

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова

ПУСТОВА СВІТЛАНА ВІКТОРІВНА

УДК 519.872

**АНАЛІТИЧНІ ТА СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ
ОЦІНЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ
ФУНКЦІОНУВАННЯ CALL-ЦЕНТРІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Київ – 2009

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі комп'ютеризованих систем управління Національного авіаційного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент
Коба Олена Вікторівна,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
Національної академії наук України,
провідний науковий співробітник
відділу математичних методів теорії надійності
складних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кнопов Павло Соломонович,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
Національної академії наук України,
завідувач відділу математичних методів
дослідження операцій,

кандидат технічних наук,
Галушко Володимир Григорович,
Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем
НАН та МОН України,
старший науковий співробітник.

Захист відбудеться “26” червня 2009 р. о 12 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.194.02 при Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України за адресою: 03680, м. Київ – 187, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічному архіві Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова.

Автореферат розісланий “ _____ ” травня 2009 р.

Т.В.О. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради

Г. П. Донець

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Близько 20 років тому почала розвиватись теорія масового обслуговування (ТМО) з поверненнями, тим самим надавши можливість використання нового математичного апарату для дослідження реальних систем. Серед них, особливо на протязі останніх 10 років, широко розвиваються і використовуються такі системи як call-центри. У сучасних умовах українського і світового ринку послуг, поряд зі збільшенням ролі задоволення потреб клієнтів, не менш значимим фактором є взаємозв'язок із клієнтами засобами телефонного зв'язку. Call-центри отримують усе більше визнання як ефективний інструмент взаємодії фірм із клієнтами. Більшість організацій вбудовують call-центр до своєї структури. Для багатьох телекомунікаційних, страхових і торгівельних фірм, комерційних банків, готелів, соціальних служб (наприклад, номер 1551 Київської міської державної адміністрації) call-центр є незамінним засобом зв'язку та ефективного менеджменту взаємовідносин з клієнтами.

Call-центри стали важливою частиною сучасного бізнесу. Саме тому розробка їх адекватних моделей є досить актуальною задачею при проектуванні call-центрів з метою визначення і покращення показників функціонування, а отже, зменшення грошових витрат з їх експлуатації.

Значний внесок у дослідження call-центрів внесли: С. Пальм, А. Мандельбаум, Н. Ганс, Г. Кооле, Е. Брокмайер, Х. Хальмстром, Д. Сем'юельсон, М. Пінедо, В. Мехротра, А. Саков, С. Зелтін, М. Агюр, Дж. Арталейо та інші.

У наш час у ТМО та теорії статистики накопичені значні знання і створені методологічні передумови, які становлять базу для нашого дослідження. Різні аспекти ТМО висвітлені у роботах вчених: А.К. Ерланга, О.Я. Хінчина, С. Пальма, Б.В. Гнеденка, Д.Г. Кендалла, О.О. Боровкова, Д. Кокса, В. Сміта, Ю.К. Добрушина, Н.В. Яровицького, Б.А. Севастьянова, І.М. Коваленка, Т.П. Мар'яновича, О.В. Коби, Є.О. Лебедева, А.А. Чечельницького, Г.П. Клімова та багатьох інших.

Важливим розділом ТМО є теорія систем з повторними викликами (повернення, *retrials*, *repeated customers*). Такі системи характеризуються наступною поведінкою. Якщо виклик надійшов до системи, у якій усі канали обслуговування і місця для очікування (якщо є буфер) зайняті, то він залишає систему на деякий випадковий проміжок часу, інакше кажучи, йде на орбіту (*orbit*, *retrial group*), а потім знову повторює спроби отримати обслуговування. Важливість цього розділу ТМО обумовлена його широкими практичними застосуваннями. Область застосування ТМО охоплює проектування телефонних систем і мереж, локальних обчислювальних мереж, мобільних сотових мереж. Наявність повторних спроб є невід'ємною рисою цих систем, ігнорування даного ефекту може призвести до значних похибок при прийнятті

інженерних рішень.

Аналіз літератури вказує на відсутність серйозних досліджень call-центрів, в яких би враховувався вплив повторних викликів, однак, в той же час, практика показує, що їх нехтування впливає на експлуатаційні витрати власника такої системи.

Серед причин виникнення повторних викликів можна вказати наступні: несправність телефонної мережі, зайнятість каналів, помилки у наборі номера. Таким чином повторні виклики збільшують час зайнятості комутаційного обладнання call-центру, що у свою чергу призводить до збільшення навантаження телефонної мережі, погіршенню якості обслуговування і зменшенню доходу від експлуатації системи.

Актуальність теми дисертації також підтверджується виникненням і регулярним проведенням Міжнародного семінару з теорії систем з повторними викликами (Мадрид – 1998, Мінськ – 1999, Амстердам – 2000, Кочін – 2002, Сеул – 2004, Мадрид – 2006, Афіни – 2008).

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась на кафедрі комп'ютеризованих систем управління Національного авіаційного університету (НАУ) згідно з індивідуальним планом підготовки аспіранта та в межах звіту Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова за темою „Розробити високоточні методи аналізу та оптимізації імовірнісних характеристик резервованих систем і систем з повторними заявками” (державний реєстраційний номер 01074U000798).

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи є розробка аналітичних та статистичних моделей call-центрів як систем обслуговування з поверненнями, отримання явних формул та розробка алгоритмів для визначення показників ефективності функціонування систем.

Сформульована мета обумовлює наступні задачі досліджень:

- розробка аналітичних моделей call-центрів як систем масового обслуговування (СМО) з повторними викликами;
- дослідження умов ергодичності моделей call-центрів;
- розробка методів і алгоритмів для визначення показників ефективності функціонування call-центрів як систем з повторними викликами;
- розробка статистичних моделей call-центрів як систем з повторними викликами, проведення статистичних експериментів та аналіз їх результатів.

Об'єктом дослідження є процес функціонування call-центрів як систем масового обслуговування з повторними викликами.

Предметом дослідження є розробка аналітичних і статистичних моделей оцінювання показників ефективності функціонування call-центрів.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач використовувались методи теорії ймовірностей і випадкових процесів, методи ТМО, метод статистичного моделювання (метод Монте-Карло), чисельні методи розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, отримані при розв'язанні описаних вище задач, є новими і вперше опубліковані у роботах автора і сумісних роботах з науковим керівником. Вони полягають у наступному:

- розроблено моделі call-центрів як СМО з повторними викликами із втратами та без втрат, проведено всебічний аналіз показників їх функціонування (таких, як: ймовірність зайнятості каналів, середнє число повторних викликів, середній і відносний час очікування викликів на орбіті, ймовірність втрати виклику);

- розроблено модель call-центру як систему з обмеженим часом перебування у черзі, віднайдено формули для показників ефективності його функціонування, і розроблено метод визначення оптимальної кількості операторів для заданого рівня обслуговування;

- розроблено моделі call-центрів як СМО з розподілом Ерланга другого порядку часу циклу орбіти, отримано чисельні розв'язки моделей;

- аналітично порівняно показники ефективності систем (експоненціальний розподіл часу циклу орбіти) і (розподіл Ерланга другого порядку часу циклу орбіти) при малому навантаженні;

- розроблено статистичні моделі call-центрів як системи з повторними викликами, проведено чисельні експерименти.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені аналітичні та статистичні моделі можна використовувати при проектуванні та експлуатації call-центрів.

Результати дисертації впроваджено у функціонування call-центру фірми „Хotel. SIA” (м. Рига, Латвія; представництво в Україні – м. Дніпропетровськ) у вигляді розроблених моделей, алгоритмів і програм, а також методик розрахунку.

Результати дисертації також впроваджено в навчальний процес кафедри комп'ютеризованих систем управління НАУ.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У статтях, написаних у співавторстві, співавтор брала участь у постановці задач та аналізі результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, викладених у дисертації, доповідались і обговорювались на наукових семінарах у НАУ, Національному технічному університеті України „Київський політехнічний інститут”, Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, на Міжнародному симпозіумі “Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXIII)” (Крим, 2007 р.), на VII-й, VIII-й Міжнародних науково-технічних конференціях (МНТК) „АВІА” (Київ, 2006 – 2007 рр.), на 3-й, 4-й МНТК студентів, аспірантів і учених „Сучасні проблеми радіотехніки і телекомунікацій” (Севастополь, 2007 – 2008 рр.), на VI – VIII-й Міжнародних наукових конференціях студентів та молодих учених „Політ” (Київ, 2006 – 2008 рр.).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 13 наукових праць, з них: 6 статей (3 без співавторів) у фахових журналах, затверджених ВАК України, 7 матеріалів конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку літератури та трьох додатків. Загальний обсяг – 194 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено наукову новизну і значення отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду літературних джерел, пов'язаних з тематикою дисертації. В ньому окреслено основні напрями і етапи розвитку наукової думки з проблем теорії масового обслуговування, зокрема, для систем з поверненнями. До них відносяться, зокрема, роботи І.М. Коваленка, О.В. Коби, Є.О. Лебедева, А.А. Чечельницького, А.Н. Дудіна, В.І. Кліменок, А.А. Назарова, Д.Ю. Кузнєцова, С.Н. Степанова. Також розглянуті роботи зі статистичного моделювання систем. Наведено досить повний огляд публікацій стосовно розвитку наукових робіт з дослідження call-центрів. Серед них можна відмітити дослідників call-центрів М. Агюра, Караесмена, Аксіна, Даллері, А. Мандельбаума.

Аналіз літератури показав відсутність ґрунтовних досліджень call-центрів, в яких би досліджувався вплив повторних дзвінків на функціонування таких систем. В той же час, дослідники статистичних даних call-центрів відмічають, що повторні дзвінки впливають на показники ефективності їх функціонування.

Другий розділ присвячено моделям call-центрів як СМО з поверненням викликів з експоненціальним розподілом часу циклу орбіти.

У **підрозділі 2.1** описано загальну структуру і процес функціонування call-центру. Call-центр – це загальний термін, який визначає процес обслуговування за участю людини з використанням телефону. Операторів, які приймають дзвінки у call-центрах, називають агентами. Поряд з послугами агентів call-центри використовують пристрої інтерактивної голосової відповіді (ПІГВ, interactive voice response units), комп'ютери, автоматичні визначники номерів (АВН), автоматичні розподільники дзвінків (АРД, automatic call distributors).

Нехай клієнти, які проживають в Україні, бажають замовити квиток на літак. Клієнти починають процес замовлення квитка, набираючи безкоштовний телефонний, так званий, “800”-номер. Телефонна система call-центру зв'язана з телефонною мережею загального користування за допомогою множини телефонних ліній, які називаються магістральними. Якщо хоча б одна з магістральних ліній вільна, то клієнта буде з'єднано через АРД з call-центром:

розміщено у чергу (за наявності буфера) або з'єднано напряму з оператором call-центру. Якщо клієнти, які знаходяться у режимі очікування, вішають трубку перш, ніж їх обслужать, то кажуть про переривання. Клієнти, які не переривають обслуговування, через певний час зв'язуються з агентом. Клієнти, які не додзвонилися або які покинули чергу, можуть спробувати дзвонити знову; у таких випадках такі дзвінки називають повторними (поверненнями). Клієнти, які розмовляють з агентами, але не можуть у цей момент вирішити свої проблеми, можуть також подзвонити знову. Отже, повторні виклики є невід'ємною складовою потоку дзвінків, які надходять до call-центру.

Кажуть, що клієнти, які виконують повторні виклики, повертаються до системи з орбіти, а час між повторними спробами утворює цикл орбіти.

У **підрозділі 2.2** наведено класифікацію СМО з поверненнями за схемою Д.Г. Кендалла, яка використовується у роботі. СМО за Кендаллом позначаються як, де i – розподіли інтервалів часу між надходженням заявок в систему і часу обслуговування заявок відповідно, s – число каналів обслуговування, r – число місць очікування або число місць очікування плюс число каналів обслуговування (розмір системи), n – ємність орбіти, означає модель з втратами, а якщо в цій позиції стоїть позначення, то це означає модель без втрат (no loss).

У **підрозділі 2.3** ставиться задача побудови моделі і знаходження показників ефективності функціонування call-центру як СМО типу, яку можна описати за допомогою двовимірного процесу, де n – кількість зайнятих каналів обслуговування, a – кількість викликів на орбіті у момент часу t . Двовимірний процес є марковським, визначеним на множині станів.

Побудовано діаграму переходів, визначено інтенсивності переходів.

Нехай λ – інтенсивність надходження первинних викликів, ν – інтенсивність надходження повторних викликів; μ – інтенсивність обслуговування; p – імовірність того, що у момент t система знаходиться у стані. Тоді рівняння Колмогорова мають вигляд

$$\dots, \quad (1)$$

$$\dots, \quad (2)$$

Умова нормування

$$(3)$$

Встановлено необхідні і достатні умови ергодичності: $\lambda < c\mu$.

З практичної точки зору, найбільш важливими показниками ефективності функціонування call-центр є: а) стаціонарна ймовірність зайнятості каналів

(ймовірність блокування викликів) $B = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{C(t) = c\}$; б) середнє число повторних викликів на орбіті $N = \lim_{t \rightarrow \infty} EN(t)$; в) середнє число зайнятих каналів обслуговування; г) середній час очікування (за формулою Літтла); д)

відносний середній час очікування вимог на орбіті.

Позначимо

$$(4)$$

Використовуючи метод твірних функцій, було отримано наступні формули для показників call-центру як СМО

$$(5)$$

У підрозділі 2.4 ставиться задача побудови моделі і знаходження показників ефективності функціонування call-центру як СМО типу. На практиці число абонентів телефонної мережі – скінченне число, яке не перевищує кількості абонентів телефонної мережі певної країни, а отже кількість викликів, які можуть знаходитись на орбіті, – теж скінченне число. Тому була розглянута модель call-центру, яка має скінченну ємність орбіти L (максимальне число викликів, які можуть вміститись на орбіті). Якщо кількість викликів на орбіті дорівнює L , то виклики не стають повторними, а втрачаються і не впливають на подальше функціонування системи.

Побудовано діаграму переходів, визначено інтенсивності переходів.

Система рівнянь Колмогорова для стаціонарних ймовірностей, враховуючи (4), має вигляд

$$, \dots (6)$$

$$(7)$$

$$(8)$$

$$(9)$$

Умова нормування

$$(10)$$

Використовуючи метод твірних функцій, виведено вирази для показників ефективності call-центру як СМО

$$, (11)$$

Для розв'язання системи (6) – (10) було введено нові змінні

. Тоді система (6) – (10) має вигляд

$$(12)$$

$$(13)$$

$$(14)$$

(15)

(16)

Для розв'язання системи (12) – (16) було розроблено і реалізовано програмно алгоритм, який обчислює стаціонарні ймовірності $p_{ij}^{(L)}$, ймовірність зайнятості каналів $B^{(L)}$, середнє число зайнятих каналів $Y^{(L)}$ і середнє число викликів на орбіті $N^{(L)}$.

Евристично було показано збіжність запропонованого алгоритму. У результаті роботи програми, яка реалізує розроблений алгоритм, було отримано залежності: 1) ймовірності зайнятості каналів $B^{(L)}$ і середньої кількості викликів на орбіті від значення обмеження L ; 2) ймовірності зайнятості каналів, відносного середнього часу очікування, середнього часу очікування від i . Ці результати показують, що часи очікування і зменшуються, а ймовірність блокування збільшується зі збільшенням інтенсивності повторних викликів.

Також були розглянуті частинні випадки для одно- і двоканальної систем з поверненнями без втрат.

У **підрозділі 2.5** розглядається задача побудови моделі і знаходження показників ефективності функціонування call-центру як моделі СМО типу, де – ймовірність того, що після j -ої невдалої спроби виклик зробить $-$ ше повернення. Набір ймовірностей називають функцією наполегливості. Припускається, що ймовірність виконання повторного виклику після невдалих повернень не залежить від кількості попередніх спроб (тобто). Якщо на момент надходження первинного виклику будь-який із c каналів вільний, то виклик отримує обслуговування і залишає систему. В іншому ж випадку, – з ймовірністю виклик залишає систему без обслуговування або з ймовірністю йде на орбіту. Якщо на момент надходження повторного виклику будь-який канал обслуговування буде вільним, то виклик отримає обслуговування і зникає з орбіти. В іншому випадку, – з ймовірністю виклик залишає систему або з ймовірністю намагається отримати обслуговування знову.

Модель call-центру як СМО можна описати за допомогою двовимірного процесу, де – кількість зайнятих каналів обслуговування, а – кількість викликів на орбіті у момент часу t . Двовимірний процес є марковським, визначеним на множині станів.

Побудовано діаграму переходів, визначено інтенсивності переходів.

Встановлено необхідні і достатні умови ергодичності: а) при $H_2 < 1$ процес $(C(t), N(t))$ є ергодичним для будь-якої інтенсивності вхідного потоку; б) при $H_2 = 1$ система буде ергодичною за умови $\lambda H_1 / \mu < c$ (ця умова водночас є і необхідною умовою ергодичності).

Система рівнянь Колмогорова для стаціонарних ймовірностей має вигляд

(17)

Умова нормування (18)

(19)

Використовуючи метод твірних функцій, було виведено вирази для показників ефективності функціонування системи, враховуючи (4),

а):

·
,

де

б):

·

У **підрозділі 2.6** розглядається задача побудови моделі і знаходження показників ефективності функціонування call-центру як моделі СМО типу $M/M/c/0/L/H_j$. Система рівнянь Колмогорова має вигляд

(20)

(21)

, (22)

(23)

(24)

де – стаціонарні ймовірності.

Використовуючи апарат твірних функцій, було отримано наступні вирази для середнього числа викликів, які знаходяться на орбіті, враховуючи (4),

а) $H_2 < 1$

;

б) $H_2 = 1$

Було запропоновано і реалізовано програмно алгоритм обчислення стаціонарного розподілу системи як моделі call-центру.

Евристично було показано збіжність запропонованого алгоритму. У результаті роботи програми, яка реалізує розроблений алгоритм, було отримано залежності: 1) ймовірності зайнятості каналів $B^{(L)}$ від ймовірності повернення викликів; 2) середньої кількості зайнятих каналів $Y^{(L)}$ від ймовірності повернення викликів. Ці результати показують, що ймовірність зайнятості каналів і середня кількість зайнятих каналів збільшуються зі збільшенням величини ймовірності повернення при умові $H_1 = H_2$. Ці результати показують високу чутливість показників функціонування від ймовірності повернення викликів у випадку дуже наполегливих клієнтів при $H_j = 1, j = \overline{1, 2}$, особливо для перевантажених систем, коли $\lambda > c\mu$.

Важливим показником ефективності функціонування call-центру є ймовірність втрати викликів $Q = 1 - Y\mu/\lambda$. Було отримано залежність ймовірності втрати від ймовірності повернення викликів: ймовірність втрати викликів зменшується зі збільшенням ймовірності їх повернення; зі збільшенням інтенсивності надходження первинних викликів ймовірність втрати викликів збільшується.

У **підрозділі 2.7** розв'язується задача побудови моделі call-центру деякої реальної фірми з метою визначення мінімальної кількості операторів, необхідних для того, щоб час очікування хоча б 90 % клієнтів, які дзвонять у call-центр, не перевищував 2 хв. Модель call-центру даної організації можна описати як СМО типу з обмеженим часом перебування у черзі. Під час побудови моделі і знаходження формул для показників якості обслуговування було використано метод І.М. Коваленка.

Очевидно, що основними показниками якості обслуговування у розглядуваній задачі будуть середня кількість втрачених викликів, ймовірність втрати виклику, а також середня тривалість очікування обслуговування тими вимогами, які починають обслуговування.

Для розрахунку мінімально необхідної кількості операторів було розроблено програмний додаток *OptOper4CC*.

Третій розділ дисертації присвячено моделям call-центрів як СМО з ерлангівським розподілом часу циклу орбіти як більш адекватним реальній телефонній системі, зокрема call-центру.

Час перебування заявки на орбіті не описаний в позначеннях Д.Г. Кендалла. Зазвичай його приймають експоненціально розподіленим з певним параметром. Однак у даному розділі вивчається СМО з розподілом, відмінним від експоненціального. Тому у **підрозділі 3.1** пропонується ввести нову сьому позицію в позначення Кендалла, яка буде визначати розподіл часу перебування виклику на циклі орбіті. Отже, позначення СМО з поверненнями заявок набуде вигляду, де, , , , – визначаються як і раніше; – розподіл

інтервалів часу між надходженнями повторних заявок до системи з орбіти.

У **підрозділі 3.2** ставиться задача побудови моделі call-центру як моделі СМО типу, де E_2 – позначення розподілу Ерланга другого порядку. Якщо на момент надходження повторного виклику з орбіти канал обслуговування вільний, то виклик обслуговується і після обслуговування залишає систему, а джерело повернень зникає. В іншому випадку, – виклик робить спробу знову отримати обслуговування.

Функціонування СМО як моделі call-центру можна описати тривимірним процесом, де x_i – визначає зайнятість i або не зайнятість каналу i , n_i – кількість вимог на орбіті, які знаходяться на першій і другій фазі відповідно у момент t ; сума n_i являє собою кількість вимог на орбіті у момент часу t . Процес визначений на множині станів.

Побудовано діаграму переходів, визначено інтенсивності переходів.

Нехай λ – інтенсивність надходження первинних викликів, які утворюють пуассонівський потік, ν – параметр двофазного ерлангівського закону, за яким розподілені інтервали між надходженнями повторних викликів; μ – інтенсивність обслуговування, часи якого розподілені за експоненціальним законом;

P_{ij} – ймовірність того, що у момент t система знаходиться у стані j , тобто у системі канал зайнятий i чи вільний i і на орбіті знаходиться n_i викликів, i з яких – на першій, $n_i - i$ – на другій фазі; P_i – відповідні стаціонарні ймовірності. Тоді рівняння Колмогорова для визначених стаціонарних ймовірностей (якщо) мають вигляд:

$$P_{10} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (25)$$

$$P_{11} = \frac{\lambda \nu}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \nu)}, \quad (26)$$

Умова нормування

$$P_{10} + P_{11} + P_{12} = 1. \quad (27)$$

Слід відзначити, що для системи досить складно отримати аналітичний розв'язок. Одним із методів її розв'язання є метод обмеження ємності орбіти досить великою константою L .

У **підрозділі 3.3** розглядається модель call-центру як СМО типу $M/M/1$ і розв'язується задача знаходження показників ефективності його функціонування. Оскільки за визначених умов система рівнянь (25) – (27) буде скінченною, то СМО буде ергодичною завжди.

Модель call-центру як СМО аналогічна до розглянутої у підрозділі 3.2 за виключенням граничних станів системи (якщо $n_1 = 0$ або $n_2 = 0$):

$$P_{10} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (28)$$

$$\dots \quad (29)$$

$$\dots \quad (30)$$

$$\dots \quad (31)$$

$$\dots \quad (32)$$

$$\dots \quad (33)$$

Система (28) – (33) була розв’язана шляхом використання технології розріджених матриць (*Sparse Matrixes*) і *LU*-декомпозиції у середовищі *Matlab*. У результаті роботи програми було отримано залежність імовірності зайнятості каналу $B = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = c\}$ від середнього часу перебування на циклі орбіти $\tau = 1/\nu$ і від інтенсивності вхідного потоку λ : зі збільшенням інтенсивності вхідного потоку імовірність зайнятості каналу збільшується.

Отримані результати показують, що при малому навантаженні системи ймовірність зайнятості каналу B майже не залежить від інтенсивності повернень ν . При великому ж навантаженні системи імовірність зайнятості каналу B різко зростає зі збільшенням інтенсивності повернень ν . Отже, повернення впливають на систему, особливо при великому навантаженні.

Також було отримано залежність імовірності зайнятості каналу B від середнього часу перебування на циклі орбіти τ в залежності від типу розподілу часу перебування викликів на циклі орбіти, з якої видно, що B більша у випадку ерлангівського розподілу часу перебування викликів на циклі орбіти в порівнянні з експоненціальним розподілом при великому навантаженні системи, однак не на велику величину, точніше в межах 0 – 0,025.

Окрім цього, результати показують, що при малому навантаженні системи при $\rho = 0,2$ та $\rho = 0,7$ ймовірність зайнятості каналу у випадку ерлангівського і експоненціального законів розподілу викликів на циклі орбіти майже однакова, а саме: при $\rho = 0,2$ повністю співпадає і не залежить від інтенсивності повернень, а при $\rho = 0,7$ відрізняється на невелику величину порядку $10^{-9} - 10^{-4}$.

При цьому в обох випадках (і при малому і при великому навантаженні системи) зберігається наступне: імовірність зайнятості каналу більша у випадку ерлангівського розподілу часу перебування вимог на циклі орбіти.

У **підрозділі 3.4** було виконано порівняльний аналіз основних показників моделей і при малому навантаженні системи. Для знаходження розв’язку систем було використано метод розкладення за степенями малого параметру.

Нехай λ – інтенсивність надходження вхідних викликів, ν – параметр двофазного ерлангівського закону, за яким розподілені інтервали між

надходженнями повторних викликів, μ – інтенсивність обслуговування викликів.

Позначимо, π_0, π_1, π_2 – відповідні стаціонарні ймовірності.

Якщо позначити ймовірність зайнятості каналу через ρ_i відповідно для СМО типу $M/M/1$, то

» »

»

Отже, при малому завантаженні системи ймовірність зайнятості каналу у випадку ерлангівського і експоненціального розподілів на орбіті майже співпадає для даних систем.

У **підрозділі 3.5** ставиться задача побудови моделі call-центру як СМО типу $M/M/c/0/E_2$, функціонування якої можна описати за допомогою тривимірного процесу $(X(t), Y(t), Z(t))$, де $X(t)$ – кількість зайнятих каналів обслуговування, $Y(t)$, $Z(t)$ – кількість вимог на орбіті, що знаходяться на першій, другій фазі відповідно у момент t ; сума являє собою кількість вимог на орбіті у момент часу t . Процес визначений на множині станів.

Побудовано діаграму перехідних станів, визначено формули для інтенсивностей переходів.

У стаціонарному режимі СМО типу $M/M/c/0/E_2$ задовольняє системі рівнянь Колмогорова (якщо):

» »

»

Умова нормування

У **підрозділі 3.6** розглядається модель call-центру як СМО типу $M/M/c/0/E_2$ з метою знаходження показників ефективності його функціонування call-центру. Модель call-центру як СМО аналогічна до розглянутої у підрозділі 3.5 за виключенням граничних станів системи (якщо $\rho_1 < 1$ або $\rho_2 < 1$):

$$\pi_1 = \frac{\mu_1 \pi_0}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (34)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu_2 \pi_0}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (35)$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad (36)$$

і умові нормування

(38)

Оскільки орбіта обмежена константою L , то система рівнянь (34) – (38) буде скінченною, а СМО – ергодичною за будь-яких умов.

Система (34) – (38) була розв'язана шляхом використання технології розріджених матриць (*Sparse Matrixes*) і LU -декомпозиції у середовищі *Matlab*. У результаті роботи програми було отримано залежність від L для систем (позначимо цю залежність для даної системи B_M) і (позначимо залежність для даної системи B_E), яка показала, що різниця досить мала.

Результати також показують, що зі збільшенням інтенсивності вхідного потоку ймовірність зайнятості каналу збільшується. Причому, при високому навантаженні системи, коли $\lambda/(c\mu) \rightarrow 1$, ймовірність зайнятості каналу досить велика. Повернення впливають на ймовірність зайнятості каналу: зі збільшенням тривалості між поверненнями ймовірність зайнятості каналу зменшується.

Результати роботи розробленої програми показали, що ймовірність зайнятості каналу вища у випадку ерлангівського розподілу, однак не на значну величину. Це говорить про те, що при деяких параметрах системи можна використовувати експоненціальний час розподілу циклу орбіти, що значно спрощує системи і в той же час буде адекватно описувати її функціонування.

Результати чисельного розв'язання СМО типу $M/M/c/0/L//E_2$ узгоджуються з аналітичними результатами, отриманими для частинного випадку $M/M/1/0/2//E_2$ у підрозділі 3.4.

У **четвертому розділі** побудовано статистичні моделі call-центрів як систем з поверненнями і виконана програмна реалізація алгоритмів.

У **підрозділі 4.1** наведено принципи методу статистичного моделювання для систем обслуговування.

У **підрозділі 4.2** розроблено алгоритми статистичних моделей функціонування call-центрів як СМО і, проведено статистичні експерименти.

За допомогою розроблених алгоритмів статистичного моделювання call-центрів як систем з повторними викликами можна спостерігати завантаженість системи в залежності від часу. У випадку $\rho = 0,9$ за результатами роботи програми можна зробити емпіричний висновок, що система ергодична, оскільки система розвантажується і кількість вимог у середньому не зростає з часом. У випадку ж $\rho = 1,5$ можна зробити висновок, що система не ергодична, оскільки система на протязі тривалого часу не розвантажується, а кількість

вимог різко зростає з часом. Це узгоджується з доведеними раніше нами умовами ергодичності системи.

Окрім цього, наведені алгоритми дозволяють отримати середні значення деяких показників системи. Зокрема, отримано значення ймовірності зайнятості каналів. Було виконано порівняння результатів статистичної і аналітичної моделей для ймовірності зайнятості каналу.

Результати моделювання показують, що аналітична модель узгоджується зі статистичною, оскільки відносна похибка невелика.

У **підрозділі 4.3** розроблено алгоритми статистичних моделей функціонування call-центрів як СМО і, проведено статистичний експеримент. Використовуючи метод прямого моделювання, було розроблено і запрограмовано алгоритми статистичного моделювання залежності кількості вимог в системах і як моделей call-центрів.

Отримані графічні залежності підтверджують виведені умови для ергодичності систем. Було виконано порівняння результатів статистичної і аналітичної моделей для ймовірності зайнятості каналу. Результати моделювання показують, що аналітична модель узгоджується зі статистичною.

Було внесено також наступні зміни до статистичної моделі, а саме: запропоновано задавати кількість можливих повторів, які може виконати виклик, замість ймовірності повернень H_j , а також змінено закон розподілу часів обслуговування з експоненціального на нормальний.

У результаті роботи зміненої моделі було отримано залежність між ймовірністю $P(i)$ того, що заявка зробить i повторних викликів, і максимально можливою кількістю повернень: зі збільшенням кількості повернень i дана ймовірність зменшується.

У **додатках** наведено програмну реалізацію розроблених у дисертації алгоритмів, а також копії документів, які підтверджують використання результатів дисертації для розв'язання практичних задач.

ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано актуальну наукову задачу розробки аналітичних та статистичних моделей оцінювання показників ефективності функціонування call-центрів.

Основні результати дисертаційної роботи полягають у тому, що у роботі вперше:

- розроблено аналітичні моделі call-центрів як СМО типу, , , , ;
- визначено умови ергодичності моделей call-центрів як СМО типу, , , ;
- проведено всебічний аналіз та отримано показники ефективності функціонування call-центрів такі, як: ймовірність зайнятості каналів, середнє число повторних викликів, середній час очікування викликів на орбіті, ймовірність втрати виклику;

– розроблено модель call-центру як систему з обмеженим часом перебування у черзі, виведено формули для показників ефективності його функціонування, розроблено метод визначення оптимальної кількості операторів для заданого рівня обслуговування;

– розроблено модель функціонування call-центру як СМО з неекспоненціальним розподілом часу циклу орбіти (ρ , ρ , ρ), отримано чисельні розв’язки моделей;

– аналітично порівняно основні показники ефективності систем і при малому навантаженні;

– розроблено алгоритми статистичного моделювання call-центрів як систем з поверненням викликів, проведено статистичні експерименти, проаналізовано результати;

– розроблено пакет прикладних програм, у якому реалізовано усі методи і алгоритми, розроблені у дисертації.

Результати дисертації впроваджені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова у вигляді звіту „Розробити високоточні методи аналізу та оптимізації імовірнісних характеристик резервованих систем і систем з повторними заявками” (державний реєстраційний номер 01074U000798), в навчальний процес НАУ, у функціонування call-центру фірми „Xotel. SIA”.

ОСНОВНІ РОБОТИ, ЩО ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Pustova S. Modeling Call Center Operation with Taking into Account Repeated Attempts of Subscribers / S. Pustova // Вісник НАУ. – 2006. – №3. – 2006. – С. 21–24.

2. Коба О. В. Аналітична модель функціонування call-центру / О. В. Коба, С. В. Пустова // Доповіді НАН України – 2007. – №2. – С. 17–25.

3. Коба Е. В. Центр обработки вызовов как система массового обслуживания с возвращениями / Е. В. Коба, С. В. Пустовая // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 3. – С. 103–112.

4. Коба Е. В. Определение числа операторов call-центра / Е. В. Коба, С. В. Пустовая // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 80–88.

5. Пустова С. В. Одноканальна система обслуговування із ерлангівським розподілом часу циклу орбіти / С. В. Пустова // Системні дослідження та інформаційні технології – 2008. – №4. – С. 56–65.

6. Пустовая С. В. Зависимость показателей функционирования call-центра от распределения времени пребывания вызовов на орбите / С. В. Пустовая // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №2. – С.170–183.

7. Пустова С. В. Розробка аналітичної і статистичної моделей функціонування телефонних систем спеціального призначення / С. В. Пустова // ПОЛІТ: Матеріали VI Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. – К., 2006. – С.133.

8. Пустова С. В. Аналітична модель функціонування центру обробки викликів / С. В. Пустова // Матеріали VII МНТК "АВІА-2006". – К., 2006. – Т.1. – С. 14.21–14.24.

9. Пустова С. В. Статистична модель функціонування call-центру / С. В. Пустова // Матеріали VIII МНТК „АВІА-2007”. – К., 2007. – Т.1. – С. 13.61–13.64.

10. Пустова С. В. Побудова аналітичних моделей центрів обробки викликів з урахуванням повторних вимог / С. В. Пустова // ПОЛІТ: Матеріали VII Міжнародної наукової конференції студентів та молодих учених. – К., 2007. – С.76.

11. Пустова С. В. Розробка моделей функціонування сучасних телефонних комп'ютеризованих систем / С. В. Пустова // Матеріали 3-ої ММНТК студентів, аспірантів і учених „Сучасні проблеми радіотехніки і телекомунікацій РТ-2007” – Севастополь, 2007. – С.193.

12. Пустова С. В. Побудова моделей функціонування сучасних телекомунікаційних систем / С. В. Пустова // Матеріали Міжнародного симпозіуму “Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXIII)” – 2007. – С.242-243.

13. Пустова С. В. Побудова математичної моделі call-центру з Ерлангівським розподілом повторних викликів / С. В. Пустова // Матеріали 4-ої ММНТК студентів, аспірантів і учених „Сучасні проблеми радіотехніки і телекомунікацій РТ-2008” – Севастополь, 2008. – С. 245.

АНОТАЦІЯ

Пустова С. В. Аналітичні та статистичні моделі оцінювання показників ефективності функціонування call-центрів. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Київ, 2009.

Дисертація присвячена актуальній задачі розробки аналітичних і статистичних моделей оцінювання показників ефективності функціонування call-центрів.

Розроблено математичні моделі функціонування call-центрів як СМО з повторними викликами. Проведено всебічний аналіз показників ефективності їх функціонування. Розроблено аналітичні моделі call-центрів як СМО з розподілом Ерланга другого порядку часу циклу орбіти, отримано чисельні розв'язки. Порівняно основні показники call-центрів як систем з експоненціальним і двофазним ерлангівським розподілом часу циклу орбіти. Розроблено статистичні моделі call-центрів як СМО з поверненням викликів, проведено статистичні експерименти. Розроблено пакет прикладних програм, у якому реалізовано усі методи і алгоритми, розроблені у дисертації.

Ключові слова: call-центр, система масового обслуговування з повторними викликами, повернення, повторні заявки, орбіта.

АННОТАЦИЯ

Пустовая С.В. Аналитические и статистические модели оценивания показателей эффективности функционирования call-центров. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 01.05.01 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 2009.

Диссертация посвящена актуальной задаче разработки аналитических и статистических моделей оценивания показателей эффективности функционирования call-центров.

Разработаны математические модели функционирования call-центров как СМО с повторными вызовами. Проведен всесторонний анализ показателей эффективности их функционирования. Разработаны аналитические модели call-центров как СМО с распределением Эрланга второго порядка времени цикла орбиты, получены численные решения. Произведено сравнение основных показателей call-центров как систем с экспоненциальным и двухфазным эрланговским распределением времени цикла орбиты. Разработаны статистические модели call-центров как СМО с возвращениями вызовов, проведены статистические эксперименты. Разработан пакет прикладных программ, в котором реализованы все методы и алгоритмы, разработанные в диссертации.

Ключевые слова: call-центр, система массового обслуживания с повторными вызовами, возвращения, повторные заявки, орбита.

ANNOTATION

Pustova S.V. Analytical and Statistical Models for Estimating the Efficiency Characteristics of Call Centers' Operation. – Manuscript.

A thesis for a candidate degree in technical sciences in subject of 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2009.

The thesis addresses actual problem of the development of analytical and statistical models of call centers' operation and getting explicit formulas as well as logic design for finding the systems' efficiency characteristics.

Telephone call centers are an integral part of many businesses, and their economic role is significant and growing. Call centers and their contemporary

successors, contact centers, have become a preferable and effective means and instruments of communication between companies and their customers. The call center industry is rapidly expanding all over the world. Most private companies, as well as government organizations and emergency services, with customer contact reengineer their infrastructure to include call centers, either internally managed or outsourced. Call center is the common term for a telephone-based human-service operation. The customers are only virtually present: they are either being served or they are delayed in queues. Those waiting to be served share a phantom queue, invisible to each other, until either an agent is allocated to serve them, or they abandon the queue.

Call centers' design and management is based on scientific principles. This is manifested by a growing body of academic multi-disciplinary research, devoted to call centers, and ranging from Mathematics and Statistics, to Operations Research, Industrial Engineering, Information Technology and Human Resource Management, all the way to Psychology and Sociology.

Analytical survey of the state of modern research on call centers and retrial systems as well as statistical modeling is carried out. We first outline important bibliography on call center reviews. We then review existent models of call center operation. Moreover, it is shown that researchers of call centers' statistical data note that retrial calls have essential effect on efficiency characteristics of call center operation. Therefore we consider call centers as retrial queueing systems.

Analytical models of call centers as retrial queueing systems with and without losses are developed. Furthermore, sufficient and necessary ergodicity conditions for developed models are defined. Thorough analysis of the efficiency characteristics of call centers' operation is carried out. Particularly, the main efficiency characteristics of call center operation are: the blocking probability, carried traffic (or the average number of busy agents), the average number of retrial calls in the orbit, the average waiting time in the orbit, losses probability.

Analytical performance model of call center as queueing system with limited waiting time is developed. This model is solved analytically. Particularly, formulas for quality characteristics of such call center are derived. The developed algorithm for determination of the optimum quantity of call center agents for given service rate can be used during call center designing. This algorithm can help to reduce costs of call center owners since the major costs are wage costs.

Afterwards analytical call centers' performance models are developed as retrial queueing systems with non-exponential sojourn distribution in the orbit, namely Erlang two phase distributive law. As it is hard to obtain explicit formulas for characteristics of the retrial queueing systems with non-exponential sojourn distribution in the orbit numerical solutions are given. The main efficiency characteristics of call centers as retrial queueing systems with exponential and non-exponential sojourn distribution in the orbit are compared. We give a comparative analysis of call centers as retrial queueing systems with exponential and non-exponential sojourn distribution in the orbit.

Statistical models of call centers' operation as retrial queueing systems with and without losses are developed in the thesis. The verification of statistical models is performed by comparing the values of some efficiency characteristics obtained in analytical and statistical modeling. Multiple statistical experiments are carried out with the following analysis of results.

Being an implementation of all methods and algorithms suggested in the thesis, application package is developed.

Key words: call center, retrial queueing system, retrial calls, repeated attempts, orbit.

Підписано до друку 21.05.2009 р. Формат 60х90/16.
Ум. друк. арк. 0,9. Набір комп'ютерний.
Наклад – 100 прим. Зам. №82
УкрІНТЕІ, Київ-680, вул. Горького, 180.