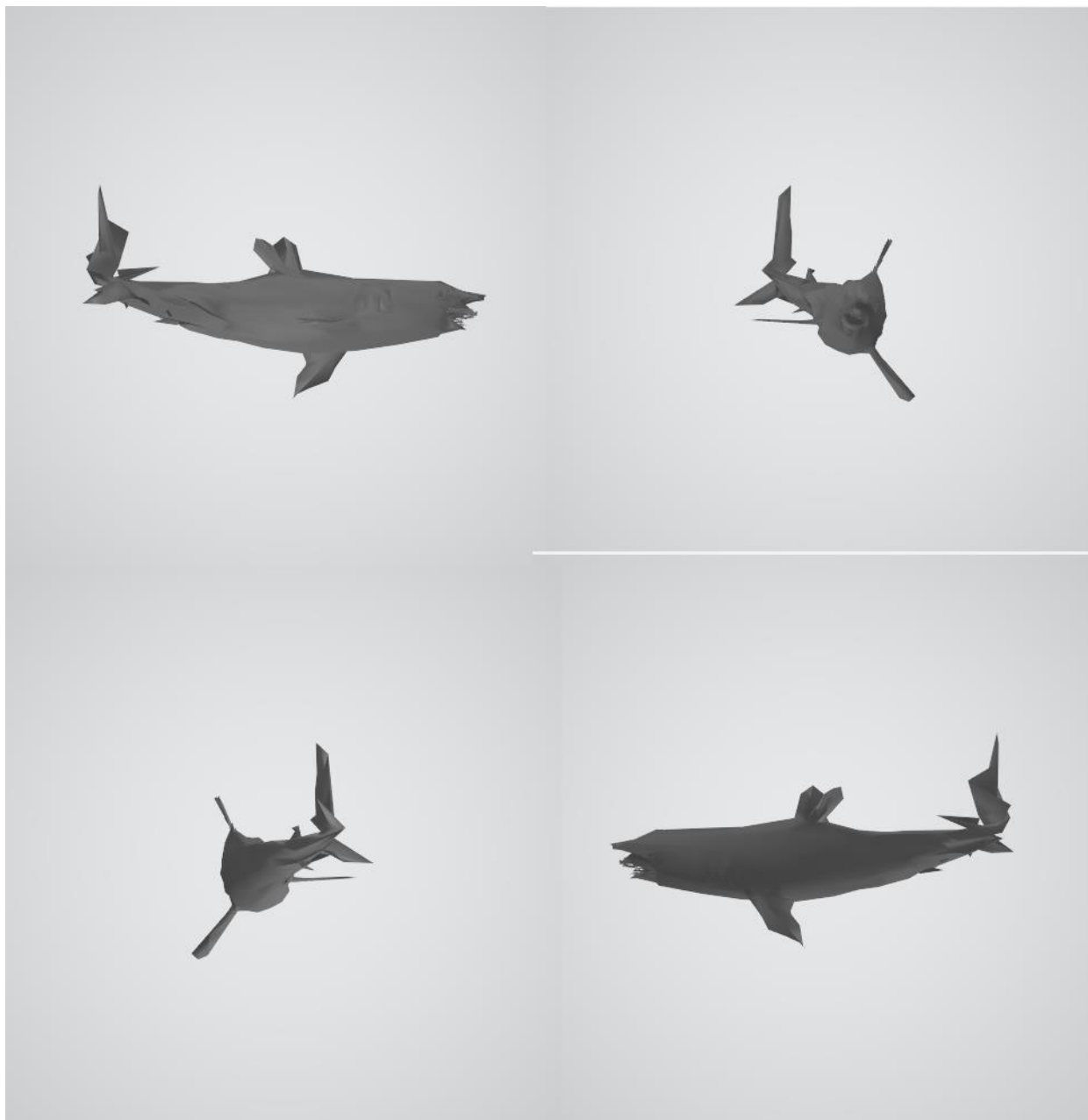


Рис. 3.24. Зашумлений тривимірний об'єкт прикладу №1.

Проведемо експерименти з різним значенням параметрів для зашумленого тривимірного об'єкту.

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.1$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.25.

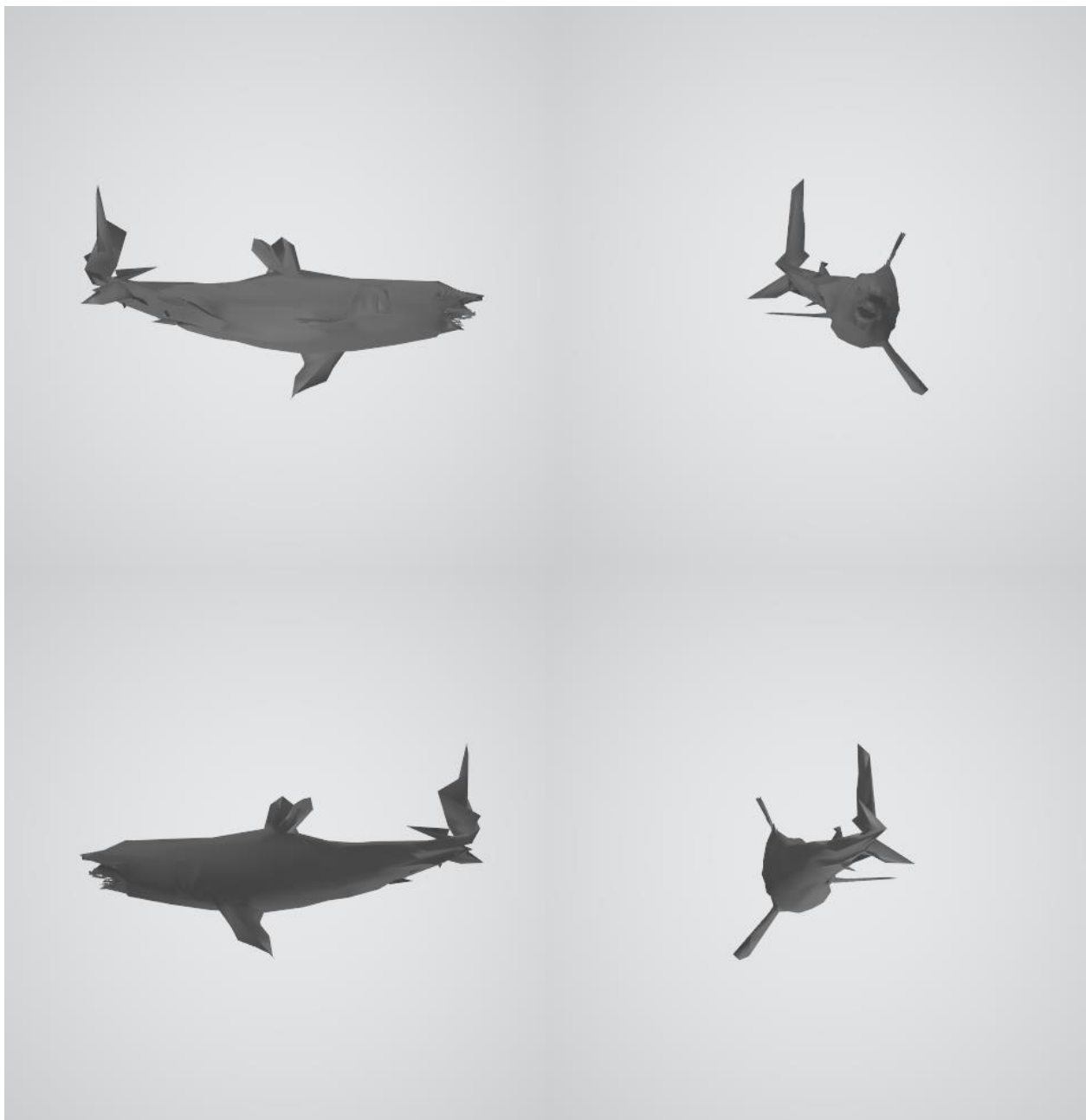


Рис. 3.25 Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.2$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.26

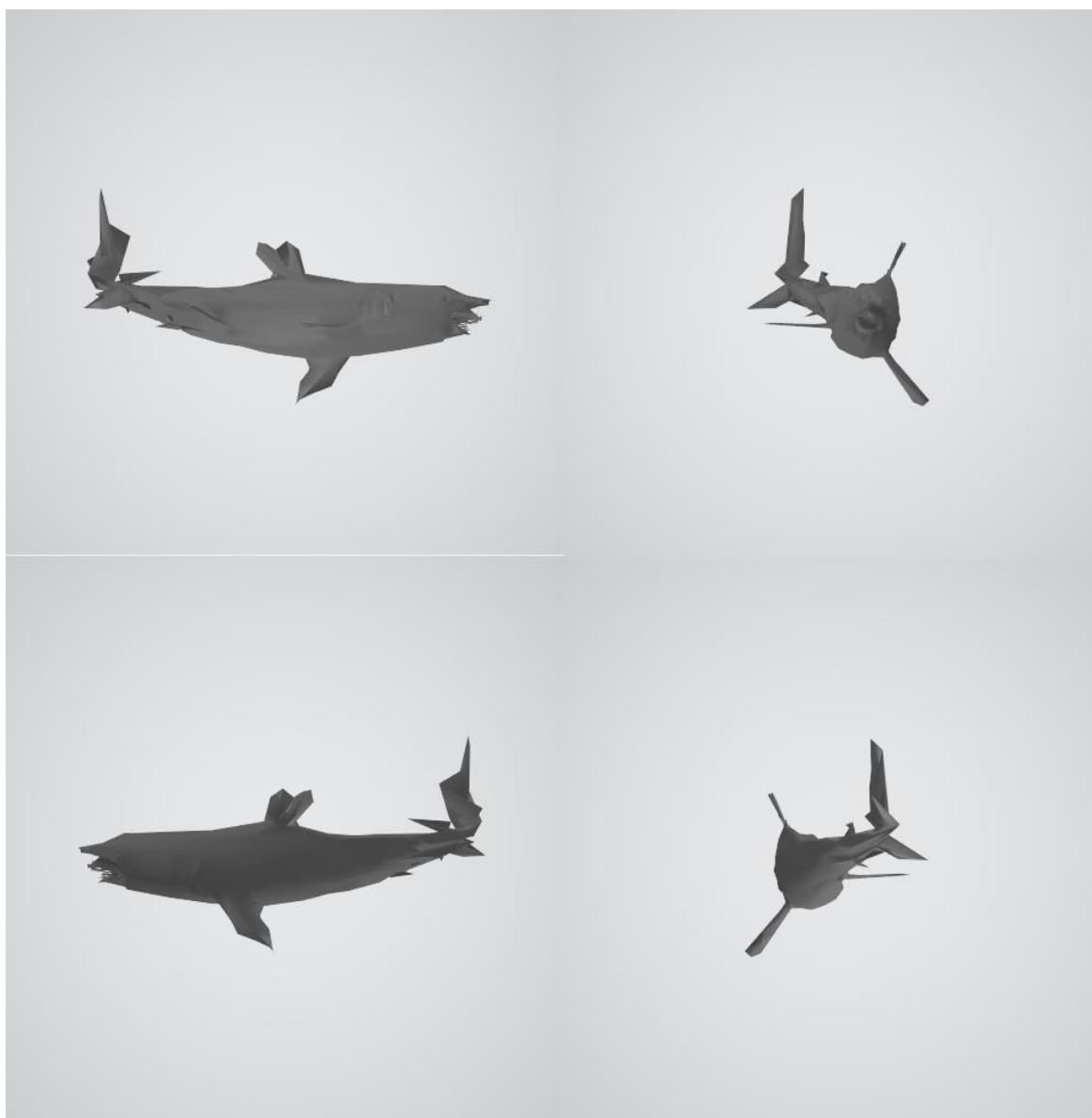


Рис. 3.26 Згладжений тривимірний об'єкт

Візьмемо наступні параметри:

- $N=100$
- $t=0.5$
- $\gamma=1$

Тоді маємо результат згладжування, що зображено на рисунку 3.27

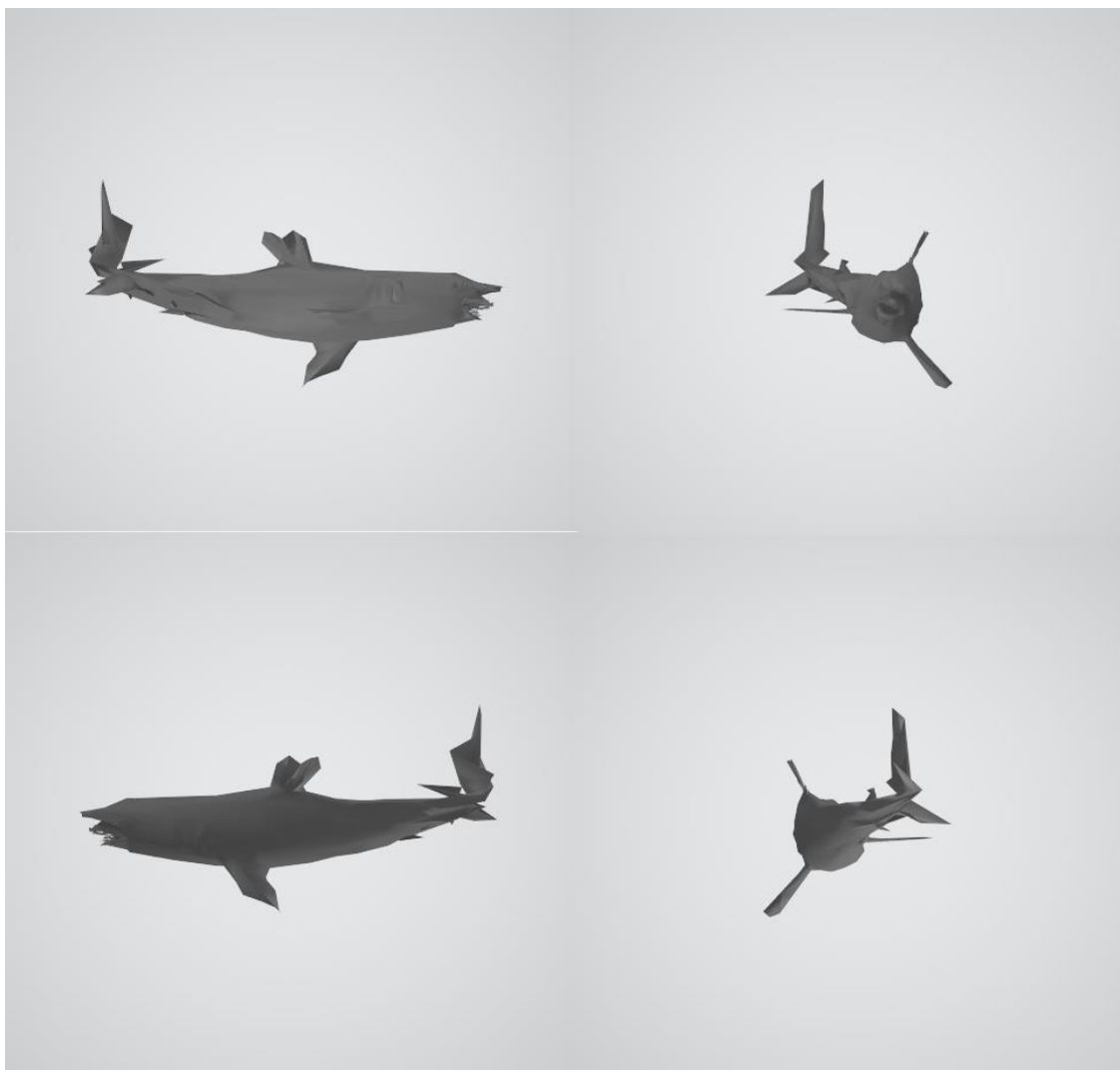


Рис. 3.27 Згладжений тривимірний об'єкт

В цьому прикладі ми можемо бачити ту ж саму проблему, що і в попередньому, оскільки концентрація трикутників у задній частині завелика (Рис.3.28), то метод не спрацював. Що підтверджує, що для використання методу потрібно, щоб триангуляція була близькою до рівномірної.

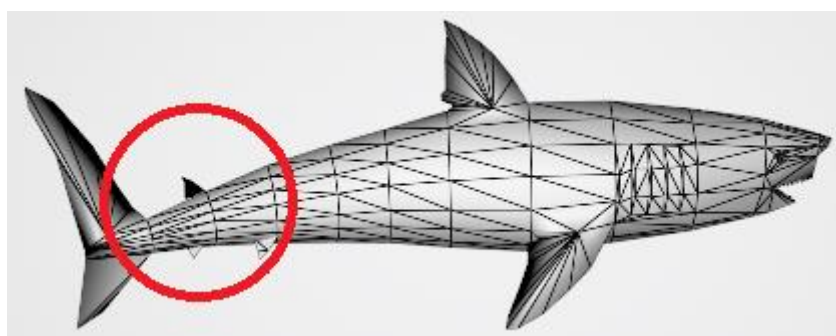


Рис.3.28. Велика концентрація трикутників у виділеній області.

3.7. Неприйнятні 3D об'єкти для розробленого програмного забезпечення

Наступні об'єкти є неприйнятні для згладжування розробленим програмним забезпеченням – це тривимірні моделі зайця, що зображена на рисунку 3.29 та тривимірні моделі свердла, що зображена на рисунку 3.30; Причиною неопрацювання тривимірної моделі зайця є наявність артефактів на поверхні об'єкту. Модель свердла не може бути обробленою, оскільки поверхня не замкнена.

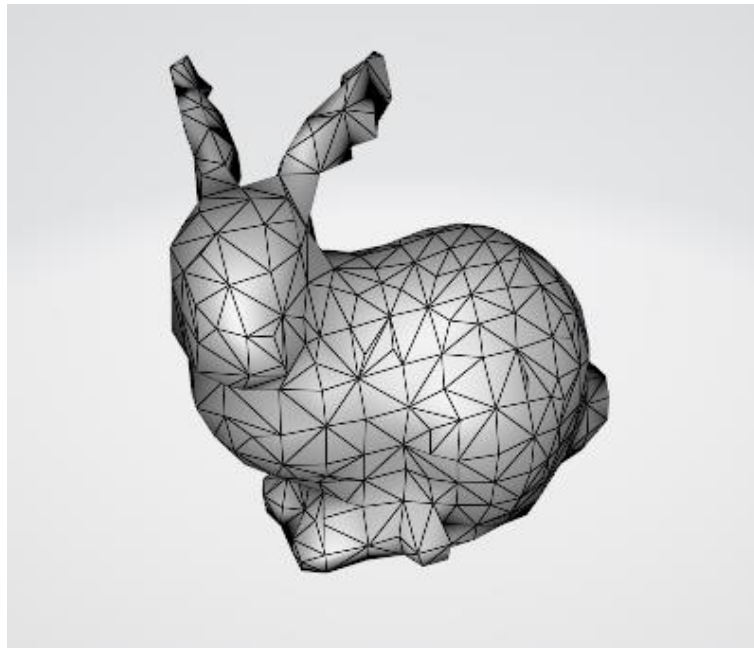


Рис.3.29. Тривимірні моделі зайця



Рис.3.29. Тривимірні моделі свердла

Висновки до розділу 3

1. На основі алгоритму створено автоматизовану систему, робота якої показана в даному розділі.
2. Проведено тестування розробленого програмного забезпечення на різних вхідних даних.
3. Проведено аналіз використання методу для файлів з різною триангуляцією.
4. Показано роботу автоматизованої системи на тривимірних об'єктах.
5. Знайдено, які моделі унеможливають згладжування за допомогою представленого методу

ВИСНОВКИ

1. Проведено аналіз літератури та вивчено основні поняття, які потрібні для обробки тривимірних моделей.
2. Розглянуто питання зашумленості тривимірних моделей.
3. Проаналізовано їх властивості та виокремлено основні, на основі яких базується алгоритм роботи програми.
4. Проаналізовано методи дифузійного. Та на основі розроблено власний метод дифузійного згладжування.
5. Розроблено алгоритм який був реалізований в рамках автоматизованої системи.
6. Проведено тестування розробленого програмного забезпечення на різних вхідних даних.
7. Розроблена автоматизована система може бути використана для .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alvarez L, Lions P-L, Morel J-M. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J Numer Anal* 1992;29(3):845–66.
2. Morel J-M, Catta' F, Lions P-L, Coll T. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J Numer Anal* 1992;29(1):182–93.
3. Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 1990;12(7):629–39.
4. Spira A, Kimmel R, Sochen N. A short-time Beltrami kernel for smoothing images and manifolds. *Trans Image Process* 2007;16(6):1628–36.
5. Tasdizen T, Whitaker R, Burchard P, Osher S. Geometric surface smoothing via anisotropic diffusion of normals. In: *Proc. of the conference on visualization, 2002*. p. 125–32.
6. Witkin AP. Scale-space filtering. In: *Proc. of the intern. Joint conference on artificial intelligence, 1983*. p. 1019–22.
7. Bajaj CL, Xu G. Anisotropic diffusion of subdivision surfaces and functions on surfaces. *ACM Trans Graph* 2002;22:4–32.
8. Guskov I, Sweldens W, Schro'öder P. Multiresolution signal processing for meshes. *ACM Siggraph* 1999:325–34.
9. Chung MK, Robbins SM, Dalton FKM, Davidson CRJ, Alex AL, Evans AC. Cortical thickness analysis in autism with heat kernel smoothing. *NeuroImage* 2005;25:1256–65.
10. Wang G, Zhang X, Su Q, Chen J, Wang L, Ma Y, et al. A heat kernel based cortical thickness estimation algorithm. In: *MBIA, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8159; 2013. p. 233–45.
11. Rustamov RM. Multiscale biharmonic kernels. *Comput Graph Forum* 2011;30(5):1521–31.
12. Rustamov RM. Interpolated eigenfunctions for volumetric shape processing. *Vis Comput* 2011;27(11):951–61.

13. Vaxman A, Ben-Chen M, Gotsman C. A multi-resolution approach to heat kernels on discrete surfaces. *ACM Trans Graph* 2010;29(4):1–10.
14. Lafon S, Keller Y, Coifman RR. Data fusion and multicue data matching by diffusion maps. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 2006;28(11):1784–97.
15. Patane` G. wFEM heat kernel: discretization and applications to shape analysis and retrieval. *Comput Aid Geomet Des* 2013;30(3):276–95.
16. Kobbelt L, Campagna S, Vorsatz J, Seidel H-P. Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes. In: *ACM Siggraph*, 1998. p. 105–14.
17. Clarenz U, Diewald U, Rumpf M. Anisotropic geometric diffusion in surface processing. In: *IEEE visualization*, 2000. p. 397–405.
18. Desbrun M, Meyer M, Schroöder P, Barr AH. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In: *ACM Siggraph*, 1999. p. 317–24.
19. Zhang F, Hancock ER. Graph spectral image smoothing using the heat kernel. *Pattern Recogn* 2008;41(11):3328–42.
20. Allaire GG. Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation. In: *Numerical mathematics and scientific computation*. Oxford University Press; 2007 [Incorporated].
21. Vallet B, Le´vy B. Spectral geometry processing with manifold harmonics. *Comput Graph Forum* 2008;27(2):251–60.
22. Hammond DK, Vandergheynst P, Gribonval R. Wavelets on graphs via spectral graph theory. *Appl Comput Harmon Anal* 2011;30(2):129–50.
23. Alexa M, Wardetzky M. Discrete Laplacians on general polygonal meshes. *ACM Trans Graph* 2011;30(4).
24. Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Exp Math* 1993;2(1):15–36.
25. Belkin M, Niyogi P. Towards a theoretical foundation for Laplacian-based manifold methods. *J Comput Syst Sci* 2008;74(8):1289–308.

26. Reuter M, Wolter F-E, Peinecke N. Laplace–Beltrami spectra as Shape-DNA of surfaces and solids. *Comput Aid Des* 2006;38(4): 342–66.
27. Carpenter AJ, Ruttan A, Varga RS. Extended numerical computations on the $1/9$ conjecture in rational approximation theory. In: *Rational approximation and interpolation*. Lect Notes Math, vol. 1105. Berlin (Heidelberg): Springer; 1984. p. 383–411.
28. Golub G, VanLoan GF. *Matrix computations*. 2nd ed. John Hopkins University Press; 1989.
29. Varga RS. Scientific computation on mathematical problems and conjectures. In: *SIAM, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics*, 1990.
30. Hansen PC, O’Leary DP. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J Sci Comput* 1993;14(6):1487–503.
31. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., eds. (1965), "Chapter 22", *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, ISBN 0-486-61272-4 .
32. B Spain, M G Smith, *Functions of mathematical physics*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970. Chapter 10 deals with Laguerre polynomials.
33. Eric W. Weisstein, "Laguerre Polynomial", From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
34. George Arfken and Hans Weber (2000). *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. ISBN 0-12-059825-6.
35. S. S. Bayin (2006), *Mathematical Methods in Science and Engineering*, Wiley, Chapter 3.
36. D.H. Ballard and C.M. Brown, *Computer Vision*. Prentice-Hall Inc., 1982.A. Belyaev and Y. Ohtake, “A Comparison of Mesh Smoothing Methods,”*Proc. Israel-Korea Bi-Nat’l Conf. Geometric Modeling and Computer Graphics*,83-87, 2003.

37. Ch. Brechbühler, G. Gerig, and O. Kübler, "Parametrization of Closed Surfaces for 3D Shape Description," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 61, no. 2, pp. 154-170, 1995.
38. T. Bułlow, "Multi-Scale Image Processing on the Sphere," *Proc 24th Symp. Pattern Recognition of the DAGM*, L. van Gool, ed., 2002.
39. T. Bułlow, "Reverse Diffusion for Smooth Buildup of Progressively Transmitted Geometry," *Proc. EUROGRAPHICS*, 2002.
40. T. Bułlow, "Spherical Diffusion for 3D Surface Smoothing," *Proc. First Int'l Symp. 3D Data Processing, Visualization, and Transmission*, pp. 449-458, 2002.
41. T. Bułlow and K. Daniilidis, "Surface Representations Using Spherical Harmonics and Gabor Wavelets on the Sphere," *Technical Report MS-CIS-01-37*, CIS Dept., Univ. of Pennsylvania, 2001.
42. G.S. Chirikjian and A.B. Kyatkin, *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis*. CRC Press, 2001.
43. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I*. New York: Interscience Publishers, 1953.
44. M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. Barr, "Implicit Fairing of Regular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow," *Proc. SIGGRAPH*, 1999.
45. J.R. Driscoll and D.M. Healy, "Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-Sphere," *Advances in Applied Math.*, vol. 15, pp. 202-250, 1994.
46. S. Ertürk and T.J. Dennis, "Efficient Representations of 3D Human Head Models," *Proc. British Machine Vision Conf.*, pp. 329-339, 1999.
47. W. Freedden and M. Schreiner, "Non-Orthogonal Expansions on the Sphere," *Math. Methods in the Applied Sciences*, vol. 18, pp. 83-120, 1995. B.K.P. Horn, "Extended Gaussian Images," *Proc. IEEE*, vol. 72, no. 12, 1671-1686, 1984.

48. T. Iijima, "Basic Theory of Pattern Normalization (for the Case of a Typical (1D) Pattern)," *Bull. Electrotechnical Laboratory*, vol. 26, pp. 368-388, 1962.
49. T.R. Jones, F. Durand, and M. Desbrun, "Non-Iterative, Feature-Preserving Mesh Smoothing," *Proc. SIGGRAPH*, pp. 943-949, 2003.
50. S.B. Kang and K. Ikeuchi, "The Complex EGI: A New Representation for 3D Pose Determination," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 15, no. 7, pp. 707-721, July 1993.
51. G. Kin and M. Sato, "Scale Space Filtering on Spherical Pattern," *Proc. 11th Int'l Conf. Pattern Recognition*, vol. C, pp. 638-641, 1992.
52. J.J. Koenderink, "The Structure of Images," *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 363-370, 1984.
53. J.J. Koenderink and A.J. van Doorn, "Dynamic Shape," *Biological Cybernetics*, vol. 53, pp. 383-396, 1986.
54. T. Lindeberg, "Scale-Space Theory: A Basic Tool for Analysing Structures at Different Scales," *J. Applied Statistics*, vol. 21, no. 2, pp. 225-270, 1994.
55. A. Matheny and D.B. Goldgof, "The Use of Three and Four-Dimensional Surface Harmonics for Rigid and Nonrigid Shape Recovery and Representation," *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 10, pp. 967-981, Oct. 1995.
56. F. Mokhtarina, N. Khalili, and P. Yuen, "Curvature Computation on Free-Form 3D Meshes at Multiple Scales," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 83, pp. 118-139, 2001.
57. S. Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. London Math. Soc., 1997.
58. R.B. Schudy and D.H. Ballard, "Towards an Anatomical Model of Heart Motion as Seen in 4-D Cardiac Ultrasound Data," *Proc. Sixth Conf. Computer Applications in Radiology and Analysis of Radiological Images*, June 1979.
59. J. Sijbert and D. van Dyck, "Efficient Algorithm for the Computation of 3D Fourier Descriptors," *Proc. First Int'l Symp. 3D Data Processing, Visualization, and Transmission*, pp. 640-643, 2002.
- 60.

61. K. Tanaka, M. Sano, N. Mukawa, and H. Kaneko, "3d Object Representation Using Spherical Harmonic Functions," Proc. Int'l Conf. Intelligent Robots and Systems, 1993.
62. T. Tasdizen, R. Whitaker, P. Burchard, and S. Osher, "Geometric Surface Smoothing via Anisotropic Diffusion of Normals," Proc. IEEE Visualization, 125-132, 2002.
63. G. Taubin, "A Signal Processing Approach to Fair Surface Design," Proc. SIGGRAPH, 1995.
64. G. Taubin, "Geometric Signal Processing on Polygonal Meshes," Proc. EUROGRAPHICS, 2000.
65. B.L. van der Waerden, Group Theory and Quantum Mechanics. Springer Verlag, 1974.
66. J. Weickert, Anisotropic Diffusion in Image Processing. Stuttgart, Germany: ECMI Series, 1998.
67. J. Weickert, "Nonlinear Diffusion Filtering," Handbook on Computer Vision and Applications, B. Ja'hne et al., eds., vol. 2, pp. 423-450, Academic Press, 1999.
68. J. Weickert, S. Ishikawa, and A. Imiya, "On the History of Gaussian Scale-Space Axiomatics," Gaussian Scale-Space Theory, J. Sporring, ed., Dordrecht: Kluwer, 1997.
69. A.P. Witkin, "Scale-Space Filtering," Proc. Eighth Int'l Joint Conf. Artificial Intelligence, pp. 1019-1022, Aug. 1983.