

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Гусинін Андрій Вячеславович

УДК 681.5.015.24:629.7(043.5)

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО
КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ НА ОСНОВІ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

05.13.03 – Системи та процеси керування

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

А.В. Гусинін

Науковий консультант - Зіатдінов Юрій Кашафович, доктор технічних наук,
професор

Київ-2021

АНОТАЦІЯ

Гусинін А.В. Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.13.03 «Системи та процеси керування». – Національний авіаційний університет, МОН України, Київ, 2021.

Дисертаційна робота присвячена розвитку методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів (ЛА) на основі диференціальних перетворень та їх застосуванню до оптимізації багатоетапного виведення автономних безпілотних літальних апаратів (БЛА) у задані термінальні умови.

Розвинута наукова та методична база для забезпечення розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі математичного апарату диференціальних перетворень. Розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних крайових задач та метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень (у спектральну модель) вихідної нелінійної математичної моделі руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови.

Розвинуто метод основних диференціальних перетворень для розв'язання класу задач, математичні моделі яких описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Запропонований підхід базується на сумісному використанню методу основних диференціальних перетворень, методу припасовування та застосування апроксимації нелінійних складових вихідних диференціальних рівнянь поліномами Адоміана. Розвинутий метод отримав назву модифікований метод диференціальних перетворень (ММДП) і дозволяє розширити інтервал та знизити похибку розв'язку задачі, спростити дискретно-аналітичне відображення складних нелінійностей.

На базі модифікованого методу диференціальних перетворень запропоновано метод розв'язання крайових задач, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Розроблено метод дискретно-аналітичного

відображення у спектральну модель з відсутнім часовим аргументом вихідних нелінійних математичних задач багатоетапного виведення ЛА у задані термінальні умови. Спектральна модель подана у вигляді рекурентного виразу, має універсальний характер та може бути використана для розв'язання задач оптимізації руху різних типів ЛА.

Розвинуто метод основних диференціальних перетворень в області застосування до розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА, що дало можливість спростити синтез алгоритмів керування та отримати їх в аналітичній формі. Розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних задач оптимального термінального, багатокритерійного та гарантовано-адаптивного керування.

Отримав подальшого розвитку метод розв'язання нелінійних задач оптимізації термінального керування багатоетапним виведенням ЛА, що не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, дозволяє отримувати алгоритми керування в аналітичному вигляді, здійснювати оперативний синтез керування та проводити моделювання динамічного процесу у реальному часі на більшому інтервалі розв'язку задачі.

Запропоновано чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації для розв'язання нелінійних задач синтезу алгоритмів оптимального багатоетапного керування рухом літальних апаратів з використанням скалярної згортки частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів. Метод базується на модифікованому методі диференціальних перетворень та дискретно-аналітичному відображенню в область зображень вихідної нелінійної математичної задачі, дозволяє звести проблему векторної оптимізації до розв'язання скінченої системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування.

На базі модифікованого методу диференціальних перетворень розроблено чисельно-аналітичний метод синтезу гарантовано-адаптивного багатоетапного керування рухом ЛА при виведенні у задані термінальні умови при впливі невизначених обмежених збурень. Метод використовує диференціально-ігрову модель багатоетапного динамічного процесу, не потребує чисельного інтегрування

нелінійних диференціальних рівнянь руху, зводить проблему синтезу алгоритмів керування до розв'язання скінченої системи рівнянь відносно параметрів керування та збурень і припускає аналітичний розв'язок задачі.

Розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування використані для синтезу оптимальних алгоритмів термінального, багатокритерійного та гарантовано-адаптивного керування виведенням авіаційно-космічної системи на орбіту, зльотом з виведенням на задану висоту і посадкою безпілотного аеростатичного літального апарату.

Ключові слова: оптимальне керування, багатоступінні процеси, диференціальні перетворення, диференціальні ігри, авіаційно-космічні системи, аеростатичні літальні апарати.

Список публікацій здобувача

Статті в закордонних наукових журналах

1. Гусинін А. В. Дискретно-аналітичне відображення нелінійних задач багатоступінного траєкторного руху літальних апаратів / А. В. Гусинін, В.П. Гусинін, Ю.К. Зіатдінов // International independent scientific journal. – 2020. - Vol.1, № 21. – Р. 39-44.
2. Гусынин А. В. Решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, систем уравнений и краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, Ю. К. Зіатдінов // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2020. – Vol.1, № 49. – Р. 32-47.
3. Гусинін А. В. Оптимальне комбіноване керування автономним аеростатичним літальним апаратом / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін // The scientific heritage. – 2020. – Vol.1, № 54 (54). – Р. 39-47.
4. Гусинін А. В. Синтез программных алгоритмов терминального управления аэростатическим летательным аппаратом / А. В. Гусинін // Sciences of Europe. – 2020. – Vol.1, № 58. – Р. 46-58.

Статті у наукових фахових виданнях, які входять до переліку ВАК України

5. Гусинін А.В. Багатокритеріальна оптимізація керування рухом багаторежимних літальних апаратів / А.В. Гусинін // Технологія приладобудування. – 2011. – №2. – С. 3-5.
6. Гусынин А.В. Применение дифференциальных преобразований к синтезу алгоритма многоэтапного терминального управления летательным аппаратом / А.В. Гусынин // Науковий вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2015. – № 2(10). – С. 24-33.
7. Gusynin A. The differential-and-taylor model of multicriterion optimization by control launch into orbit of multimode aerospace system / A. Gusynin // Науковий вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2016. – В.1-2 (11). – С. 104 -118.
8. Гусынин А.В. Решение нелинейных двухточечных краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований / А.В. Гусынин, В.П. Гусынин, О.Н. Замирец // Технологія приладобудування. – 2016. - №1. - С. 16-21.

Статті у наукових фахових виданнях, які включені до міжнародних наукометричних баз

9. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут». – 2008. – №3. – С. 87-95.
10. Гусинін А. В. Порівняльна оцінка ефективності ручного та автоматичного керування відхиленням вектору тяги дирижабля на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Вісник Національного авіаційного університету. – 2008. – В. 2(24). – С. 68-72.
11. Гусинін А. В. Оптимізація керування виведенням на орбіту багаторежимної авіаційно-космічної системи на основі диференціальних перетворень /

- А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2008. – В.2(24). – С. 32-38.
12. Гусинін А.В. Системи повітряного старту ракет-носіїв легкого класу / А.В. Гусинін // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут». – 2010. – №1. – С.140-145.
 13. Гусинін А. В. Диференціально-ігровий підхід до синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів / А. В. Гусинін // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – №1(88). – С. 40-45.
 14. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі посадки / А. В. Гусинін // Проблеми інформаційних технологій. – 2013. – №01(013). – С. 53-60.
 15. Гусинін А. В. Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень / А. В. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2013. – В.4(44). – С. 27-35.
 16. Gusynin A. Algorithm of guaranteed-and-adaptive control of aerostatic vehicle under undetermined external disturbances / A. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2014. - №4(61). - P. 36-44.
 17. Гусынин А. В. Метод многокритериальной оптимизации управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // Проблеми інформаційних технологій. – 2014. – №02(016). – С. 97-102.
 18. Гусынин А. В. Синтез алгоритма терминального управления многоэтапным процессом выведения авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, О. С. Урусский // Проблеми інформаційних технологій. – 2015. – №02 (018). – С.60-67.
 19. Гусынин А. В. Модель оптимизации многоэтапного процесса управления летательным аппаратом на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Я. О. Замирец // Системи обробки інформації. – 2015. – В.8(113). – С.77-81.

20. Гусынин А. В. Многокритериальная оптимизация движения автоматически управляемого аэростатического летательного аппарата / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Е. Н. Тачинина // Проблемы інформатизації та управління. – 2015. – Т.4(52). – С. 22-30.
21. Гусынин А. В. Применение модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. В. Гусынин // Проблемы інформаційних технологій. – 2016. – №01 (019). – С.31-40.
22. Gusynin A. The use of differential transformations for solving non-linear boundary value problems / A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2016. – № 4 (69). – P.44-55.
23. Гусынин А. В. Модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. В. Гусынин // Проблемы інформаційних технологій. – 2016. – №02 (020). – С.26-34.
24. Gusynin A. Estimate of accuracy of approximate solutions of non-linear boundary value problems by the multi-step differential transform method / A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2017. – No.1(70). – P. 48-54.
25. Gusynin A. Differential transform method for solving non-linear differential equations by the Adomian polynomials / A. Gusynin // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського. – 2017. – №.03(104). – С. 46-51.
26. Gusynin A. An application of differential transformation for optimal control of nonlinear processes / A. Gusynin // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2017. – №26 (102). – С.95-104.
27. Гусынин А.В. Оптимизация управления посадкой дирижабля на основе многоэтапного метода дифференциальных преобразований / А.В. Гусынин, Ю. В. Антонова-Рафи, А. В. Яровой // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2017. – В.5(45). – С.12-17.

28. Gusynin A. Guaranteed adaptive terminal control of an aerostatic aircraft based on differential game approach / Y. Ziatdinov, V. Gusynin, A. Gusynin // Proceedings of the National Aviation University. – 2020. – No.1(82). – P.12-22.

Опубліковані праці в збірниках матеріалів і праць міжнародних конференцій, які входять до наукометричної бази Scopus

29. Gusynin A. The method of injection of subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on An-124-100 and An-225 airplanes / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko, S. Chumachenko // Methods and Systems of Navigation and Motion Control: IEEE 4th International Conference, October 18-20, 2016. – K., 2016. – P. 200-205. – doi:10.1109/ MSNMC. 2016.7783142.
30. Gusynin A. Synthesis of optimal multi-step control algorithms by UAVs based on differential-and-game approach / A. Gusynin, O. Yarovoy, J. Antonova-Rafi, I. Khudetsky // Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Development: IEEE 4th International Conference, October 17-19, 2017. – K., 2017. – P. 100-103. – doi: 10.1109/APUAVD.2017.8308785

Матеріали конференцій

31. Gusynin A. The algorithm synthesis for automatic control of airship thrust vector tilting at takeoff stage / A. Gusynin, V. Gusynin // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr. 71154.
32. Gusynin A. The project of semi-blimp airship “D-1500” / A. Gusynin, G. Kozachenko // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr. 71164.
33. Гусынин А. В. Моделирование оптимального процесса управления движением дирижабля смещенными дифференциальными преобразованиями / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании: международная научно-практическая конференция, 21-28 декабря 2009 г.: тезисы доп. – Одесса (Украина), 2009. – Т.2. – С. 17-18.

34. Гусынин А. В. Аэростатические платформы воздушного старта ракет-носителей / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // АВИА-2009: IX міжнародна науково-практична конференція, 21-23 сентября 2009. – К., 2009. – С. 16.25-16.28.
35. Гусынин А. В. Проектирование дирижабля с уменьшенной статической устойчивостью / А. В. Гусынин // Современные направления теоретических и прикладных исследований: международная научно-практическая конференция, 15-26 марта 2010 г.: тезисы доп. – Одесса (Украина). – Т.2. - С. 57-58.
36. Гусынин А. В. Моделирование процесса терминального управления многорежимными объектами на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 17-21 мая 2010 г.: тезисы доп. – Евпатория (Украина), 2010. – С. 59-60.
37. Гусынин А. В. Терминальное управление многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциально-игрового подхода / А. В. Гусынин // Людина і космос: XIV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 11-13 квітня 2012 р.: тезисы доп. – Дніпропетровськ (Україна), 2012. – С. 129.
38. Гусынин А. В. Комбинированное управление выводением многорежимной авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 25-29 мая 2012 г.: тезисы доп. – Евпатория (Украина), 2012. - С. 476.
39. Гусынин А. В. Многокритериальная оптимизация процесса выведения на орбиту многорежимной авиационно-космической системы на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 12-а Українська конференція з космічних досліджень, 3-7 сентября 2012 г.: тезисы доп. – Евпатория (Украина), 2012. – С. 115.
40. Гусынин А. В. Снижение аэротермодинамических нагрузок на конструкцию многорежимной транспортно-космической системы путем многокритериальной

оптимизации траекторного управления / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Материалы и покрытия в экстремальных условиях: исследования, применение, экологически чистые технологии производства и утилизации изделий: VII международная конференция, 24-28 сентября 2012 г.: тезисы доп. – Кацивели (Украина), 2012. – С. 82.

41. Гусынин А. В. Оцінка можливості старту ракети-носія з дирижабля / А. В. Гусынин // Людина і космос: XV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 10-12 квітня 2013 г.: тезисы доп. – Дніпропетровськ (Україна), 2013. – С. 301.
42. Гусынин А. В. Методи оптимизации управления многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 13-а Українська конференція з космічних досліджень, 2-6 вересня 2013 г.: тезисы доп. – Євпаторія (Україна), 2013. – С. 121.
43. Гусынин А. В. Оптимизация автоматической посадки дирижабля / А. В. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 28-31 мая 2014 г.: тезисы доп. – Євпаторія (Україна), 2014. – С. 64-65.
44. Гусынин А. В. Системоаналоговое моделирование законов оптимального управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 14-а Українська конференція з космічних досліджень, 8-12 вересня 2014 г.: тезисы доп. – Ужгород (Україна), 2014. – С. 103.
45. Gusynin A. The system of injection of subminiature satellites (nanosatellites) to near-earth orbit on the basis of AN-124-100 and AN-225 airplane / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko, S. Chumachenko, I. Chekanova, I. Alexeeva // Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об'єктах критичної інфраструктури: II міжнародна науково-практична конференція, 26-28 травня 2016 г. – К., 2016. – С. 278-292.

Монографії

46. Гусинін А. В. Кероване повітроплавання / А.В. Гусинін, В.П. Гусинін. – К.: Кафедра, 2012. – 364 с.

Навчальні посібники

47. Гусинін А. В. Диференціальні Т-перетворення в задачах автоматичного керування рухом літальних апаратів / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. В. Збруцький. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 176 с.
48. Гусинін А. В. Дирижаблі. Ч.ІІ. Аеростатика, аеродинаміка та динаміка керованого польоту // А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, В. М. Казак, М. С. Кулик, О. М. Тачиніна. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. – 212 с.

ANNOTATION

Gusynin A.V. Methods for solving non-linear problems of optimal aircrafts motion control based on differential transformations. - Qualifying scientific work as a manuscript.

Thesis for Doctor of Engineering Science Degree in specialty 05.13.03 «Systems and Control Processes». - National Aviation University, MES of Ukraine, Kyiv, 2021.

The thesis is devoted to the evolution of methods for solving non-linear problems of optimal aircraft motion control based on differential transformations and their application for optimization of multistep delivering of autonomous unmanned aerial vehicles (UAVs) into desired terminal conditions.

The scientific and methodological base has been developed to ensure the solution of non-linear problems of optimal aircraft motion control based on the mathematical apparatus of differential transformations. Advanced and developed new methods for solving non-linear ordinary differential equations, nonlinear boundary value problems and the method of discrete-analytical mapping into the image area (into a spectral model) of the initial non-linear mathematical model of aircraft motion at delivering into desired terminal conditions.

The basic differential transform method has been advanced for solving a class of problems, whose mathematical models are described by non-linear ordinary differential equations. The proposed approach is based on the joint use of the method of basic

differential transformations, the fitting method and application of approximating the non-linear components of initial differential equations by Adomian polynomials. The advanced method is called the modified differential transform method (MDTM) and allows to expand the interval and to reduce the error of problem solution, to simplify the discrete-analytical mapping of complex nonlinearities.

On the basis of the modified differential transform method are proposed method for solving boundary value problems are described by non-linear ordinary differential equations. A method of discrete-analytical mapping into spectral model with no time argument of the initial non-linear mathematical problems of multistep delivering of an aircraft into desired terminal conditions has been developed. The spectral model is presented as a recurrent expression, has a universal character and can be used for solving problems of motion optimization of different types of aircraft.

The basic differential transform method in terms of its application for solving non-linear problems of optimal aircraft motion control has been advanced, which has made it possible to simplify the control algorithms synthesis and obtain them in analytical form. New methods for solving non-linear problems of optimal terminal, multicriteria and guaranteed-adaptive control have been advanced and developed.

The method for solving non-linear problems for optimization of terminal control of multistep delivering of aircraft was further advanced, which does not require numerical integration of non-linear differential equations, allows one to obtain control algorithms in an analytical form, to carry out the operational synthesis of control and to simulate a dynamic process in real time over a larger interval of problem solution.

A numerical-analytical method of multicriteria optimization is proposed for solving non-linear problems of algorithms synthesis for optimal multistep control of aircraft motion using scalar convolution of partial criteria according to a non-linear scheme of compromises. The method is based on modified differential transform method and discrete-analytical mapping of the initial non-linear mathematical problem into image area, allows to reduce the problem of vector optimization to solving a finite system of non-linear equations with regarding to the control parameters.

On the basis of the modified differential transform method, a numerical-analytical method for the synthesis of guaranteed-adaptive multistep control of the aircraft motion at delivering into desired terminal conditions under undetermined limited disturbances has been developed. The method uses a differential game model of a multistep dynamic process, does not require numerical integration of non-linear differential equations of motion, reduces the problem of control algorithms synthesis to solving a finite system of equations with regarding to the control parameters and disturbances, and allows an analytical solution of problem.

The advanced and developed new methods for solving non-linear problems of optimal control are used for optimal algorithms synthesis of terminal, multicriteria and guaranteed-adaptive control of the launching of an aerospace system into orbit, takeoff with delivering into desired altitude and landing of an autonomous unmanned aerostatic aircraft.

Keywords: optimal control, multistep processes, differential transformations, differential games, aerospace systems, aerostatic aircraft.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	19
ВСТУП	20
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛА	33
1.1. Особливості задач оптимального термінального керування рухом ЛА ...	33
1.1.1. Траєкторії виведення АКС на орбіту	35
1.1.2. Траєкторії БАЛА на етапах зльоту та посадки	38
1.2. Задача та принципи термінального керування	42
1.3. Порівняльний аналіз методів термінального керування АКС	47
1.3.1. Адаптивне керування	48
1.3.1.1. Пошукові адаптивні методи	49
1.3.1.2. Безпошукові адаптивні методи	50
1.3.1.3. Аналіз проблем синтезу адаптивних систем керування нелінійними динамічними об’єктами	55
1.3.2. Методи оптимального керування	57
1.3.3. Методи робастного керування	62
1.3.4. Методи керування на основі інтелектуальних технологій	64
1.4. Автоматичне керування траєкторним рухом БАЛА	67
1.4.1. Підходи до побудови систем автоматичного керування	67
1.4.2. Оптимальне керування траєкторним рухом	71
1.5. Постановка задачі синтезу оптимального багатоетапного керування ЛА	73
1.6. Гарантовано-адаптивне керування	75
1.6.1. Аналіз відомих публікацій	75
1.6.2. Постановка задачі гарантовано-адаптивного керування	78
1.7. Багатокритерійна задача багатоетапного оптимального керування літальними апаратами	80

1.7.1. Задача векторної оптимізації	81
1.7.2. Аналіз методів розв'язання багатокритерійних задач оптимізації	83
1.8. Диференціальні перетворення та їх застосування до розв'язання задач оптимального керування	86
1.8.1. Основні положення методу диференціальних перетворень	88
1.8.2. Застосування МДП до розв'язання крайових задач та задач оптимального керування	91
1.9. Наукова проблема та задачі дослідження	94
Висновки до розділу 1	95
РОЗДІЛ 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА БАЗІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ	98
2.1. Модифікований метод диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь	98
2.1.1. Багатоетапний метод диференціальних перетворень	98
2.1.2. Апроксимація нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана	102
2.1.3. Модифікований метод диференціальних перетворень	108
2.2. Метод розв'язання нелінійних крайових задач	111
2.3. Оцінка похибки розв'язку із застосуванням різних підходів	115
2.3.1. Основні диференціальні перетворення	116
2.3.2. Зміщені диференціальні перетворення	117
2.3.3. Модифікований метод диференціальних перетворень	119
Висновки до розділу 2	123
РОЗДІЛ 3. ДИСКРЕТНО-АНАЛІТИЧНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ БАГАТОЕТАПНОГО ТРАЄКТОРНОГО РУХУ ЛА	126
3.1. Модифікований метод дискретно-аналітичного відображення нелінійних задач термінального виведення ЛА	126
3.2. Відображення задачі багатоетапного руху БАЛА у спектральну модель	128

3.2.1. Математична модель траєкторного руху	128
3.2.2. Спектральна модель руху БАЛА	133
3.2.3. Диференціальні спектри змінних траєкторного руху	137
3.3. Відображення задач багатоетапного виведення АКС на орбіту у спектральну модель	146
3.3.1. Математична модель траєкторного руху	146
3.3.2. Спектральна модель процесу виведення АКС на орбіту	148
3.3.3. Диференціальні спектри змінних траєкторного руху	152
3.4. Аналітичне конструювання термінального керування рухом ЛА на базі диференціальних спектрів	154
Висновки до розділу 3	158
РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ	160
4.1. Чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійної задачі оптимізації багатоетапного термінального керування	160
4.2. Особливості оптимізації багатоетапних процесів термінального керування на основі диференціальних перетворень	168
4.3. Оптимальне термінальне керування виведенням авіаційно-космічної системи на орбіту	171
4.3.1. Синтез оптимального за витратою палива алгоритму керування	171
4.3.2. Дослідження оптимального алгоритму керування	176
4.4. Оптимальне термінальне керування аеростатичним літальним апаратом на злітно-посадкових режимах	181
4.4.1. Синтез алгоритму оптимального термінального керування	181
4.4.2. Дослідження ефективності оптимального алгоритму керування на режимі зльоту з виведенням на задану висоту	188
4.4.3. Дослідження ефективності оптимального алгоритму керування на режимі посадки	191

4.5. Застосування зміщених диференціальних перетворень до оптимізації багатоетапного термінального керування	196
Висновки до розділу 4	202
РОЗДІЛ 5. БАГАТОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕРМІНАЛЬНОГО БАГАТОЕТАПНОГО КЕРУВАННЯ ЛІТАЛЬНИМИ АПАРАТАМИ.....	207
5.1. Постановка задачі багатокритерійної оптимізації багатоетапних динамічних процесів	207
5.2. Багатокритерійні моделі оптимізації	209
5.3. Чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації багатоетапного термінального керування	214
5.4. Оптимізація виведення авіаційно-космічної системи на орбіту.....	218
5.4.1. Синтез багатокритерійного алгоритму керування	218
5.4.2. Комбінований алгоритм керування	228
5.4.3. Дослідження ефективності комбінованого алгоритму	230
5.5. Оптимізація керування аеростатичним літальним апаратом на режимі зльоту з виведенням на задану висоту	232
5.5.1. Синтез багатокритерійного алгоритму керування	232
5.5.2. Дослідження ефективності багатокритерійного алгоритму	241
5.6. Дослідження впливу вітрових збурень на якість процесів керування	244
5.6.1. Виведення авіаційно-космічної системи на орбіту	244
5.6.2. Виведення аеростатичного літального апарату на задану висоту	248
5.7. Застосування зміщених диференціальних перетворень до багатокритерійної оптимізації багатоетапних процесів керування	258
Висновки до розділу 5	260
РОЗДІЛ 6. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ЗА НАЯВНОСТІ ЗБУРЕНЬ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ІГРОВОГО ПІДХОДУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ	265
6.1. Переваги застосування диференціально-ігрових моделей	265
6.2. Диференціально-ігрова модель процесу багатоетапного керування	267

6.3. Метод побудови оптимальних програмних стратегій	270
6.4. Програмний алгоритм керування аеростатичним літальним апаратом за максимальній протидії збуренням	273
6.5. Метод синтезу гарантовано-адаптивного багатоетапного керування	280
6.6. Гарантовано-адаптивні алгоритми термінального керування літальними апаратами	285
6.6.1. Виведення аеростатичного літального апарату на задану висоту	285
6.6.2. Виведення авіаційно-космічної системи на орбіту	291
Висновки до розділу 6	296
ВИСНОВКИ	299
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	305
ДОДАТОК. Акти впровадження результатів дисертаційної роботи	336

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АА	-	алгоритм адаптації
АКС	-	авіаційно-космічна система
АЛА	-	аеростатичний літальний апарат
БАЛА	-	безпілотний аеростатичний літальний апарат
БЛА	-	безпілотний літальний апарат
БМДП	-	багатоетапний метод диференціальних перетворень
БОІ	-	блок оцінювання і ідентифікації
БРЛА	-	багаторежимний літальний апарат
БЦОМ	-	бортова цифрова обчислювальна система
ДП	-	диференціальні перетворення
ДТП	-	диференціально – тейлорівські перетворення
ЕОМ	-	електронно-обчислювальна система
ЗДТП	-	зміщені диференціально – тейлорівські перетворення
КА	-	космічний апарат
ЛА	-	літальний апарат
ЛН	-	літак-носій
МДП	-	метод диференціальних перетворень
ММДП	-	модифікований метод диференціальних перетворень
ОДП	-	основні диференціальні перетворення
ОК	-	об'єкт керування
ОС	-	орбітальна ступень
ПК	-	пристрій керування
РН	-	ракета-носій

ВСТУП

Реалізація науково-технічного потенціалу України в галузі створення перспективних зразків авіаційно-космічної техніки та широкий спектр завдань, що на них покладаються, потребують розв'язання низки задач щодо оптимізації траєкторного руху літальних апаратів (ЛА). Сучасні високопродуктивні малогабаритні бортові комп'ютери, бездротові телекомунікаційні системи та відповідне програмне забезпечення дозволяють успішно вирішити ці складні завдання.

Як різновиди сучасних та перспективних ЛА у дисертації розглядаються автономні безпілотні літальні апарати (БЛА): багаторазові авіаційно-космічні системи (АКС) типу «повітряний старт» та аеростатичні літальні апарати (БАЛА). З теоретичної точки зору ці об'єкти керування, враховуючи зміну їх конструктивних параметрів (зміна мас, центрівок тощо), зміни режимів роботи двигунів та системи керування при виконанні цільових завдань, що пов'язані з виведенням у задані термінальні умови, можуть бути класифіковані як багаторежимні літальні апарати. Траєкторії їх руху є багатоетапними та складаються із декількох ділянок, всередині яких змінні вектору стану є неперервними, а на межах ділянок може відбуватися їх перервна зміна, не виходячи за межі прийнятих обмежень. В дисертаційній роботі під багатоетапним керуванням розуміється керування автономним безпілотним ЛА під час їх польоту за багатоетапною траєкторією з урахуванням змін характеристик та режимів роботи систем апарату на кожній ділянці польоту.

Створення автономних безпілотних літальних апаратів для виконання ними специфічних задач (виведення корисного навантаження на орбіту, вирішення термінових задач моніторингу, нагляду, зв'язку у заданому районі тощо) диктує необхідність оперативного синтезу керування та траєкторій з метою забезпечення оптимального виведення у задані термінальні умови. Проблеми неперервної оптимізації багатоетапного процесу керування літальними апаратами у реальному масштабі часу визнані у світі такими, що є актуальними з наукової та практичної точок зору. Це пов'язано з тим, що високі вимоги до якості керування

обумовлюються обмеженістю енергоресурсів, необхідністю точного виконання кожного етапу польоту, від яких залежить ефективність їх застосування. Точний вихід у задані термінальні умови та подальше виконання поставлених завдань залежить, насамперед, від оптимізації керування та траєкторії у реальному масштабі часу. При цьому, вплив параметричних та зовнішніх збурень вимагає неперервної оптимізації траєкторії польоту у реальному часі на всіх етапах польоту.

Питання оптимізації динамічних процесів із різними підходами до їх розв'язання розглядалися у працях Понтрягіна Л.С., Беллмана Р., Сейджа Е.П., Брайсона А., Кротова В.Ф., Красовського М.М., Гамкрелідзе Р.В., Болтянського В.Г., Лоудена Д.Ф., Лєтова А.М., Красовського А.А., Міхалевича В.С., Кунцевича В.М., Вороніна А.М., Зіатдінова Ю.К., Лисенка О.І. та багато інших. До сьогодні, задача оптимізації багатоетапного траєкторного руху автономних безпілотних ЛА бортовими засобами повністю не розв'язана. Це пов'язано зі складністю проведення оперативного, в реальному масштабі часу, синтезу алгоритмів оптимальних багатоетапних процесів керування рухом ЛА, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями, традиційними методами оптимізації. Виходячи з практичного застосування, більшість з цих методів базується на методах Понтрягіна Л.С., Беллмана Р., Красовського М.М., Красовського А.А. та їх модифікаціях. Математичні та обчислювальні труднощі їх використання для розв'язку нелінійних задач оптимального керування пов'язані з необхідністю численного інтегрування диференціальних рівнянь руху ЛА, розв'язком важко вирішуваної двоточної крайової задачі або чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь у часткових похідних. У зв'язку з цим розвиток методів розв'язання нелінійних задач оптимального термінального керування рухом літальних апаратів у реальному часі є актуальною науковою проблемою, що має важливе практичне значення для створення перспективних зразків авіаційно-космічної техніки.

Інше актуальне в науковому та практичному плані завдання полягає у розв'язанні задачі багатокритерійної оптимізації термінального керування багатоетапним рухом БЛА, що описується нелінійними диференціальними

рівняннями. Як відомо, процес керування БЛА при виведенні у задані термінальні умови оцінюється багатьма критеріями, залежно від характеристик літального апарату, цільової задачі та функціонування систем апарата на окремих етапах польоту. Ці критерії часто суперечать один одному, поліпшення одного з них неминуче приводить до погіршення інших. Однак не можна нехтувати жодним з них, оскільки тільки у своїй сукупності вони дають повне уявлення про керований багатоетапний рух апарата. Тут необхідно розв'язувати нелінійну задачу оптимізації, що полягає у знаходженні оптимального компромісного розв'язку серед усіх критеріїв якості з урахуванням обмежень на область їх допустимих значень.

Вплив параметричних та зовнішніх збурень потребує неперервної оптимізації у реальному часі керування та траєкторії польоту. Для розв'язання задач синтезу алгоритмів оптимального керування траєкторним рухом ЛА при дії збурень широке розповсюдження останнім часом отримали методи стохастичної оптимізації, теорії адаптивно-робастного керування, нейро-нечіткого керування тощо. Однак, застосування цих підходів ускладнено через відсутність статистичних характеристик випадкових збурень, потребує наявності апріорної інформації про збурювання або реалізує прогнозування динаміки системи без оцінювання діючих збурень, є занадто складним при реалізації в режимі реального часу та ще не знайшло широкого практичного застосування. Високій порядок нелінійних диференціальних рівнянь руху, зміна динамічних характеристик апарата, невизначеність стохастичних характеристик збурень, забезпечення гарантії виведення у задані термінальні умови є факторами об'єктивної складності, які ускладнюють рішення цієї проблеми бортовими засобами апарата у реальному часі. Для вирішення цієї проблеми постає актуальне та наукове завдання розробки гарантовано-адаптивних алгоритмів оптимального керування багатоетапним рухом БЛА, яке спроможне вирішити бортовими засобами апарата у реальному часі.

Відомі також операційні методи розв'язання задач оптимального керування, що дозволяють шляхом переходу з області оригіналів в область зображень з відсутнім часовим аргументом звести складну задачу синтезу алгоритмів оптимального керування до більш простої задачі, яку можна досить легко розв'язати чисельними

методами. Серед таких методів відомий операційний метод диференціальних перетворень (МДП), основи якого розроблені Г.Є. Пуховим. Застосування цього методу до оптимізації керування динамічними об'єктами отримало розвиток у роботах Баранова В.Л., Уруського О.С., Засядько А.А., Симоняна С.О. та ін. Даний підхід має обмеження, властиві усім методам, які використовують ряд Тейлора, а саме: обмеження інтервалу, на якому розглядається задача, радіусом збіжності ряду Тейлора, та необхідність забезпечення потрібної точності розв'язку зменшенням інтервалу або збільшенням кількості дискрет. Крім цього, є й певні складності математичного та обчислювального характеру із знаходженням відображення нелінійних складових диференціальних рівнянь руху динамічних об'єктів. Усунення даних обмежень та складностей з метою забезпечення можливості використання диференціальних перетворень (ДП) для розв'язання нелінійних задач оптимізації багатоетапного траєкторного руху ЛА потребує подальшого розвитку математичного апарату диференціальних перетворень.

Траєкторний рух БЛА при виведенні у задані термінальні умови описується нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, використання яких для оптимізації руху бортовими обчислювальними засобами надто ускладнено внаслідок математичних та обчислювальних складностей розв'язання нелінійних задач оптимізації у реальному часі. Оптимізація за спрощеною моделлю приводить до квазіоптимального керування, що не дозволяє максимально реалізувати енергетичні можливості ЛА.

Таким чином, розвиток теорії та методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів та їх застосування для розв'язання задач оптимізації керування багатоетапним процесом виведення БЛА у задані термінальні умови є актуальною науковою проблемою, що має важливе практичне значення для створення перспективних зразків авіаційно-космічної техніки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним науковим напрямкам розвитку науки і техніки України на період до 2021 року (відповідно до Закону України «Про пріоритетні напрями

інноваційної діяльності в Україні», постанова Кабінету міністрів України № 294 від 12.03.2012р., № 980 від 18.10.2017р. «Про затвердження середньострокових пріоритетних напрямів інноваційної діяльності галузевого рівня на 2012-2016 та 2017-2021 роки) та виконана відповідно до Загальнодержавної цільової науково-технічної космічної програми України на 2013-2017 роки (завдання 5. «Створення космічних комплексів») та Стратегічного плану розвитку авіаційного транспорту України на період до 2020 року, затвердженого розпорядженням Кабінету Міністрів України від 20 жовтня 2010 року №2174-р. Робота відповідає планам НДР Міністерства освіти і науки України в рамках виконання науково-дослідних робіт: НДР №2020-п «Методи та системи керування бездротовими сенсорними мережами із мобільними сенсорами, телекомунікаційними наземними вузлами та аероплатформами у зоні надзвичайної ситуації» (номер державної реєстрації - № 0117U004282); НДР № 50/07.01.05 «Методи оптимального керування складеними динамічними об'єктами» та є частиною досліджень, що проводяться на кафедрі комп'ютерних інформаційних технологій ФКН Навчально-наукового Інституту комп'ютерних інформаційних технологій Національного Авіаційного Університету і спрямовані на подальше удосконалення методів підвищення ефективності керування літальними апаратами.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розвиток методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі диференціальних перетворень та їх застосування до оптимізації багатоступового процесу виведення автономних БЛА у задані термінальні умови.

Поставлена мета дисертаційного дослідження досягається розв'язанням наступних задач:

1. Розвиток методу диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.
2. Розвиток методу диференціальних перетворень для розв'язання крайових задач, що описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями.
3. Розробка методу дискретно-аналітичного відображення у дискретні моделі нелінійних задач термінального виведення ЛА.

4. Розробка методу оптимізації багатоетапного керування процесом термінального виведення ЛА.
5. Розробка методу багатокритерійної оптимізації процесів багатоетапного виведення ЛА у задані термінальні умови.
6. Розробка методу оптимізації гарантовано-адаптивного керування термінальним виведенням ЛА в умовах дії невизначених збурень.
7. Дослідження шляхів практичного застосування розроблених методів оптимізації до оперативного синтезу алгоритмів оптимального багатоетапного керування виведенням АКС на орбіту та БАЛА у задані термінальні умови.

Об'єктом дослідження є процес оптимального керування траєкторним рухом ЛА.

Предметом дослідження є методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі диференціальних перетворень.

Методи дослідження. Проведені в роботі дослідження базуються на застосуванні математичного апарату диференціальних перетворень функцій та рівнянь, використанні методів теорії оптимального керування, диференціальних ігор, математичного моделювання та динаміки польоту літальних апаратів,.

Наукова новизна отриманих результатів

1. Розвинута наукова та методична база для забезпечення розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі математичного апарату диференціальних перетворень. Зокрема, розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних крайових задач та метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень вихідної нелінійної математичної моделі руху ЛА. Відмінність полягає у підвищенні ефективності їх розв'язання завдяки відсутності необхідності чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, можливості отримання розв'язку в аналітичній формі та підвищенні його точності, спрощенні використання диференціальних перетворень для оперативної оптимізації керування процесів.

2. Уперше розроблено модифікований метод диференціальних перетворень для розв'язання класу задач, математичні моделі яких описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, завдяки сумісному використанню методу основних диференціальних перетворень, методу припасовування та застосуванні апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана. Метод відрізняється від відомого розширенням інтервалу розв'язку, спрощенням дискретно-аналітичного відображення рівняння в область зображень та забезпечує зниження верхньої межі оцінки похибки в p^s раз, де p - кількість підінтервалів, на які розбивається заданий інтервал розв'язку, s - кількість врахованих дискрет диференціального спектра.

3. Запропоновано метод розв'язання крайових задач, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. На відміну від відомого, метод ґрунтується на базі модифікованого методу диференціальних перетворень та дозволяє спростити обчислення диференціальних зображень складних нелінійностей задачі, розширити інтервал та підвищити точність розв'язку.

4. Уперше розроблено метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень вихідної нелінійної математичної моделі руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови, що базується на застосування модифікованого методу диференціальних перетворень. Відмінність полягає у спрощенні побудови спектральної моделі траєкторного руху та приведенні її до вигляду, зручного для оптимізації багатоетапного керованого процесу.

5. Отримав подальший розвиток метод диференціальних перетворень в області застосування до розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА. Зокрема, розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних задач оптимального термінального, багатокритерійного та гарантовано-адаптивного керування. Відмінність полягає у використанні модифікованого методу диференціальних перетворень, спрощенні розв'язання нелінійних задач оптимізації керованих процесів, можливості отримання розв'язку в аналітичній формі та здійснювати оперативний синтез керування.

6. Розвинуто чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійних задач оптимізації термінального керування рухом ЛА. На відміну від відомих, метод ґрунтується на удосконаленому дискретно-аналітичному відображенню нелінійних вихідних математичних задач в область зображень, модифікованому методу диференціальних перетворень та враховує багатоетапність траєкторного руху. Метод виключає необхідність чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, дозволяє отримувати алгоритм керування в аналітичному вигляді, здійснювати оперативний синтез керування та проводити моделювання динамічного процесу у реальному часі.

7. Уперше розроблено чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації для розв'язання нелінійних задач синтезу оптимального багатоетапного керування рухом ЛА завдяки використанню удосконаленого дискретно-аналітичного відображення задачі та модифікованого методу диференціальних перетворень, з використанням нелінійної схеми компромісів. На відміну від відомих розроблений метод дає можливість спростити процес знаходження розв'язку нелінійної багатокритерійної задачі оптимального керування та звести проблему векторної оптимізації до розв'язання скінченої системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування.

8. Уперше розроблено метод оптимізації гарантовано-адаптивного багатоетапного керування рухом ЛА при виведенні у задані термінальні умови при впливі невизначених збурень завдяки застосуванню удосконаленого дискретно-аналітичного відображення вихідної нелінійної математичної задачі в область зображень та модифікованого методу диференціальних перетворень. На відміну від відомих запропонований метод використовує диференціально-ігрову модель багатоетапного динамічного процесу, спрощує дискретно-аналітичне відображення вихідної математичної моделі в область зображень, не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, зводить проблему синтезу до розв'язання скінченої системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування та збурень та припускає аналітичний розв'язок задачі.

Практичне значення отриманих результатів

1. Розвиток теорії та методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі диференціальних перетворень дозволяють в реальному часі здійснювати оперативну оптимізацію керування та траєкторії руху і найбільш повно реалізувати максимально можливі льотні характеристики автономних БЛА. Теоретичні основи дисертаційної роботи доведено до рівня алгоритмів оптимізації керування конкретних БЛА на етапі їх виведення у задані термінальні умови, наслідком реалізації котрих є підвищення ефективності їх функціонування.

2. Отримано алгоритм оптимального за витратою палива керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту, що забезпечує приведення АКС в задані термінальні умови та досягнення наприкінці виведення максимальної швидкості.

3. Синтезовано алгоритм оптимального керування рухом БАЛА, що дозволяє здійснити посадку БАЛА з досягненням мінімальної горизонтальної посадкової швидкості апарата.

4. Сформовано алгоритм багатокритерійного оптимального керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту, що забезпечує компромісний розв'язок між термінальними похибками та тепловими навантаженнями на поверхні АКС.

5. Отримано алгоритм багатокритерійного оптимального керування рухом БАЛА на режимі зльоту з виведенням на задану висоту, що дає змогу мінімізувати енергетичні витрати та досягти максимальної горизонтальної швидкості.

6. Синтезовано гарантовано-адаптивний алгоритм керування процесом багатоетапного виведення АКС на орбіту, що володіє властивостями адаптації до дії збурень та забезпечує гарантію виведення в задані термінальні умови при дії обмежених збурень.

7. Сформовано гарантовано-адаптивний алгоритм багатоетапного керування рухом БАЛА на режимі зльоту з виведенням на задану висоту, що володіє

властивостями адаптації до дії збурень та забезпечує гарантію виведення в задані термінальні умови при дії обмежених збурень.

Теоретичні і практичні результати дисертаційної роботи впроваджено на підприємствах: НВП «Хартрон-Аркос», м. Харків, Інституту проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАН України, м. Київ, Національного центру управління та випробувань космічних засобів, м. Київ та у навчальний процес Національного технічного університету України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ при викладанні дисциплін «Спеціальні розділи сучасної теорії автоматичного керування» та «Системи керування літальних апаратів», а також Національного авіаційного університету, що підтверджено відповідними актами. Крім того, результати дисертаційної роботи можуть бути використані при розробці тактико-технічних вимог до систем керування автономних БЛА, синтезу алгоритмів їх функціонування та розрахунків оптимальних траєкторій.

Особистий внесок здобувача. Основні положення та результати дисертації повною мірою висвітлені в опублікованих працях автора [1-48]. Усі результати, подані у дисертаційній роботі, здобувачем отримано особисто. У наукових працях, що опубліковано у співавторстві, автору належать: [1] – метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень вихідних нелінійних математичних моделей траєкторного руху ЛА на основі модифікованого методу диференціальних перетворень; [2] – модифікований метод диференціальних перетворень для розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь, систем рівнянь та нелінійних крайових задач; [3] – оптимальне комбіноване керування автономним аеростатичним літальним апаратом на етапі зльоту; [8] - модифікований метод диференціальних перетворень; [9] – метод оптимізації керування рухом БАЛА на етапі зльоту з підняттям на задану висоту; [10] – дослідження ефективності оптимізації керування БАЛА на етапі зльоту; [11] - математична постановка та метод синтезу алгоритмів багатоетапного керування виведенням авіаційно-космічної системи на орбіту на базі диференціальних перетворень; [15] – метод синтезу гарантовано-адаптивного алгоритму керування процесом виведення АКС на орбіту в умовах дії невизначених збурень; [16] - гарантовано-адаптивний алгоритм

керування багатоступінним траєкторним рухом БАЛА при виведенні на задану висоту в умовах дії невизначених збурень; [18] – метод синтезу оптимального алгоритму керування багатоступінним процесом виведення АКС на орбіту, алгоритм в аналітичному вигляді; [19] – модель оптимізації багатоступінного процесу керування; [20] – розв’язання задачі багатокритерійної оптимізації багатоступінного руху БАЛА; [22] – метод розв’язання нелінійних крайових задач на базі модифікованого методу диференціальних перетворень; [24] - оцінка зверху точності наближеного розв’язку нелінійних крайових задач багатоступінним методом диференціальних перетворень; [27] - математична постановка задачі, метод синтезу та алгоритм оптимального керування посадкою дирижабля; [28] – метод синтезу та алгоритм гарантовано-адаптивного керування багатоступінним траєкторним рухом БАЛА в умовах дії невизначених збурень; [29] - метод багатокритерійної оптимізації процесу керування виведенням транспортно-космічної системи з наносупутниками на орбіту; [30] – метод синтезу та алгоритм оптимального багатоступінного керування АЛА на основі диференціально-ігрового підходу; [31] - синтез алгоритму термінального керування дирижаблем на етапі зльоту; [32] – проект системи керування напівм’яким дирижаблем, що базується на автоматичному керуванні відхиленням вектору тяги; [33] – синтез та дослідження оптимального процесу керування рухом дирижабля з використанням зміщених диференціальних перетворень; [34] - аналіз можливості повітряного старту ракет-носіїв з аеростатичних платформ; [36] – дослідження термінального керування динамічним об’єктом з використанням модифікованого методу диференціальних перетворень; [38] - комбінований алгоритм керування виведенням АКС на орбіту; [40] – метод багатокритерійної оптимізації керування виведенням транспортно-космічної системи на орбіту; [45] – алгоритм багатокритерійної оптимізації процесу керування виведенням АКС з наносупутниками на навколосеземну орбіту; [46] – розділи монографії: аеростатика, стійкість та керованість, пілотування, рівняння руху аеростатичних літальних апаратів; розробка спектральної моделі динаміки польоту дирижабля, проведення математичного моделювання руху дирижабля з керованим вектором тяги; [47] - розділи

навчального посібнику – елементи теорії диференціальних перетворень (пп.1.5-1.7), спектральні моделі руху літальних апаратів (пп. 3.1-3.3), синтез оптимальних алгоритмів керування рухом літальних апаратів (пп. 4,3,4.4), керування рухом літальних апаратів (пп.5.2-5.4); [48] - розділи навчального посібнику - основи аеростатики дирижаблю (пп. 1.1-1.3), стійкість та керованість (пп. 3.1,3.3-3.5), динаміка керованого польоту дирижаблю (пп. 4.2-4.4).

Апробація результатів роботи. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювалися на міжнародних і вітчизняних науково-практичних конференціях: IX міжнародна науково-практична конференція «АВІА-2009» (м. Київ, 2009); XIV, XV міжнародна молодіжна науково-практична конференція “Людина і космос” (м. Дніпропетровськ, 2012, 2013); 7th International airship convention (Friedrichshafen, Germany, 2008); Международная научно-практическая конференция «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании» (г. Одеса, 2009), Международная научно-практическая конференция «Современные направления теоретических и прикладных исследований» (г. Одеса, 2010); 12, 13, 14-а Українська конференція з космічних досліджень (м. Євпаторія, 2012, 2013, 2014), Міжнародна наукова конференція «Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту» (м. Євпаторія, 2010, 2012, 2014); VII міжнародна конференція «Матеріали і покриття в екстремальних умовах: дослідження, застосування, екологічно чисті технології виробництва та утилізації виробів» (м. Кацівелі, 2012); II міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об’єктах критичної інфраструктури» (м. Київ, 2016); 4th International Conference on Methods and Systems of Navigation and Motion Control (Kyiv, 2016), 4th International Conference “Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Development” (Kyiv, 2017).

Публікації. Основні положення та наукові результати дисертації опубліковано у 48 наукових працях, з яких: 4 - у закордонних наукових виданнях, 24 - у наукових фахових виданнях (у т.ч. 11 – одноосібних, 4 - у наукових фахових виданнях, які входять до переліку ВАК України, 20 - у фахових наукових виданнях, які включені

до міжнародних наукометричних баз даних), 1 - монографія, 2 - учбових посібники та 17 - у збірниках матеріалів і праць міжнародних конференцій (у т.ч. 2 - у виданнях, що входять до наукометричної бази Scopus).

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел (293 найменувань, у т.ч. 202 кирилицею та 91 латиницею), додатків, містить 11 таблиць та 24 рисунків. Основний текст роботи викладено на 297 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 342 сторінок.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛА

1.1. Особливості задач оптимального термінального керування рухом ЛА

Розвиток авіаційної, ракетно-космічної та повітроплавної техніки, розробка перспективних технологій її застосування, а також наявність специфічних задач, пов'язаних з виведенням ЛА у задані термінальні умови, ставлять нові проблеми у галузі керування траєкторним рухом автономними безпілотними ЛА різних класів та призначення. Особливостями керування рухом безпілотних літальних апаратів є багаторежимність руху та багатоканальність керування, наявність різноманітних обмежень на керування, режими руху, фазові координати, а також забезпечення достатньо високих вимог до точності виконання заданих кінцевих умов. Ці апарати відносяться до класу багаторежимних літальних апаратів з характеристиками, які змінюються під час функціонування.

Для всіх режимів польоту БЛА необхідно розв'язувати задачі формування та реалізації багатоетапного керування з урахуванням виникаючих в польоті зовнішніх та внутрішніх збурень з невизначеними статистичними характеристиками.

Проблема керування траєкторним рухом ЛА є однією з актуальних та до кінця не досліджених проблем динаміки та керування. Труднощі її розв'язання пов'язані з їх можливостями, реалізація яких багато в чому залежить від систем керування, функціонуючих в умовах дії збурень за чисельних й різноманітних обмежень. Існуючі методи синтезу та алгоритми автоматичного керування не дають змоги у повній мірі ефективно реалізовувати льотні можливості ЛА. Їх застосування до розв'язання траєкторних задач призводить до появи ускладнень або неможливості формування програмного (номінального) керування з урахуванням низки важливих обмежень. Під час командного керування при дії апріорно невизначених збурень або при виникненні позаштатної ситуації ці методи є малоефективними через недостатню універсальність.

Розв'язання проблеми керування ЛА включає дослідження різноманітних підходів до обрання методів синтезу алгоритмів траєкторного керування. Удосконалення наземних та бортових обчислювальних систем дає змогу застосовувати при розв'язанні задач керування траєкторіями ЛА універсальні чисельні методи, на основі яких можлива розробка ефективних алгоритмів формування керування багатоетапними траєкторіями ЛА.

Алгоритмічна ієрархія, структурування та програмне забезпечення систем автоматичного керування багаторежимним ЛА мають свої особливості. Зазначене визначає необхідність подальшого розвитку теоретичних та прикладних розробок з керування ЛА, а також їх модернізацію завдяки застосуванню нестандартних методів розв'язання окремих задач та проблеми в цілому.

Більш широке використання можливостей БЛА забезпечує розв'язання задачі формування керування їх рухом як задачі оптимізації. При цьому, критеріями оптимальності можуть бути тривалість маневру, маса корисного навантаження, кінцеві значення фазових координат та параметрів траєкторії, пов'язаних з режимами руху тощо. Особливе місце серед таких задач займають задачі оптимального термінального керування, які полягають у приведенні БЛА з необхідною точністю та якістю у кінцевий (термінальний стан) із заданими значеннями параметрів руху. При цьому, повинні виконуватися різні цільові обмеження, які покладаються на параметри руху та керування. До таких задач відносяться: виведення ракет-носіїв (РН) космічного призначення або АКС з космічним апаратом на задану орбіту, наведення ракети в задану точку, посадка спускаємого апарату, дозаправка літака у повітрі, посадка літака в задану точку злітно-посадкової смуги або виведення літака в задану точку простору для виконання спеціальних задач, зліт безпілотного АЛА з виведенням на задану висоту, посадка безпілотного АЛА із забезпеченням мінімальної посадкової швидкості.

У даній дисертації, як об'єкти керування, в межах широкого класу багаторежимних ЛА, розглядаються: високошвидкісний БЛА - АКС на етапі виведення на задану орбіту та низькошвидкісний БРЛА - безпілотний АЛА на етапах зльоту з підняттям на задану висоту та посадки.

1.1.1. Трасекторії виведення АКС на орбіту

Одними з найбільш перспективних транспортних засобів доставки вантажів у космос вважають АКС, які дають змогу не тільки істотно зменшити експлуатаційні витрати, забезпечити високу оперативність, надійність та безпеку, але також усувають, хоча й частково, два основних недоліки «класичних» РН: одноразовість і необхідність складної інфраструктури (стартових комплексів, відчужених районів падіння відокремлюючих частин РН тощо).

В АКС, які зараз експлуатуються («Пегас», США), та проектах АКС України («Світязь», «Оріль», «Спейс-Кліпер»), США («SpaceshipOne», «SpaceshipTwo», «Stratolaunch Systems», «ALSV»), Росії («МАКС», «Аэрокосмос», «Воздушный старт»), Німеччини («Зінгер», «Діана», DSL), Японії («ALV», «WHAL»), Англії («Хотол») та інших країн особлива увага приділяється розробці двоступінчастих АКС горизонтального старту, які використовують як першу ступінь дозвуковий або гіперзвуковий літак-носіє (ЛН) для забезпечення необхідних параметрів польоту, за яких орбітальна ступінь (ОС), що стартує з ЛН, виводить на орбіту необхідне корисне навантаження [1].

Можливість використання аеростатичних платформ для повітряного старту ракет-носієв розглядається порівняно нещодавно. Незважаючи на те, що, за оцінками фахівців, вартість пуску ракети-носія з аеростатичної платформи не набагато дешевше пуску з літака-носія, вони є більш екологічними. Цей аргумент у майбутньому може стати визначальним фактором [2,3].

Реалізація науково-технічного та промислового потенціалу, що наявний в Україні в галузі авіаційної (унікальні транспортні літаки Ан-124 та Ан-225) та ракетно-космічної техніки (багаторічний досвід створення, виготовлення та експлуатації космічних та бойових ракетних комплексів), забезпечення незалежного та надійного виходу в космос в національних інтересах й на світовий ринок космічних комерційних послуг за відсутності власного космодрому, а також врахування динаміки розвитку ринку космічних послуг та світових тенденцій до зменшення вартості виведення вантажів у космос актуалізують необхідність

створення в Україні двоступінчастої АКС горизонтального старту [4]. Враховуючи важливість та перспективність даного напрямку для України, як космічної держави, пророблення питань створення АКС розглядалося у рамках пріоритетних задач Загальнодержавної цільової науково-технічної космічної програми України на 2013-2017 роки (завдання 5 «Створення космічних комплексів»), Затверджена Законом України №439-VII від 05.09.2013.

Однією з найскладніших і актуальних у науковому та практичному відношенні проблем, що виникають при створенні АКС, є розробка високоточної та надійної системи керування польотом. Найбільш відповідальним етапом польоту АКС є етап виведення орбітального ступеня АКС на орбіту після його відокремлення від ЛН.

Розглянемо багатетапну траєкторію руху АКС «Пегас», що експлуатується сьогодні в США, при виведенні на орбіту висотою $H = 740$ км [1]. РН «Пегас» з корисним навантаженням підвішується під фюзеляжем літака «Локхід L-1011». Під час польоту з пульта керування літаком вводяться польотні дані до системи наведення РН. Відділення ракети від літака відбувається на висоті 12,2 км за швидкості, що відповідає $M = 0,8$ (244 м/с). Протягом 5 с вона здійснює вільне падіння, і на відстані приблизно 100 м нижче літака вмикаються двигуни першого ступеня. Після їх запуску ОС здійснює політ із поступовим зменшенням кута тангажа з тим, щоб на момент досягнення швидкості, що відповідає $\approx 0,9 M$, програмний кут атаки дорівнював нулеві. Після досягнення швидкості $V \geq 1,2 M$ органи керування поступово збільшують програмний кут тангажа з тим, щоб на момент завершення роботи двигунової установки 1-го ступеня ОС досягла висоти, необхідної для запуску двигунів 2-го ступеня. За 2...3 секунди до розділення 1-го та 2-го ступенів ОС функції керування передаються носовим кермам, що дає змогу забезпечити неперервне керування на ділянці розділення. До моменту завершення його роботи ($t = 76$ с) ракета досягає висоти 59,6 км та швидкості $M = 7,9$, після чого здійснюється розділення 1-го та 2-го ступеня. До запуску двигунів другого ступеня політ ракети продовжується під керуванням газоструминної реактивної системи. Запуск двигунів другого ступеня відбувається на 95,3 с польоту на висоті 87,5 км. На 112 с польоту на висоті 112 км та швидкості 2,77 км/с відбувається скидання

обтічника корисного навантаження. Після завершення роботи двигунів другого ступеня та розділення 2-го та 3-го ступенів йде балістична фаза польоту тривалістю 478 с, наприкінці якої носій виходить на висоту 740 км за швидкості 4,56 км/с та запускаються двигуни 3-го ступеня. Робота двигунів припиняється на 660 с, відокремлюється та виводиться на задану орбіту космічний апарат (Рис. 1.1).

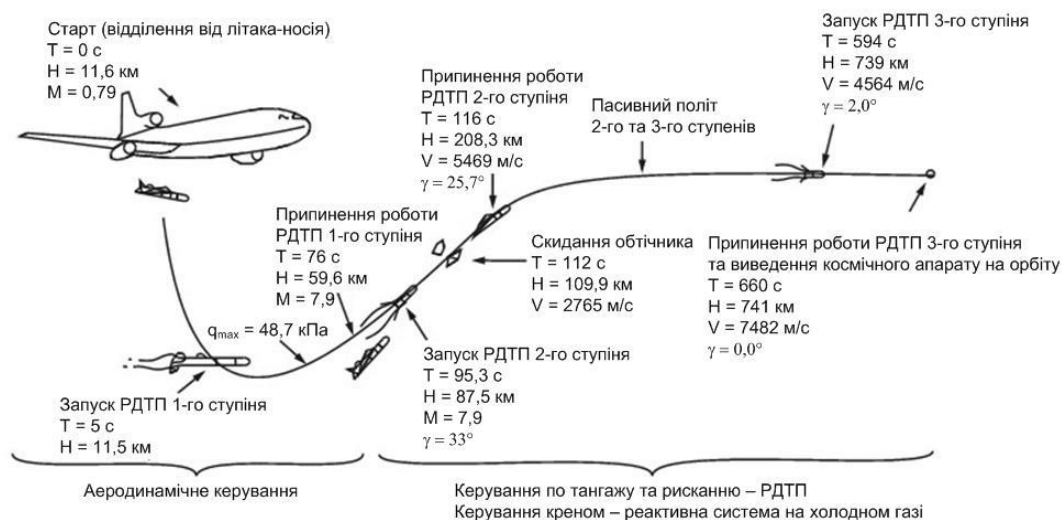


Рис. 1.1. Багатоетапна траєкторія виведення АКС «Пегас» на орбіту

Таким чином, процес виведення АКС на орбіту є багатоетапним та характеризується різними режимами роботи двигунової установки ОС та значними змінами маси ОС в моменти відокремлення його ступенів та скидання головного обтічника. Особливістю даного процесу є те, що на усіх етапах виведення політ ОС відбувається з працюючими двигунами, які забезпечують розгін ОС та досягнення ним заданих параметрів руху наприкінці кожного етапу виведення. При цьому, на кожному етапі польоту необхідно враховувати можливість виникнення особливих ситуацій, які можуть бути викликані відмовами маршових двигунів ОС. Іншою особливістю є наявність обмежень на припустиму сумарну піднімальну силу, швидкісний напір та припустиме максимальне поздовжнє перевантаження. Необхідно також підтримувати наскільки можливо малими теплові та аеродинамічні навантаження. Найбільш жорсткими є вимоги до точності приведення АКС у задані термінальні умови в момент закінчення активної ділянки польоту з урахуванням обмеженого запасу палива. Дана точність у значній мірі впливає на точність виходу

на задану орбіту. Ці особливості обумовлюють високі вимоги до якості системи керування ОС, яка повинна враховувати дію збурень навколишнього середовища, зміну параметрів АКС, шумів у вимірювальних трактах, виникнення аварійних та позаштатних ситуацій.

1.1.2. Траєкторії БАЛА на етапах зльоту та посадки

Особливістю сучасного етапу розвитку БАЛА є прагнення в багатьох країнах світу до створення безпілотних, у тому числі автономних, БАЛА на базі дирижаблів для розв'язання задач: а) проведення багатофункціонального нагляду за наземними, морськими та повітряними цілями, б) контролю повітряного простору на великій відстані, радіолокаційне виявлення маловисотних цілей, в) моніторингу екологічного стану навколишнього середовища (оцінка міри забруднення атмосфери промислових зон, акваторій портів, зон із підвищеною радіацією тощо), г) оперативного контролю за станом нафтопроводів, газопроводів, будівель, споруд, мостів, швидкісних доріг, д) прогнозу та нагляду за природними явищами (урагани, лісові пожежі, снігові лавини, виверження вулканів тощо), е) телекомунікацій та зв'язку тощо.

Основними причинами цього, незважаючи на програш традиційним ЛА у швидкості, є низка переваг цього виду транспорту над апаратами важче повітря, а саме:

- Можливість тривалого неперервного функціонування.
- Безпека за відмови двигунів та системи керування.
- Відсутність необхідності в аеродромах із злітно-посадковими смугами.
- Значна вантажопід'ємність.
- Можливість функціонування в умовах, що не допускають наявності пілотів на борту апарата.
- Незначний вплив на навколишнє середовище.
- Значно менша вартість створення та експлуатації.

Сьогодні у багатьох країнах світу ведуться розробки проектів дирижаблів, у тому числі з автоматичною системою керування для забезпечення руху уздовж заданої траєкторії: «LEMV», «Blue Devil 2» (США), Karma (Франція), «AURORA» (Франція, Португалія, Бразилія), «KARI» (Корея), «Стерх», «Сокол» (Росія) тощо [5-9]. Існує також можливість застосування концепції зменшеної статичної стійкості під час проектування дирижабля, що приводить до поліпшення льотних характеристик апарату, однак потребує наявності автоматичної системи керування [10].

Режими злету та посадки є найбільш аварійними та складними при керуванні БАЛА через недостатню ефективність його аеродинамічного керування на малих швидкостях польоту, коли аеродинамічні керма та поверхні є практично не ефективними. Ці режими також характеризуються істотною зміною аеродинамічних характеристик дирижабля при русі поблизу землі та сильним впливом вітрових збурень тощо. Для вирішення цієї проблеми на АЛА останнього покоління, у тому числі на безпілотних АЛА, використовують поворотні гвинти, або їх реверсивні варіанти, тобто силові установки з керованим вектором тяги.

Найскладніша задача у науковому та практичному відношенні при створенні безпілотних АЛА полягає у розробці системи автоматичного керування польотом, яка повинна забезпечити незалежний та точний політ за заданою траєкторією, у тому числі оперативне виведення апарату за короткий час на задану висоту за мінімального втручання людини (екстрена передислокація або екстрений зліт/посадка тощо).

Задача керування БАЛА на режимах злету/посадки полягає у наступному. На режимі злету – організація руху з точки злету з підняттям на задану висоту вздовж програмної траєкторії з придушенням зовнішніх та параметричних збурень і досягненням наприкінці етапу заданої швидкості та висоти. На режимі посадки – організація руху вздовж програмної траєкторії посадки з придушенням зовнішніх та параметричних збурень і досягненням наприкінці етапу мінімальної посадкової швидкості.

В роботах [11,12] проведено дослідження злету та посадки дирижабля з керованим вектором тяги. Показано, що на режимі злету доцільне таке багатоетапне керування вектором тяги, за яким дирижабль здійснює практично вертикальний зліт з наступним переходом до крейсерського польоту. У цьому випадку, вектор тяги першочергово відхиляється на 90° для здійснення вертикального злету та потім відхиляється вперед на перехідному режимі для забезпечення необхідної крейсерської швидкості. Цим досягається короткий пробіг по землі або злет без пробігу. На рис. 1.2 показана траєкторія злету дирижабля при здійсненні такої програми зміни вектора тяги порівняно із звичайним злетом. Необхідно також враховувати, що частина вертикальної складової вектора тяги використовується для компенсації перевантаження апарата.

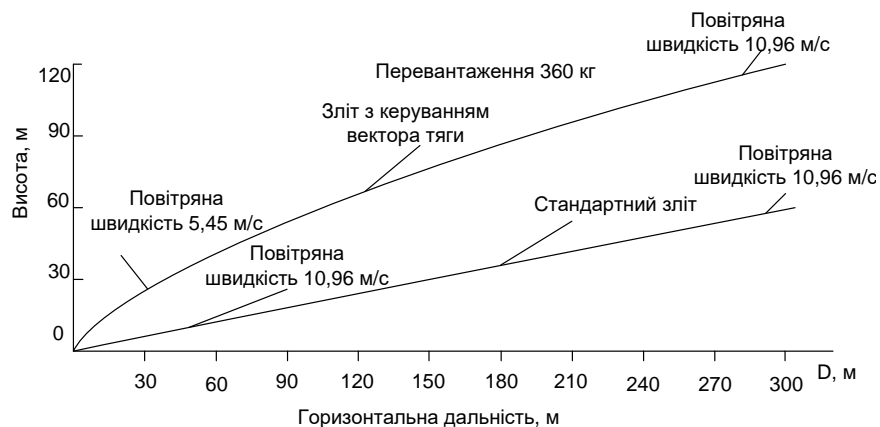


Рис. 1.2. Траєкторія злету дирижабля

Багатоетапне керування вектором тяги дає змогу здійснювати маневрування дирижабля також на етапі заходу на посадку, зниження, а також досягати крутих або пологих траєкторій польоту при приземленні. Типова траєкторія посадки показана на рис. 1.3.

Таким чином, особливість процесу керування рухом БАЛА на злетно-посадкових режимах полягає у тому, що рух апарата на цих етапах польоту є багатоетапним та характеризується різними режимами керування вектором тяги двигунів залежно від поставленої задачі. При цьому, необхідно також враховувати можливі зміни траєкторії польоту при подаланні перешкод на землі, практично стрибкоподібною зміною маси апарата під час скидання баласту (у випадку

екстремного зльоту), можливою відмовою двигунів, істотного впливу вітрових та параметричних збурень при русі поблизу поверхні землі.

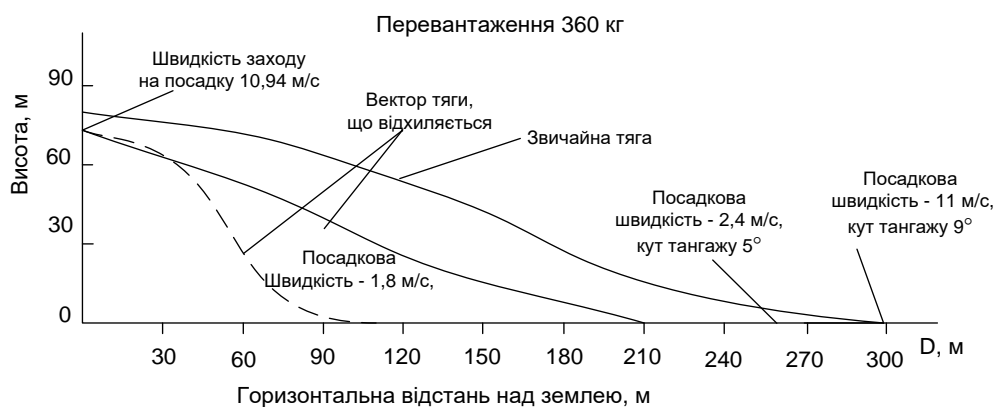


Рис. 1.3. Траєкторія посадки дирижабля

Іншою особливістю багатоетапного руху БАЛА є наявність обмежень на параметри руху під час виконання злету та посадки. Так, відповідно до критеріїв льотної придатності для дирижаблів [13-15], для кожного типу АЛА повинна бути визначена необхідна злітна дистанція для здійснення злету та набору висоти над перешкодою висотою 15,2 м. При досягненні цієї висоти дирижабль повинен розвинути необхідну швидкість набору висоти. Керування за висотою та піднімальною силою здійснюється завдяки зміні кута тангажа або кута відхилення вектора тяги двигунів. Безпосередньо посадка АЛА починається з висоти 15,2 м над посадковою поверхнею, при досягненні якої АЛА має досягти рекомендовану вертикальну швидкість зниження, а у момент торкання посадковим шасі землі АЛА повинен мати мінімальні горизонтальну посадкову швидкість та вертикальну швидкість зниження. На процес посадки АЛА можуть впливати багато факторів, таких як: доступне місце для посадки, наявність перешкод, швидкість вітру, статична перевантаженість апарата, швидкість зниження та посадкова швидкість, використання вектора тяги, що відхиляється тощо. Багато з цих факторів можуть впливати один на одний і тим самим збільшувати або зменшувати час посадки. Це призводить до необхідності автоматизації режимів злету та посадки із забезпеченням належного рівня надійності, безпеки та якості керування.

1.2. Задача та принципи термінального керування

Задачі виведення АКС на орбіту та БАЛА на задану висоту є задачами термінального керування [16,17], основна вимога яких полягає у приведенні з максимальною точністю об'єкта у заданий кінцевий стан за обмежений час за номінальних умов польоту з урахуванням наявних ресурсів та запасів палива, а також задоволення різним обмеженням, які покладаються на параметри руху та керування об'єкта.

Найкраще використання функціональних можливостей БЛА забезпечує розв'язання задачі формування керування рухом як задачі оптимізації. Це дозволяє також оперативно виконувати поставлене завдання, сприяє підвищенню надійності польоту внаслідок збільшення стійкості алгоритмів виведення до зовнішніх збурень.

Оптимальна програма може бути сформована шляхом розв'язання відповідної варіаційної задачі. Розв'язання цієї задачі у реальному часі на борту ЛА потребує значного об'єму обчислень. Незважаючи на те, що сучасні інтелектуальні технології дають змогу реалізовувати на борту алгоритми керування, які базуються на використанні складних математичних моделей великої розмірності, на практиці це, як правило, не забезпечує суворо оптимального керування ЛА. Це пов'язано з тим, що припущення, які вимушені приймати в математичних моделях, а також методичні похибки під час інтегрування рівнянь руху, фактично можуть звести на нівець усі зусилля з оптимізації керування. Алгоритмічна ієрархія, структурування та програмне забезпечення системи автоматичного керування багаторежимного ЛА мають свої особливості. Зазначені фактори визначають необхідність подальшого розвитку теоретичних та практичних напрацювань з керування багаторежимними ЛА, у тому числі з розвитку нових підходів до розв'язання задачі оптимізації багатоетапного керування траєкторіями ЛА.

З метою уникнення обчислювальних труднощів, синтез системи керування ЛА традиційно здійснюється у два етапи [18]. На першому етапі формується номінальне оптимальне керування та відповідна оптимальна програмна траєкторія руху, які можуть бути визначені до польоту. Відповідна задача розв'язується з умови

мінімуму критерію оптимальності, яким можуть бути кінцеві значення часу маневра, маси апарата, фазових координат та їх відхилення від потрібних значень, а також параметри траєкторії, що пов'язані з режимами руху, та виконання заданих обмежень при досягненні заданого кінцевого стану з необхідною точністю.

На другому етапі формується командне керування шляхом розв'язання задачі синтезу системи керування зі зворотним зв'язком, що реалізує рух ЛА до кінцевого стану при впливі зовнішніх та параметричних збурень. Сформована на першому етапі номінальна оптимальна програма керування використовується для побудови алгоритмів керування на борту ЛА. Алгоритм керування збуреним рухом знаходиться з умов мінімуму термінального критерію – відхилення термінальних умов від потрібних значень, до якого для покращення стійкості може додаватися складова критерію, що характеризує якість керування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій показує, що на сучасном етапі система керування ЛА будується на базі двох класичних принципів термінального керування – принципів «жорстких» та «гнучких» траєкторій [19,20].

Принцип «жорстких» траєкторій реалізує програмно-позиційну стратегію керування, відповідає відомій концепції «незбуреного-збуреного руху» Ляпунова-Летова та полягає у стабілізації наперед розрахованої «жорсткої» програмної (номінальної) траєкторії руху $x^*(t)$, що забезпечує досягнення термінальної цілі керування за «ідеальних умов» руху. Тут алгоритм керування $u(t)$ складається з програмної складової $u^*(t)$, що реалізує необхідний незбурений рух $x^*(t)$, та стабілізуючої складової $\Delta u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + \Delta u(t), \\ x(t) &= x^*(t) + \Delta x(t), \end{aligned}$$

де $\Delta x(t)$ - відхилення фактичної траєкторії $x(t)$ від потрібної $x^*(t)$, що викликане дією неконтролюємих збурюючих факторів. Даний принцип був основним у колишніх аналогових систем керування та «утримував» ЛА в околі номінальної траєкторії, всередині так званої «трубки» збурених траєкторій (рис.1.4). Цим вдавалося гарантувати виконання термінальних умов руху.



Рис.1.4. Схема траєкторного руху ЛА в атмосфері з відслідковуванням номінальної траєкторії

Аналіз стратегій керування на базі концепції «незбуреного-збуреного руху» показує, що побудова системи керування на основі принципу «жорстких» траєкторій виправдана лише за малих відхилень збуреної траєкторії від номінальної та є нерациональним при значних збурень, що характерні для траєкторного руху ЛА в атмосфері, тобто як при виведенні АКС на орбіту, так й злетно-посадкових режимах БАЛА.

Сьогодні використання бортової цифрової обчислювальної машини зі значними логічними та обчислювальними можливостями дає змогу реалізувати більш ефективні та раціональні алгоритми наведення з використанням принципу «гнучких» траєкторій.

Принцип «гнучких» траєкторій реалізує чисто програмну стратегію керування та полягає у реалізації «гнучкої» програмної траєкторії, що постійно поновлюється (багатократно перераховується) із заданою періодичністю під час руху, яка забезпечує виконання заданої термінальної цілі керування у «реальних умовах» із стану, що відповідає моменту її оновлення.

Згідно термінології М.М. Моїсеєва спосіб керування за принципом «жорстких» траєкторій називається корекцією за заданою програмою, а спосіб керування за принципом «гнучких» траєкторій – корекцією за кінцевим станом.

Суть принципу «гнучких» траєкторій полягає у відмові від прив'язки керованого руху до заздалегідь запланованої (номінальної) траєкторії та формуванні, за необхідності, більш вигідних траєкторій руху до цільового стану, виходячи з фактичних умов руху.

Можливі наступні три способи реалізації цього принципу [19]:

1. Процес керування розбивається на часові цикли, на кожному з яких розраховується бажана траєкторія руху, виходячи з вимірювальної інформації щодо фактичного стану об'єкта на початку цього циклу з урахуванням термінальних умов. Під час циклу, розрахункова (планова) траєкторія стабілізується.
2. Перехід на нову планову траєкторію здійснюється за наявності збурень розрахункової траєкторії, що перевищують заданий поріг.
3. Планування траєкторії здійснюється для кожного стану об'єкта. Цей спосіб можна інтерпретувати як принцип «розморожування» початкових умов. Суть цього принципу полягає у побудові алгоритму керування для фіксованих початкового моменту часу t_0 та початкового стану $x(t_0) = x_0$:

$$u = h(t_0, x_0),$$

та у подальшому – у заміні початкових умов поточними:

$$u(t) = h[t, x(t)].$$

«Гнучкі» траєкторії дають змогу задовольнити задані вимоги та обмеження без повернення ЛА на номінальну траєкторію польоту. Якщо під дією збурень ЛА відхилився від номінальної траєкторії, але опинився на іншій, яка задовольняє заданим термінальним умовам та прийнятним обмеженням, то немає необхідності повертати ЛА на номінальну траєкторію і можна продовжувати керування за поточною траєкторією. Якщо ж збурена траєкторія не задовольняє термінальним умовам та прийнятним обмеженням, то енергетично вигідніше перевести ЛА на найближчу траєкторію, що задовольняє цим вимогам, ніж виконувати повернення її на номінальну траєкторію (рис.1.5).



Рис.1.5. Схема траєкторного руху ЛА в атмосфері з термінальним керуванням

Стратегія керування за допомогою «гнучких» траєкторій широко використовується при керуванні траєкторіями балістичних ракет, космічних ракет-носіїв, літаків [20]. Ця стратегія, у подальшому, буде застосовуватися при синтезі систем оптимального керування багаторежимними ЛА: під час виведення АКС на орбіту та злету АЛА з виведенням на задану висоту або посадки.

Така гнучкість наведення, безумовно, підвищує вимоги до системи керування, так як необхідно спочатку розв'язати навігаційну задачу з визначення вектора стану ЛА (включаючи координати, компоненти швидкості та кутову орієнтацію), а потім обрати параметри алгоритму наведення, які забезпечують виконання необхідних термінальних умов. Для цього необхідний прогноз частини траєкторії, що залишилася та розв'язання двокрапкової крайової задачі.

Існують три способи прогнозу траєкторії руху, що залишилася [19]. Перший спосіб передбачає використання *кінцевих функцій* (інтегралів спрощених рівнянь руху) для прогнозу траєкторії, що залишилася. Параметри інтегралів звичайно відповідають номінальній траєкторії руху. Використання кінцевих функцій знижує вимоги до бортової цифрової обчислювальної машини (БЦОМ) та дає змогу скоротити час розрахунків. Точність прогнозованої траєкторії залежить від її близькості до номінальної траєкторії. Цей факт знижує гнучкість алгоритму виведення.

Другий спосіб засновано на *чисельному прогнозі* траєкторії, що залишилася. Цей спосіб збільшує вимоги до швидкодії БЦОМ, але є більш гнучким, так як не залежить від номінальної траєкторії. Для чисельного прогнозу необхідне знання закону опорного керування. Раціональна структура закону керування повинна встановлюватися на стадії розробки алгоритму виведення, часто за допомогою аналізу спрощеної модельної задачі.

Третій спосіб є комбінацією аналітичного та чисельного прогнозу траєкторії, що залишилася. Одна частина може обчислюватися чисельно, а друга частина – за допомогою аналітичних формул. Цей змішаний спосіб є компромісом між точністю траєкторії, що прогнозується та вимог до БЦОМ.

Усі задані обмеження на параметри руху ЛА (наприклад, за перевантаженням, кутом орієнтації, нагрівання поверхні тощо) повинні бути враховані в прогнозі траєкторії, що залишилася.

1.3. Порівняльний аналіз методів термінального керування АКС

На сьогодні розроблено низку стратегій термінального керування ЛА при виведенні в задану точку простору та відповідних методів синтезу, що уникають прямих методів розв'язання варіаційних задач у реальному масштабі часу, у тому числі методи адаптивного, оптимального, гарантовано-адаптивного, багатокритерійного, робастного, інтелектуального керування, теорії систем зі зміною структурою тощо. Результати, які отримані в межах вказаних напрямків для АКС, подано, головним чином, у спеціальній літературі та мало відомі широкому колу спеціалістів. До достатньо близьких до проблеми керування на різних режимах польоту можна віднести розв'язки, які розглядалися під час розробки автономної системи наведення для повітряно-космічних апаратів в межах програм NASP [21], SLI, X-33, Eclipse [22], Спейс-Шаттл [23], а також ті, що реалізовані в системі стійкості та керування повітряно-космічного літака «Буран» [24].

Нижче наведено порівняльний аналіз відомих стратегій та методів синтезу систем термінального керування АКС.

1.3.1. Адаптивне керування

Проектування АКС та синтез його системи керування проводять з урахуванням вимог, що пред'являються до його динамічних характеристик, до яких відносяться стійкість та якість перехідних процесів в системах стабілізації та керування. Широкий діапазон змін умов польоту, пов'язаних зі зміною висоти та швидкості АКС, його маси та центрування, характеристик атмосфери з великим ступенем невизначеності, складна математична модель та велика кількість експериментально визначених параметрів, забезпечення високих динамічних властивостей при значній параметричній невизначеності призводить до необхідності застосування адаптивних систем керування АКС на етапі виведення на орбіту. Вибраний метод адаптації повинен задовольняти суперечним вимогам до швидкодії процесу адаптації та якості процесу в системі в умовах недостатку поточної інформації щодо параметрів руху ЛА.

Значний внесок у розвиток теорії та практики оптимальних адаптивних систем керування внесли роботи Боднера В.А., Букова В.М., Красовського О.А., Лєтова О.М., Солодовникова В.В., Красовського М.М., Уткіна В.І, Беллмана Р.Е., Понтрягіна Л.С., Калмана Р.Е., Фельдбаумана А.А., Кухтенко О.І., Фрадкова О.Л., Якубовича В.А., Б. Андерсена, П. Ейкхоппа, Н. Коуена, К. Спіді, Х. Халіла, Андрієвського Б.Р., Петрова Б.П, Рутковського В.Ю., Ципкіна Я.З., Ємельянова В.М., Кунцевича В.М., Р. Бітміда, Р. Брауна, К. Джонсона та ін.

Розглянемо та проаналізуємо основні напрями досліджень адаптивних систем керування ЛА в умовах невизначеності. На сьогодні розроблено способи адаптивного керування багаторежимними ЛА, методи синтезу адаптивних систем керування та відповідні пристрій для їх реалізації [25-27]. За рівнем формалізації апріорної невизначеності адаптивні системи поділяються на два класи [28].

До першого класу відносяться адаптивні системи з параметричною оптимізацією, за якої апріорна невизначеність полягає у недостатньому знанні параметрів керованого об'єкта. Другий клас складають адаптивні системи з непараметричною адаптацією, за якої апріорна невизначеність не пов'язана

безпосередньо з будь-якими параметрами. Для задач керування польотом багаторежимних ЛА ближче за постановкою стоять задачі параметричної адаптації, враховуючи те, що керовані процеси вивчені настільки добре, що дають змогу апріорно отримати структуру рівнянь руху.

За організацією процесу адаптації методи, що використовуються, поділяються на пошукові, для яких характерні процеси ітеративного руху для досягнення необхідної якості керування, та безпошукові адаптивні системи, які базуються на використанні деяких необхідних (достатніх) умов необхідної якості керування.

1.3.1.1. Пошукові адаптивні методи

В *пошукових адаптивних методах* формується деякий показник якості системи, що є доступним до вимірювання та який володіє екстремальною характеристикою залежно від параметрів регулятора, що налаштовуються. Положення екстремальної точки не відоме та, більш того, змінюється разом із зміною математичної моделі об'єкта та зовнішнього впливу на систему керування. Задача зводиться до пошуку екстремальної точки показника якості системи на множині параметрів, що налаштовуються, для чого в системі організовується процес пошуку, який, як правило, зводиться до незначних пошукових змін параметрів, що налаштовуються [29]. В роботі [30] наведено теоретичні обґрунтування схеми застосування пошукових адаптивних регуляторів для динамічно нелінійних систем, де як основний апарат дослідження використовуються методи усереднення, а як збудливий сигнал, аналог пробних впливів, використовується гармонічний сигнал малої амплітуди. Використання самоорганізуючого оптимального регулятора з екстраполяцією як пробний вплив у структурі адаптивного регулятора, що забезпечує як параметричну, так і структурну адаптивність системи, досліджено у праці [31]. Тут пробним впливом є циклічність елементів коваріаційної матриці фільтра Калмана-Бюсі.

В системах керування ЛА пошукові адаптивні системи практично не застосовуються, так як не завжди вдається вказати функцію якості, що володіє

екстремальною характеристикою; якщо ж така функція все ж існує, то не завжди, вірніше, як правило, вона не доступна прямому вимірюванню; якщо і цю перепону вдається обійти, то не завжди вдається сформулювати процес пошуку і, нарешті, якщо і це вдалося, то не завжди адаптивна пошукова система встигає за зміщенням екстремуму з часом, причому динамічні характеристики роботи такої адаптивної пошукової системи істотно залежать від ступеня її інерційності та від рівня випадкових завад та збурень.

1.3.1.2. Безпошукові адаптивні методи

Безпошукові адаптивні методи засновані на спробі використати позитивні властивості принципу зворотного зв'язку: на відміну від пошукових, в них не розшукується, а апріорно задається показник якості керування, який ми бажали б мати незмінним або який змінюється бажаним передбачуваним чином за рахунок цілеспрямованої зміни параметрів або структури регулятора у випадку непередбачуваної зміни математичної моделі об'єкта та зовнішніх впливів. Як такі показники, повинні виступати характеристики системи керування, які визначають її функціональну працездатність. Таким показником може бути один, істотний, наприклад, частотна характеристика замкненої системи, або ціла множина одночасно спостерігаємих показників, наприклад, інваріантність відносно певного збурення, автономність або, навпаки, заданий ступень взаємозв'язку окремих каналів багатозв'язаної системи, операторна визначеність тощо [32]. У цьому випадку, знаючи бажаний показник роботи системи керування та вимірювачі реальний поточний показник, можна їх порівняти, ввести міру їх розузгодження і, як й у принципі зворотного зв'язку, зводити цю міру розузгодження до нуля або мінімально припустимої величини.

Для задач керування багаторежимними ЛА більш доцільним є використання безпошукових систем з параметричною адаптацією [33]. Під час їх розробки можуть застосовуватися схеми прямого або непрямого адаптивного керування.

У схемах прямого адаптивного керування використовується еталонна модель у вигляді динамічної ланки, яка має задані динамічні характеристики ЛА. Під час роботи системи оцінюються часові або частотні характеристики моделі та системи або похибка розузгодження рухів основного контура системи та еталонної моделі. На основі цих даних коефіцієнти основного контура перестроюються так, щоб звести розузгодження до припустимо малої величини. Прикладом реалізації такої системи служить система керування, що описана у праці [34].

В системах непрямого адаптивного керування попередньо відбувається ідентифікація об'єкта, а потім за інформацією про параметри об'єкта обчислюються коефіцієнти регулятора. Інформацію про параметри математичної моделі ЛА отримують з аеродинамічних продувок та уточнюють за результатами льотних випробувань. У роботах з дослідження питань оптимізації функціонування динамічних об'єктів керування в умовах невизначеності з використанням процесів ідентифікації, частіше використовуються методи спектральної ідентифікації [35], аналітичного синтезу регуляторів за критерієм узагальненої роботи [36], динамічного програмування в поєднанні з імовірнісним оцінюванням станів об'єкта керування [37]. Методи налаштування регулятора, засновані на адаптивній ідентифікації, полегшують можливість розв'язання оптимізаційних задач, але зазвичай пов'язані з більш тривалим періодом налаштування. Недоліком відомих методів адаптації є складність (високий порядок) запропонованих алгоритмів, що ускладнює їх реалізацію та знижує завадостійкість. На подолання цього недоліку спрямований метод шунтування [38], що ґрунтується на використанні паралельного компенсатора (шунтуючого звена або «шунта»). Основна ідея методу полягає у забезпеченні властивості строгої мінімально-фазовості розширеного об'єкта (об'єкт+ компенсатор).

У роботі [39] для розв'язання задачі керування польотом багаторежимного ЛА запропоновано підхід, що базується на сумісному використанні методу шунтування, ковзних режимів та процедури ідентифікації на ковзних режимах [40]. Запропонований підхід дає змогу істотно зменшити вимоги до повноти поточної інформації про поведінку об'єкта, забезпечує високу швидкодію при парируванні

параметричних збурень. Комбінований алгоритм адаптації забезпечує задані динамічні властивості замкненої системи при зміні параметрів об'єкта керування в широких межах.

Останім часом значного теоретичного розвитку та практичного застосування набули системи керування із змінною структурою [41]. Основна ідея побудови таких систем полягає у використанні законів керування, що переключаються (відповідають різним структурам замкненої системи). Переключення здійснюється на основі поточної інформації щодо стану об'єкта керування відповідно до вибраної функції переключення. Це значно розширює можливості керування завдяки використанню корисних властивостей кожної з структур та дозволяє отримати нові властивості, які не властиві жодній з них. Найбільш розповсюдженим методом синтезу систем зі змінною структурою є примусова організація у замкнутому контурі керування ковзних режимів [40], за яких зображена точка в просторі станів системи рухається за заданою траєкторією. На цю поверхню точка потрапляє за кінцевий час після початку перехідного процесу, а потім залишається на ній. Як результат, поведінка замкненої системи мало залежить від параметрів об'єкта керування, а визначається вибраним при синтезі регулятора рівнянням поверхні переключення. Тим самим, примусові ковзані режими дозволяють знизити чутливість системи до параметричних та координатних збурень, отримати інваріантність відносно до задаючого впливу, забезпечує високу швидкодію при парированні параметричних збурень у деякій області, але в загальному випадку не забезпечують оптимального руху об'єкта по заданій траєкторії. Недоліками запропонованого методу є високій порядок алгоритмів керування, який ускладнює їх реалізацію і знижує завадостійкість, а також розширення діапазону параметричної невизначеності, що призводить до підвищення коефіцієнтів підсилення зворотних зв'язків, а отже, до збільшення амплітуди високочастотної складової сигналів керування.

Більш детальний порівняльний аналіз методів синтезу безпошукових систем адаптації у застосуванні до ЛА можна знайти, наприклад, у роботі [39,40,42].

Застосування концепції адаптивного керування із «гнучкими» траєкторіями на багаторежимних ЛА дає змогу, за рахунок можливості оперативно змінювати ціль керування у польоті (наприклад, змінити параметри кінцевого стану), підвищити точність приведення в заданий кінцевий стан в умовах відхилення початкових умов, дії різного роду зовнішніх збурень та можливого виникнення особливих ситуацій.

В практичних задачах керування польотом ЛА широке використання отримала концепція адаптивного керування з прогнозуванням руху [43]. Адаптивна прогнозуюча система керування розглядається як один із варіантів адаптивних оптимальних систем керування. Вона являє собою сукупність взаємозв'язаних алгоритмів оцінювання параметрів керуемого об'єкта, оцінювання його стану та власне алгоритмів формування керування. Останні реалізуються у формі суміщеного синтеза оптимального керування, тобто синтеза, пов'язаного із розв'язанням оптимізаційної задачі безпосередньо в режимі функціонування системи керування. При цьому, синтез здійснюється на основі прогнозуючих моделей, які відтворюють у прискореному часі некерований, або «вільний» рух об'єкта.

Сьогодні вже розроблено низку алгоритмів із прогнозуванням. Керування з прогнозуючою моделлю використовує послідовності керуємих змінних з метою оптимізації майбутньої поведінки об'єкта керування. Вихідний сигнал об'єкта при цьому пророкується за допомогою наперед побудованої моделі даного процесу, яка є найважливішим елементом системи, так як характеристики керування безпосередньо залежать від неї. Як правило, використання більш точної моделі підвищує імовірність отримання необхідної якості керування. Відомі алгоритм із чисельним диференціюванням [28], модифікований алгоритм [36], алгоритм з матрицею чутливості [43], алгоритм з аналітичним розв'язком [43], адаптивний прогнозуючий алгоритм [44] тощо. Перші чотири алгоритми керування з прогнозуючою моделлю будуються за принципом мінімізації критерію узагальненої роботи. Недолік першого алгоритму полягає у необхідності чисельного диференціювання допоміжної функції для визначення її градієнту. Модифікований алгоритм виключає дану операцію, однак пов'язаний з інтегруванням рівнянь

вільного руху об'єкта у зворотному часі на усьому інтервалі оптимізації і необхідністю запам'ятовування відповідних розв'язків. Алгоритм з матрицею чутливості не потребує ні чисельного диференціювання, ні чисельного інтегрування рівнянь у зворотному часі, однак його не можна застосовувати до об'єктів, які описуються складною системою нелінійних диференціальних рівнянь. Модифікований алгоритм і алгоритм з матрицею чутливості в задачах керування багаторежимними ЛА виявляють більшу чутливість до зовнішніх збурень та відхилень від початкових умов. За достатньо великих зовнішніх збурень ці алгоритми стають нестійкими. В силу цього, враховуючи, що етап виведення ЛА у задані термінальні умови характеризується впливом значних збурень на атмосферній ділянці польоту та великими відхиленнями початкових умов, викликаних специфікою повітряного старту ОС з ЛН, застосування даних алгоритмів для керування процесом виведення АКС на орбіту є проблематичним [25].

Більш стійкі алгоритми з прогнозуючою моделлю отримуються при реалізації зворотного зв'язку з використанням метода модулюючих функцій [43]. Застосування цього підходу доцільно для розв'язання задач керування, в яких оптимальне керування визначається до польоту і задається як опорна залежність з невідомими параметрами, які визначаються за реалізованою траєкторією руху з урахуванням задоволення заданих кінцевих значень фазових координат. Цей алгоритм відповідає стратегії квазіоптимального керування і на етапі виведення АКС на орбіту дає змогу знизити вимоги до характеристик БЦОМ завдяки добрій збіжності та збільшенню інтервалу корекції. Недолік даного алгоритму полягає у тому, що він не враховує в явній формі обмеження за припустимою сумарною піднімальною силою в галузі великих швидкісних витрат. Тому застосування цього алгоритму доцільно на ділянці виведення АКС, що починається після ділянки великих швидкісних напорів.

Необхідно також відзначити низку зарубезних робіт, які зробили внесок у розвиток теорії адаптивного керування з прогнозуванням [45,46]. Відомі роботи присвячені дослідженню адаптивного керування ЛА з використанням підходів

штучного інтелекту, зокрема використанням машинного навчання. Так, у роботі С. Girish [45] розглянуто використання адаптивної нейронної мережі для керування польотом ЛА з використанням поточних даних та бази знань. Показано, що застосування метода довгострокового навчання і швидка адаптація призводять до більш високої продуктивності контролера польоту БЛА. Як зазначає А.С. Міщук [46] недоліком такої системи є необхідність значних витрат на попереднє навчання нейронної мережі, обрання даних для навчання, наявність модуля для збереження даних. При цьому, в умовах значної невизначеності система не гарантує витримування параметрів системи із заданою точністю. F.L. Lewis [47] співставляє різні типи систем автоматичного керування із використанням нейронних мереж як адаптивного модуля системи. Зазначається, що при використанні нейронних регуляторів виникає проблема ініціалізації вагових коефіцієнтів мережі. Особливістю розглянутих систем є їх робастність, проте жодна з них не здатна із заданою точністю витримувати обрані значення параметрів за умов невідомих збурень. Сьогодні розвиток ідей керування з прогнозуванням відбувається у напрямку використання нелінійних моделей, забезпечення стійкості по Ляпунову контролюємих рухів, надання робастних властивостей замкненій системі керування, застосування сучасних оптимізаційних методів у реальному масштабі часу тощо.

1.3.1.3. Аналіз проблем синтезу адаптивних систем керування нелінійними динамічними об'єктами

Несправедливість принципу суперпозиції для нелінійних диференціальних рівнянь надзвичайно ускладнює аналіз та особливо синтез нелінійних систем керування. Зокрема, у лінійно-квадратичних задачах аналітичного конструювання оптимальних регуляторів (АКОР) структура закону керування лінійним об'єктом заздалегідь визначена і процедуру синтезу зводять до обчислювання його параметрів. Для нелінійних об'єктів структура законів керування взагалі невідома, тому пошук цих законів здійснюється через відповідний функціонал.

Основним недоліком непрямих адаптивних систем керування є невиконання теореми розділення, яка дозволяє для заданого режиму забезпечити стійкість усієї системи завдяки стійкості процесів у контурі регулювання та в контурі спостереження. Тому їх застосування для нелінійних систем не гарантує у загальному випадку асимптотичної стійкості. У зв'язку з цим, для нелінійних систем найбільш перспективним є пряме адаптивне керування. Досить загальні результати з досліджень керувань нелінійними об'єктами в умовах невизначеності отримані методами швидкісного градієнта, теорії бінарних систем, теорії систем з розривним керуванням, ітеративними процедурами синтезу (адаптивний обхід інтегратора) [48]. Застосування методу АКОР для нелінійних динамічних об'єктів зводить задачу синтезу до пошуку розв'язку рівняння Беллмана – нелінійного диференціального рівняння у часткових похідних відносно спеціальної функції, яка визначає закон оптимального керування. Загальною ознакою переважної кількості праць з нелінійного адаптивного керування є використання для синтезу алгоритмів керування спеціальної функції Ляпунова: суми квадратичної форми змінних помилки і квадратичної форми параметрів, що налаштовуються [49]. Ця функція може не бути квадратичною за станом системи, якщо під час синтезу проводились нелінійні заміни змінних. Утім, наявність функції Ляпунова дозволяє досліджувати не тільки стійкість, але і якість керування. У роботі [50] встановлений зв'язок між функціями Ляпунова, які дозволяють розв'язувати задачу асимптотичної стійкості руху, і вказаним рівнянням Беллмана. Цей зв'язок полягає в тому, що рівнянню Беллмана задовольняє певна множина функцій. Звідси за допомогою методу Ляпунова можна вибрати необхідний розв'язок серед усіх можливих, що визначаються рівнянням Беллмана. Причому, ці розв'язки будуть завжди існувати в силу постулату стійкості М.Г. Четаєва [51].

Відомий також метод структурного синтезу [52], компільований пізніше у термінах синергетики [53,54]. На його базі реалізовано низку ефективних методів та алгоритмів синтезу адаптивних систем для нелінійних об'єктів [8,55,56].

Незважаючи на значний прогрес у розробці сучасних методів адаптивного керування, останні не забезпечують досягнення необхідної якості керування та розв'язання цільової задачі багаторежимних ЛА.

1.3.2. Методи оптимального керування

Теоретичні основи програм оптимального керування траєкторіями космічних транспортних систем і ракет-носіїв при виведенні на орбіту закладено в класичних роботах Д.Е. Охоцимського [57] і Д.Ф. Лоудена [58], які визначають оптимальну зміну кута тангажа (дробово-лінійний закон зміни кута тангажа за часом) для однорідного плоскопаралельного гравітаційного поля поза атмосферою за відсутності обмежень на дальність, а також в роботах А.М. Лєтова [50], Р.Ф. Алпазова, О.Г. Ситіна [59] та ін.

Класичні методи розв'язання задачі оптимізації траєкторій ЛА підрозділяються на прямі, непрямі методи та гібридні методи. При використанні прямих методів здійснюється деяка параметризація керування або розбиття траєкторії на малі ділянки з заданим видом програми керування на кожній ділянці. Як результат задача оптимізації траєкторії зводиться до задачі умовної оптимізації функціоналу в просторі більшої розмірності за наявності значної кількості обмежень. Тобто задача зводиться до задачі нелінійного програмування великої розмірності, яка часто включає велику кількість оптимізуємих параметрів, без використання необхідних умов оптимальності. Ця задача, у свою чергу, може розв'язуватися різними методами, найбільш розповсюдженими з яких на даний час є методи послідовного квадратичного програмування, диференціального динамічного програмування та їх модифікації. Інша родина прямих методів використовує різні модифікації градієнтного методу, методи типу Рітца-Галеркіна тощо. Прямі методи зазвичай слабкочутливі до обрання початкового наближення та, у багатьох випадках, дозволяють достатньо легко вводити до математичної моделі руху обмеження на обчислювальну продуктивність, володіють невисокою швидкістю збіжності та невисокою точністю. Останнє пов'язано зі спрощенням моделювання динаміки руху

ЛА на окремих ділянках траєкторії (в багатьох методах фактично використовується схема інтегрування Ейлера).

У непрямих методах використовуються необхідні та/або достатні умови оптимальності в класичній варіаційній формі [50], формі принципу максимуму Понтрягіна [60], умов оптимальності Беллмана [61] або Кротова [62]. У першому випадку задача оптимізації траєкторії зводиться до розв'язання крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь. Класичні варіаційні методи зручно застосовувати в задачах, не розв'язуваних відносно похідних та які не містять обмежень у вигляді нерівностей на керовані та фазові змінні. Принцип максимуму зводить розв'язання задачі оптимізації до розв'язання нелінійної двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь та дозволяє враховувати різні обмеження на величини керуючих та фазових змінних. Ця крайова задача розв'язується або специфічним методом для розв'язання крайових задач (наприклад, методом стрільби або методом квазілінеаризації) або загальними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь (наприклад, модифікаціями методу Ньютона-Рафсона або методу продовження) або методами мінімізації зважених сум нев'язок крайової задачі (наприклад варіантами градієнтних методів). Принцип максимуму Понтрягіна є основним апаратом для синтезу оптимального керування траєкторіями. Існує велика кількість робіт, які містять результати з оптимізації траєкторій космічних апаратів на основі застосування принципу максимуму Понтрягіна. Стислий огляд робіт, присвячених розв'язанню задач виведення АКС на орбіту за допомогою принципу максимуму Понтрягіна, можна знайти, наприклад, в [63]. При застосуванні принципу максимуму Понтрягіна все ж залишається проблема доведення оптимальності розв'язку. Недоліком може бути також й необхідність розв'язання рівнянь стану відносно похідних.

Використання умов оптимальності Беллмана зводить задачу оптимізації функціоналу до розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних першого порядку відносно невідомої допоміжної функції з відповідними граничними умовами. При цьому, одним з основних недоліків методу Беллмана є припущення щодо диференціюємості цієї допоміжної функції.

При застосуванні принципу оптимальності Кротова задача мінімізації функціонала з диференціальними зв'язками зводиться до задачі знаходження екстремумів деяких функцій, за яких розв'язок даної задачі є також розв'язком вихідної задачі. Основною проблемою цього підходу є вибір цих функцій. При цьому, засіб вибору даних функцій може привести як до рівнянь принципу максимуму Понтрягіна, так й до рівняння Беллмана.

Непрямі методи оптимізації володіють високою швидкістю, задовільною швидкістю збіжності та забезпечують високу точність обчислювань. Однак вони мають обмежену область збіжності, у зв'язку з чим потрібно обрання доброго початкового наближення для невідомих параметрів крайової задачі.

Одним із напрямків теорії оптимального керування є оптимізація за некласичними цільовими функціоналами, наприклад, за цільовим функціоналом узагальненої роботи Красовського А.А. [64]. Перевагою застосування цього підходу є можливість значно зменшити обчислювальні витрати для складних нелінійних задач оптимізації завдяки зведенню задачі до розв'язання лінійного рівняння у часткових похідних (рівняння Ляпунова), яке практично еквівалентно розв'язанню задачі Коши для рівнянь стану, тобто не потребує задоволення крайовим умовам. При цьому підході аналітичний розв'язок задачі, як правило, має місце для лінійних систем. Для більшості нелінійних керованих систем можливий лише наближений аналітичний синтез замкненого оптимального керування.

Іншим цікавим напрямком розв'язання нелінійних задач оптимального керування є використання обернених задач динаміки з метою визначення траєкторій початкового наближення [65,66], за допомогою якого для деяких задач вдається побудувати алгоритми глобальної оптимізації. За зазначеним підходом здійснюється перетворення до канонічних форм, які дозволяють лінеаризувати нелінійну модель об'єкта зворотним зв'язком.

Проблематика побудови програмних траєкторій для транспортних систем повітряного старту розглянута в роботах О.М. Оліфанова та ін. [67], І.А. Пишнова, В.Г. Ченіги [68], в яких задача зводиться до розв'язання двоточкової крайової задачі. В роботі Ван Л. [69] запропоновано алгоритм чисельного розв'язання задачі

оптимізації траєкторії виведення таких систем на сонячно-синхронну орбіту, що базується на псевдоспектральному методі.

Стратегія оптимального керування дає змогу, у принципі, розв'язати основну цільову задачу АКС – виведення максимальної маси корисного навантаження на задану орбіту у заданий час. Однак, розв'язання цієї задачі у реальному часі з використанням повної математичної моделі траєкторного руху АКС є складною у математичному та обчислювальному відношенні задачею. До того ж, багато обмежень, що покладаються на траєкторію руху АКС на етапі виведення (за кутом атаки, швидкісним напором, числом M , тепловим навантаженням тощо) привносять додаткові труднощі у розв'язання задачі оптимального керування. Тому для розв'язання задачі оптимального керування АКС на етапі виведення на орбіту застосовують різні підходи, у тому числі апроксимації та спрощення у математичній моделі руху. Останій підхід апробований під час експлуатації балістичних ракет та космічних ракет-носіїв [20,70,71], а також розглядався під час розробки автономної системи наведення для повітряно-космічних апаратів, що створювалися за програмами NASP [21], SLI, X-33, Eclipse [22], Спейс-Шаттл [23], «Буран» [24]. Однак, реалізація цього підходу не завжди дає змогу досягти основної цільової задачі АКС з незначним ресурсом керування та льотних характеристик.

Відомі й інші альтернативні підходи для розв'язання задач оптимального виведення АКС на орбіту, які дозволяють подолати труднощі розв'язання двоточкової крайової задачі бортовими засобами АКС, у тому числі метод сингулярних збурень [72], методи типу стрільби [73], метод паралельних обчислень [21,74] тощо.

Застосування методу сингулярних збурень дає змогу значно спростити вихідну математичну модель ЛА, у т.ч. за рахунок зневаження нелінійностями моделі, редукції вихідної задачі до задачі меншої розмірності [75], та отримати алгоритми наближено оптимального керування з урахуванням обмежень, що покладаються на траєкторію руху ЛА. Цей підхід використовувався для наближеного розв'язання низки крайових задач з оптимізації траєкторії ЛА [76,77]. В роботі [76] зазначено, що використання популярного методу найшвидкішого спуску при розв'язанні задачі

оптимізації траєкторії набору висоти ЛА потребує приблизно в 40 разів більше часу обчислення, ніж при застосуванні методу сингулярних збурень.

При використанні для оптимізації траєкторій повітряно-космічних літаків методів типу пристрілки або паралельної стрільби задача оптимального керування зводиться до задачі нелінійного програмування.

Також відомий підхід побудови оптимальної траєкторії на борту АКС, що використовує стратегію паралельних обчислень, що застосовувався для розв'язання задач наведення баллистичних ракет [21,74]. Згідно цього підходу траєкторія розбивається на декілька ділянок, моделювання яких та обчислення градієнтів здійснюється паралельно, що приводить до скорочення часу моделювання усієї траєкторії. При цьому, для прогнозу поточного та термінального стану АКС використовують поліноміальні нейронні мережі з метою стиснення інформації про велику кількість траєкторій, оптимальних для різних початкових умов й упорядкування її таким чином, щоб дані були доступні для пошуку та інтерполяції у реальному часі.

У роботі [69] задача оптимізації траєкторії виведення АКС розв'язується за допомогою псевдоспектрального методу [78], який, за думкою автора, володіє швидкою збіжністю при знаходженні оптимального керування. Застосовуючи в межах даного підходу процедуру дискретизації неперервної задачі шляхом апроксимації змінних стану та керування інтерполяційними поліномами, задача зведена до задачі нелінійного програмування. Такий самий підхід був застосований для оптимізації траєкторії виведення РН «Дельта-III» на геостаціонарну орбіту [79].

Більш детальний аналіз методів розв'язання задач оптимізації траєкторного руху ЛА можна знайти, наприклад, в роботах [20,23,46,80], а огляд методів синтезу нелінійних динамічних систем – у роботі [81].

На основі розглянутих методів оптимізації керування динамічних процесів, у тому числі для розв'язання нелінійних задач оптимального термінального керування рухом ЛА, можна затверджувати, що більшість сучасних методів, які знайшли практичне застосування на ЛА, базуються на різних удосконаленнях методів Понтрягіна, Беллмана та Красовського.

Аналіз стратегії та методів оптимального керування на етапі виведення АКС на орбіту показує, що у реальному часі ця задача за нелінійною математичною моделлю з урахуванням багаторежимності процесу виведення до сьогодні не розв'язана. Спрощення математичної моделі призводить до квазіоптимального керування процесом виведення АКС на орбіту та не завжди приводить до бажаного результату за точностями термінальних умов. Інший недолік стратегії оптимального керування полягає у синтезі алгоритмів керування як функції часу та необхідності організації зворотного зв'язку за вектором стану та термінальним умовам з метою компенсації дії зовнішніх та параметричних збурень. Подальша реалізація корегування оптимального керування потребує додаткових обчислень. Це призводить до необхідності формування стратегії, яка суміщує властивості оптимальності та адаптивності алгоритмів керування АКС.

1.3.3. Методи робастного керування

Задача оптимального керування траєкторією БЛА в умовах невизначеності є вельми важливою для досягнення кінцевої мети керування. Її важливість обумовлена перш за все тим, що алгоритми, синтезовані на основі математичної моделі об'єкта за більшістю критеріїв оптимальності, чутливі до параметрів моделі реального апарату та характеристик вхідних дестабілізуючих впливів, не завжди задовольняють вимогам грубості до зовнішніх та внутрішніх збурень, які діють на систему, так як математична модель апарату, що отримана на основі теорії або в результаті ідентифікації, відрізняється від реального об'єкта. Це може призвести не тільки до втрати оптимальності керування, але й до її працездатності. Тому виникає необхідність у неперервній корекції структури та параметрів системи керування в умовах реального польоту, що є вкрай складним, або синтезувати алгоритми, які «огрублюють» чутливість системи до некоректно заданих параметрів, що здійснюється у рамках робастного керування [82]. Робастне керування розуміє або наявність

визначених запасів стійкості або малу чутливість до зміни параметрів та структури системи.

Основоположними роботами в області робастного керування є стаття Зеймса [83], у якій запропоновано критерій оптимальності на основі H_∞ -норми миттєвої перехідної функції замкненої системи, та стаття Дойла [84]. Ці роботи поклали початок побудови теорії грубого або робастного керування для моделі, заданої в умовах невизначеності. Зміст робастного керування полягає в мінімізації H_∞ -норми перехідної функції, входом для якої є внутрішні та зовнішні збурення, які виникають під час функціонування системи, а виходом – помилка. Використання H_∞ -норми як критерія оптимальності при синтезі багатовимірних систем засноване на тому факті, що H_∞ -норма може служити мірою підсилення системи. Інакше, H_∞ -норма передавальної функції є енергія виходу системи при подачі на вхід сигналу з одиничною енергією, тобто є коефіцієнтом підсилення системи за енергією. Якщо виходом є помилка стеження, а входом збурення, то мінімізуючи H_∞ -норму передавальної функції ми мінімізуємо енергію помилки для найгіршого випадку вхідного збурення.

Подальшому розвитку теорії робастного керування у застосуванні до розв'язання задачі синтезу систем автоматичного керування ЛА присвячено роботи В.Х. Пшихопова [8], Б.Т. Поляк, П.С. Щербакова [82], В.Н. Тіміна, А.П. Курдюкова [85], К.А. Пупкова, Н.Д. Єгупова [86], J.C. Doyle [84], G. Zames [83], M.J. Grimble [87] та ін. На цей час відомі такі напрямки синтезу робастних систем керування як H_∞ -синтез [83,84], H_2 -синтез [82], метод лінійних матричних нерівностей [87], метод структурованого сингулярного числа (μ -синтез) [87].

У роботі [86] запропоновано новий підхід до розв'язання задачі оптимізації робастного керування – «2-Ріккаті підхід». Згідно цього підходу оптимальна задача замінювалася субоптимальною. Вихідний оптимальний регулятор у формі

спостерігача визначається на підставі розв'язку двох багатомірних рівнянь Лур'є-Ріккати для фільтрації (відновлення стану) і оптимального керування мінімуму H_∞ -норми замкненої системи. Практичне застосування даного підходу для нестационарних систем ускладнено через відсутність ефективних алгоритмів розв'язання нестационарних рівнянь Ріккати.

На цей час отримані розв'язки багатьох задач робастного керування, частина з яких доведена до інженерних методів синтезу. Однак більшість відомих методів робастного керування відрізняється складністю процедур синтезу, складністю структури та високим порядком отриманого регулятора, достатньо складні для аналітичного розрахунку. При цьому, проблеми, що пов'язані з нелінійністю, ще мають місце. Як відмічено у роботі [88,89], робастні методи синтезу як лінійних так й нелінійних систем керування мають два значних недоліки: висока розмірність та складність побудови регуляторів, а також складність практичної реалізації.

1.3.4. Методи керування на основі інтелектуальних технологій

Істотне підвищення автономності та надійності перспективних зразків БЛА, розширення діапазону їх тактико-технічних та експлуатаційних характеристик передбачає необхідність розробки нового покоління бортових систем керування, які забезпечують умови функціонування в умовах швидкоплинності змін повітряної обстановки, при наявності випадкових збурень середовища та інших факторів невизначеності. Дані системи створюються на основі комплексного використання сучасних інтелектуальних технологій [86,90-92]. Інтелектуальною системою керування вважається така, у якій знання про невідомі характеристики об'єкта керування та навколишнього середовища формуються під час навчання та адаптації, а отримана при цьому інформація використовується під час автоматичного прийняття рішень так, що якість керування покращується.

На цей час існують декілька сучасних інформаційно-технічних технологій, які дають змогу створювати нове покоління інтелектуальних систем керування. В основному, інтелектуальне керування будується на основі таких методів штучного інтелекту, як нейронні мережі [92-97] і нечітка логіка [98-102].

Нейронні мережі являють собою істотно спрощену біологічно подібну структуру, обчислювальна міць якої заснована на здатності до адаптивного навчання шляхом аналізу позитивних і негативних впливів. Основною перевагою нейромереж є можливість їх застосування в умовах значної невизначеності, коли математичний опис не може бути достатньо адекватним. До числа безперечних переваг нейронних мереж, які пояснюють зростаючий інтерес до них з боку спеціалістів, також відносяться: можливість відтворення достатньо складних нелінійних залежностей; нейронні мережі не потребують традиційного програмування; висока швидкодія (особливо у випадку апаратної реалізації з використанням паралельної обробки); потенційно висока завадо- та відмовостійкість.

В останні роки з'явилася достатня кількість публікацій, присвячених дослідженню можливості застосування на ЛА інтелектуальних систем керування на базі нейронної мережі [103-108]. Практичне застосування нейронних мереж ставить перед творцями систем керування проблему вибору архітектури мережі, що є доволі складною задачею. Вона полягає у тому, що наперед неможливо сказати яка архітектура мережі буде більш успішно застосована в даних умовах. Відповідь на це питання має принципове значення і до сьогодні немає однозначного розв'язку.

Побудова систем керування із застосуванням принципу нечіткої логіки базується не скільки на застосуванні теоретичних або аналітичних моделей, скільки на практичному застосуванні експертних знань. Традиційні системи керування потребують на кожному кроці дослідження застосування математичних моделей, які точно та однозначно описують закономірності, що протікають в системах, які досліджуються. На відміну від цього, принцип нечіткої логіки передбачає перехід зовсім на інший рівень мислення, за якого творчий процес досліджень відбувається

на самому високому рівні абстракції та постулюється лише мінімальний набір закономірностей.

За ствердженням спеціалістів, основна перевага нечітких систем полягає у тому, що знання в цих системах подається у формі гнучких логічних конструкцій, таких як правила «IF ... THEN», що легко розуміються людиною [109]. Нечіткі регулятори дають змогу реалізувати системи керування об'єктів з істотними нелінійностями, а також створювати системи керування для об'єктів, алгоритми функціонування яких важко формалізувати методами традиційної математики. Дані властивості нечітких систем дають змогу застосовувати їх для розв'язання задач в області автономного адаптивного керування динамічними системами. Застосування нечіткої логіки та адаптивних принципів побудови систем керування дає змогу підвищити швидкодію процесів керування, істотно знизити вплив невизначеності на якість систем керування, компенсуючи недолік апріорної інформації на етапі проектування систем. Завдяки цим властивостям, багатьма дослідниками розглядається можливість застосування методів нечіткої логіки при розробці системи керування безпілотними ЛА [110-113]. Основні труднощі при використанні нечітких систем керування на практиці пов'язані з апріорним визначенням бази правил та побудовою функцій належності [109].

Новітні дослідження в галузі імунології стали поштовхом до розвитку ще одного напрямку в інтелектуальних технологіях і створення цілого класу моделей під загальною назвою «генетичні алгоритми» [114]. Генетичні алгоритми не мають значних математичних вимог до вигляду цільових функцій та обмежень. Дослідник не повинен спрощувати модель об'єкту з метою використання можливості застосування наявних математичних методів. При цьому, можуть використовуватися різноманітні цільові функції та обмеження (як лінійні так й нелінійні), які визначені на дискретних, неперервних та змішаних множинах. До недоліків генетичних алгоритмів можна віднести те, що значна кількість вільних параметрів ускладнює роботу. У простих цільових функціях (гладкі, один екстремум тощо) генетика завжди програє за швидкістю простим алгоритмам пошуку.

1.4. Автоматичне керування траєкторним рухом БАЛА

Аналіз останніх публікацій у галузі проектування сучасних дирижаблів, як типових представників АЛА, показує підвищений інтерес до створення автономних безпілотних дирижаблів та розробки систем автоматичного керування їх траєкторним рухом. Це пояснюється тим, що найбільш повно переваги аеростатичних літальних апаратів, що пов'язані з можливістю тривалого польоту (наприклад, барражування у районах зі слабкою інфраструктурою), реалізуються за відсутності пілота на борту.

1.4.1. Підходи до побудови систем автоматичного керування

Синтез систем автоматичного керування в проектах автономних дирижаблів базується на традиційних (класичних) підходах, які використовуються для синтезу систем керування ЛА та передбачають розподіл руху на повздовжню та поперечну складові, з подальшою лінеаризацією моделі руху апарата вздовж еталонних траєкторій [115]. Такий розподіл дає змогу незалежно керувати рухом у кожній площині, однак область стійкості замкнених систем обмежена околom еталонної траєкторії руху апарата. Так, наприклад, використання тільки лінійних ПД-регуляторів у каналі керування рухом АЛА припустимо й ефективно у випадку, якщо в контурі керування присутній пілот, який компенсує динамічні ефекти, що невраховані в процедурі синтезу.

Класичні методи синтезу керування володіють перевагою легкого впровадження та забезпечують надійне керування. Основні проблеми застосування традиційних методів до синтезу систем автоматичного керування АЛА полягають в їх обчислювальній складності (синтез нелінійних систем), неможливості досягнення апаратом необхідної точності та надійного налаштування параметрів системи керування зі зворотним зв'язком під час польоту у збуреному середовищі. Використання спрощувальних підходів до синтезу систем керування автономними дирижаблями, тим більше у випадку наявності обмежень на керування та параметри

руху, може не тільки не дозволити досягти необхідних кількісних показників, що пред'являються до точності відпрацювання спланованих траєкторій, але й призвести до втрати якісних властивостей замкненої системи [116]. Так, проведений в роботі [117] методом аналітичного конструювання оптимальних регуляторів синтез керування дирижабля на основі лінійної моделі апарата та застосування синтезованого алгоритму до прямолінійного руху зі сталою швидкістю показало, що лінійне керування забезпечує стійкість лише в невеликому околі рівноважного стану, відносно якого виконана лінеаризація моделі.

Підвищити стійкість лінійної адаптивної системи керування АЛА можна наступними методами [8]: наскрізною лінеаризацією, структурним синтезом (backstepping), непрямим адаптивним керуванням, робастним керуванням, використанням інтелектуальних технологій керування тощо.

Метод наскрізної лінеаризації, який часто застосовується для синтезу систем керування ЛА, передбачає корекцію коефіцієнтів моделі дирижабля при зміні його режиму функціонування. У цьому випадку, використовується тільки один контур адаптації, який базується на алгоритмі адаптації (АА), який залежно від поточного стану системи корегує коефіцієнти регулятора відповідно до наперед обчислених коефіцієнтів лінеаризованої моделі АЛА [95,117]. Метод структурного синтезу (backstepping) базується на рекурсивній процедурі, яка чергує обрання функції Ляпунова з конструюванням керування зі зворотним зв'язком [118]. Формуючи скалярну додатну функцію змінних стану системи і потім, розглядаючи закон керування, за якого ця функція спадає, можна гарантувати, що таке нелінійне керування буде асимптотично стійким та робастним до деякої невизначеності. Застосування даного піходу до синтезу систем керування БАЛА та автономних дирижаблів подано в роботах [117,119].

Для розширення області стійкості лінійних систем керування АЛА також застосовується непряме адаптивне керування, структура якого містить блок оцінювання і ідентифікації (БОІ), пристрій керування (ПК) та об'єкт керування (ОК) [8]. У БОІ, на основі вимірюваних значень вектора вихідних координат, оцінюється поточний стан апарата і вектор параметрів, що настроюються, які

надходять до пристрою керування. Останній, на основі отриманих оцінок, формує керуючий вплив. Відомо, що структура непрямого адаптивного керування базується на принципі розділення, основний зміст якого полягає у тому, що задача про побудову керування, що функціонує на основі неповних або недостовірних вимірів, може бути подана у вигляді суперпозиції розв'язків двох часткових задач. Перша з них являє собою задачу керування для вихідної системи із змінними, що вимірюються, а друга – задачу оцінювання стану системи за фіксованого керування. Вочевидь, що за нелінійного подання моделі руху АЛА принцип розділення в ньому не діє.

Робастні підходи [82-88] до побудови систем керування аеростатичними літальними апаратами не містять алгоритмів оцінювання або ідентифікації. Як правило, вони надають деякі екстремальні властивості замкненим системам і мають на увазі або наявність певних запасів стійкості, або малу чутливість до зміни параметрів або структури системи [8].

Зважаючи на істотну нелінійність математичної моделі руху АЛА, неповну визначеність параметрів та схильність до зовнішніх збурювань, для синтезу систем керування АЛА застосовуються також методи керування з використанням інтелектуальних технологій [90-102]. Тут можна виділити два методологічних підходи, що найбільш часто використовуються: методологію нечітких множин і нейронні мережі.

У роботі [120] розглядається застосування нечіткої логіки для керування автономним дирижаблем, для якого реалізовані окремі контролери напрямку, висоти та швидкості. Однак, з точки зору розв'язання класичних задач керування ЛА, теорія нечітких множин не дає змоги гарантувати досягнення бажаних якісних властивостей і кількісних характеристик складної динамічної системи, якою є АЛА. Наприклад, утруднений аналіз стійкості динамічної системи з нечітким регулятором [121].

Основною перевагою нейромереж у застосуванні до керування автономним АЛА є можливість їх застосування в умовах істотної невизначеності, коли математичний опис не може бути достатньо адекватним, наприклад, при врахуванні

приєднаних мас. У роботі [122] досліджується можливість застосування адаптивного керування на базі нейронної мережі для покращення якості керування автономного дирижабля на низьких швидкостях. Для керування використовується лінійний підхід (класичний ПД-регулятор), а нелінійна динаміка, а також невизначеності та збурення враховуються за допомогою нейромережі.

Вагомий внесок у розвиток методів аналітичного синтезу нелінійних позиційно-траєкторних систем керування аеростатичних літальних апаратів зробив В.Х. Пшихопов [8,116]. У нелінійній постановці широке застосування отримали також методи синтезу систем керування АЛА на основі обернених задач динаміки, в яких здійснюється перетворення до канонічних форм, що дозволяють лінеаризувати нелінійну модель об'єкта зворотним зв'язком [123]. Найбільш загальний метод перетворення математичної моделі дирижабля до канонічної форми, полягає у диференціюванні рівняння виходу в силу рівнянь об'єкту, яке здійснюється до тих пір, доки не будуть отримані керування у явному вигляді. Така модель, що записана відносно виходу та його похідних, є лінеаризуємим оберненим зв'язком [8].

З використанням вищенаведених підходів на сьогоднішній день проведено дослідження та синтезовано алгоритми керування автономними АЛА для виконання різноманітних місій, у тому числі на режимах злету/посадки [9,124-130], висіння [131-133], крейсерського польоту [134-138] тощо.

Водночас, обмеженість енергетичних ресурсів, жорсткі вимоги до тривалості польоту, необхідність оперативної зміни траєкторії польоту при подоланні перешкод на землі, значна чутливість до атмосферних збурень через унікальні аеродинамічні властивості, обумовлюють необхідність здійснення польоту автоматично керованих АЛА за енергетично ефективними траєкторіями під час виконання певної місії. Тому, при плануванні енергетично ефективних польотів автоматично керованих АЛА є доцільним виконання оптимізації його керування з метою забезпечення відповідних траєкторій польоту для гарантії того, що буде досягнуто бажане положення у заданий час з прийнятною якістю та точністю.

1.4.2. Оптимальне керування траєкторним рухом

Важливість оптимального польоту дирижабля вперше обґрунтував М. Munk у 1922 році. Базуючись на доступному на той час навігаційному обладнанні, Munk досліджував сталі повітряні швидкості, які дають змогу мінімізувати споживання палива на обраній дистанції [139].

На цей час, враховуючи підвищений останнім часом інтерес до стратосферних дирижаблів завдяки специфіки їх застосування, основна кількість публікацій з оптимізації керування траєкторним рухом дирижаблів присвячена саме цьому типовому представникові АЛА. Стисло зупинимося на отриманих результатах.

В роботі [140] задача оптимізації траєкторії польоту стратосферного дирижабля при наборі висоти в умовах наявності вітру із початкових в задані кінцеві умови сформульована як задача нелінійного оптимального керування. Як критерії оптимальності прийнято мінімальне значення лінійної комбінації часу польоту та величини споживаємої енергії. Задача оптимізації траєкторії зведена до задачі параметричної оптимізації з використанням методу коллокації, отримано чисельний розв'язок крайової задачі.

В роботі [141] розв'язується задача знаходження оптимальної траєкторії набору висоти стратосферним дирижаблем з використанням енергії вітру з метою мінімізації часу набору висоти та мінімізації енергії, що витрачається на набір висоти. Розглядається нелінійна динамічна модель дирижабля. Проблема оптимального керування зводиться до проблеми нелінійної параметричної оптимізації з використанням методу коллокації та розв'язується чисельно за допомогою пакета програм SNOPT і застосуванню метода послідовного квадратичного програмування.

В роботах [142-144] проведено дослідження оптимальної траєкторії підйому та спуску стратосферного дирижабля з використанням енергії вітру та термодинамічних внутрішніх та зовнішніх факторів для досягнення заданої висоти польоту за мінімальний час та мінімальною витратою енергії. Проблема нелінійного

оптимального керування зведена до проблеми нелінійної параметричної оптимізації та чисельно розв'язана з використанням пакета програм SNOPT.

Робота [145] присвячена розв'язанню задачі траєкторній оптимізації польоту дирижаблів невеликих розмірів на злетно-посадкових режимах за допомогою псевдо-спектрального методу Legendre-Gauss-Radau. Застосовувавши апроксимацію змінних стану та керування інтерполяційними поліномами Лежандра, які швидко диференціюються та інтегруються, задача оптимального керування зведена до задачі нелінійного програмування, яка чисельно розв'язана за допомогою програмного продукту PSOPT. Перевагою цього підходу, за думкою автора, є експоненціальна збіжність під час знаходження оптимального керування.

Однак, незважаючи на наявність достатньо великої кількості публікацій з автоматизації польоту автономних АЛА і, зокрема, роботизованих дирижаблів, більшість запропонованих підходів до синтезу їх систем керування базується на класичних методах проектування систем керування літальних апаратів, які не враховують нелінійність та багатозв'язність математичної моделі динаміки польоту АЛА. Це може не тільки не дозволити досягти необхідних кількісних показників, що пред'являються до точності траєкторного руху автономних АЛА, але й призвести до втрати якісних властивостей замкненої системи.

Крім того, у відомих роботах для розв'язання задач оптимізації керування траєкторним рухом автономних дирижаблів, застосовуються, в основному, традиційні методи чисельного розв'язання крайових задач (варіаційні методи, принцип максимуму Понтрягіна, метод динамічного програмування тощо) та їх модифікації. Як відомо, використання необхідних умов оптимальності в цих методах призводить, у загальному випадку, до важкорозв'язуваної двоточкової крайової задачі або розв'язанню нелінійних диференціальних рівнянь у часткових похідних. При цьому, вплив параметричних збурень та збурень навколишнього середовища на політ автоматично керованого дирижабля потребує неперервної оптимізації в реальному часі траєкторії польоту засобами бортових ЕОМ. Це призводить до великих обчислювальних труднощів.

Методи синтезу алгоритмів керування, що застосовуються на цей час для автоматизації руху автономних АЛА, не забезпечують досягнення необхідної якості керування та розв'язання цільової задачі стосовно виведення багаторежимного апарата на задану висоту із заданою точністю. При цьому, на сьогодні, питання оптимізації траєкторій злету/посадки та набору висоти у реальному часі для багаторежимних автономних АЛА не розв'язані. У зв'язку з цим, актуальність задачі розробки методів синтезу алгоритмів оптимального керування автономним АЛА на етапах злету/посадки та набору висоти з урахуванням його багаторежимності визначається, з одного боку, затребуваністю в автономних АЛА, а з іншого – недостатньою проробкою методів оптимізації алгоритмів керування, що дозволяють виведення автономних багаторежимних АЛА на задану висоту із заданою точністю у реальному часі. Тому це питання включене до переліку задач досліджень дисертаційної роботи.

1.5. Постановка задачі синтезу оптимального багатоступового керування ЛА

Розглянемо математичну постановку задачі оптимального керування процесом багатоступового виведення ЛА на задану висоту. Увесь процес виведення умовно розіб'ємо на r заданих часових інтервалів, усередині яких параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування: $T_i = t_i - t_{i-1}$,

$i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r T_i = T$, де T - час процесу керування. У подальшому будемо вважати, що всі

ці зміни відбуваються на межах вибраних інтервалів.

У загальному вигляді вихідна математична модель багатоступового руху літального апарата може бути подана векторним нелінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, u_i, v_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.1)$$

де $x_i = x_i(t)$ - n -вимірний вектор стану; $u_i = u_i(t)$ - m -вимірний вектор керування; $v_i = v_i(t)$ - ℓ -вимірний вектор збурень; f_i - неперервна та неперервно диференційована за сукупністю змінних t, x_i, u_i, v_i нелінійна вектор-функція узагальненої сили; $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Задача термінального багатоетапного керування полягає у переведенні літального апарата із заданого початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений у момент часу $t = T$ q -вимірним ($q \leq n$) векторним рівнянням:

$$S[x_r(T), T] = 0. \quad (1.2)$$

Якість процесу керування оцінюється функціоналом:

$$I = G[x_r(T), T] + \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^T \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i) dt, \quad (1.3)$$

де задані функції G та Φ_i мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i, v_i . Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховуються під час обрання вигляду функціоналу (1.3), наприклад, методом штрафних функцій [65, 146]. Спряження кінцевих умов попередніх ділянок та початкових умов наступних ділянок процесу керування задається у формі заданих крайових умов:

$$\Phi_i \Big|_{x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i} = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (1.4)$$

Програмне керування $u = u(t)$, яке оптимізує функціонал (1.3), реалізує оптимальне керування за розімкнутим контуром та гарантує виконання кінцевих умов (1.2), коли немає дії збурювань. У реальних умовах дія зовнішнього середовища $v_i(t)$ чине значний вплив на динаміку руху апарата. З метою компенсації цих збурень синтезують закон оптимального за критерієм (1.3) керування із зворотним зв'язком вигляду:

$$u = u(x, t). \quad (1.5)$$

Керування (1.5) використовує у кожний момент часу t інформацію про поточний стан $x(t)$, забезпечує приведення літального апарата із довільного початкового стану в кінцевий (1.2) при дії збурювань.

1.6. Гарантовано-адаптивне керування

При функціонуванні реальних об'єктів керування характерним є значна невизначеність відносно діючих на об'єкт збурень. Збурюючі фактори, впливаючи безпосередньо на БЛА і на процеси керування, у кінцевому рахунку, призводять до погіршення льотних характеристик та зниження точності керування.

Синтез оптимального багатоетапного керування БЛА при дії невідомих збурень є складною проблемою. Питання побудови систем керування гарантованої точності за довільних збурень, незважаючи на свою актуальність, не мають на сьогодні однозначного розв'язання. Високий порядок нелінійних диференціальних рівнянь руху літального апарата, зміна в широкому діапазоні динамічних характеристик апарата, невідомі стохастичні характеристики збурювань тощо, ускладнюють розв'язання цієї проблеми. Крім цього, є труднощі з урахуванням збурювань, пов'язаних із розкидом початкових умов, виникненням позаштатних ситуацій, наприклад, відмовою двигунів на етапі виведення. Значна тривалість польоту багаторежимних ЛА в атмосфері та високі вимоги до термінальних параметрів при їх виведенні на задану висоту потребують розробки методів урахування впливу збурювань з невідомими стохастичними характеристиками на досягнення цілей керування.

1.6.1. Аналіз відомих публікацій

Для розв'язання задач оптимального керування траєкторним рухом ЛА при дії збурювань широке розповсюдження отримали методи стохастичної оптимізації, теорії адаптивно-робастного керування, нейро-нечіткового керування.

Для дослідження впливу дії випадкових збурювань з відомими характеристиками широко використовуються методи стохастичної оптимізації [147-149]. Велике значення у розвитку статистичних методів дослідження систем керування мають роботи В.С. Пугачьова, В. В. Солодовникова, Є.С. Вентцель, І.А. Богуславського, С.А. Кабанова, И.Е. Казакова, А.А. Красовського, Г. Крамера,

М.Н. Красильщикова, В.В. Малишева, П.С. Матвеева, А.А. Свешнікова, А.В. Солодова, А.С. Шалигіна, Р. Фішера, Є. Пірсона, Н. Вінера, Л. Заде, Р. Калман та інших вчених. Однак, статистичні характеристики випадкових збурень, які діють на ЛА, як правило, невідомі, що ускладнює застосування методів стохастичної оптимізації.

Для синтезу системи керування ЛА при дії як детермінованих, так й випадкових збурювань з невідомими статистичними характеристиками, важко використовувати й методи нейро-нечіткого керування [149], так як за відсутності апріорної інформації про зовнішні збурювання експериментальні дані та навчальні тести будуть неповними, а модель буде неадекватною. У такому випадку необхідне перелаштування коефіцієнтів нейромережі в режимі реального часу, у той самий час, як для компенсації збурювань потрібно десяти частки секунди.

Відомі робастні методи забезпечують добрі властивості системи лише у певному діапазоні зміни збурювань або в стаціонарних режимах функціонування та апріорної інформації про збурювання, реалізують прогнозування динаміки системи без оцінювання діючих збурень. Регулятори в таких системах здебільшого мають високу розмірність, а інколи бувають істотно нелінійними [150].

Таким чином, для синтезу систем керування БЛА при дії збурень детермінованого або випадкового характеру з невідомими статистичними властивостями, необхідно удосконалювати наявні методи, або шукати нові методи синтезу керування.

Одним з можливих напрямків розв'язку задачі оптимізації траєкторії багатоетапного траєкторного руху ЛА з гарантованим досягненням заданих термінальних параметрів в умовах впливу невизначених зовнішніх збурень є застосування стратегії гарантовано-адаптивного підходу до синтезу алгоритмів керування траєкторіями руху.

Задача синтезу гарантовано-адаптивного керування при невизначених умовах впливу збурень потребує переходу від задач оптимізації до задач двобічної оптимізації, що розглядаються в теорії диференціальних ігор [151-154]. Ця стратегія використовує принцип максимального гарантованого результату, так як процес

керування розглядається за найбільш несприятливих умов, що можуть мати місце при впливі збурювань. В таких умовах задача термінального керування розглядається як математична модель диференціальної гри двох гравців, дослідження якої засновано на принципі максимального гарантованого результату [153]. Істотний внесок у становлення та розвиток теорії диференціальної гри внесли Р. Айзекс, Л.С. Понтрягін, М.М. Красовський, А.І. Субботін, А.Б. Куржанський, Л.А. Петросян, Б.Н. Пшеничний, А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько, R. Isaacs, M.G. Crandall, P.L. Lions, L. Berkovitz, P. Bernhard, A. Blaquiere, J.V. Breakwell, W.H. Fleming, G. Leitmann та багато інших вчених. Задача керування ЛА в умовах вітрових збурень на основі методів теорії диференціальних ігор розглянута в роботах В.М. Кейна, Н.Д. Боткіна, О.А. Толпегіна, В.С. Пацько, М.А. Зарха, В.Л. Баранова, О.С. Урського, А.А. Сизовой, М.А. Смольниковой, Н.І. Pesch, R. Bulirsch, F. Montrone, та ін.

Для розв'язання задач термінального керування за допомогою диференціальних ігор використовуються методи Р. Айзекса [152], М.М. Красовського [151,155,156] та ін. У монографії Р. Айзекса [152] для розв'язання диференціальних ігор використаний підхід, що примикає до методу динамічного програмування та ґрунтується на інтегруванні спеціального рівняння у часткових похідних. Розв'язок цього рівняння визначає мінімаксне значення критерію оптимальності, що в теорії ігор називається ціною гри. У цьому випадку оптимальні керування гравців розглядаються як функції від позиції гри. Інтегрування цього рівняння, зазвичай, представляє собою дуже складну задачу. Ціна гри часто є розривною функцією позиції гри, тому використання даного підходу вимагає спеціального аналізу розв'язків поблизу поверхней розриву функції ціни гри або її часткових похідних. Конкретні розв'язки цього рівняння відомі лише у часткових випадках, що відносяться виключно до систем невисокого порядку.

Для розв'язання технічних задач частіше застосовують методи теорії позиційних стратегій [154], коли керування гравців обирається в дискретні моменти часу на основі розв'язку допоміжних мінімаксних задач програмного керування. Для їх розв'язання застосовують необхідні умови оптимальності, що є аналогічними

принципу максимуму Понтрягіна, або методи, засновані на розрахунку областей досяжності (ОД), які запропонував М.М. Красовський [151,153,155,156]. Найбільш універсальним для розрахунку ОД як лінійних так й нелінійних динамічних систем є метод, що ґрунтується на розрахунку точок межі ОД. В цьому випадку межа ОД будується по точкам, для обчислення яких розв'язуються допоміжні задачі оптимального програмного керування на базі динамічного програмування або принципу максимуму, що значно ускладнює розв'язання задачі. У загальному випадку ці допоміжні задачі оптимального керування розв'язуються чисельно.

1.6.2. Постановка задачі гарантовано-адаптивного керування

Розглянемо задачу термінального керування процесом виведення багаторежимного ЛА на задану висоту за допомогою теорії диференціальних ігор.

Модель диференціальної гри включає векторне нелінійне диференціальне рівняння багатоетапного траєкторного руху (1.1), кінцеві умови (1.2), функціонал оцінки якості процесу керування (1.3) та крайові умови для кожного підінтервалу керуваного процесу (1.4). Процес термінального виведення ЛА здійснюється в умовах невизначеності відносно дії збурень. Розкриття невизначеності, що викликана дією збурень, виконується на базі математичної моделі диференціальної гри, розглядаючи процес виведення при найбільш несприятливих умовах дії збурень. Вважаємо, що як перший гравець, який реалізує керування $u(x,t)$, розглядається система керування ЛА. Вектор збурювань $v(x,t)$ формується другим гравцем. Мета першого гравця полягає у такому приведенні ЛА із заданого початкового стану в кінцевий (1.2), при якому мінімізується функціонал (1.3) за умови його максимізації вектором збурень. Стратегії гравців u^0 та v^0 будуть оптимальні, якщо виконується умова сідлової точки [151,153]:

$$I(u^0, v) \leq I(u^0, v^0) \leq I(u, v^0). \quad (1.6)$$

Керування u^0 , що задовольняє умові (1.6) та забезпечує отримання гарантованої оцінки якості процесу приведення ЛА у задану точку простору та адаптивність до конкретного виду дії збурень, є гарантовано-адаптивним [157,158].

Незважаючи на те, що врахування найгіршої ситуації впливу збурень призводить до найгіршого значення критерія оптимальності порівняно зі значенням, отриманим звичайними методами оптимізації, застосування теорії диференціальних ігор дає змогу гарантувати досягнення заданої області термінальних умов за будь-якого закону дії збурень у межах заданих обмежень.

Дана задача з використанням диференціально-ігрового підходу у застосуванні до процесу виведення АКС на орбіту розглянута у працях [25,157]. Нелінійна математична модель диференціальної гри для безпілотних ЛА на етапі їх багатоетапного термінального виведення в умовах невизначених збурень ще не розглядалася.

Застосування математичної моделі диференціальної гри для синтезу керування ЛА на етапі їх багатоетапного термінального виведення дає змогу отримувати гарантовано-адаптивні алгоритми автономного керування, які забезпечують малу чутливість до відхилення початкових умов від розрахункових значень, до зміни динамічних параметрів ЛА і впливу параметричних та зовнішніх збурень.

Вищезазначена математична модель диференціальної гри (1.1)-(1.4) є універсальною та може використовуватися для керування рухом різноманитних типів БЛА (АКС, АЛА, КА тощо) у реальному часі на різних етапах їх польоту. Відмінності будуть тільки у вигляді рівнянь руху, початкових та термінальних умов, вигляду функціоналу та складу компонент вектору стану.

Проблема обчислювальної складності реалізації гарантовано-адаптивних алгоритмів багатоетапного керування ЛА така сама як й для відповідних задач оптимального керування. Для подолання обчислювальної складності застосування теорії диференціальних ігор для синтезу алгоритмів багатоетапного керування БЛА необхідно розробляти нові методи або модернізувати існуючі.

Враховуючи те, що нелінійні задачі гарантовано-адаптивного виведення БЛА у задані термінальні умови з урахуванням багатоетапності їх траєкторного руху ще мало вивчені, вони включені до переліку основних задач дисертаційної роботи.

1.7. Багатокритерійна задача багатоетапного оптимального керування літальними апаратами

Процес багатоетапного оптимального керування рухом ЛА оцінюється багатьма критеріями, залежно від характеристик літального апарату, цільової задачі та функціонування систем апарата на окремих ділянках траєкторії польоту. Наприклад, виведення РН або АКС на орбіту оцінюється масою корисного навантаження, що виводиться на орбіту, витратою палива на процес виведення, часом виведення на орбіту, помилками досягнення термінальних умов, тепловими навантаженнями, перевантаженнями під час виведення, обмеженнями на швидкісний напір, піднімальну силу, кут атаки тощо. Глобальний критерій оцінки усієї транспортної космічної системи потребує максимуму маси корисного навантаження, що виводиться на орбіту. Відомо, що задача максимізації маси корисного навантаження еквівалентна задачі мінімуму витрати палива, яка, у свою чергу, за постійної швидкості витрати палива еквівалентна задачі мінімізації часу виведення транспортної космічної системи на орбіту [57].

Експлуатація БАЛА також має свою специфіку, їх динаміка відрізняється від динаміки традиційних літальних апаратів, наприклад, значним впливом значення приєднаних мас та моментів інерції через значний об'єм корпусу, способом надолуження «втрати ваги» через витрати палива, більшою чутливістю до поривів вітру, атмосферним збуренням, а також способом здійснення злету та посадки. Крім того, обмеженість енергетичних ресурсів та жорсткі вимоги до тривалості польоту обумовлюють необхідність здійснення польоту БАЛА за енергетично ефективними траєкторіями під час злету, набору висоти, позиціонування, зниження та посадки. При оптимізації траєкторії польоту автоматично керованих БАЛА враховують, як

правило, наступні параметри [9,140,141]: тривалість польоту, споживання енергії при виконанні конкретної місії, похибки досягнення термінальних умов тощо.

Наведені критерії як для АКС, так саме й для АЛА часто суперечать один одному, однак не можна нехтувати жодним з них, оскільки тільки у своїй сукупності вони дають повне уявлення про керований рух ЛА. Системні властивості ЛА на кожному етапі процесу виведення кількісно оцінюються векторним критерієм якості, що складається з відповідних частинних критеріїв. При цьому, задача оптимізації полягає у знаходженні оптимального компромісного розв'язку серед усіх критеріїв якості, де часто при поліпшенні одного з частинних критеріїв неминуче погіршуються інші. Таким чином, багатокритерійна задача термінального виведення ЛА (задача векторної оптимізації) повинна вирішуватися з урахуванням багатоетапного характеру процесу виведення.

Розв'язанню задач багатокритерійної оптимізації займалися такі вчені, як: В.М. Глушков, В.С. Михайлович, В.Л. Волкович, Т.К. Сіразетдінов, А.Н. Воронін, М.Е. Салуквадзе, Ю.К. Зіатдінов, Харченко А.В., В.Л. Баранов, О.С. Урусський, В.В. Подиновський, В.Д. Ногін, Ю.К. Машунін, Дж. Нейман, О. Моргенштерн, В. Нельсон, Р. Бенайюн, С.Н. Vira, Y.Y. Naimes та ін.

1.7.1. Задача векторної оптимізації

У загальному вигляді задача векторної оптимізації полягає у наступному [159-161]. Нехай задана множина можливих рішень: $X = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\} \subset E^n$, де E^n – n -мірний евклідовий простір і нехай ϵ диференціальний або недиференціальний зв'язок $B(x) \leq 0$. Якість розв'язку оцінюється по сукупності суперечливих частинних критеріїв, що утворюють k -мірну вектор-функцію $I(x) = \{I_1(x), I_2(x), \dots, I_k(x)\} \subset F$, визначену на множині X , F – клас припустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв $I(x)$ обмежений припустимою областю $C : I(x) \in C$ або може бути не обмежений. Задача полягає у визначенні такого розв'язку $x^0 \in X$, що при заданих

зв'язках і обмеженнях (якщо такі є в наявності) оптимізують у деякому змісті вектор-функцію (вектор ефективності) $I(x)$.

Для розв'язання задач векторної оптимізації існують наступні методи: а) оптимізація ієрархічної послідовності критеріїв якості [162], б) визначення множини неполіпшуваних точок (Парето-рішення) [162], в) визначення розв'язку, заснованого на тому чи іншому методі компромісу [161].

Перший метод заснований на визначенні порядку переваги тих або інших критеріїв. Тому він малоефективний, оскільки оптимізація по першому, найбільш важливому критерію вже призводить до єдиного оптимального розв'язку й все зводиться до оптимізації тільки за першим критерієм.

У методі визначенні множини неполіпшуваних точок використовується той факт, що область X припустимих розв'язків багатокритерійної задачі складається з двох непересічних підобластей: області згоди X^C та області компромісів X^K . В області згоди розв'язання можна поліпшити одночасно за всіма критеріями, а в області компромісів (області Парето або області неполіпшуваних точок) при поліпшенні одного з частинних критеріїв неминуче погіршується хоча б один з інших критеріїв.

У методах, заснованих на тому чи іншому вигляді компромісу, застосовується принцип справедливого компромісу, відповідно до якого відносний рівень зниження якості по одному або декільком критеріям не повинний перевищувати відносного рівня підвищення якості за іншими критеріями. Для розв'язання задачі векторної оптимізації з використанням одного з цих методів вибирають деяку схему компромісів, що дозволяє перейти від загального векторного виразу до скалярної функції частинних критеріїв [161]. Розв'язком багатокритерійної задачі може бути тільки компромісний розв'язок, що задовольняє у тому чи іншому сенсі усім компонентам векторного критерію. Як опорна множина для обрання єдиного розв'язку багатокритерійної задачі може служити множина непокращуємих по Парето (π -оптимальних) керувань. Ця множина є непокращуємою у тому сенсі, що для кожної точки отримання єдиного розв'язку багатокритерійної задачі, що має

множину розв'язків як множина Парето, можливе шляхом зведення задачі до однокритерійної або до наперед визначеної послідовності однокритерійних задач.

1.7.2. Аналіз методів розв'язання багатокритерійних задач оптимізації

Розглянемо основні положення методів розв'язання багатокритерійних задач оптимізації, на базі яких можлива розробка чисельних методів формування оптимального керування траєкторіями аерокосмічних апаратів [159-161].

1. *Методи, що засновані на згортанні критеріїв.* Частіше усього застосовується лінійна скалярна згортка частинних критеріїв:

$$J = \sum_{j=1}^p \alpha_j I_j,$$

де I_j - частинні критерії, $\alpha_j > 0$ - вагові коефіцієнти, $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1$.

Задача зводиться до однокритерійної, якщо вдається обґрунтувати введення вагових коефіцієнтів, які характеризують відносну важливість критеріїв. Вагові коефіцієнти звичайно нормуються, складаючи у сумі одиницю. Основною перевагою методів, заснованих на згортанні критеріїв, є виконання умов оптимальності по Парето. До недоліків підходу, що розглядається, відноситься те, що звичайно відома лише порівнювальна важливість критеріїв, але важко апріорі знайти чисельні значення вагових коефіцієнтів, які задовольняють усім можливим ситуаціям. Крім проблеми обрання вагових коефіцієнтів даний підхід не враховує обмеження на частинні критерії. У ряді випадків малим приростанням вагових коефіцієнтів відповідають великі приростання цільових функцій, і отриманий розв'язок є нестійким [163].

В роботі [162] запропоновано підхід, який використовує ідею визначення ідеальної (утопічної) точки в просторі критеріїв якості і введенні норми в цьому просторі. Координати утопічної точки визначаються як розв'язки r задач оптимізації для кожного частинного критерію $I_j(x)$, $j = \overline{1, r}$, узятого окремо $I^* = \{I_1(x_1^*), I_2(x_2^*), \dots, I_r(x_r^*)\}$, і розшукується мінімальна відстань від цієї точки до області

Парето: $\min_{x \in X} R(x) = \min_{x \in X} \|I(x) - I^*(x)\|^2 = \min_{x \in X} \sum_{j=1}^r [I_j(x) - I_j(x_j^*)]^2$, $R(x)$ – квадрат евклідової норми.

Отриманий в такий спосіб компромісний розв'язок є Парето-оптимальним і забезпечує максимальну близькість критеріїв якості до своїх найкращих значень. Даний підхід не потребує вибору вагових коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, що викликає особливі ускладнення при розв'язанні задач оптимального керування. Істотним недоліком даного підходу є відсутність обмежень на вектор частинних критеріїв, що може привести до того, що знайдений розв'язок буде виходити за межі цих обмежень. Крім цього, метод досить трудомісткий, оскільки потребує розв'язання декількох задач оптимізації щодо знаходження координат утопічної точки і мінімізації відстані від її до області Парето [164].

2. *Методи, що використовують обмеження на критерії.* Багатокритерійна задача з урахуванням обмежень на частинні критерії розглядалася, наприклад, в роботі [165]. Для пошуку розв'язку задача зводилася до трудомісткої задачі нелінійного параметричного програмування, що належить до розряду багатоекстремальних задач (складність зростає експоненціально залежно від розмірності задачі). Це не дозволяє даний метод використовувати в системах реального часу.

Автоматизувати пошук єдиного розв'язку багатокритерійної задачі дає змогу метод послідовних поступок [166,167]. У цьому випадку критерії розташовуються та нумеруються у порядку убуття важливості. Потім відбувається послідовна оптимізація критеріїв, починаючи з першого, за умови наявності можливості деякого погіршення попередніх критеріїв (припустимої поступки). Після оптимізації останнього за важливістю критерію за умови виконання заданих обмежень на усі критерії, розв'язок задачі вважається знайденим. До недоліків методів, побудованих на послідовних поступок, відноситься те, що, по-перше, отриманий розв'язок у загальному випадку не оптимальний по Парето, а, по-друге, ускладнено апріорне, на усі можливі випадки, призначення величин поступок, які, як правило, непорівнянні між собою.

3. *Методи цільового програмування.* Ці методи припускають наявність певної цілі за кожним з критеріїв. Величини цілей використовуються при перетвореннях вихідної задачі в задачу цільового програмування, яка відповідно до [168] подається як мінімізація деякої суми відхилень з нормованими вагами. Основними недоліками методів цільового програмування є непорівняння різниць критеріїв і величин відповідних цілей, а також труднощі з обранням вагів.

4. *Методи, що засновані на відшукуванні компромісного розв'язку.* Схема компромісів визначає, у якому саме сенсі отриманий багатокритерійний розв'язок краще інших парето-оптимальних розв'язків. З точки зору формалізації доцільно задачу обрання схеми компромісів замінити еквівалентною задачею синтеза деякої єдиної скалярної згортки частинних критеріїв, яка в різних ситуаціях виражала би різні принципи оптимальності. Розповсюдженим підходом у розв'язках багатокритерійних задач оптимізації технічних систем є застосування *нелінійної схеми компромісів*, яка була запропонована А.М. Вороніним [169-171] та має вигляд:

$$x^* = \arg \min_{x \in X} \sum_{j=1}^r I_{mj} [I_{mj} - I_j(x)]^{-1},$$

де I_{mj} - обмеження зверху для частинного критерію I_j , $j = \overline{1, r}$.

Дана нелінійна згортка застосовується у випадку, коли не потрібно враховувати індивідуальні переваги особи, що здійснює розв'язання задачі. В іншому випадку можна використовувати згортку у наступному вигляді:

$$x^* = \arg \min_{x \in X} \sum_{j=1}^r \alpha_j I_{mj} [I_{mj} - I_j(x)]^{-1},$$

де $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, r}$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, α_j – вагові коефіцієнти, обрані з урахуванням переваг.

Переваги методу нелінійної схеми компромісів [164,171] полягають в тому, що, по-перше, даний метод є досить простим з обчислювальних витрат і при цьому дозволяє одержати розв'язання задачі з множині Парето з урахуванням обмежень за принципом «якомога далі від обмежень». По-друге, прийнята скалярна згортка при опуклості частинних критеріїв має властивість унімодальності (тобто задача стає одно екстремальною). Також нелінійна схема компромісів має властивість

безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритерійний розв'язок. У напружених ситуаціях (коли один або декілька частинних критеріїв знаходяться в небезпечній близькості від обмежень) вона діє еквівалентно мінімаксною моделі. У досить спокійних ситуаціях ця згортка діє еквівалентно моделі інтегральної оптимальності (тобто еквівалентно економічній схемі компромісів). Більш дитальніше багатокритерійні моделі оптимізації динамічних процесів будуть розглянуті у п. 5.2.

Основна складність розв'язання багатокритерійних задач полягає у тому, що оцінювання їх обчислювальної складності експоненціально залежить від розмірності простору змінних та лінійно від розмірності вектору частинних критеріїва якості критерію [171]. Тому задача побудови багатокритерійних алгоритмів термінального виведення багаторежимних ЛА у реальному часі має певні труднощі і є проблемною задачею. В роботі [172] запропонований підхід до розв'язання задачі побудови багатокритерійних алгоритмів виведення АКС на орбіту в реальному часі, заснований на застосуванні математичного апарата диференціальних перетворень. Однак він не враховує багатоетапний характер руху АКС, що може відбитися на ефективності запропонованих алгоритмів і точності досягнення термінальних умов. Крім цього, залишаються труднощі з диференціальним перетворенням нелінійних складових вихідних диференціальних рівнянь руху. У зв'язку з цим багатокритерійна задача термінального керування багаторежимними ЛА включена до переліку основних задач досліджень дисертаційної роботи.

1.8. Диференціальні перетворення та їх застосування до розв'язання задач оптимального керування

Крайові задачі, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, у загальному випадку, не мають аналітичного розв'язку і для їх розв'язання використовуються різні наближені та чисельні методи, які довели свою ефективність. Застосування більшості з них пов'язано з чисельним інтегруванням або диференціюванням, спряжено із подоланням низки математичних та

обчислювальних складностей, потребує значного обсягу обчислень і, у ряді випадків, не забезпечує заданої точності розв'язку.

В основу методів операційного числення покладено ідею функціонального перетворення деякої функції дійсної змінної, що називається оригіналом, в функцію іншої змінної, що називається зображенням, яка може бути змінною іншого класу – комплексною, цілочисельною тощо. Відомі та широко застосовуються в різних галузях науки та техніки інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є, відповідно до яких перехід з області оригіналів в область зображень здійснюється за допомогою операції інтегрування. Загальновідомі труднощі, які виникають при виконанні інтегральних перетворень над нелінійними функціями та обмежуючих їх застосування класом лінійних рівнянь з лінійними граничними умовами. Однак й для лінійних задач зворотний перехід в область оригіналів для функцій довільного вигляду є достатньо трудомісткою задачею, пов'язаною з інтегруванням аналітичних залежностей [173,174].

У класі операційних методів Г.Є. Пуховим розроблений метод диференціально-тейлоровських перетворень (ДТП) або, як його часто називають, метод основних диференціальних перетворень. Даний метод дає можливість досліджувати як лінійні так й нелінійні диференціальні рівняння та системи рівнянь, якщо функції, з яких вони утворюються, можна представити у вигляді рядів Тейлора, що збігаються. Метод ДТП дозволяє замінити операції диференціювання еквівалентними алгебраїчними операціями як у чисельному, так і в аналітичному вигляді [175-177].

Диференціально-тейлоровські перетворення порівнянно з інтегральними перетвореннями має суттєві переваги [178]:

- перехід з області оригіналів в область зображень здійснюється без внесення методичних похибок;
- розроблений математичний апарат, який дає змогу формалізувати перехід в область зображень та уникнути аналітичного визначення старших похідних від складних функцій. Встановлена система правил та формул, що визначає відповідність математичних дій в області оригіналів і в області зображень.

Зокрема, така розповсюджена нелінійна операція в області оригіналів, як множення функцій, подається формулою алгебраїчної згортки скінченої довжини для зображень цих функцій. Це дає можливість істотно спростити отримання зображень нелінійних функцій порівняно з інтегральними перетвореннями;

- зворотний перехід в область оригіналів виконується найпростішою операцією підсумовування;
- дають змогу отримувати розв'язки систем диференціальних рівнянь як в чисельному, так й в аналітичному вигляді на заданому інтервалі.

Крім цього, необхідно відзначити, що МДП може бути застосований безпосередньо до розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь без їх попередньої лінеаризації, усуває залежність змінних від часового аргумента та значно зменшує обсяг обчислень.

1.8.1. Основні положення методу диференціальних перетворень

Диференціальні перетворення дають змогу замінити в математичній моделі фізичного процесу функції $x(t)$ неперервного аргументу t їх спектральними моделями у формі дискретних функцій $X(k)$ цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$

Основними диференціальними перетвореннями функції $x(t)$ називаються функціональні перетворення вигляду:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (1.7)$$

де $x(t)$ - оригінал, що являє собою неперервну, диференційовану нескінченну кількість разів і обмежену разом із усіма своїми похідними функцію дійсного аргументу t , $X(k)$ - диференціальне зображення оригіналу (диференціальний спектр), що являє собою дискретну функцію цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$ (дискрети диференціального спектра), H - масштабна стала, яка має розмірність аргументу t і часто рівна відріzkу $0 \leq t \leq H$, на якому розглядають функцію $x(t)$.

Перехід від зображень $X(k)$ шуканих функцій до оригіналів $x(t)$ можливий або у формі степеневого ряду Тейлора (обернене перетворення тейлорівського типу):

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k), \quad (1.8)$$

та за $H = 1$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)t^k, \quad (1.9)$$

або за допомогою нетейлорівських перетворень:

$$x(t) = \varphi(t, C). \quad (1.10)$$

Тут C – вільні коефіцієнти апроксимуючої функції або відповідного ряду. Відновлення функції $x(t)$ у вигляді (1.10) більш доцільно, якщо про неї відома додаткова інформація. У цьому випадку, шукану функцію іноді вдається відновити на нескінченному напівінтервалі. Точка розкладу оригіналу $x(t)$ в ряд Тейлора в основних диференціальних перетвореннях розташовується у початковій точці часового аргументу $t = 0$.

Загальна процедура застосування диференціальних перетворень полягає у наступному. Усі функції, що належать заданій математичній моделі, а також операції над ними перетворюються в область зображень за допомогою диференціальних перетворень (1.7). Далі отримана алгебраїчна система рівнянь рекурентного типу розв'язується щодо невідомих зображень. На заключному етапі здійснюється перехід від зображень шуканих функцій до оригіналів або у вигляді відрізків степених рядів Тейлора (1.8) або за допомогою нетейлорівських перетворень (1.10).

Поряд з основними ДП в [175-177] введені зміщені диференціально-тейлорівські перетворення (ЗДТП), отримані шляхом переносу центра розкладання оригіналу $x(t)$ у степеневий ряд Тейлора з початкової точки часового аргументу $t = 0$ у довільну зміщену точку $t = t_v$. ЗДТП зі зміщенням праворуч та ліворуч від точки розкладання t_v мають вигляд:

$$X_{\nu}(k) = X(k, t_{\nu}) = \frac{h_1^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_{\nu} + \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} \Leftrightarrow x_{\nu}(\tau) = x(t_{\nu} + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{h_1} \right)^k X(k, t_{\nu}). \quad (1.11)$$

$$\bar{X}_{\nu}(k) = \bar{X}(k, t_{\nu}) = \frac{(-h_2)^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_{\nu} - \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} \Leftrightarrow x_{\nu}(\tau) = x(t_{\nu} - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{h_2} \right)^k \bar{X}(k, t_{\nu}), \quad (1.12)$$

де $x(t_{\nu} + \tau)$ і $x(t_{\nu} - \tau)$ – оригінали, які являють собою неперервні, нескінчену кількість разів диференційовані та обмежені разом з усьома своїми похідними функції; $X(k, t_{\nu})$ і $\bar{X}(k, t_{\nu})$ – диференціальні зображення оригіналів $x(t_{\nu} + \tau)$ та $x(t_{\nu} - \tau)$ відповідно, які являють собою дискретні функції цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$; τ – локальний часовий аргумент, значення якого обирається в інтервалах $0 \leq \tau \leq h_1$ і $0 \leq \tau \leq h_2$; h_1 і h_2 – масштабні сталі, які чисельно рівні відріzkам часового аргументу, на яких розглядають відповідно функції $x(t_{\nu} + \tau)$ і $x(t_{\nu} - \tau)$; \Leftrightarrow – символ відповідності між оригіналами та їх диференціальними зображеннями.

У перетвореннях (1.11) та (1.12) зліва від символу \Leftrightarrow стоїть пряме перетворення, а праворуч – обернене перетворення.

Величини H, h_1, h_2 мають бути меншими за радіус збіжності ряду в околі зміщеної точки t_{ν} , який можна визначити на основі ознаки збіжності Даламбера:

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{H^k} : \frac{H(k+1)}{H^{k+1}} \right| = H \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{X(k+1)} \right| \quad (1.13)$$

або Коши:

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{H}{\sqrt[k]{|X(k)|}}. \quad (1.14)$$

Покажемо зв'язок між $X(k, t_{\nu})$ та $\bar{X}(k, t_{\nu})$.

$$\begin{aligned} \bar{X}(k, t_{\nu}) &= \frac{(-h_2)^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_{\nu} - \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} = (-1)^k \frac{h_2^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_{\nu} - \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} = \\ &= (-1)^k \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^k \left\{ \frac{h_1^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_{\nu} - \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} \right\} = (-1)^k \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^k X(k, t_{\nu}). \end{aligned}$$

$$\text{Тобто } \bar{X}(k, t_{\nu}) = (-1)^k \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^k X(k, t_{\nu}).$$

Основні властивості диференціальних перетворень можна знайти, наприклад, в [175,176]. В роботах Ронто В.І. [179,180] проведено дослідження та надано математичне обґрунтування методу диференціальних перетворень.

1.8.2. Застосування МДП до розв'язання крайових задач та задач оптимального керування

Метод диференціальних перетворень та його модифікації часто використовуються для розв'язання крайових задач, які описуються як лінійними так й нелінійними диференціальними рівняннями. Так, в роботах [181-183] за допомогою цього методу отримано аналітичний розв'язок двоточкових крайових задач різного порядку, наближений аналітичний розв'язок сингулярно збурених крайових задач отриманий у роботах [184-186]. В роботі [178] розглядалося застосування диференціальних перетворень для розв'язання задач динаміки.

В працях [187-189] запропоновано метод моделювання фізичних процесів, що побудований на застосуванні зміщених диференціальних перетворень крайових задач. Метод дає змогу отримати аналітичний розв'язок, дозволяє суттєво зменшити обчислення при моделюванні у реальному часі та розширює область застосування аналітичних моделей на задачі з нелінійними крайовими умовами. Але це розширення області застосування може призвести до некоректної задачі, яку необхідно регуляризувати.

В роботах [190,191] запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійних крайових задач на засадах диференціальних перетворень їх математичних моделей та диференціально-тейлорівська модель нелінійних крайових задач на основі системоаналогового підходу, що дає змогу знайти точні значення невідомих крайових умов.

Вперше метод диференціальних перетворень до моделювання задач оптимального керування застосував Пухов Г.Є. [175]. Подальше розповсюдження у напрямку оптимізації керування цей метод отримав у низці робіт вітчизняних та закордонних вчених. Коротко зупинемося на отриманих результатах.

В роботі [192] запропоновано чисельний метод на основі диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних оптимальних задач керування, сформульованих у вигляді крайових задач або диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Вихідна задача оптимального керування зводиться до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, з розв'язку якої отримують чисельний оптимальний розв'язок у вигляді скінченного ряду Тейлора.

В працях [193-195] запропонований підхід на основі диференціальних перетворень для розв'язання лінійної задачі оптимальної швидкодії з закріпленими або невідомими крайовими умовами. Даний підхід зводить вихідну задачу до еквівалентної їй задачі нелінійного програмування з наступним її розв'язанням відомими методами.

В роботах [196,197] розглядається підхід для розв'язання лінійних та нелінійних квадратичних задач оптимального керування. Відповідна задача оптимального керування шляхом застосування принципу максимуму Понтрягіна зводиться до проблеми початкових значень з частково невідомими початковими значеннями. За допомогою МДП з розв'язку останньої знаходять невідомі початкові значення з наступним отриманням оптимального керування.

В роботі [198] автор використовував диференціальні перетворення для отримання наближеного розв'язку задач оптимального керування для лінійних систем з квадратичним критерієм якості. ДТП застосовуються для розв'язання необхідних умов оптимальності, отриманих з принципу максимуму Понтрягіна. Запропонований підхід дає змогу отримати закон оптимального керування із зворотним зв'язком та зменшує обчислення.

Розповсюдження методу диференціальних перетворень у напрямку застосування до оптимізації керування процесом виведення авіаційно-космічної системи на орбіту отримало у працях Баранова В.Л., Уруського О.С., Гусиніна В.П. та ін. В роботі [199] запропонована модель оптимізації динамічних процесів, побудованої на диференціальних перетвореннях математичної моделі задачі оптимального керування, що дає змогу уникнути залежності змінних від часового аргумента та з'являється можливість будувати алгоритми оптимального керування

динамічними об'єктами в реальному часі. При моделюванні задач оптимального термінального керування АКС на етапі виведення на орбіту основні диференціальні перетворення застосовувалися в роботах [25,200-203]. Отримані алгоритми оптимального програмного та замкненого керування забезпечують виконання заданих термінальних умов.

Питанню багатокритерійного синтезу оптимального керування процесом виведення авіаційно-космічних систем на орбіту з використанням диференціальних перетворень присвячені роботи [25,204-207]. В працях [157,208] запропонований метод моделювання ігрових алгоритмів термінального керування динамічними об'єктами, що заснований на диференціальних перетвореннях вихідних математичних моделей. Питання оптимізації траєкторного руху АЛА на етапі зльоту із застосуванням основних диференціальних перетворень розглянуто в роботах [209-211].

Отже, враховуючи перераховані вище роботи, диференціальні перетворення знайшли застосування в різних задачах аналізу, синтезу й оптимізації. Однак, поряд з явними перевагами даного методу, наприклад, такими, як можливість уникнути чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, розширення області застосування на нелінійні системи вказаний підхід має обмеження, притаманні усім методам, які використовують ряд Тейлора. Це стосується, насамперед, обмеження неперервного інтервалу, на якому розглядається задача, радіусом збіжності ряду Тейлора, а також необхідності забезпечення потрібної точності зменшенням інтервалу або більшою кількістю дискрет, які не можуть бути достовірно отримані з моделі внаслідок наявності завад і збурень, діючих на об'єкт. Одним з напрямків позбутися вищенаведених обмежень є застосування зміщених диференціально-тейлорівських перетворень, які дозволяють досягти зменшення похибки апроксимації (нав'язки) під час обернених перетворень в часову область у формі рядів Тейлора. ЗДТП знаходять застосування в різних областях науки та техніки, у тому числі для розв'язання крайових задач [212], при моделюванні нестационарних фізичних процесів [213], розв'язання балістичних задач [214,215], некоректних задач для автоматичних систем керування [164], оптимізації динамічних об'єктів [189].

Перевага використання зміщених ДТІ порівнянно з основними ДТІ збільшується в задачах моделювання динамічних процесів на значних часових інтервалах, однак призводить до значних ускладнень при складанні спектральної моделі динамічних процесів та збільшення кількості невідомих в системі скінчених рівнянь на n компонент вектору $x(t_v) = x_v$.

Слід зазначити, що при розв'язанні за допомогою як основних так й зміщених диференціальних перетворень крайових задач, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями, значні труднощі виникають під час отримання диференціальних зображень складних нелінійних функцій. Крім цього, відновлення розв'язку диференціального рівняння у вигляді ряду Тейлора у загальному випадку може бути неможливим через малий радіус збіжності, який може виявитися меншим за інтервал розв'язку. Оскільки на великих інтервалах похибка методу ДІ значно збільшується, його застосування є доцільним, якщо немає вимог до високої точності. Для досягнення заданої точності необхідно обчислювати велику кількість дискрет диференціального спектру, що значно збільшує складність аналітичних перетворень. Тому актуальним є подальший розвиток методу диференціальних перетворень для можливості розв'язання нелінійних задач оптимального керування та моделювання динамічних процесів на більшому інтервалі розв'язку у реальному часі.

1.9. Наукова проблема та задачі дослідження

З врахуванням проведеного аналізу сучасного стану методів розв'язку задач оптимального керування ЛА встановлено, що задача оптимального термінального керування багатоетапним рухом БЛА, яка описується нелінійними диференціальними рівняннями, до сьогодні повністю не розв'язана та існує актуальна наукова проблема щодо розвитку та розробки нових ефективних методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом БЛА на основі диференціальних перетворень та їх застосування до оптимізації багатоетапного процесу виведення БЛА у задані термінальні умови.

Поставлена мета дисертаційного дослідження досягається розв'язанням наступних задач:

1. Розвиток методу диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.
2. Розвиток методу диференціальних перетворень для розв'язання крайових задач, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями.
3. Розвиток методу дискретно-аналітичного відображення у дискретні моделі нелінійних задач термінального виведення ЛА.
4. Розробка методу оптимізації багатоетапного керування процесом термінального виведення ЛА.
5. Розробка методу багатокритерійної оптимізації процесів багатоетапного виведення ЛА у задані термінальні умови.
6. Розробка методу оптимізації гарантовано-адаптивного керування термінальним виведенням ЛА в умовах дії невизначених збурень.
7. Дослідження шляхів практичного застосування розроблених методів оптимізації до оперативного синтезу алгоритмів оптимального багатоетапного керування виведенням АКС та БАЛА у задані термінальні умови.

Висновки до розділу 1

1. Створення перспективних зразків авіаційно-космічної техніки та широкий спектр завдань, що на них покладаються, потребують розв'язання низки задач щодо виведення ЛА у задані термінальні умови та висувають проблему розробки ефективних методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА у реальному часі.
2. Зазначено, що значна частина БЛА (РН, АКС, БАЛА та ін.) відносяться до багаторежимних літальних апаратів зі змінними під час функціонування характеристиками, а траєкторія їх руху при виведенні у задані термінальні умови є багатоетапною.

3. На основі аналізу наявних відомих методів адаптивного, оптимального та робастного керування, а також методів керування на основі інтелектуальних технологій зроблено висновок, що вони використовують різноманітні апроксимації та спрощення у математичній моделі руху, потребують чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху та не дозволяють максимально реалізувати можливості ЛА при виведенні у задані термінальні умови у реальному часі.
4. Грунтуючись на аналізі особливостей процесів виведення сучасних БЛА у задані термінальні умови, на прикладі виведення АКС на орбіту та БАЛА на задану висоту, доведена необхідність постановки багатокритерійної задачі багатоетапного оптимального керування ЛА.
5. Доведена необхідність постановки задачі гарантовано-адаптивного керування багатоетапним рухом ЛА при виведенні у задані термінальні параметри в умовах дії невизначених збурювань.
6. Встановлено, що найбільш простими з обчислювальної точки зору, порівнянно з відомими методами розв'язання задач оптимального керування у реальному часі, є операційні методи, що засновані на диференціальних перетвореннях вихідної математичної моделі в області зображень, в якій відсутній неперервний часовий аргумент.
7. Відмічено, що основними обмеженнями методу диференціальних перетворень є обмеженість застосування інтервала, на якому збігаються ряди Тейлора шуканих функцій, складність отримання диференціальних зображень нелінійних функцій, необхідність обчислення великої кількості дискрет диференціального спектру для досягнення необхідної точності, що значно збільшує складність аналітичних перетворень.
8. Зазначено, що на теперішній час існує необхідність подальшого розвитку методу основних диференційних перетворень для його застосування до розв'язання нелінійних задач оптимізації багатоетапного керування ЛА, що є актуальним для максимальної реалізації їх можливостей під час виведення у задані термінальні умови.

9. Сформульовано наукову проблему та задачі досліджень.

Список публікацій здобувача за матеріалами першого розділу

1. Гусинін А. В. Системи повітряного старту ракет-носіїв легкого класу / А. В. Гусинін // Наукові вісті НТУУ. – 2010. - №1. – С.140-145.
2. Гусынин А. В. Аэростатические платформы воздушного старта ракет-носителей / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // АВИА-2009: IX міжнародна науково-практична конференція, 21-23 сентября 2009 г. – К., 2009. – С. 16.25-16.28.
Особистий внесок здобувача: аналіз можливості повітряного старту ракет-носіїв з аеростатичних платформ.
3. Гусинін А. В. Оцінка можливості старту ракети-носія з дирижабля / А.В. Гусынин // Людина і космос: XV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 10-12 квітня 2013 г.: тези доп. – Дніпропетровськ (Україна), 2013. – С. 301.
4. Гусинін А.В. Кероване повітроплавання / В.П. Гусынин, А.В. Гусынин. – К.: Кафедра, 2012. – 364 с.
Особистий внесок здобувача: розділи монографії: аеростатика, стійкість та керованість, пілотування, рівняння руху аеростатичних літальних апаратів; розробка спектральної моделі динаміки польоту дирижабля, проведення математичного моделювання руху дирижабля з керованим вектором тяги.
5. Gusynin A. V. The project of semi-blimp airship “D-1500” / A. Gusynin, G. Kozachenko // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr. 71164.
Особистий внесок здобувача: проект системи керування напівм'якого дирижабля, що базується на автоматичному керуванні відхиленням вектору тяги.
6. Гусынин А.В. Проектирование дирижабля с уменьшенной статической устойчивостью // Современные направления теоретических и прикладных исследований 2010: международная научно-практическая конференция, 15-26 марта 2010 г.: тези доп. – Одесса (Украина). – Т.2. - С. 57-58.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА БАЗІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

2.1. Модифікований метод диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь

2.1.1. Багатоетапний метод диференціальних перетворень

Для збільшення інтервалу розв'язку нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та підвищення точності їх розв'язку застосуємо підхід, що поєднує метод основних диференціальних перетворень та метод припасовування. Даний підхід полягає у розбитті інтервалу розв'язку на підінтервали, формуванні умов сполучення кінцевих значень попереднього підінтервалу з початковими значеннями наступного підінтервалу, пошуку на кожному з підінтервалів розв'язку за допомогою МДП з врахуванням умов сполучення та отриманні загального розв'язку рівняння у вигляді об'єднання розв'язків на підінтервалах [216-218]. Метод на основі поєднання МДП та методу припасовування у подальшому будемо називати багатоетапним методом диференціальних перетворень (БМДП).

Нехай, нелінійне звичайне диференціальне рівняння m -го ступеня має вигляд:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.1)$$

із заданими початковими умовами:

$$x^{(p)}(0) = c_p, \quad p = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.2)$$

За допомогою методу основних диференціальних перетворень може бути отриманий розв'язок задачі (2.1)-(2.2) у вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)t^k, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

де

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

або за $H = 1$

$$X(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4')$$

Як правило, для практичних застосувань диференціальних перетворень, функцію $x(t)$ визначають у вигляді скінченного ряду:

$$x(t) \approx y(t) = \sum_{k=0}^N X(k)t^k, \quad t \in [0, T].$$

Розіб'ємо інтервал $[0, T]$ на r підінтервалів довжиною $T_i = t_{i-1} - t_i, i = \overline{1, r}, \sum_{i=1}^r T_i = T$.

У випадку, коли підінтервали мають однаковий крок $h = T/r$, i -ий вузол розбиття дорівнює $t_i = i \cdot h$. Застосовуючи основні диференціальні перетворення до задачі (2.1)-(2.2) на першому підінтервалі $[0, t_1]$ отримуємо наближений розв'язок у вигляді:

$$x_1(t) \approx y_1(t) = \sum_{k=0}^N X_1(k)t^k, \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.5)$$

Враховуючи початкові умови $x_1^{(p)}(0) = c_p$ і вираз (2.4), можна знайти для першого підінтервалу усі значення диференціального спектру $X_1(k), k = 0, 1, 2, \dots, N$. Для $i \geq 2$ і для кожного наступного підінтервалу $[t_{i-1}, t_i]$ будуть використовуватися початкові умови, які є кінцевими умовами попереднього підінтервалу, тобто $x_i^{(p)}(t_{i-1}) = x_{i-1}^{(p)}(t_{i-1})$. Тоді вираз (2.4) для i -ого підінтервалу набуде вигляду:

$$X_i(k) = \frac{h^k}{k!} \left[\frac{d^k x_{i-1}(t)}{dt^k} \right]_{t=t_{i-1}}, \quad k \geq 0. \quad (2.6)$$

Застосуємо тепер основні диференціальні перетворення до задачі (2.1)-(2.2) на інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$. Процес повторюється і, як результат, отримуємо послідовність наближених розв'язків $x_i(t), i = 0, 1, \dots, r$ для розв'язку $x(t)$, де:

$$x_i(t) \approx y_i(t) = \sum_{k=0}^N X_i(k)(t-t_{i-1})^k, \quad t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (2.7)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.1) з початковими умовами (2.2) отримуємо у вигляді об'єднання розв'язків на підінтервалах:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) \approx y_1(t), & t \in [0, t_1] \\ x_2(t) \approx y_2(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \dots \\ x_r(t) \approx y_r(t), & t \in [t_{r-1}, T] \end{cases}, \quad (2.8)$$

за $r=1$ маємо $h=T$ і БМДП зводиться до МДП.

Приклад. Розглянемо квадратичне диференціальне рівняння Рікатті:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - x^2(t) + 1, \quad t \in [0, 2], \quad x(0) = 0. \quad (2.9)$$

Точний розв'язок рівняння (2.9) має вигляд [219]:

$$x(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right).$$

З урахуванням властивостей диференціальних перетворень запишемо рівняння (2.9) у спектральному вигляді:

$$(k+1)X(k+1) = 2X(k) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} X(k-\ell)X(\ell) + \sigma(k), \quad (2.10)$$

$$X(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{де } \sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Заданий інтервал розв'язання поділимо на r підінтервалів однакової довжини $h = 2/r$ і запишемо рівняння (2.10) для кожного підінтервалу:

$$(k+1)X_i(k+1) = 2X_i(k) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} X_i(k-\ell)X_i(\ell) + \sigma(k), \quad (2.11)$$

$$X_1(0) = x_1(0) = x(0) = 0, \quad x_i(t_{i-1}) = x_{i-1}(t_{i-1}), \quad i = 2, \dots, r.$$

Підставляючи у (2.11) цілочислові значення $k = 0, 1, 2, \dots$ отримуємо дискрети диференціального спектру і з використанням (2.7) знаходимо наближені розв'язки рівняння (2.9) на кожному підінтервалі. Об'єднуючи дані розв'язки отримуємо загальний наближений розв'язок рівняння (2.9) на заданому інтервалі:

$$x(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 - \dots$$

На рис.2.1 показано порівняння між точним розв'язком заданого рівняння, розв'язком за МДП ($r = 1$) та розв'язком за БМДП при розбитті заданого інтервалу на 2, 4 и 10 підінтервалів. Розв'язки отримано з використанням 6-ти перших дискрет диференціального зображення функції $x(t)$.

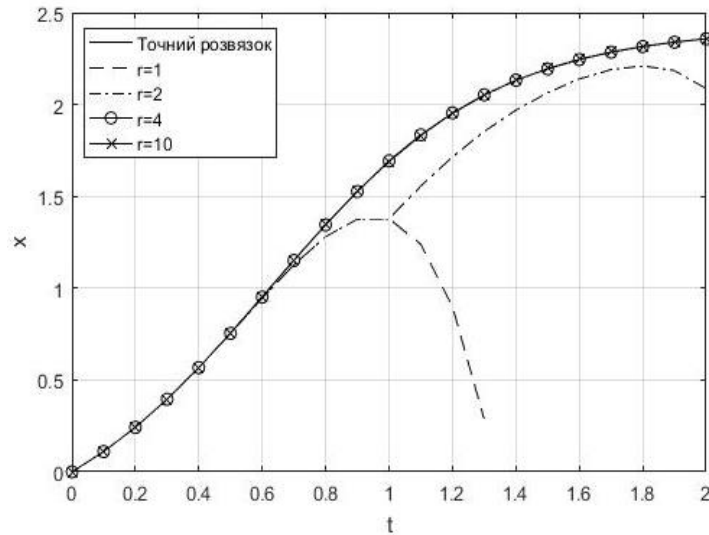


Рис.2.1. Порівняння розв'язків рівняння (2.9)

В табл.2.1 наведена відносна похибка отриманих розв'язків.

Таблиця 2.1

Відносна похибка розв'язку

T	Точний розв'язок	Кількість під інтервалів							
		r = 1		r = 2		r = 4		r = 10	
		Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r
0.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.110295196	0.110295177	8.06e-09	0.110295177	8.06e-09	0.110295177	8.06e-09	0.110295177	8.25e-09
0.2	0.241976799	0.241974042	1.17e-06	0.241974042	1.17e-06	0.241974042	1.17e-06	0.241974042	1.17e-06
0.3	0.395104849	0.395052593	2.22e-05	0.395052593	2.22e-05	0.395052592	2.22e-05	0.395101635	1.36e-06
0.4	0.567812166	0.567384160	1.82e-04	0.567384160	1.82e-04	0.567384159	1.82e-04	0.567802478	4.11e-06
0.5	0.756014393	0.753819406	9.31e-04	0.753819406	9.31e-04	0.753819406	9.31e-04	0.756004030	4.40e-06
0.6	0.953566217	0.945254325	3.53e-03	0.945254325	3.53e-03	0.951305884	9.59e-04	0.953557089	3.87e-06
0.7	1.152948967	1.127566235	1.08e-02	1.127566235	1.08e-02	1.150720089	9.45e-04	1.152940023	3.79e-06
0.8	1.346363655	1.280437785	2.80e-02	1.280437785	2.80e-02	1.344380575	8.41e-04	1.346365965	-9.80e-07
0.9	1.526911313	1.376068943	6.40e-02	1.376068943	6.40e-02	1.526090723	3.48e-04	1.526913446	-9.05e-07
1.0	1.689498392	1.377777000	1.32e-01	1.377777000	1.32e-01	1.693269326	-1.60e-03	1.689501594	-1.36e-06
1.1	1.831240782	1.238484565	2.51e-01	1.555603647	1.17e-01	1.834477382	-1.37e-03	1.831243482	-1.15e-06
1.2	1.951360119	0.899095559	4.46e-01	1.714827696	1.00e-01	1.954060293	-1.15e-03	1.951356182	1.67e-06
1.3	2.050735693	0.286759215	7.48e-01	1.852929091	8.39e-02	2.052844842	-8.95e-04	2.050732449	1.38e-06
1.4	2.131326610	-0.686977929	1.20	1.969328780	6.87e-02	2.132338811	-4.29e-04	2.131321347	2.23e-06
1.5	2.195633294	-2.128132031	1.83	2.064533078	5.56e-02	2.193498948	9.05e-04	2.195629127	1.77e-06
1.6	2.246285959	-4.162353955	2.72	2.138696629	4.56e-02	2.244614083	7.09e-04	2.246283265	1.14e-06
1.7	2.285778286	-6.937113270	3.91	2.189603939	4.08e-02	2.284481384	5.50e-04	2.285776201	8.84e-07
1.8	2.316324737	-10.623994260	5.49	2.210069511	4.51e-02	2.315340893	4.17e-04	2.316324057	2.89e-07
1.9	2.339806374	-15.421103928	7.53	2.184756548	6.58e-02	2.339163535	2.73e-04	2.339805856	2.20e-07
2.0	2.357771653	-21.555592000	10.14	2.086414259	1.15e-01	2.357772701	-4.44e-07	2.357771729	-3.19e-08

Наведений приклад показує доцільність та ефективність застосування багатоетапного методу диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь на збільшених інтервалах розв'язку порівняно з методом основних диференціальних перетворень.

2.1.2. Апроксимація нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана

Часто при розв'язанні нелінійних диференціальних рівнянь або нелінійних крайових задач виникають труднощі, пов'язані з їх складною нелінійністю. Метод основних диференціальних перетворень довів свою ефективність при розв'язанні таких задач, але, як показав аналіз відомих публікацій, нелінійні функції, що використовувалися в цих дослідженнях, обмежувалися поліномами від функцій та їх похідних. Для інших типів нелінійностей диференціальні перетворення обчислювалися шляхом розкладення нелінійної функції в нескінченний степеневий ряд з наступним проведенням диференціальних перетворень цього ряду. Недолік цього підходу полягає у зростанні об'єму обчислень при визначенні диференціальних перетворень таких нелінійних функцій [220]. Іншим шляхом отримання диференціальних перетворень нелінійних членів є застосування підходу, що заснований на використанні властивостей диференціальних перетворень і обчислень для отримання канонічного рівняння [221]. Канонічне рівняння розв'язується для певного диференціального перетворення нелінійного члену. Однак, цей підхід потребує низки диференціювань, алгебраїчних дій та обчислень диференціальних перетворень для інших функцій, що є більш утрудненим у випадку складних нелінійностей.

Нижче розглядається більш ефективний підхід щодо використання основних диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь та нелінійних крайових задач. В основу даного підходу покладено розбиття рівняння на лінійні та нелінійні складові та заміщення невідомих нелінійних складових рівняння поліномами Адоміана, у яких компоненти залежних змінних заміщені їх

відповідними компонентами диференціальних перетворень того самого індексу. Перевагами цього підходу є сполучення властивостей поліномів Адоміана та наявність ефективних алгоритмів швидкого їх обчислення [222,223].

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння в операторній формі з відповідними початковими умовами:

$$Px + Nx + Qx = c, \quad (2.12)$$

де $x = x(t)$; $P = \frac{d^n}{dt^n}$ – нелінійний диференціальний оператор, $n > 1$; $N = \frac{d}{dt}$ – лінійний диференціальний оператор, Q – нелінійний оператор нелінійної функції $f(x)$, c – права частина рівняння.

Розв'язуючи (2.12) відносно Px отримуємо:

$$Px = c - Nx - Qx. \quad (2.13)$$

Застосовуючи обернений оператор P^{-1} до обох частин рівняння (2.13) та враховуючи початкові умови отримуємо:

$$P^{-1}Px = P^{-1}c - P^{-1}Nx - P^{-1}Qx. \quad (2.14)$$

Якщо рівняння (2.12) описує проблему початкових значень та P є лінійним диференціальним оператором, то інтегральний оператор P^{-1} може бути розглянутий як визначений інтеграл від t_0 до t . Якщо P є диференціальним оператором другого порядку, то P^{-1} є подвійним інтегральним оператором та $P^{-1}Px = x(t) - x(t_0) - (t - t_0)x'(t_0)$. Для крайових задач застосовуються невизначені інтеграли і константи обчислюються із заданих умов.

У загальному випадку розв'язок рівняння (2.14) має вигляд:

$$x = w - P^{-1}(Nx) - P^{-1}(Qx), \quad (2.15)$$

де $w = A + Bt + P^{-1}c$.

Тут функція w являє собою члени, які з'явилися під час інтегрування складової c (права частина рівняння) рівняння (2.12) з урахуванням заданих початкових умов.

Відповідно до методу поліномів Адоміана нелінійні члени рівняння апроксимуються рядом [224]:

$$Qx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (2.16)$$

точний розв'язок $x(t)$ шуканого рівняння подається у вигляді ряду:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \quad (2.17)$$

а наближений розв'язок у вигляді скінченного ряду:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N x_n(t). \quad (2.17')$$

Поліноми Адоміана A_n визначаються наступним виразом:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i \right) \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad (2.18)$$

компоненти яких для нелінійної функції $f(t) = f[x(t)]$ обчислюються за формулами [225]:

$$\begin{aligned} A_0 &= f(x_0), \quad A_1 = x_1 f'(x_0), \\ A_2 &= x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 f''(x_0), \\ A_3 &= x_3 f'(x_0) + x_1 x_2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 f'''(x_0), \\ A_4 &= x_4 f'(x_0) + \left(x_1 x_3 + \frac{1}{2!} x_2^2 \right) f''(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 x_2 f'''(x_0) + \frac{1}{4!} x_1^4 f''''(x_0), \\ A_5 &= x_5 f'(x_0) + (x_2 x_3 + x_1 x_4) f''(x_0) + \frac{1}{2!} (x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2) f'''(x_0) + \\ &+ \frac{1}{3!} x_1^3 x_2 f''''(x_0) + \frac{1}{5!} x_1^5 f''''''(x_0), \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Видно, що поліноми A_n сформовані таким чином, що A_0 залежить тільки від x_0 , A_1 залежить тільки від x_0, x_1 , A_2 залежить тільки від x_0, x_1, x_2 і т.д.

Компоненти розв'язку (2.15) x_0, x_1, x_2, \dots визначаються з використанням наступних рекурентних співвідношень:

$$x_0 = w, \quad x_{k+1} = -P^{-1} N x_k - P^{-1} A_k, \quad k \geq 0. \quad (2.20)$$

Покажемо, що диференціальне зображення складної нелінійної функції $f[x(t)]$ дорівнює $F(k) = \tilde{A}_k$, де \tilde{A}_k є поліноми Адоміана A_k із заміщенням в останніх змінних $x_k(t)$ на їх зображення $X(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Використовуючи диференціальне перетворення (2.4'), з урахуванням властивостей диференціальних перетворень та правил отримання диференціальних зображень суперпозиції оригіналів [175,176] отримуємо:

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{0!} [f(x(t))]_{t=t_0} = f(x(t_0)) = f(X(0)) = \tilde{A}_0. \\
 F(1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dt} f(x(t)) \right]_{t=t_0} = x'(t_0) f'(x(t_0)) = X(1) f'(X(0)) = \tilde{A}_1. \\
 F(2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right]_{t=t_0} = \frac{1}{2!} [x''(t_0) f'(x(t_0)) + (x'(t_0))^2 f''(x(t_0))] = \\
 &= X(2) f'(X(0)) + \frac{1}{2!} (X(1))^2 f''(X(0)) = \tilde{A}_2. \\
 F(3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{dt^3} f(x(t)) \right]_{t=t_0} = \\
 &= \frac{1}{3!} [x'''(t_0) f'(x(t_0)) + 3x'(t_0) x''(t_0) f''(x(t_0)) + (x'(t_0))^3 f'''(x(t_0))] = \\
 &= X(3) f'(X(0)) + X(1) X(2) f''(X(0)) + \frac{1}{3!} (X(1))^3 f'''(X(0)) = \tilde{A}_3.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

З виразу (2.21) видно, що компоненти (дискрети) диференціального перетворення $F(k)$ мають таку саму математичну структуру як й поліноми Адоміана (2.19), у котрих компоненти рішень $x_i(t)$ замінені відповідними компонентами диференціального перетворення $X(i)$, $i \geq 0$ того самого індексу.

Таким чином маємо:

$$F(k) = \tilde{A}_k. \tag{2.21'}$$

де \tilde{A}_k є поліноми Адоміана A_k із заміщенням в останніх змінних $x_k(t)$ на їх зображення $X(k)$, того самого індексу $k = 0, 1, 2, \dots$

Тоді зворотне перетворення нелінійної функції може бути записано у вигляді:

$$f[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k (t - t_0)^k.$$

Перевагою використання вищенаведеного підходу для обчислення диференціальних перетворень нелінійних функцій порівняно з алгоритмом, запропонованим в роботі [221] є те, що цей алгоритм застосовується безпосередньо до нелінійних функцій задачі, що розглядається, без необхідності проведення

диференціювання або алгебраїчних перетворень, або навіть без обчислень диференціальних перетворень інших функцій для отримання необхідної.

Покажемо тепер, що якщо складна нелінійна функція має вигляд $f(t) = x(t) * g[y(t)]$, то її диференціальне зображення дорівнює $F(k) = \sum_{k_1=0}^k X(k_1) \tilde{A}_{k-k_1}$,

де $X(k_1)$ є диференціальне перетворення функції $x_{k_1}(t)$, \tilde{A}_{k-k_1} - поліноми Адоміана A_{k-k_1} функції $g(y(t))$ із заміщенням в останніх змінних $y_{k-k_1}(t)$ на їх зображення того самого індексу $k = 0, 1, 2, \dots$, $k_1 = 0, \dots, k$.

Використовуючи визначення (2.4'), з урахуванням властивостей диференціальних перетворень, правил отримання диференціальних зображень добутку оригіналів та суперпозиції оригіналів а також співвідношень (2.19), отримаємо наступні дискрети:

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{0!} \{x(t)g(y(t))\}_{t=t_0} = x(t_0)g(y(t_0)) = X(0)g(Y(0)) = X(0)\tilde{A}_0, \\
 F(1) &= \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{dt} [x(t)g(y(t))] \right\}_{t=t_0} = \\
 &= x'(t_0)g(y(t_0)) + x(t_0)y'(t_0)g'(y(t_0)) = X(1)\tilde{A}_0 + X(0)\tilde{A}_1, \\
 F(2) &= \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} [x(t)g(y(t))] \right\}_{t=t_0} = \\
 &= \frac{1}{2!} \left\{ x''(t_0)g(y(t_0)) + 2x'(t_0)y'(t_0)g'(y(t_0)) + \right. \\
 &\quad \left. + x(t_0)[y''(t_0)g'(y(t_0)) + (y'(t_0))^2 g''(y(t_0))] \right\} = X(2)\tilde{A}_0 + X(1)\tilde{A}_1 + X(0)\tilde{A}_2, \\
 F(3) &= \frac{1}{3!} \left\{ \frac{d^3}{dt^3} [x(t)g(y(t))] \right\}_{t=t_0} = \\
 &= \frac{1}{3!} \left\{ x'''(t_0)g(y(t_0)) + 3x''(t_0)y'(t_0)g'(y(t_0)) + \right. \\
 &\quad \left. + 3x'(t_0)[y''(t_0)g'(y(t_0)) + (y'(t_0))^2 g''(y(t_0))] + \right. \\
 &\quad \left. + x(t_0)[y'''(t_0)g'(y(t_0)) + 3y'(t_0)y''(t_0)g''(y(t_0)) + (y'(t_0))^3 g'''(y(t_0))] \right\} = \\
 &= X(3)\tilde{A}_0 + X(2)\tilde{A}_1 + X(1)\tilde{A}_2 + X(0)\tilde{A}_3.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

У загальному випадку, маємо:

$$F(k) = \sum_{k_1=0}^k X(k_1) \tilde{A}_{k-k_1}. \tag{2.22'}$$

Порівняння виразів (2.19) та (2.22) показує, що компоненти диференціального зображення (2.22) оригіналу нелінійної функції $f(t) = x(t)g[y(t)]$ та відповідні компоненти полінома Адоміана (2.19) мають однакову математичну структуру. Тому можна вважати, що компоненти диференціального зображення оригіналу складної нелінійної функції $f(t) = x(t) * g[y(t)]$ можуть бути отримані з добутку диференціального перетворення $X(k_1)$ функції $x_{k_1}(t)$ на поліноми Адоміана A_{k-k_1} функції $g[y(t)]$ із заміщенням в останніх змінних $y_{k-k_1}(t)$ на їх зображення \tilde{A}_{k-k_1} того самого індексу $k = 0, 1, 2, \dots, k_1 = 0, \dots, k$.

Даний підхід може бути застосований для розв'язання як нелінійних диференціальних рівнянь [226-228] та систем диференціальних рівнянь [229,230], так й для розв'язання нелінійних крайових задач [231,232]. Питання збіжності методу поліномів Адоміана при застосуванні до розв'язання різних типів рівнянь, у тому числі нелінійних диференціальних рівнянь, систем рівнянь та нелінійних крайових задач розглянуто багатьма авторами [233-236] та у даній роботі не розглядається.

Приклад.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= 2x(t) + 4x(t) \cdot \ln x(t), \quad x(t) > 0, \quad t \in [0, 2], \\ x(0) &= 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Точний розв'язок задачі (2.23) дорівнює $x(t) = e^{t^2}$ [227].

Спектральна модель рівняння (2.23) має вигляд:

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)X(k+2) &= 2X(k) + 4 \sum_{k_1=0}^k X(k_1)A_{k-k_1}, \\ X(0) &= 1, \quad X(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

де A_{k-k_1} для $k_1 = 0, 1, 2, \dots, k; k = 0, 1, 2, \dots$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln X(0), \quad A_1 = X(1)/X(0), \quad A_2 = X(2)/X(0) - [X(1)/X(0)]^2/2, \\ A_3 &= X(3)/X(0) + X(1)X(2)/[X(0)]^2 - [X(1)X(0)]^3/3, \\ A_4 &= X(4)/X(0) - \left\{ 2X(1)X(3) + [X(2)]^2 \right\} / [X(0)]^2 + [X(1)]^2 / [X(0)]^3 - [X(1)X(0)]^4/4, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

У результаті отримуємо наступні компоненти (дискрети) диференціального перетворення:

$$X(0) = 1, X(1) = 0, X(2) = 1, X(3) = 0, X(4) = 1/2, X(5) = 0, X(6) = 1/6, X(7) = 0, X(8) = 1/24, \dots$$

Тоді наближений розв'язок (2.23) буде мати вигляд:

$$x(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8 + \dots$$

що являє собою розкладення функції e^{t^2} у ряд Тейлора.

2.1.3. Модифікований метод диференціальних перетворень

Основна ідея запропонованого модифікованого методу диференціальних перетворень (ММДП) полягає у поєднанні методу основних диференціальних перетворень, методу припасовування з апроксимацією нелінійної частини рівняння поліномами Адоміана. Враховуючи наявність низки ефективних методів обчислення поліномів Адоміана, такий підхід дає змогу подолати математичні труднощі при обчисленні диференціальних зображень складних нелінійностей, істотно зменшити обчислювальні витрати при знаходженні наближеного розв'язку нелінійного диференціального рівняння та розширити сферу застосування основних диференціальних перетворень.

Для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь доцільно застосовувати модифікований метод диференціальних перетворень з апроксимацією нелінійної частини рівняння поліномами Адоміана за наступним алгоритмом. Складається спектральна модель шуканого диференціального рівняння. Заданий інтервал розв'язку розбивається на декілька підінтервалів. В спектральній моделі диференціальне зображення оригіналу нелінійної функції $F(k)$ заміщується компонентами \tilde{A}_k , які отримуються з компонент A_k полінома Адоміана шляхом заміщення в ньому кожного елементу x_k на відповідне диференціальне зображення $X(k)$ того самого індексу k . Потім для кожного підінтервалу обчислюються дискрети диференціального зображення рівняння і, з урахуванням (2.3), отримують

оригінал розв'язку диференціального рівняння на даному підінтервалі. Сумарний розв'язок шуканого рівняння отримуємо шляхом об'єднання розв'язків на підінтервалах.

Приклад.

Розглянемо розв'язок нелінійного диференціального рівняння (2.23) на інтервалі $t \in [0, 2]$. Даний інтервал поділимо на r підінтервалів однакової довжини $h = 2/r$ і запишемо спектральну модель рівняння (2.23) для кожного з підінтервалів з урахуванням сполучення кінцевих умов попереднього підінтервалу з початковими умовами наступного підінтервалу у вигляді:

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)X_i(k+2) &= 2X_i(k) + \tilde{A}_{ki}, \\ X_1(0) = x_1(0) = x(0) = 1, X_1(1) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) = 0, x_i(t_{i-1}) &= x_{i-1}(t_{i-1}), i = 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Відповідно до процедури (2.22), для нелінійної частини рівняння (2.23) $f(x) = 4x \ln x$ обчислюємо для кожного з підінтервалів компоненти A_{ki} поліномів Адоміана та відповідні компоненти \tilde{A}_{ki} для заміщення ними компонент диференціальних зображень:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0i} &= 4X_i(0) \ln X_i(0), \tilde{A}_{1i} = 4X_i(1)(\ln X_i(0) + 1), \tilde{A}_{2i} = 4X_i(2)(\ln X_i(0) + 1) + 2X_i^2(1)X_i^{-1}(0), \\ \tilde{A}_{3i} &= 4X_i(3)(\ln X_i(0) + 1) + 4X_i(1)X_i(2)X_i^{-1}(0) - \frac{4}{3!}X_i^3(1)X_i^{-2}(0), \\ \tilde{A}_{4i} &= 4X_i(4)(\ln X_i(0) + 1) + 4X_i^{-1}(0) \cdot (X_i(1)X_i(3) + \frac{1}{2!}X_i^2(2)) - \frac{4}{2!}X_i^2(1)X_i(2)X_i^{-2}(0) + \frac{8}{4!}X_i^4(1)X_i^{-3}(0), \dots \end{aligned}$$

Підставляючи значення \tilde{A}_{ki} у (2.26) з урахуванням (2.17') знаходимо наближені розв'язки рівняння на кожному підінтервалі. Об'єднуючи дані розв'язки отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.23) на заданому інтервалі.

На рис.2.2 показано порівняння між точним розв'язком заданого рівняння, розв'язком за методом основних диференціальних перетворень ($r = 1$) та розв'язком за запропонованим модифікованим методом диференціальних перетворень при розбитті заданого інтервалу на 2, 4 і 10 підінтервалів. Розв'язки отримано з використанням 5-ти перших дискрет диференціального зображення функції $x(t)$.

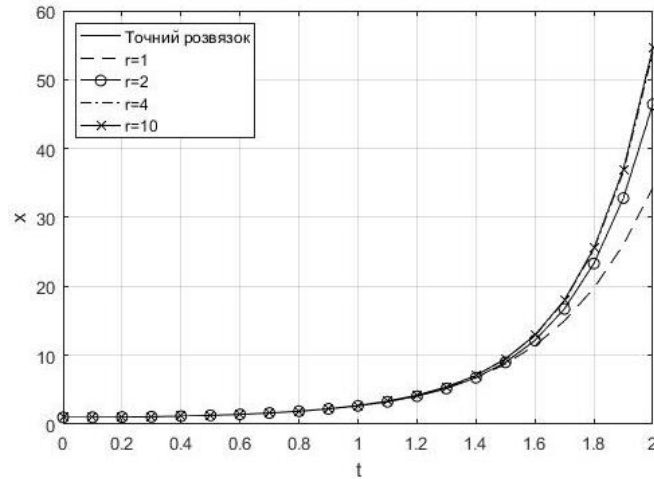


Рис. 2.2. Порівняння розв'язків рівняння (2.23)

У табл.2.2 наведена відносна похибка отриманих розв'язків.

Таблиця 2.2

Відносна похибка розв'язку

t	Точний розв'язок	Кількість під інтервалів							
		r = 1		r = 2		r = 4		r = 10	
		Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r	Розв'язок	ε_r
0.0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0.1	1.010050	1.010050	1.53e-14	1.010050	0	1.010050	0	1.010050	0
0.2	1.040811	1.040811	1.57e-11	1.040811	0	1.040811	0	1.040811	0
0.3	1.094174	1.094174	9.15e-10	1.094172	3.66e-08	1.094172	3.66e-08	1.094174	0
0.4	1.173511	1.173509	1.64e-08	1.173483	5.13e-07	1.173483	5.13e-07	1.173509	3.66e-08
0.5	1.284025	1.284017	1.56e-07	1.283854	3.13e-06	1.283854	3.13e-06	1.284023	3.66e-08
0.6	1.433329	1.433276	9.81e-07	1.432576	1.38e-05	1.432871	8.39e-06	1.433325	7.33e-08
0.7	1.632316	1.632060	4.69e-06	1.629658	4.87e-05	1.631536	1.43e-05	1.632309	1.28e-07
0.8	1.896481	1.895481	1.83e-05	1.888491	1.46e-04	1.895302	2.16e-05	1.896469	2.20e-07
0.9	2.247908	2.244559	6.13e-05	2.226624	3.90e-04	2.246104	3.30e-05	2.247888	3.66e-07
1.0	2.718282	2.708333	1.82e-04	2.666667	9.45e-04	2.715011	5.99e-05	2.718249	6.04e-07
1.1	3.353485	3.326626	4.92e-04	3.254793	1.81e-03	3.347628	1.07e-04	3.353429	1.03e-06
1.2	4.220696	4.153623	1.23e-03	4.064104	2.87e-03	4.211602	1.67e-04	4.220606	1.65e-06
1.3	5.419481	5.262406	2.88e-03	5.186252	4.27e-03	5.405905	2.49e-04	5.419326	2.84e-06
1.4	7.099327	6.750635	6.39e-03	6.758059	6.25e-03	7.078025	3.90e-04	7.099069	4.73e-06
1.5	9.487736	8.747559	1.36e-02	8.983339	9.24e-03	9.447642	7.34e-04	9.487280	8.35e-06
1.6	12.935817	11.422572	2.77e-02	12.163010	1.42e-02	12.861312	1.36e-03	12.935038	1.43e-05
1.7	17.993309	14.995544	5.49e-02	16.735113	2.30e-02	17.871947	2.22e-03	17.991899	2.58e-05
1.8	25.533722	19.749154	1.06e-01	23.326359	4.04e-02	25.341195	3.53e-03	25.531245	4.54e-05
1.9	36.966053	26.043515	2.00e-01	32.816795	7.60e-02	36.640983	5.95e-03	36.961451	8.43e-05
2.0	54.598150	34.333333	3.71e-01	46.419219	1.50e-01	53.940771	1.20e-02	54.589832	1.52e-04

Вищенаведені результати показують високу ефективність застосування запропонованого методу до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь та спрощення знаходження зображень нелінійних складових вихідного диференціального рівняння.

2.2. Метод розв'язання нелінійних крайових задач

Запропонований у п.2.1.3 модифікований метод диференціальних перетворень покладений в основу методу розв'язання крайових задач, що описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Суть методу пояснимо на прикладі розв'язання двоточної нелінійної крайової задачі, в якій граничні умови задаються в двох точках, а об'єкт описується нелінійним диференціальним рівнянням:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)], \quad t \in [t_0, T] \quad (2.27)$$

з граничними умовами:

$$x(t_0) = 0, \quad (2.28)$$

$$a \cdot x(T) + bx(T) = c. \quad (2.29)$$

Тут a, b, c – задані константи. Припускається, що функція $x(t)$ та її похідні, а також нелінійна за x функція $f[t, x(t)]$ є неперервними функціями, а рівняння (2.27) має єдиний розв'язок.

Запропонований метод розв'язання нелінійної крайової задачі полягає у виконанні наступної послідовності етапів [230,231]:

1. Рівняння (2.27) записується в області зображень:

$$(k+1)X(k+1) = F(k). \quad (2.30)$$

Тут $F(k)$ – диференціальне зображення нелінійної функції $f[t, x(t)]$.

2. З урахуванням (2.4) і граничної умови (2.29) маємо наступне значення для першої дискрети розв'язку: $X(1) = 0$. Для нульової дискрети приймемо $X(0) = \alpha$, де значення параметру α буде визначено у подальшому.

3. Диференціальне зображення $F(k)$ заміщуємо відповідним поліномом Адоміана, у якому кожна компонента розв'язку $x_k(t)$ заміщується на відповідний компонент диференціального зображення $X(k)$ того самого індексу:

$$F(k) = \tilde{A}_k \quad \text{або} \quad F(k) = \sum_{k_1=0}^k X(k_1) \tilde{A}_{k-k_1}. \quad (2.31)$$

Вигляд заміщення залежить від вигляду нелінійної функції, як це показано у п. 2.1.2.

4. Підставляючи (2.31) в (2.30), з урахуванням (2.3) і п.2 отримуємо розв'язок нелінійної крайової задачі (2.27) - (2.29) у наступному вигляді:

$$x(t) = \alpha + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{A}_{k-1}}{k+1} t^{k+1}. \quad (2.32)$$

5. Підставляючи розв'язок (2.32) в крайову умову (2.29) отримаємо нелінійне алгебраїчне рівняння для визначення невідомого параметру a .

6. Підставляючи знайдене значення параметру a у вираз (2.32) отримаємо розв'язок нелінійної крайової задачі (2.26) – (2.29).

Приклад.

Розглянемо крайову задачу, що описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= 1 - x_2^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

за додаткових умов

$$\begin{aligned} x_{20} + x_{2T} &= th1, \\ x_1(0) = x_{10} = 0, \quad x_1(T) = x_{1T} &= \ln(ch1), \\ x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(T) = x_{2T}, \quad t \in [0, T], T = 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

У даному прикладі невідомими крайовими умовами є x_{20}, x_{2T} , які зв'язані першим рівнянням системи (2.34), а крайова задача (2.33) - (2.34) має наступний точний розв'язок [191,232]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ln(cht), \quad x_2(t) = tht, \\ x_2(0) &= 0, \quad x_2(T) = th1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Запишемо крайову задачу (2.33) - (2.34) в області зображень:

$$\begin{aligned} X_1(k+1) &= \frac{1}{k+1} X_2(k), \\ X_2(k+1) &= \frac{1}{k+1} [\mathfrak{b}(k) - \tilde{A}_k], \\ X_2(0) + X_2(T) &= th1, \\ X_1(0) = x_{10} = 0, \quad X_1(T) = x_{1T} &= \ln(ch1), \\ X_2(0) = x_{20}, \quad X_2(T) = x_{2T}, \quad t \in [0, T], T = 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\text{де } \mathfrak{b}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}.$$

Для нелінійної частини другого рівняння системи рівнянь (2.33) $f_2[x_2(t)] = x_2^2(t)$ обчислюємо компоненти A_{2k} поліномів Адоміана і за ними визначаємо відповідні компоненти \tilde{A}_{2k} для заміщення ними відповідних компонент диференціальних зображень нелінійної частини другого рівняння в спектральній моделі (2.36):

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{20} &= X_2^2(0), \quad \tilde{A}_{21} = 2X_2(0)X_2(1), \\ \tilde{A}_{22} &= X_2^2(1) + 2X_2(0)X_2(2), \quad \tilde{A}_{23} = 2X_2(0)X_2(3) + 2X_2(1)X_2(2), \\ \tilde{A}_{24} &= 2X_2(0)X_2(4) + 2X_2(1)X_2(3) + X_2^2(2), \\ \tilde{A}_{25} &= 2X_2(0)X_2(5) + 2[X_2(2)X_2(3) + X_2(1)X_2(4)], \dots\end{aligned}\tag{2.37}$$

За спектральною моделлю (2.36), з урахуванням обчислених значень \tilde{A}_{ik} для $k = 0, 1, 2, \dots$, отримаємо вирази для визначення перших 6-ти дискрет диференціальних спектрів, які виражені через невідому крайову умову x_{20} :

$$\begin{aligned}X_1(0) &= x_{10} = 0, \quad X_2(0) = x_{20}, \\ X_1(1) &= x_{20}, \quad X_2(1) = (1 - x_{20}^2), \\ X_1(2) &= \frac{1}{2}(1 - x_{20}^2), \quad X_2(2) = -x_{20}(1 - x_{20}^2), \\ X_1(3) &= -\frac{1}{3}x_{20}(1 - x_{20}^2), \quad X_2(3) = -\frac{1}{3}[1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \\ X_1(4) &= -\frac{1}{12}[1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4], \quad X_2(4) = \frac{1}{3}[2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \\ X_1(5) &= \frac{1}{15}[2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5], \quad X_2(5) = -\frac{1}{15}[17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \\ X_1(6) &= -\frac{1}{90}[17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \\ X_2(6) &= -\frac{1}{45}[17x_{20} - 77x_{20}^3 + 105x_{20}^5 - 45x_{20}^7]\end{aligned}\tag{2.38}$$

Отже, з урахуванням (2.3), маємо наступний розв'язок крайової задачі, що виражений через невідому крайову умову x_{20} :

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & x_{20} \cdot t + \frac{1}{2}(1 - x_{20}^2) \cdot t^2 - \\
& - \frac{1}{3} x_{20}(1 - x_{20}^2) \cdot t^3 - \frac{1}{12} [1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \cdot t^4 + \\
& + \frac{1}{15} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \cdot t^5 - \frac{1}{90} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \cdot t^6 - \dots,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & x_{20} + (1 - x_{20}^2) \cdot t - x_{20}(1 - x_{20}^2) \cdot t^2 - \\
& - \frac{1}{3} [1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \cdot t^3 + \frac{1}{3} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \cdot t^4 - \\
& - \frac{1}{15} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \cdot t^5 - \frac{1}{45} [17x_{20} - 77x_{20}^3 + 105x_{20}^5 - 45x_{20}^7] \cdot t^6 - \dots
\end{aligned}$$

Із другого рівняння системи (2.39), з урахуванням граничної умови $x_{20} + x_{2T} = th1$, визначаємо невідомі крайові умови:

$$x_{20} = 0,00015, \quad x_{2T} = 0,76144.$$

Тоді розв'язок шуканої крайової задачі (2.33) - (2.34) буде мати вигляд:

$$x_1(t) = 0.00015 \cdot t + 0.5t^2 - 0.00005 \cdot t^3 - 0.08333 \cdot t^4 + 0.00002 \cdot t^5 - 3.33 \cdot 10^{-6} \cdot t^6 - \dots, \tag{2.40}$$

$$x_2(t) = 0.00015 + t - 0.00015 \cdot t^2 - 0.33333 \cdot t^3 + 0.0001 \cdot t^4 - 0.00002 \cdot t^5 - 0.00005 \cdot t^6 - \dots$$

На рис.2.3 і в табл.2.3 показано порівняння між точним розв'язком крайової задачі (2.33) - (2.34) і розв'язком за модифікованим методом диференціальних перетворень (ММДП), а також наведена відносна похибка розв'язку, отриманого за ММДП, з використанням 6-ти перших дискрет диференціальних спектрів розв'язку.

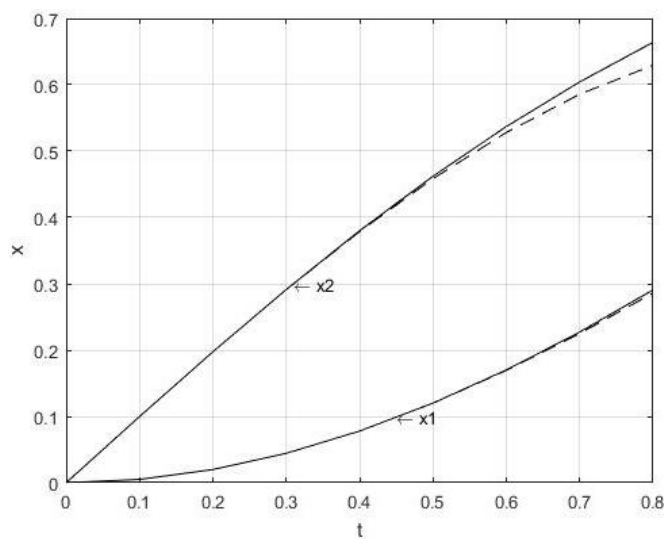


Рис. 2.3. Порівняння точного розв'язку (-) і розв'язку за ММДП (--) з урахуванням 6-ти дискрет

Таблиця 2.3

Порівняльна оцінка розв'язку

t	Точний розв'язок		ММДП		ε_r	
	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	0	0	0	1.49e-04	0	1.96e-04
0.2	1.99e-02	1.97e-01	1.99e-02	1.97e-01	6.48e-05	1.34e-04
0.4	7.79e-02	3.79e-01	7.79e-02	3.79e-01	6.91e-05	1.52e-03
0.6	1.70e-01	5.37e-01	1.69e-01	5.28e-01	1.97e-03	1.17e-02
0.8	2.91e-01	6.64e-01	2.86e-01	6.29e-01	1.10e-02	4.55e-02

2.3. Оцінка похибки розв'язку із застосуванням різних підходів

Одним з найзначніших факторів, що суттєво впливають на точність наближеного розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь або крайових задач, є кількість врахованих дискрет, які використовуються для відновлення розв'язку у вигляді ряду Тейлора на заданому інтервалі $t \in [0, H]$. Чим більше буде обчислено та враховано дискрет, тим більш точнішим буде отриманий розв'язок. Однак, у реальних умовах максимальну кількість врахованих дискрет обмежують з різних причин (наприклад, обмеженість часу обчислень, обмеженість розрядної сітки обчислювальних машин тощо), що призводить до збільшення похибки застосування методу диференціальних перетворень та необхідності оцінки похибки розв'язку.

Нижче розглядаються оцінки похибки наближеного розв'язку диференціального рівняння (крайової задачі) на основі основних диференціальних перетворень, зміщених диференціальних перетворень, а також на основі запропонованого модифікованого методу диференціальних перетворень.

2.3.1. Основні диференціальні перетворення

Збільшення кількості врахованих дискрет приводить до зменшення відхилення розв'язку диференціального рівняння (крайової задачі) на всьому інтервалі, причому максимальне відхилення завжди приходиться на кінець інтервалу. Тому середнє квадратичне значення похибки всього розв'язку буде не більше значення максимального відхилення. Скористуємося властивістю диференціальних перетворень, згідно якої значення оригіналу функції у кінцевій точці інтервалу дорівнює сумі дискрет зображення оригіналу:

$$x(H) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) = \sum_{k=0}^n X(k) + g(n+1), \quad g(n+1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} X(k).$$

Враховуючи знакоперемінність компонент диференціального спектру, можна припустити, що відхилення розв'язку наприкінці інтервалу за абсолютною величиною буде не більше найстаршої дискрети, що враховується:

$$|g(n+1)| < |X(n)|.$$

Тоді верхню межу похибки можна визначити виходячи з величини останньої дискрети:

$$G(n) = \frac{|X(n)|}{\sum_{k=0}^n X(k)}. \quad (2.41)$$

Проведені дослідження свідчать [237], що середнє квадратичне відхилення, як правило, на один-два порядки менше значення, яке обчислене за формулою (2.41). Незважаючи на те, що критерій (2.41) є достатньо грубим, він дозволяє на практиці швидко оцінити похибку отриманого розв'язку за заданої кількості дискрет на заданому інтервалі.

Як критерій більш точної попередньої оцінки верхньої межі похибки отриманого розв'язку $G(n,m)$ за обмеженої кількості дискрет, у працях [237,238] розглядається вираз, що пов'язує розв'язки, отримані для n і $n+m$ дискрет:

$$G(n,m) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left| 1 - \frac{x(t_i, n)}{x(t_i, n+m)} \right|^2}, \quad t_i \in [0, H]. \quad (2.42)$$

Використання даної оцінки похибки розв'язку потребує порівняння значень цієї похибки для $m=1,2,3,..$ до тих пір, поки відповідні значення $G(n,m)$ не будуть співпадати з точністю, що потребується. Тому застосування даного критерію доволі ускладнено, так як окрім подвійного розрахунку розв'язку, він ще потребує і додаткового розрахунку m дискрет $X(n+1), X(n+2), \dots, X(n+m)$. Для складних нелінійностей диференціальних рівнянь вираз (2.42) в деяких випадках може давати невірні результати, якщо дискрети $X(n)$ та $X(n+m)$ однакового знаку. В таких випадках необхідно обирати $m > 0$ таке, щоб $X(n)$ и $X(n+m)$ були різного знаку.

2.3.2. Зміщені диференціальні перетворення

Розглянемо тепер похибку розв'язку нелінійного диференціального рівняння (крайової задачі) на поточному інтервалі часу на основі зміщених диференціальних перетворень, оцінка якої досліджена в роботах [164,189,239,240].

Розв'язок нелінійної крайової задачі (2.1) з початковими умовами (2.2) будемо розглядати на відрізку $0 \leq t \leq T$, де довжина інтервалу $L=T$ обирається всередині радіусу R збіжності ряду Тейлора, тобто $0 \leq L < R$. Вважаємо, що аналітична функція $x(t)$ диференціюється нескінченну кількість раз в будь-якій точці $t \in [0, T]$ має похідні m -го ступеня, що обмежені у сукупності для будь-якого цілого $m \geq 1$:

$$|x^{(m)}(t)| \leq C < +\infty, \quad t \in [0, T]. \quad (2.43)$$

Застосувавши до функції $x(t)$ основні та зміщені диференціальні перетворення (1.7), (1.11) отримаємо диференціальні спектри $X(k)$ і $X_v(k)$.

Обмежимо кількість використаних дискрет диференціального спектра $X(k)$ деяким заданим числом $s > 0$, так що цілочисловий аргумент $k = 0, 1, 2, \dots, s$. У загальному випадку, обмеження кількості використаних дискрет диференціального спектру $X(k)$ призводить до похибки під час зворотних перетворень у формі рядів Тейлора вигляду (2.3).

Розглянемо апроксимацію функції $x(t)$ зміщеними диференціальними перетвореннями [164]. На рис. 2.4 подано загальний вигляд розкладання функції $x(t)$ зміщеними ДТП в точці t_v , де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - похибки апроксимації функції $x(t)$ функцією $\tilde{x}(t)$.

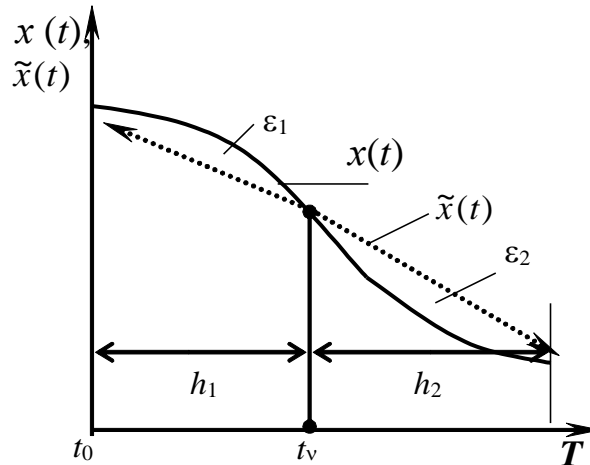


Рис. 2.4. Апроксимація функції $x(t)$ зміщеними ДТП

Зміщені перетворення (1.11) покривають часовий інтервал $[0, T]$ довжиною $L = T$ двома відрізками ряду Тейлора на часових інтервалах $[0, t_v]$ і $[t_v, T]$. В результаті, похибка апроксимації функції $x(t)$ на цих інтервалах має дві складові $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Позначимо повну похибку зміщених диференціальних перетворень як $\varepsilon_c = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, а похибку основних диференціальних перетворень як ε_0 .

У роботі [241] розв'язана задача двокритерійної оптимізації щодо вибору точки зсуву t_v за нелінійною схемою компромісів, де як частинні критерії прийнято максимально можливі значення складових відносних похибок $\frac{|\varepsilon_1|}{|\tilde{\varepsilon}_0|}, \frac{|\varepsilon_2|}{|\tilde{\varepsilon}_0|}$. Отримано, що оптимальним з точки зору зменшення похибки отриманого розв'язку є розміщення центру розкладання оригіналу у середині відрізка $t_v = L/2$. По суті, це означає розбиття заданого інтервалу на два підінтервали однакової довжини та отримання розв'язку на кожному з підінтервалів із застосуванням двох моделей в області зміщених перетворень: прямої моделі (від зміщеної точки до кінця інтервалу) та моделі у зворотному напрямку (від зміщеної точки до начала відрізка).

У цьому випадку оцінка зверху похибки розв'язку зміщеними диференціальними перетвореннями у 2^s менше оцінки зверху похибки розв'язку основними диференціальними перетвореннями [241]:

$$|\varepsilon_c| \leq 2^{-s} |\varepsilon_0|, \quad (2.44)$$

де s - кількість врахованих дискрет диференціальних спектрів $X(k)$ і $X_v(k)$ без нульових дискрет $X(0)$, $X_v(0)$, тобто число s дорівнює номеру останніх врахованих дискрет диференціальних спектрів $X(k)$ і $X_v(k)$, а нижня межа похибки зміщених перетворень $|\varepsilon_c| \geq 0$. Таким чином, маємо наступний діапазон зміни похибки зміщених перетворень при $t_v = L/2$:

$$0 \leq |\varepsilon_c| \leq 2^{-s} |\varepsilon_0|. \quad (2.45)$$

2.3.3. Модифікований метод диференціальних перетворень

Розглянемо тепер оцінку верхньої межі похибки розв'язку нелінійного диференціального рівняння (крайової задачі) модифікованим методом диференціальних перетворень, що базується на багатоетапному методі диференціальних перетворень. Оцінка зверху похибки $|\varepsilon_0| = |x(t) - y(t)|$ основних диференціальних перетворень задається виразом [242]:

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{L^{s+1}}{(s+1)!} \sup_{0 < t_l < L} |x^{(s+1)}(t_l)|. \quad (2.46)$$

З урахуванням обмеження (2.43), вираз (2.46) запишеться як:

$$|\varepsilon_0| \leq C \frac{L^{s+1}}{(s+1)!} = |\hat{\varepsilon}_0|. \quad (2.47)$$

Розіб'ємо заданий часовий інтервал розв'язку на r рівних підінтервалів. Тоді вираз (2.46) для оцінки зверху похибки $|\varepsilon_i| = |x_i(t) - y_i(t)|$ на i -му підінтервалі з урахуванням s дискрет можна записати у наступному вигляді:

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{(L/r)^{s+1}}{(s+1)!} \sup_{\xi \in [t_i, t_{i+1}]} |x_i^{(s+1)}(\xi)|, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.48)$$

Приймаючи до уваги обмеження (2.43) можна зробити висновок, що на i -му підінтервалі:

$$C_i = \sup_{\xi \in [t_i, t_{i+1}]} |x_i^{(s+1)}(\xi)| \leq C < +\infty. \quad (2.49)$$

Дійсно, якщо $(s+1)$ -а похідна функції $x_i(t)$ досягає максимального значення на інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$, то $C_i = C$, у протилежному випадку $C_i < C$.

Оцінку похибки (2.48) з урахуванням обмеження (2.43) можна подати як:

$$|\varepsilon_i| \leq C \frac{(L/r)^{s+1}}{(s+1)!}. \quad (2.50)$$

З отриманого виразу (2.50) видно, що отримана похибка при діленні усього інтервалу на r рівних підінтервалів однакова на підінтервалах і залежить лише від кількості врахованих дискрет s . Перетворимо дану оцінку в оцінку відносної похибки. За основу порівняння оберемо похибку (2.47) для основних диференціальних перетворень. Тоді для відносної похибки на i -му підінтервалі отримаємо:

$$\left| \frac{\varepsilon_i}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| \leq \frac{(L/r)^{s+1}}{L^{s+1}}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.51)$$

Розглянемо повну відносну похибку розв'язку модифікованим методом диференціальних перетворень на усьому інтервалі $\varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_r$ відносно до похибки ε_0 методу основних диференціальних перетворень:

$$\left| \frac{\varepsilon_s}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| = \left| \frac{\varepsilon_1}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| + \left| \frac{\varepsilon_2}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| + \dots + \left| \frac{\varepsilon_r}{\widehat{\varepsilon}_0} \right|. \quad (2.52)$$

З виразу (2.51) видно, що складові відносних похибок змінюються у межах:

$$0 \leq \left| \frac{\varepsilon_{s_i}}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.53)$$

Найбільше відхилення наближеного розв'язку від точного, як правило, доводиться на кінець інтервалу розв'язку. При цьому, воно буде максимальним у випадку однакових знаків ε_{s_i} . Тоді з урахуванням (2.51), вираз (2.52) набуде вигляду:

$$\left| \frac{\varepsilon_s}{\widehat{\varepsilon}_0} \right| \leq \left| \frac{1}{r^{s+1}} \right| + \left| \frac{1}{r^{s+1}} \right| + \dots + \left| \frac{1}{r^{s+1}} \right| = \frac{1}{r^s} = r^{-s}. \quad (2.54)$$

Звідси випливає, що оцінка зверху похибки модифікованого методу диференціальних перетворень при діленні заданого інтервалу на r підінтервалів однакової довжини в r^s раз менша оцінки зверху похибки методу основних диференціальних перетворень, тобто:

$$|\varepsilon_s| \leq r^{-s} |\widehat{\varepsilon}_0|, \quad (2.55)$$

де s - кількість врахованих дискрет диференціального спектру $X(k)$ понад нульової дискрети $X(0)$, тобто число s дорівнює номеру останніх врахованих дискрет диференціального спектру $X(k)$. Аналіз отриманого виразу показує, що із збільшенням кількості врахованих дискрет s , верхня межа сумарної похибки зменшується за законом показникової функції та за $s \rightarrow \infty$ наближається до нульової нижньої межі. Тому діапазон зміни повної похибки при моделюванні динамічних процесів з використанням ММДП визначається обмеженнями:

$$0 \leq |\varepsilon_s| \leq r^{-s} \cdot |\widehat{\varepsilon}_0|, \quad (2.56)$$

де $|\widehat{\varepsilon}_0|$ визначається виразом (2.47).

З виразу (2.56) можна зробити висновок, що застосування модифікованого методу диференціальних перетворень за обмеженої кількості s дискрет диференціального спектра $X(k)$ дає змогу отримати більш точний розв'язок крайової задачі (2.1) в точці $t = T$ за виконання умов (2.43), ніж метод основних диференціальних перетворень.

Основні диференціальні перетворення дають точне значення аналітичної функції $x(t)$ в точці $t = T$ тільки у окремому випадку, коли розв'язок $x(t)$ апроксимується поліномом ступеня $n \leq s$. У решті випадків похибка основних диференціальних перетворень $|\varepsilon_0| > 0$ для обмеженої кількості $s < +\infty$ дискрет диференціального спектра $X(k)$. Похибка $|\varepsilon_0| > 0$ не може бути зведена до нуля розбиттям відрізка $[0, T]$ на будь-яке кінцеве число $r < +\infty$, так як нульове значення

похибки ММДП дає у загальному випадку на довільному ненульовому часовому відрізку тільки при урахуванні нескінченної кількості членів ряду Тейлора або дискрет диференціального спектру $X(k)$.

З виразу (2.56) також видно, що із збільшенням кількості врахованих дискрет s диференціального спектру $X(k)$ ефективність застосування методу ММДП порівняно з МДП зростає за законом показникової функції. Тому для високоточних обчислень доцільно застосовувати модифікований або багатоетапний метод диференціальних перетворень замість МДП.

Відмітимо, що похибка відновленого розв'язку суттєво залежить й від інтервалу часу, на якому він відновлюється. Враховуючи, що дискрети являють собою складові степеневого ряду (1.8) у точці наприкінці інтервалу, то за диференціальним спектром можна оцінити й збіжність ряду на заданому інтервалі $t \in [0, H]$. Відомо, якщо ряд збігається наприкінці інтервалу у точці $t = H$, то він збігається на всьому інтервалі. Якщо останні дискрети диференціального спектру є спадними, а їх величина достатньо мала порівняно з сумою дискрет, то можна говорити щодо збіжності ряду. Якщо спектр не є спадним з деякої дискрети, то розв'язок розбігається на даному інтервалі. У такому випадку необхідно збільшити кількість дискрет або зменшити інтервал. Тому, під час розгляду диференціального спектру будемо розглядати величину H , за якої обчислені дискрети, як інтервал, на якому відновлюється розв'язок. У кінцевому результаті величина H не має значення, однак під час розгляду диференціального спектру вона є показниковою.

За диференціальним спектром можна оцінити й кількість дискрет, яка необхідна для досягнення заданої точності наближеного розв'язку диференціального рівняння на заданому інтервалі. Чисельне моделювання показує, що збільшення числа дискрет приводить до зменшення відхилення розв'язку на всьому інтервалі, причому найбільше відхилення наближеного розв'язку від точного значення відбувається наприкінці заданого інтервалу. Тому, як це було зазначено у п. 2.3.1, середнє квадратичне значення похибки всього розв'язку буде не більше цього найбільшого відхилення. Згідно властивості диференціального перетворення,

зображення значення оригіналу наприкінці інтервалу дорівнює сумі дискрет зображення оригіналу. Тоді, враховуючи знакоперемінність диференціального спектру, можна припустити, що відхилення розв'язку наприкінці інтервалу за абсолютною величиною буде не більше старшої дискрети, що обчислюється. Таким чином, для досягнення абсолютного відхилення розв'язку наприкінці інтервалу менше заданого значення точності G_H необхідно, щоб величина останньої дискрети була менше заданої величини G_H . Це дозволяє з урахуванням зображення оригіналу визначити необхідну кількість дискрет для досягнення заданої точності розв'язку [232].

Висновки до розділу 2

1. Обґрунтовано доцільність та ефективність застосування багатоетапного методу диференціальних перетворень, що ґрунтується на поєднанні методу основних диференціальних перетворень та методу припасовування, до розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та нелінійних крайових задач. Зазначений підхід дає змогу значно розширити інтервал та підвищити точність розв'язку.
2. Розроблено модифікований метод диференціальних перетворень до розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь, що базується на сумісному використанні методу основних диференціальних перетворень, методу припасовування та застосуванні апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана. Метод дозволяє розширити інтервал розв'язання, підвищити точність розв'язку, дає змогу подолати математичні складності при обчисленні диференціальних зображень складних нелінійностей рівнянь, та розширити сферу застосування методу основних диференціальних перетворень.
3. Запропоновано метод розв'язання крайових задач, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, що ґрунтується на базі модифікованого методу диференціальних перетворень. Метод дає змогу

спростити обчислення диференціальних зображень складних нелінійностей задачі за рахунок їх апроксимації поліномами Адоміана, розширити інтервал та підвищити точність розв'язку.

4. Запропонована оцінка похибки розв'язку диференціальних рівнянь модифікованим методом диференціальних перетворень. Доведено, що їх застосування у випадку розбиття заданого інтервалу розв'язку на підінтервали однакової довжини забезпечує порівняно з методом основних диференціальних перетворень зниження верхньої межі оцінки похибки розв'язку в p^s раз, де p - кількість підінтервалів, на які розбивається заданий часовий інтервал, s - кількість врахованих дискрет диференціального спектра.
5. Зазначено, що метод зміщених диференціальних перетворень є частковим випадком багатоетапного методу диференціальних перетворень за умови розбивання інтервалу розв'язку на два підінтервали.

Список публікацій здобувача за матеріалами другого розділу

1. Гусынин А. В. Модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. В. Гусынин // Проблемы інформаційних технологій. – 2016. - №02(020). – С.26-34.
2. Gusynin A. Differential transform method for solving non-linear differential equation by the Adomian polynomials / A. Gusynin // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського. – 2017. – №.03(104). – pp. 46-51.
3. Гусынин А.В. Применение модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.В. Гусынин // Проблемы інформаційних технологій. – 2016. - №01 (019). - С.31-40.
4. Гусынин А.В. Решение нелинейных двухточечных краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований /

А.В. Гусынин, В. П. Гусынин, О. Н. Замирец // Технология приборостроения. – 2016. - №1. - С. 16-21.

Особистий внесок здобувача: модифікований метод диференціальних перетворень.

5. Gusynin A. The use of differential transformations for solving non-linear boundary value problems / A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2016. - № 4 (69). - P.44-55.

Особистий внесок здобувача: метод розв'язання нелінійних крайових задач на базі модифікованого методу диференційних перетворень.

6. Gusynin A. Estimate of accuracy of approximate solutions of non-linear boundary value problems by the multi-step differential transform method // A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2017. - № 1(70). – С.48-54.

Особистий внесок здобувача: оцінка зверху точності наближеного розв'язку нелінійних крайових задач багатоступінчастим методом диференційних перетворень.

7. Гусынин А.В. Решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, систем уравнений и краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований / А.В. Гусынин, В.П. Гусынин, Ю.К. Зиятдинов // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2020. – Vol.1, № 49. – С. 32-47.

Особистий внесок здобувача: модифікований метод диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, систем рівнянь та нелінійних крайових задач.

РОЗДІЛ 3

ДИСКРЕТНО-АНАЛІТИЧНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ БАГАТОЕТАПНОГО ТРАЄКТОРНОГО РУХУ ЛА

3.1. Модифікований метод дискретно-аналітичного відображення нелінійних задач термінального виведення ЛА

Запропонований у розділі 2 модифікований метод диференціальних перетворень дає змогу удосконалити дискретно-аналітичне відображення у спектральні моделі нелінійних задач термінального виведення ЛА, врахувати багатоетапність траєкторії виведення та спростити побудову спектральних моделей за рахунок апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана.

У загальному вигляді вихідна математична модель багатоетапного руху ЛА на i -му підінтервалі за відсутності параметричних та зовнішніх збурень може бути подана векторним нелінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{L_i}(t, x_i, u_i) + f_{N_i}(t, x_i, u_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (3.1)$$

де $x_i(t)$ – n -вимірний вектор стану, $u_i(t)$ – m -вимірний вектор керування ($m < n$), $f_{L_i}(t, x_i, u_i)$, $f_{N_i}(t, x_i, u_i)$ – неперервні та неперервно диференційовані за сукупністю змінних t, x, u вектор-функції, які є відповідно лінійною та нелінійною складовою узагальненої сили, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Математичні моделі, отримані диференціальним перетворенням (1.7), (1.11) або (1.12) вихідної математичної моделі називаються спектральними моделями. Модифікований метод дискретно-аналітичного відображення вихідної нелінійної математичної моделі в область зображень (спектральну модель) полягає у виконанні наступних дій [243].

1. Застосування до диференціального рівняння (3.1) модифікованого методу диференціальних перетворень.

2. Апроксимація нелінійних складових диференціального рівняння $f_{N_i}(t, x_i, u_i)$ поліномами Адоміана.
3. Заміщення у компонентах поліномів Адоміана змінних $x_{i_k}(t)$ їх відповідними зображеннями того самого індексу $X_i(k)$.
4. Формування спектральної моделі для кожного i -го підінтервалу руху.

У результаті застосування диференціальних перетворень (1.7) до математичної моделі (3.1) отримуємо спектральну модель багатоетапного траєкторного руху ЛА на i -му підінтервалі етапу виведення у наступному вигляді:

$$X_i(k+1, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1} \{ \underline{f}_{L_i}[t, X_i(k, X_i^0), U_i(k)] + \underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, X_i^0), U_i(k)] \}, \quad (3.2)$$

$$X_i(0) = X_i^0; X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $\underline{f}_{L_i}(t, x_i, u_i)$, $\underline{f}_{N_i}(t, x_i, u_i)$ - зображення відповідно лінійної та нелінійної складових рівняння (3.1). За даною спектральною моделлю, надаючи k відповідні цілочислові значення, можна визначити кінцевий набір диференціальних спектрів (дискрет) вектору стану, які потім використовуються для розв'язання задачі оптимального керування без інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху. Можливість аналітичного конструювання керування процесом термінального виведення ЛА з використанням диференціальних спектрів розглянуто в п. 3.4.

Перевагами зазначеного підходу є:

1. Виключення з подальшого розгляду вихідної математичної моделі траєкторного руху ЛА у вигляді векторного нелінійного диференціального рівняння та заміна його розглядом спектральної моделі в області зображень без відповідних функцій часу.
2. Виключення з подальшого розгляду необхідності чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху ЛА.
3. Спрощення побудови спектральної моделі за рахунок використання поліномів Адоміана для апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь руху.
4. Спектральна модель (3.2) має вигляд рекурентного виразу та дозволяє:

- за диференціальним спектром керування $U_i(k)$ знайти диференціальний спектр вектору стану $X_i(k)$;
 - отримати кінцевий набір диференціальних спектрів змінних траєкторного руху ЛА, що відповідає вихідній математичній моделі;
 - на базі диференціальних спектрів здійснювати аналітичне конструювання термінального керування рухом ЛА.
5. Враховуючи, що диференціальні перетворення (1.7) є точним операційним методом, то спектральна модель (3.2) не має методичних помилок та потенційно дозволяє отримати точний розв'язок нелінійного диференціального рівняння (3.1).
6. Спектральна модель (3.2) має універсальний характер та може бути використана для розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом різних типів ЛА.

3.2. Відображення задачі багатоетапного руху БАЛА у спектральну модель

Нижче, на основі модифікованого методу диференціальних перетворень та модифікованого методу дискретно-аналітичного відображення, будується спектральна модель багатоетапного траєкторного руху БАЛА на злітно-посадкових режимах.

3.2.1. Математична модель траєкторного руху

Для реалізації прийнятої концепції «гнучких» траєкторій руху приймемо спрощену математичну модель руху БАЛА, за якою постійно прогнозується рух для неперервної корекції траєкторії. Помилки прогнозу, викликані неточністю математичної моделі траєкторного руху БАЛА, можна віднести до параметричних збурень, величина яких значно менша вітрових збурень і тяги двигунів апарата. Так як в концепції «гнучких» траєкторій закладений зворотний зв'язок для

парирування і компенсації як параметричних збурень, так й збурень зовнішнього середовища, то помилки прогнозу траєкторії руху БАЛА будуть постійно усуватися складовою керування, що формується за зворотним зв'язком під час корекції траєкторії руху. Необхідно також зазначити, що спрощена математична модель повинна зберегти усі зв'язки між значними змінними траєкторного руху.

Увесь процес виведення умовно розіб'ємо на r заданих часових інтервалів, усередині яких параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування. У подальшому будемо вважати, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних інтервалів. За спрощену математичну модель траєкторного руху багаторежимної БАЛА, яка зберігає усі зв'язки між значними змінними руху, приймемо систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що описує повздовжній рух апарату на i -ій ділянці руху в проекціях на осі зв'язаної системи координат, початок якої співпадає з центром газового об'єму оболонки [203,211,244]:

$$(m_i + \lambda_{11})\dot{V}_X = (m_i y_C - \lambda_{16})\dot{\omega}_Z + (m_i + \lambda_{22})V_Y\omega_Z + (m_i x_C + \lambda_{26})\omega_Z^2 + F_X, \quad (3.3)$$

$$(m_i + \lambda_{22})\dot{V}_Y = -(m_i x_C + \lambda_{26})\dot{\omega}_Z - (m_i + \lambda_{11})V_X\omega_Z + (m_i y_C - \lambda_{16})\omega_Z^2 + F_Y, \quad (3.4)$$

$$(I_{Z_i} + \lambda_{66})\dot{\omega}_Z = (m_i y_C - \lambda_{16})\dot{V}_X - (m_i x_C + \lambda_{26})\dot{V}_Y + (\lambda_{22} - \lambda_{11})V_X V_Y - (m_i x_C + \lambda_{26})V_X\omega_Z - (m_i y_C - \lambda_{16})V_Y\omega_Z + M_Z; \quad (3.5)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_Z, \quad (3.6)$$

$$\dot{H} = V_X \cdot \sin \vartheta + V_Y \cdot \cos \vartheta, \quad (3.7)$$

$$\dot{L} = V_X \cdot \cos \vartheta - V_Y \cdot \sin \vartheta; \quad (3.8)$$

$$\alpha = \arctg(-V_Y/V_X), \quad (3.9)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{V}_X \cdot V_Y - \dot{V}_Y V_X}{V_X^2 + V_Y^2}, \quad (3.10)$$

$$\theta = \vartheta - \alpha. \quad (3.11)$$

В рівняннях (3.3) – (3.11) прийнято наступні позначення:

V_X, V_Y – проекції швидкості польоту на зв'язані осі; H – висота польоту; L – дальність польоту; m_i, I_{Z_i} – маса і момент інерції БАЛА відносно зв'язаної осі

OZ на i -ій ділянці руху; $\lambda_{\mu j}$ – приєднані маси і моменти інерції апарата; ϑ – кут тангажа; α – кут атаки; θ – кут нахилу траєкторії; ω_Z – проекція вектору кутової швидкості на зв'язану вісь OZ ; x_C, y_C – координати центра мас БАЛА відносно його центра газового об'єму оболонки; F_X, F_Y – проекції сумарної сили, що діє на БАЛА, на зв'язані осі OX, OY ; M_Z – проекція сумарного моменту, що діє на БАЛА, на зв'язану вісь OZ . Для зручності запису математичної моделі індексом « i » у вищенаведених рівняннях відмічені тільки параметри, що зазнають змін на межах заданих ділянок руху.

Сили та моменти, що діють на БАЛА в вертикальній площині симетрії, подамо у вигляді:

$$F_X = F_{X A} + F_{X CT} + F_{X DV} + F_{X G}, \quad (3.12)$$

$$F_Y = F_{Y A} + F_{Y CT} + F_{Y DV} + F_{Y G}, \quad (3.13)$$

$$M_Z = M_{Z A} + M_{Z CT} + M_{Z DV} + M_{Z G}, \quad (3.14)$$

де $F_{X A}, F_{Y A}, M_{Z A}$ - аеродинамічні сили та повздовжній момент;

$F_{X CT}, F_{Y CT}, M_{Z CT}$ - аеростатичні сили та повздовжній момент;

$F_{X DV}, F_{Y DV}, M_{Z DV}$ - сили та момент від двигунів;

$F_{X G}, F_{Y G}, M_{Z G}$ - гравітаційні сили та повздовжній момент.

Аеродинамічні сили та момент:

$$\begin{aligned} F_{X A} &= -C_X(\alpha)qU^{2/3} \cos \alpha + \left[C_Y(\alpha, \delta_B) + C_Y^{\overline{\omega Z}}(\alpha) \cdot U^{1/3} / V \cdot \omega_Z \right] qU^{2/3} \sin \alpha, \\ F_{Y A} &= C_X(\alpha)qU^{2/3} \cdot \sin \alpha + \left[C_Y(\alpha, \delta_B) + C_Y^{\overline{\omega Z}}(\alpha) U^{1/3} / V \cdot \omega_Z \right] qU^{2/3} \cdot \cos \alpha, \\ M_{Z A} &= \left[m_Z(\alpha, \delta_B) + m_Z^{\overline{\alpha}}(\alpha) U^{1/3} / V \cdot \dot{\alpha} + m_Z^{\overline{\omega Z}}(\alpha) U^{1/3} / V \cdot \omega_Z \right] qU. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аеростатичні сили та момент:

$$\begin{aligned} F_{X CT} &= U(\gamma_B - \gamma_G) \cdot \sin \vartheta; \\ F_{Y CT} &= U(\gamma_B - \gamma_G) \cdot \cos \vartheta; \\ M_{Z CT} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Гравітаційні сили та момент:

$$\begin{aligned}
 F_{X G} &= -m_i g \sin \vartheta, \\
 F_{Y G} &= -m_i g \cos \vartheta, \\
 M_{Z G} &= m_i g (x_C \cos \vartheta - y_C \sin \vartheta).
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Сили та момент від двигунів:

$$\begin{aligned}
 F_{X DV} &= P_{\Sigma_i} \cos \varphi, \\
 F_{Y DV} &= P_{\Sigma_i} \sin \varphi, \\
 M_{Z DV} &= P_{\Sigma_i} y_{DV} \cos \varphi + P_{\Sigma_i} x_{DV} \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

У виразах (3.13) - (3.16) прийнято позначення:

U – об’єм газу в оболонці; P_{Σ_i} – сумарна тяга двигунів БАЛА на i -ій ділянці руху; C_X, C_Y – коефіцієнти лобового опору та піднімальної сили; m_Z – коефіцієнт повздовжнього моменту; $C_Y^{\overline{\omega}Z}$ – похідна коефіцієнта піднімальної сили за кутовою швидкістю тангажа; $m_Z^{\overline{\omega}Z}, m_Z^{\overline{\alpha}}$ – похідна коефіцієнта повздовжнього моменту за кутовою швидкістю тангажа і швидкість зміни кута атаки відповідно; g – прискорення вільного падіння; φ – кут відхилення вектору тяги; x_{DB}, y_{DB} – координати двигунів відносно центру газового об’єму оболонки; δ_B – кут відхилення керма висоти; γ_B, γ_G – питома вага повітря та газу; $q = \rho V^2 / 2$ – швидкісний напір, що дорівнює; ρ – щільність повітря; $V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}$.

Сучасні дирижаблі значну частину своїх маневрів мають здійснювати у безпосередній близькості від поверхні землі. До таких режимів належать вертикальний або з малим пробігом зліт/посадка, вантажно-розвантажувальні та монтажні роботи, патрулювання біля земної або водної поверхні, причалювання, стоянка на причальній щоглі тощо. В усіх цих випадках вплив поверхні землі може призвести до виникнення додаткових сил і моментів, що діють на дирижабль. Проведені раніше в аеродинамічній трубі дослідження впливу близькості землі на аеродинамічні характеристики дирижабля показали, що при поздовжньому обтіканні таких тіл поблизу екрана утворюється від’ємна підсмоктувальна сила, яка притискає

апарат до поверхні, тоді як при поперечному обтіканні дирижабля поблизу землі виникає додаткова піднімальна сила, що намагається «відірвати» апарат від екрана. Окрім того, близькість поверхні землі впливає на обертальні похідні аеродинамічних моментів, на значення приєднаних мас і моментів інерції. У першому наближенні цей вплив можна врахувати у вигляді залежних від висоти апарата над поверхнею землі певних додач до відповідних аеродинамічних характеристик дирижабля в нескінченному просторі. Зазначені додачі було отримано за результатами експериментального визначення аеродинамічних сил і моментів. Сумарні безрозмірні аеродинамічні характеристики з урахуванням відповідних додач можна подати такими виразами [211]:

$$C_{XA} = C_{XA_{\infty}} + (0,0066 - 0,1114\alpha + 0,0001\alpha^2)(1/\bar{h})^2,$$

$$C_{YA} = C_{YA_{\infty}} + (-0,0344 + 0,005\alpha - 0,0002\alpha^2)(1/\bar{h})^2,$$

$$m_{ZA} = m_{ZA_{\infty}} + (0,0137 + 0,0003\alpha - 0,0002\alpha^2)(1/\bar{h})^2,$$

$$C_{YA}^{\omega Z} = 2[K_{22}(\bar{h}) - K_{11}(\bar{h})] - m_{ZA_{\infty}}^{\alpha} - 0,0003(1/\bar{h})^2,$$

$$m_{ZA}^{\omega Z} + m_{ZA}^{\dot{\alpha}} = (m_{ZA}^{\omega Z} + m_{ZA}^{\dot{\alpha}})_{\infty} - 0,5(1/\bar{h}),$$

де $C_{XA_{\infty}}, C_{YA_{\infty}}, m_{ZA_{\infty}}, (m_{ZA}^{\omega Z} + m_{ZA}^{\dot{\alpha}})_{\infty}$ - значення безрозмірних аеродинамічних характеристик у нескінченному потоці; кут атаки α подається в градусах; $\bar{h} = h_3/D$ - безрозмірна висота апарата над поверхнею екрана; h_3, D - висота апарата над поверхнею екрана та максимальний діаметр корпусу апарату відповідно. Точність такої апроксимації можна підвищити введенням у відповідні характеристики членів, які лінійно залежать від $1/\bar{h}$.

Розглянемо тепер вплив поверхні землі на коефіцієнти приєднаних мас дирижабля. При цьому не будемо брати до уваги додач, зумовлених оперенням, оскільки оперення дирижабля через великий діаметр корпусу досить високо розташовується над поверхнею землі. У результаті безрозмірна висота, як правило, більша за одиницю. У цих випадках, як відомо, впливом екрана можна знехтувати. Апроксимаційні вирази для коефіцієнтів приєднаних мас мають вигляд [211]:

$$K_{11}(\bar{h}) = K_{11_\infty} + 0,016(1/\bar{h})^2,$$

$$K_{22}(\bar{h}) = K_{22_\infty} + 0,16(1/\bar{h})^2,$$

$$K_{66}(\bar{h}) = K_{66_\infty} + 0,048(1/\bar{h})^2,$$

$$K_{26}(\bar{h}) = K_{26_\infty} + 0,0032(1/\bar{h}).$$

Зазначимо, що з наближенням до поверхні землі, коефіцієнти основних приєднаних мас збільшуються. Для отримання зазначених коефіцієнтів для дирижабля з оперенням для урахування впливу землі необхідно отримати додаци оперення в значеннях приєднаних мас і додати їх лише до першого доданка з наведених раніше апроксимацій, позначених індексом ∞ .

Необхідно мати на увазі, що наведені вище аналітичні вирази з урахування впливу близькості землі здобуто з використанням результатів експериментальних досліджень моделі гіпотетичного дирижабля в аеродинамічній трубці, а отже, вони є наближеними.

3.2.2. Спектральна модель руху БАЛА

Для спрощення застосування диференціальних перетворень перетворимо вищенаведену математичну модель (3.3) – (3.11):

$$\dot{V}_x = a_{11}\dot{\omega}_z + a_{12}V_y\omega_z + a_{13}\omega_z^2 + a_{14}F_x,$$

$$\dot{V}_y = -a_{21}\dot{\omega}_z - a_{22}V_x\omega_z + a_{23}\omega_z^2 + a_{24}F_y,$$

$$\dot{\omega}_z = b_1\dot{V}_x - b_2\dot{V}_y + b_3V_xV_y - b_4V_x\omega_z - b_5V_y\omega_z + b_6M_z,$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_z, \tag{3.19}$$

$$\dot{H} = V_xN_1 + V_yN_2,$$

$$\dot{L} = V_xN_2 - V_yN_1,$$

$$\dot{\alpha}W = \dot{V}_xV_y - \dot{V}_yV_x,$$

$$\theta = \vartheta - \alpha,$$

$$\text{де } a_{11} = \frac{m_i y_c - \lambda_{11}}{m_i + \lambda_{11}}; a_{12} = \frac{m_i + \lambda_{22}}{m_i + \lambda_{11}}; a_{13} = \frac{m_i x_c + \lambda_{26}}{m_i + \lambda_{11}}; a_{14} = \frac{1}{m_i + \lambda_{11}}; \quad (3.20)$$

$$a_{21} = \frac{m_i x_c + \lambda_{26}}{m_i + \lambda_{22}}; a_{22} = \frac{m_i + \lambda_{11}}{m_i + \lambda_{22}}; a_{23} = \frac{m_i y_c - \lambda_{16}}{m_i + \lambda_{22}}; a_{24} = \frac{1}{m_i + \lambda_{22}};$$

$$b_1 = \frac{m_i y_c - \lambda_{16}}{I_{z_i} + \lambda_{66}}; b_2 = \frac{m_i x_c + \lambda_{26}}{I_{z_i} + \lambda_{66}}; b_3 = \frac{\lambda_{22} - \lambda_{11}}{I_{z_i} + \lambda_{66}}; b_4 = \frac{m_i x_c + \lambda_{26}}{I_{z_i} + \lambda_{66}};$$

$$b_5 = \frac{m_i y_c - \lambda_{16}}{I_{z_i} + \lambda_{66}}; b_6 = \frac{1}{I_{z_i} + \lambda_{66}};$$

$$N_1 = \sin \vartheta; N_2 = \cos \vartheta; R_1 = \sin \varphi; R_2 = \cos \varphi; W = V^2 = V_x^2 + V_y^2.$$

Математичну модель (3.19) доповнимо прогнозованою програмою зміни кута відхилення вектору тяги за часом:

$$\varphi = a_0 + a_1 t,$$

де a_0 і a_1 - вільні параметри, що підлягають визначенню. Проведені льотні випробування дирижаблю Skyship-500 показали, що дана програма зміни кута відхилення вектору тяги близька до оптимальної на злітно-посадкових режимах [245,246].

Застосувавши до рівнянь (3.19) диференціальні перетворення (1.7) з урахуванням апроксимації нелінійних членів рівнянь (складові, що містять добутки $V_y \omega_z, \omega_z^2, V_x \omega_z, V_x V_y, V_x \sin \vartheta, V_x \cos \vartheta, V_y \sin \vartheta, V_y \cos \vartheta$) поліномами Адоміана згідно виразів (2.21') та (2.22'), отримаємо наступну модифіковану математичну модель руху дирижабля в області зображень:

$$\underline{V}_X(k+1) = \frac{h}{k+1} \left[a_{11} \frac{k+1}{h} \underline{\omega}_z(k+1) + a_{12} \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_Y(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Z}_{k-k_1} + a_{13} \tilde{A}_k + a_{14} \underline{F}_X(k) \right], \quad (3.21)$$

$$\underline{V}_Y(k+1) = \frac{h}{k+1} \left[-a_{21} \frac{k+1}{h} \underline{\omega}_z(k+1) - \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_X(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Z}_{k-k_1} + a_{23} \tilde{A}_k + a_{24} \underline{F}_Y(k) \right], \quad (3.22)$$

$$\underline{\omega}_z(k+1) = \frac{h}{k+1} \left[b_1 \frac{k+1}{h} \underline{V}_X(k+1) - b_2 \frac{k+1}{h} \underline{V}_Y(k+1) + b_3 \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_X(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Y}_{k-k_1} - \right. \\ \left. - b_4 \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_X(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Z}_{k-k_1} - b_5 \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_Y(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Z}_{k-k_1} + b_6 \underline{M}_Z(k) \right], \quad (3.23)$$

$$\underline{\mathfrak{g}}(k+I) = \frac{h}{k+I} \underline{\omega}_Z(k), \quad (3.24)$$

$$\underline{H}(k+1) = \frac{h}{k+1} \left[\sum_{k_1=0}^k \underline{V}_X(k_1) \tilde{A}_k \tilde{S}_{k-k_1} + \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_Y(k_1) \tilde{A}_k \tilde{C}_{k-k_1} \right], \quad (3.25)$$

$$\underline{L}(k+1) = \frac{h}{k+1} \left[\sum_{k_1=0}^k \underline{V}_X(k_1) \tilde{A}_k \tilde{C}_{k-k_1} - \sum_{k_1=0}^k \underline{V}_Y(k_1) \tilde{A}_k \tilde{S}_{k-k_1} \right], \quad (3.26)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+I}{h} \underline{\alpha}(\ell+I) \underline{W}(k-\ell) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+I}{h} \underline{V}_X(\ell+I) \underline{V}_Y(k-\ell) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+I}{h} \underline{V}_Y(\ell+I) \underline{V}_X(k-\ell), \quad (3.27)$$

$$\underline{\theta}(k) = \underline{\mathfrak{g}}(k) - \underline{\alpha}(k), \quad (3.28)$$

$$\underline{\varphi}(k) = a_0 \underline{\mathfrak{v}}(k) + a_1 T_i \underline{\mathfrak{v}}(k-I), \quad (3.29)$$

$$\underline{F}_X(k) = \underline{F}_{X A}(k) + \underline{F}_{X CT}(k) + \underline{F}_{X DV}(k) + \underline{F}_{X G}(k), \quad (3.30)$$

$$\underline{F}_Y(k) = \underline{F}_{Y A}(k) + \underline{F}_{Y CT}(k) + \underline{F}_{Y DV}(k) + \underline{F}_{Y G} \underline{F}_{Y G}(k), \quad (3.31)$$

$$\underline{M}_Z(k) = \underline{M}_{Z A}(k) + \underline{M}_{Z CT}(k) + \underline{M}_{Z DV}(k) + \underline{M}_{Z G}(k), \quad (3.32)$$

$$\underline{F}_{X A}(k) = -U^{2/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_1(k-\ell) \underline{S}_2(\ell) + U^{2/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_2(k-\ell) \underline{S}_1(\ell) + U \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_4(k-\ell) \underline{S}_1(\ell), \quad (3.33)$$

$$\underline{F}_{Y A}(k) = U^{2/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_1(k-\ell) \underline{S}_1(\ell) + U^{2/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_2(k-\ell) \underline{S}_2(\ell) + U \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_4(k-\ell) \underline{S}_2(\ell), \quad (3.34)$$

$$\underline{M}_{Z A}(k) = U \underline{Q}_5(k) + U^{4/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_6(k-\ell) \frac{\ell+I}{h} \underline{\alpha}(\ell+I) + U^{4/3} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_7(k-\ell) \underline{\omega}_Z(\ell), \quad (3.35)$$

$$\underline{F}_{X CT}(k) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_1(k), \quad (3.36)$$

$$\underline{F}_{Y CT}(k) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_2(k), \quad (3.37)$$

$$\underline{M}_{Z CT}(k) = 0, \quad (3.38)$$

$$\underline{F}_{X G}(k) = -m_i g \underline{N}_1(k), \quad (3.39)$$

$$\underline{F}_{Y G}(k) = -m_i g \underline{N}_2(k), \quad (3.40)$$

$$\underline{M}_{Z G}(k) = m_i g [x_C \underline{N}_2(k) - y_C \underline{N}_1(k)], \quad (3.41)$$

$$\underline{F}_{X DV}(k) = P_{\Sigma_i} \underline{R}_2(k), \quad (3.42)$$

$$\underline{F}_Y \underline{DV}(k) = P_{\Sigma_i} \underline{R}_1(k), \quad (3.43)$$

$$\underline{M}_Z \underline{DV}(k) = P_{\Sigma_i} Y_{DV} \underline{R}_2(k) + P_{\Sigma_i} X_{DV} \underline{R}_1(k), \quad (3.44)$$

за умови, що $P_{\Sigma_i} = const$.

У спектральній моделі (3.21) – (3.44) прийнято наступні позначення:

$$\begin{aligned} \underline{N}_1(k+1) &= \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{g}(\ell+1) \underline{N}_2(k-\ell), \quad \underline{N}_2(k+1) = - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{g}(\ell+1) \underline{N}_1(k-\ell), \\ \underline{R}_1(k+1) &= \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{\varphi}(\ell+1) \underline{R}_2(k-\ell), \quad \underline{R}_2(k+1) = - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{\varphi}(\ell+1) \underline{R}_1(k-\ell), \\ \underline{S}_1(k+1) &= \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{\alpha}(\ell+1) \underline{S}_2(k-\ell), \quad \underline{S}_2(k+1) = - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \frac{\ell+1}{k+1} \underline{\alpha}(\ell+1) \underline{S}_1(k-\ell), \\ \underline{C}_1(k) &= C_{X_0} \underline{v}(k) + B_{\alpha} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{C}_2(k-\ell) \underline{C}_2(\ell), \quad \underline{C}_2(k) = C_{Y_0} \underline{v}(k) + C_Y^{\alpha} \underline{\alpha}(k) + C_Y^{\delta_B} \underline{\delta}_B(k), \\ \underline{C}_3(k) &= C_{Y_0}^{\bar{\omega}_z} \underline{v}(k) + (C_Y^{\bar{\omega}_z})^{\alpha} \underline{\alpha}(k), \quad \underline{m}_1(k) = m_{Z_0} \underline{v}(k) + m_Z^{\alpha} \underline{\alpha}(k) + m_Z^{\delta_B} \underline{\delta}_B(k), \\ \underline{m}_2(k) &= m_{Z_0}^{\bar{\alpha}} \underline{v}(k) + \left(m_Z^{\bar{\alpha}} \right)^{\alpha} \underline{\alpha}(k), \quad \underline{m}_3(k) = m_{Z_0}^{\bar{\omega}_z} \underline{v}(k) + \left(m_Z^{\bar{\omega}_z} \right)^{\alpha} \underline{\alpha}(k), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\underline{Q}_1(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{C}_1(k-\ell) \underline{q}(\ell), \quad \underline{Q}_2(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{C}_2(k-\ell) \underline{q}(\ell); \quad \underline{Q}_3(k) = \frac{\rho}{2} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{C}_3(k-\ell) \underline{V}(\ell),$$

$$\underline{Q}_4(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Q}_3(k-\ell) \underline{\omega}_Z(\ell), \quad \underline{Q}_5(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{m}_1(k-\ell) \underline{q}(\ell); \quad \underline{Q}_6(k) = \frac{\rho}{2} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{m}_2(k-\ell) \underline{V}(\ell),$$

$$\underline{Q}_7(k) = \frac{\rho}{2} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{m}_3(k-\ell) \underline{V}(\ell), \quad \underline{q}(k) = \frac{\rho}{2} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}(k-\ell) \underline{V}(\ell), \quad \underline{v}(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k > 0 \end{cases},$$

$$\underline{W}(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}(k-\ell) \underline{V}(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}_X(k-\ell) \underline{V}_X(\ell) + \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}_Y(k-\ell) \underline{V}_Y(\ell).$$

Риска знизу означає зображення відповідного параметру чи змінної.

Відмінність запропонованої спектральної моделі від відомої [211] полягає у застосуванні поліномів Адоміана для апроксимації нелінійних членів диференціальних рівнянь траєкторного руху БАЛІА, що дає змогу подолати

математичні труднощі та істотно зменшити обчислювальні витрати при знаходженні диференціальних спектрів змінних параметрів руху.

Вищенаведена спектральна модель (3.21) – (3.44) дозволяє в момент часу $t_0 = 0$ для довільних початкових умов за цілочислових значень $k = 0, 1, 2, \dots$ визначати диференціальні спектри усіх істотних параметрів руху БАЛА.

Перевага спектральної моделі (3.21) – (3.44) полягає у тому, що для визначення дискрет диференціальних спектрів змінних, що характеризують рух БАЛА, достатньо виконати арифметичні операції складання-віднімання та добутку, послідовно присвоюючи цілочислому аргументу k значення $k = 0, 1, 2, \dots$

Розглянемо питання адекватності наведеного вище дискретно-аналітичного відображення математичної моделі динаміки повздовжнього руху дирижабля в спектральну модель. Як вихідна математична модель прийнята модель, що складена в [211]. Дана модель є аналогічною запропонованій Woo G.A. [245], яка задовільно погоджується з результатами льотних випробувань [246]. За допомогою математичного апарата диференціальних перетворень здійснено дискретно-аналітичне відображення прийнятої математичної моделі в область зображень. Диференціальні перетворення є точним операційним методом [175,176]. Тому переведення вихідної математичної моделі в область зображень точним операційним методом диференціальних перетворень зберігає точність вихідної математичної моделі. В силу цього можна стверджувати, що результати моделювання траєкторного руху дирижабля будуть задовільно співпадати з відповідними даними льотних випробувань.

3.2.3. Диференціальні спектри змінних траєкторного руху

Послідовно задаючи цілочислові значення аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$, за спектральною моделлю (3.21) – (3.44) в момент початку процесу керування $t_0 = 0$ знайдемо дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху БАЛА як функції від довільних початкових умов змінних математичної

моделі (3.3) - (3.18), довільних параметрів a_0, a_1 кута відхилення вектору тяги φ та часу T_i i -ої ділянки процесу керування БАЛА.

Детальніше зупинимося на знаходженні дискрет нелінійних складових диференціальних рівнянь руху за допомогою поліномів Адоміана на прикладі першого рівняння системи (3.19) та його зображення (3.21).

Маємо: $F_{X_1} = a_{12}V_y\omega_z, F_{X_2} = a_{13}\omega_z^2$ та їх зображення $\underline{F_{X_1}}(k) = a_{12} \cdot \sum_{k_1=0}^k \underline{V_Y}(k_1) \tilde{A}_k \tilde{Z}_{k-k_1}$,

$\underline{F_{X_2}}(k) = a_{13}\tilde{A}_k$ відповідно. Відповідно до процедур (2.21') та (2.22') отримуємо:

$$\begin{aligned} \underline{F_{X_1}}(0) &= a_{12}\underline{V_Y}(0)\underline{\omega_Z}(0), \underline{F_{X_1}}(1) = a_{12}[\underline{V_Y}(0) + \underline{V_Y}(1)\underline{\omega_Z}(0)] \\ \underline{F_{X_1}}(2) &= a_{12}[\underline{V_Y}(1) + \underline{V_Y}(2)\underline{\omega_Z}(0)] \\ \underline{F_{X_1}}(3) &= a_{12}[\underline{V_Y}(2) + \underline{V_Y}(3)\underline{\omega_Z}(0)] \underline{F_{X_1}}(4) = a_{12}[\underline{V_Y}(3) + \underline{V_Y}(4)\underline{\omega_Z}(0)] \dots \\ \underline{F_{X_2}}(0) &= a_{13}[\underline{\omega_Z}(0)]^2, \underline{F_{X_2}}(1) = a_{13}\underline{\omega_Z}(0)[1 + \underline{\omega_Z}(1)] \\ \underline{F_{X_2}}(2) &= a_{13}[\underline{\omega_Z}(1) + \underline{\omega_Z}(2)\underline{\omega_Z}(0)] \\ \underline{F_{X_2}}(3) &= a_{13}[\underline{\omega_Z}(2) + \underline{\omega_Z}(3)\underline{\omega_Z}(0)] \underline{F_{X_2}}(4) = a_{13}[\underline{\omega_Z}(3) + \underline{\omega_Z}(4)\underline{\omega_Z}(0)] \dots \end{aligned} \quad (3.46)$$

З рекурентного виразу (3.21) знаходимо диференціальний спектр $\underline{V_X}$:

$$\begin{aligned} \underline{V_X}(0) &= V_{X_0}, \underline{V_X}(1) = h \left[a_{11} \frac{1}{h} \underline{\omega_Z}(1) + a_{12} V_{Y_0} \underline{\omega_Z}(0) + a_{13} \underline{\omega_Z}(0)^2 + a_{14} \underline{F_X}(0) \right], \\ \underline{V_X}(2) &= \frac{h}{2} \left[a_{11} \frac{2}{h} \underline{\omega_Z}(2) + a_{12} (\underline{V_Y}(1)\underline{\omega_Z}(0) + V_{Y_0} \underline{\omega_Z}(1)) + 2a_{13} \underline{\omega_Z}(1)\underline{\omega_Z}(0) + a_{14} \underline{F_X}(1) \right], \\ \underline{V_X}(3) &= \frac{h}{3} \left[a_{11} \frac{3}{h} \underline{\omega_Z}(3) + a_{12} (\underline{V_Y}(2)\underline{\omega_Z}(0) + \underline{V_Y}(1)\underline{\omega_Z}(1) + V_{Y_0} \underline{\omega_Z}(2)) + \right. \\ &\quad \left. + a_{13} (2\underline{\omega_Z}(2)\underline{\omega_Z}(0) + \underline{\omega_Z}(1)^2) + a_{14} \underline{F_X}(2) \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

де $\underline{\omega_Z}(0) = \omega_{Z_0}$, $\underline{V_X}(0) = V_{X_0}$ - початкові значення змінних $\omega_Z(t)$ і $V_X(t)$.

Диференціальний спектр $\underline{V_Y}$ визначимо з виразу (3.22):

$$\begin{aligned} \underline{V_Y}(0) &= V_{Y_0}, \underline{V_Y}(1) = h \left[-a_{21} \frac{1}{h} \underline{\omega_Z}(1) + a_{22} V_{X_0} \underline{\omega_Z}(0) + a_{23} \underline{\omega_Z}(0)^2 + a_{24} \underline{F_Y}(0) \right], \\ \underline{V_Y}(2) &= \frac{h}{2} \left[-a_{21} \frac{2}{h} \underline{\omega_Z}(2) + a_{22} (\underline{V_X}(1)\underline{\omega_Z}(0) + V_{X_0} \underline{\omega_Z}(1)) + 2a_{23} \underline{\omega_Z}(1)\underline{\omega_Z}(0) + a_{24} \underline{F_Y}(1) \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\underline{V}_Y(3) = \frac{h}{3} \left[-a_{21} \frac{3}{h} \underline{\omega}_Z(3) + a_{22} (\underline{V}_X(2) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{V}_X(1) \underline{\omega}_Z(1) + V_{X_0} \underline{\omega}_Z(2)) + \right. \\ \left. + a_{23} (2 \underline{\omega}_Z(2) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{\omega}_Z^2(1)) + a_{24} \underline{F}_Y(2) \right],$$

де $\underline{V}_Y(0) = V_{Y_0}$ - початкове значення змінної $V_Y(t)$.

З виразу (3.23) визначимо диференціальний спектр $\underline{\omega}_Z(k)$:

$$\underline{\omega}_Z(0) = \underline{\omega}_{Z_0},$$

$$\underline{\omega}_Z(1) = h \left[b_1 \frac{V_X(1)}{h} - b_2 \frac{V(1)}{h} + b_3 V_{X_0} V_{Y_0} - b_4 V_{X_0} \underline{\omega}_{Z_0} - b_5 V_{Y_0} \underline{\omega}_{Z_0} + b_6 \underline{M}_Z(0) \right],$$

$$\underline{\omega}_Z(2) = \frac{h}{2} \left[b_1 \frac{2V_X(2)}{h} - b_2 \frac{2V(2)}{h} + b_3 (\underline{V}_X(1) V_{Y_0} + V_{X_0} \underline{V}_Y(1)) - \right. \\ \left. - b_4 (\underline{V}_X(1) \underline{\omega}_{Z_0} + V_{X_0} \underline{\omega}_Z(1)) - b_5 (\underline{V}_Y(1) \underline{\omega}_{Z_0} + V_{Y_0} \underline{\omega}_Z(1)) + b_6 \underline{M}_Z(1) \right], \quad (3.49)$$

$$\underline{\omega}_Z(3) = \frac{h}{3} \left[b_1 \frac{3V_X(3)}{h} - b_2 \frac{3V(3)}{h} + b_3 (\underline{V}_X(2) V_{Y_0} + \underline{V}_X(1) \underline{V}_Y(1) + V_{X_0} \underline{V}_Y(2)) - \right. \\ \left. - b_4 (\underline{V}_X(2) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{V}_X(1) \underline{\omega}_Z(1) + V_{X_0} \underline{\omega}_Z(2)) - \right. \\ \left. - b_5 (\underline{V}_Y(2) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{V}_Y(1) \underline{\omega}_Z(1) + V_{Y_0} \underline{\omega}_Z(2)) + b_6 \underline{M}_Z(2) \right].$$

Дискрети диференціального спектра кута тангажа $\underline{\vartheta}(k)$ обчислюємо за виразом (3.24):

$$\underline{\vartheta}(0) = \vartheta_0, \quad \underline{\vartheta}(1) = h \underline{\omega}_{Z_0}, \quad \underline{\vartheta}(2) = \frac{h}{2} \underline{\omega}_Z(1), \quad \underline{\vartheta}(3) = \frac{h}{3} \underline{\omega}_Z(2), \quad \underline{\vartheta}(4) = \frac{h}{4} \underline{\omega}_Z(3). \quad (3.50)$$

З виразу (3.25) визначаємо диференціальний спектр висоти $\underline{H}(k)$:

$$\underline{H}(0) = H_0, \quad \underline{H}(1) = h [V_{X_0} \underline{N}_1(0) + V_{Y_0} \underline{N}_2(0)],$$

$$\underline{H}(2) = \frac{h}{2} [V_X(1) \underline{N}_1(0) + V_{X_0} \underline{N}_1(1) + \underline{V}_Y(1) \underline{N}_2(0) + V_{Y_0} \underline{N}_2(1)], \quad (3.51)$$

$$\underline{H}(3) = \frac{h}{3} [V_X(2) \underline{N}_1(0) + \underline{V}_X(1) \underline{N}_1(1) + V_{X_0} \underline{N}_1(2) + \underline{V}_Y(2) \underline{N}_2(0) + \underline{V}_Y(1) \underline{N}_2(1) + V_{Y_0} \underline{N}_2(2)]$$

З виразу (3.26) визначаємо диференціальний спектр дальності $\underline{L}(k)$:

$$\underline{L}(0) = L_0, \quad \underline{L}(1) = h [V_{X_0} \underline{N}_2(0) - V_{Y_0} \underline{N}_1(0)],$$

$$\underline{L}(2) = \frac{h}{2} [V_X(1) \underline{N}_2(0) + V_{X_0} \underline{N}_2(1) - \underline{V}_Y(1) \underline{N}_1(0) - V_{Y_0} \underline{N}_1(1)], \quad (3.52)$$

$$\underline{L}(3) = \frac{h}{3} \left[\underline{V}_X(2) \underline{N}_2(0) + \underline{V}_X(1) \underline{N}_2(1) + \underline{V}_{X_0} \underline{N}_2(2) - \underline{V}_Y(2) \underline{N}_1(0) - \underline{V}_Y(1) \underline{N}_1(1) + \underline{V}_{Y_0} \underline{N}_1(2) \right]$$

Із співвідношення (3.27) обчислюємо диференціальний спектр кута атаки $\underline{\alpha}(k)$:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(0) &= \alpha_0, \quad \underline{\alpha}(1) = \frac{1}{\underline{W}(0)} \left[\underline{V}_X(1) \underline{V}_{Y_0} - \underline{V}_Y(1) \underline{V}_{X_0} \right], \\ \underline{\alpha}(2) &= \frac{1}{2\underline{W}(0)} \left[\underline{V}_X(1) \underline{V}_Y(1) + 2\underline{V}_X(2) \underline{V}_{Y_0} - \underline{V}_Y(1) \underline{V}_X(1) - 2\underline{V}_Y(2) \underline{V}_{X_0} - \underline{\alpha}(1) \underline{W}(1) \right], \\ \underline{\alpha}(3) &= \frac{1}{3\underline{W}(0)} \left[\underline{V}_X(1) \underline{V}_Y(2) + 2\underline{V}_X(2) \underline{V}_Y(1) + 3\underline{V}_X(3) \underline{V}_{Y_0} - \underline{V}_Y(1) \underline{V}_X(2) - \right. \\ &\quad \left. - 2\underline{V}_Y(2) \underline{V}_X(1) - 3\underline{V}_Y(3) \underline{V}_{X_0} - \underline{\alpha}(1) \underline{W}(2) - 2\underline{\alpha}(2) \underline{W}(1) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

З виразу (3.28) визначаємо диференціальний спектр кута нахилу траєкторії $\underline{\theta}(k)$:

$$\underline{\theta}(0) = \vartheta_0 - \alpha_0 = \theta_0, \quad \underline{\theta}(1) = \vartheta(1) - \alpha(1), \quad \underline{\theta}(2) = \vartheta(2) - \alpha(2), \quad \underline{\theta}(3) = \vartheta(3) - \alpha(3). \quad (3.54)$$

Дискрети диференціального спектра кута відхилення вектору тяги $\underline{\varphi}(k)$ обчислюємо за виразом (3.29) з урахуванням співвідношення (3.30):

$$\underline{\varphi}(0) = a_0, \quad \underline{\varphi}(1) = a_1 T, \quad \underline{\varphi}(k \geq 2) = 0. \quad (3.55)$$

Дискрети сил та моментів, що діють на БАЛА обчислюємо за виразами (3.31)-(3.45):

$$\underline{F}_X(0) = \underline{F}_{X A}(0) + \underline{F}_{X CT}(0) + \underline{F}_{X DV}(0) + \underline{F}_{X G}(0),$$

$$\underline{F}_X(1) = \underline{F}_{X A}(1) + \underline{F}_{X CT}(1) + \underline{F}_{X DV}(1) + \underline{F}_{X G}(1),$$

$$\underline{F}_X(2) = \underline{F}_{X A}(2) + \underline{F}_{X CT}(2) + \underline{F}_{X DV}(2) + \underline{F}_{X G}(2),$$

$$\underline{F}_X(3) = \underline{F}_{X A}(3) + \underline{F}_{X CT}(3) + \underline{F}_{X DV}(3) + \underline{F}_{X G}(3),$$

$$\underline{F}_Y(0) = \underline{F}_{Y A}(0) + \underline{F}_{Y CT}(0) + \underline{F}_{Y DV}(0) + \underline{F}_{Y G}(0),$$

$$\underline{F}_Y(1) = \underline{F}_{Y A}(1) + \underline{F}_{Y CT}(1) + \underline{F}_{Y DV}(1) + \underline{F}_{Y G}(1),$$

$$\underline{F}_Y(2) = \underline{F}_{Y A}(2) + \underline{F}_{Y CT}(2) + \underline{F}_{Y DV}(2) + \underline{F}_{Y G}(2),$$

$$\underline{F}_Y(3) = \underline{F}_{Y A}(3) + \underline{F}_{Y CT}(3) + \underline{F}_{Y DV}(3) + \underline{F}_{Y G}(3),$$

$$\underline{M}_Z(0) = \underline{M}_{Z A}(0) + \underline{M}_{Z CT}(0) + \underline{M}_{Z DV}(0) + \underline{M}_{Z G}(0),$$

$$\underline{M}_Z(1) = \underline{M}_{Z A}(1) + \underline{M}_{Z CT}(1) + \underline{M}_{Z DV}(1) + \underline{M}_{Z G}(1),$$

$$\underline{M_Z}(2) = \underline{M_{Z A}}(2) + \underline{M_{Z CT}}(2) + \underline{M_{Z DV}}(2) + \underline{M_{Z G}}(2),$$

$$\underline{M_Z}(3) = \underline{M_{Z A}}(3) + \underline{M_{Z CT}}(3) + \underline{M_{Z DV}}(3) + \underline{M_{Z G}}(3),$$

$$\underline{F_{X A}}(0) = -U^{2/3} \underline{Q_1}(0) \underline{S_2}(0) + U^{2/3} \underline{Q_2}(0) \underline{S_1}(0) + U \underline{Q_4}(0) \underline{S_1}(0),$$

$$\underline{F_{X A}}(1) = -U^{2/3} (\underline{Q_1}(1) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_2}(1)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(1) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_1}(1)) + U (\underline{Q_4}(1) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_1}(1)),$$

$$\underline{F_{X A}}(2) = -U^{2/3} (\underline{Q_1}(2) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_1}(1) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_2}(2)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(2) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_2}(1) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_1}(2)) + U (\underline{Q_4}(2) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_4}(1) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_1}(2)),$$

$$\underline{F_{X A}}(3) = -U^{2/3} (\underline{Q_1}(3) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_1}(2) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_1}(1) \underline{S_2}(2) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_2}(3)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(3) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_2}(2) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_2}(1) \underline{S_1}(2) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_1}(3)) + U (\underline{Q_4}(3) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_4}(2) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_4}(1) \underline{S_1}(2) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_1}(3)),$$

$$\underline{F_{Y A}}(0) = U^{2/3} \underline{Q_1}(0) \underline{S_1}(0) + U^{2/3} \underline{Q_2}(0) \underline{S_2}(0) + U \underline{Q_4}(0) \underline{S_2}(0),$$

$$\underline{F_{Y A}}(1) = U^{2/3} (\underline{Q_1}(1) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_1}(1)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(1) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_2}(1)) + U (\underline{Q_4}(1) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_2}(1)),$$

$$\underline{F_{Y A}}(2) = U^{2/3} (\underline{Q_1}(2) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_1}(1) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_1}(2)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(2) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_2}(1) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_2}(2)) + U (\underline{Q_4}(2) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_4}(1) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_2}(2)),$$

$$\underline{F_{Y A}}(3) = U^{2/3} (\underline{Q_1}(3) \underline{S_1}(0) + \underline{Q_1}(2) \underline{S_1}(1) + \underline{Q_1}(1) \underline{S_1}(2) + \underline{Q_1}(0) \underline{S_1}(3)) + U^{2/3} (\underline{Q_2}(3) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_2}(2) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_2}(1) \underline{S_2}(2) + \underline{Q_2}(0) \underline{S_2}(3)) + U (\underline{Q_4}(3) \underline{S_2}(0) + \underline{Q_4}(2) \underline{S_2}(1) + \underline{Q_4}(1) \underline{S_2}(2) + \underline{Q_4}(0) \underline{S_2}(3)),$$

$$\underline{M_{Z A}}(0) = U \underline{Q_5}(0) + U^{4/3} \underline{Q_6}(0) \frac{1}{h} \underline{\alpha}(1) + U^{4/3} \underline{Q_7}(0) \underline{\omega}_{Z_0},$$

$$\underline{M_{Z A}}(1) = U \underline{Q_5}(1) + U^{4/3} \left(\underline{Q_6}(1) \frac{1}{h} \underline{\alpha}(1) + \underline{Q_6}(0) \frac{2}{h} \underline{\alpha}(2) \right) + U^{4/3} (\underline{Q_7}(1) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{Q_7}(0) \underline{\omega}_Z(1)),$$

$$\underline{M_{Z A}}(2) = U \underline{Q_5}(2) + U^{4/3} \left(\underline{Q_6}(2) \frac{1}{h} \underline{\alpha}(1) + \underline{Q_6}(1) \frac{2}{h} \underline{\alpha}(2) + \underline{Q_6}(0) \frac{3}{h} \underline{\alpha}(3) \right) + U^{4/3} (\underline{Q_7}(2) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{Q_7}(1) \underline{\omega}_Z(1) + \underline{Q_7}(0) \underline{\omega}_Z(2)),$$

$$\begin{aligned}
\underline{M}_{Z A}(3) &= U \underline{Q}_5(3) + U^{4/3} \left(\underline{Q}_6(3) \frac{1}{h} \underline{\alpha}(1) + \underline{Q}_6(2) \frac{2}{h} \underline{\alpha}(2) + \underline{Q}_6(1) \frac{3}{h} \underline{\alpha}(3) + \underline{Q}_6(0) \frac{4}{h} \underline{\alpha}(4) \right) + \\
&+ U^{4/3} \left(\underline{Q}_7(3) \underline{\omega}_{Z_0} + \underline{Q}_7(2) \underline{\omega}_Z(1) + \underline{Q}_7(1) \underline{\omega}_Z(2) + \underline{Q}_7(0) \underline{\omega}_Z(3) \right) \\
\underline{F}_{X CT}(0) &= U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_1(0), \quad \underline{F}_{X CT}(1) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_1(1), \\
\underline{F}_{X CT}(2) &= U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_1(2), \quad \underline{F}_{X CT}(3) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_1(3), \\
\underline{F}_{Y CT}(0) &= U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_2(0), \quad \underline{F}_{Y CT}(1) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_2(1), \\
\underline{F}_{Y CT}(2) &= U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_2(2), \quad \underline{F}_{Y CT}(3) = U(\gamma_B - \gamma_G) \underline{N}_2(3), \\
\underline{M}_{Z CT}(0) &= \underline{M}_{Z CT}(1) = \underline{M}_{Z CT}(2) = \underline{M}_{Z CT}(3) = 0, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{F}_{X G}(0) &= -mg \underline{N}_1(0), \quad \underline{F}_{X G}(1) = -mg \underline{N}_1(1), \quad \underline{F}_{X G}(2) = -mg \underline{N}_1(2), \quad \underline{F}_{X G}(3) = -mg \underline{N}_1(3), \\
\underline{F}_{Y G}(0) &= -mg \underline{N}_2(0), \quad \underline{F}_{Y G}(1) = -mg \underline{N}_2(1), \quad \underline{F}_{Y G}(2) = -mg \underline{N}_2(2), \quad \underline{F}_{Y G}(3) = -mg \underline{N}_2(3), \\
\underline{M}_{Z G}(0) &= mg [x_C \underline{N}_2(0) - y_C \underline{N}_1(0)], \quad \underline{M}_{Z G}(1) = mg [x_C \underline{N}_2(1) - y_C \underline{N}_1(1)], \\
\underline{M}_{Z G}(2) &= mg [x_C \underline{N}_2(2) - y_C \underline{N}_1(2)], \quad \underline{M}_{Z G}(3) = mg [x_C \underline{N}_2(3) - y_C \underline{N}_1(3)], \\
\underline{F}_{X DV}(0) &= P_\Sigma \underline{R}_2(0), \quad \underline{F}_{X DV}(1) = P_\Sigma \underline{R}_2(1), \quad \underline{F}_{X DV}(2) = P_\Sigma \underline{R}_2(2), \quad \underline{F}_{X DV}(3) = P_\Sigma \underline{R}_2(3) \\
\underline{F}_{Y DV}(0) &= P_\Sigma \underline{R}_1(0), \quad \underline{F}_{Y DV}(1) = P_\Sigma \underline{R}_1(1), \quad \underline{F}_{Y DV}(2) = P_\Sigma \underline{R}_1(2), \quad \underline{F}_{Y DV}(3) = P_\Sigma \underline{R}_1(3) \\
\underline{M}_{Z DV}(0) &= P_\Sigma [y_{DV} \underline{R}_2(0) + x_{DV} \underline{R}_1(0)], \quad \underline{M}_{Z DV}(1) = P_\Sigma [y_{DV} \underline{R}_2(1) + x_{DV} \underline{R}_1(1)], \\
\underline{M}_{Z DV}(2) &= P_\Sigma [y_{DV} \underline{R}_2(2) + x_{DV} \underline{R}_1(2)], \quad \underline{M}_{Z DV}(3) = P_\Sigma [y_{DV} \underline{R}_2(3) + x_{DV} \underline{R}_1(3)],
\end{aligned}$$

Дискрети додаткових змінних подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}
\underline{N}_1(0) &= \sin \vartheta_0, \quad \underline{N}_1(1) = \underline{\vartheta}(1) \underline{N}_2(0), \quad \underline{N}_1(2) = \frac{1}{2} \underline{\vartheta}(1) \underline{N}_2(1) + \underline{\vartheta}(2) \underline{N}_2(0), \\
\underline{N}_1(3) &= \frac{1}{3} \underline{\vartheta}(1) \underline{N}_2(2) + \frac{2}{3} \underline{\vartheta}(2) \underline{N}_2(1) + \underline{\vartheta}(3) \underline{N}_2(0), \\
\underline{N}_2(0) &= \cos \vartheta_0, \quad \underline{N}_2(1) = -\underline{\vartheta}(1) \underline{N}_1(0), \quad \underline{N}_2(2) = -\left[\frac{1}{2} \underline{\vartheta}(1) \underline{N}_1(1) + \underline{\vartheta}(2) \underline{N}_1(0) \right], \\
\underline{N}_2(3) &= -\left[\frac{1}{3} \underline{\vartheta}(1) \underline{N}_1(2) + \frac{2}{3} \underline{\vartheta}(2) \underline{N}_1(1) + \underline{\vartheta}(3) \underline{N}_1(0) \right], \\
\underline{R}_1(0) &= \sin \varphi_0, \quad \underline{R}_1(1) = \underline{\varphi}(1) \underline{R}_2(0), \quad \underline{R}_1(2) = \frac{1}{2} \underline{\varphi}(1) \underline{R}_2(1) + \underline{\varphi}(2) \underline{R}_2(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{R}_1(3) &= \frac{1}{3}\underline{\varphi}(1)\underline{R}_2(2) + \frac{2}{3}\underline{\varphi}(2)\underline{R}_2(1) + \underline{\varphi}(3)\underline{R}_2(0), \\
\underline{R}_2(0) &= \cos \varphi_0, \quad \underline{R}_2(1) = -\underline{\varphi}(1)\underline{R}_1(0), \quad \underline{R}_2(2) = -\left[\frac{1}{2}\underline{\varphi}(1)\underline{R}_1(1) + \underline{\varphi}(2)\underline{R}_1(0)\right], \\
\underline{R}_2(3) &= -\left[\frac{1}{3}\underline{\varphi}(1)\underline{R}_1(2) + \frac{2}{3}\underline{\varphi}(2)\underline{R}_1(1) + \underline{\varphi}(3)\underline{R}_1(0)\right], \\
\underline{S}_1(0) &= \sin \alpha_0, \quad \underline{S}_1(1) = \underline{\alpha}(1)\underline{S}_2(0), \quad \underline{S}_1(2) = \frac{1}{2}\underline{\alpha}(1)\underline{S}_2(1) + \underline{\alpha}(2)\underline{S}_2(0), \\
\underline{S}_1(3) &= \frac{1}{3}\underline{\alpha}(1)\underline{S}_2(2) + \frac{2}{3}\underline{\alpha}(2)\underline{S}_2(1) + \underline{\alpha}(3)\underline{S}_2(0), \\
\underline{S}_2(0) &= \cos \alpha_0, \quad \underline{S}_2(1) = -\underline{\alpha}(1)\underline{S}_1(0), \quad \underline{S}_2(2) = -\left[\frac{1}{2}\underline{\alpha}(1)\underline{S}_1(1) + \underline{\alpha}(2)\underline{S}_1(0)\right], \\
\underline{S}_2(3) &= -\left[\frac{1}{3}\underline{\alpha}(1)\underline{S}_1(2) + \frac{2}{3}\underline{\alpha}(2)\underline{S}_1(1) + \underline{\alpha}(3)\underline{S}_1(0)\right], \tag{3.57} \\
\underline{C}_1(0) &= C_{X_0} + B_\alpha \underline{C}_2^2(0), \quad \underline{C}_1(1) = 2B_\alpha \underline{C}_2(1)\underline{C}_2(0), \quad \underline{C}_1(2) = B_\alpha \left[2\underline{C}_2(2)\underline{C}_2(0) + \underline{C}_2^2(1)\right], \\
\underline{C}_1(3) &= 2B_\alpha \left[\underline{C}_2(3)\underline{C}_2(0) + \underline{C}_2(2)\underline{C}_2(1)\right], \\
\underline{C}_2(0) &= C_{Y_0} + C_Y^\alpha \underline{\alpha}(0) + C_Y^{\delta_B} \underline{\delta}_B(0), \quad \underline{C}_2(1) = C_Y^\alpha \underline{\alpha}(1) + C_Y^{\delta_B} \underline{\delta}_B(1), \quad \underline{C}_2(2) = C_Y^\alpha \underline{\alpha}(2) + C_Y^{\delta_B} \underline{\delta}_B(2), \\
\underline{C}_2(3) &= C_Y^\alpha \underline{\alpha}(3) + C_Y^{\delta_B} \underline{\delta}_B(3), \\
\underline{C}_3(0) &= \overline{C_{Y_0^{\omega_Z}}} + (\overline{C_Y^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(0), \quad \underline{C}_3(1) = (\overline{C_Y^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(1), \quad \underline{C}_3(2) = (\overline{C_Y^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(2), \quad \underline{C}_3(3) = (\overline{C_Y^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(3), \\
\underline{m}_1(0) &= m_{Z_0} + m_Z^\alpha \underline{\alpha}(0) + m_Z^{\delta_B} \underline{\delta}_B(0), \quad \underline{m}_1(1) = m_Z^\alpha \underline{\alpha}(1) + m_Z^{\delta_B} \underline{\delta}_B(1), \quad \underline{m}_1(2) = m_Z^\alpha \underline{\alpha}(2) + m_Z^{\delta_B} \underline{\delta}_B(2), \\
\underline{m}_1(3) &= m_Z^\alpha \underline{\alpha}(3) + m_Z^{\delta_B} \underline{\delta}_B(3), \\
\underline{m}_2(0) &= \overline{m_{Z_0}^{\dot{\alpha}}} + (\overline{m_Z^{\dot{\alpha}}})^\alpha \underline{\alpha}(0), \quad \underline{m}_2(1) = (\overline{m_Z^{\dot{\alpha}}})^\alpha \underline{\alpha}(1), \quad \underline{m}_2(2) = (\overline{m_Z^{\dot{\alpha}}})^\alpha \underline{\alpha}(2), \quad \underline{m}_2(3) = (\overline{m_Z^{\dot{\alpha}}})^\alpha \underline{\alpha}(3), \\
\underline{m}_3(0) &= \overline{m_{Z_0}^{\omega_Z}} + (\overline{m_Z^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(0), \quad \underline{m}_3(1) = (\overline{m_Z^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(1), \quad \underline{m}_3(2) = (\overline{m_Z^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(2), \quad \underline{m}_3(3) = (\overline{m_Z^{\omega_Z}})^\alpha \underline{\alpha}(3), \\
\underline{Q}_1(0) &= \underline{C}_1(0)\underline{q}(0), \quad \underline{Q}_1(1) = \underline{C}_1(1)\underline{q}(0) + \underline{C}_1(0)\underline{q}(1), \\
\underline{Q}_1(2) &= \underline{C}_1(2)\underline{q}(0) + \underline{C}_1(1)\underline{q}(1) + \underline{C}_1(0)\underline{q}(2), \\
\underline{Q}_1(3) &= \underline{C}_1(3)\underline{q}(0) + \underline{C}_1(2)\underline{q}(1) + \underline{C}_1(1)\underline{q}(2) + \underline{C}_1(0)\underline{q}(3), \\
\underline{Q}_2(0) &= \underline{C}_2(0)\underline{q}(0), \quad \underline{Q}_2(1) = \underline{C}_2(1)\underline{q}(0) + \underline{C}_2(0)\underline{q}(1),
\end{aligned}$$

$$\underline{Q}_2(2) = \underline{C}_2(2)\underline{q}(0) + \underline{C}_2(1)\underline{q}(1) + \underline{C}_2(0)\underline{q}(2),$$

$$\underline{Q}_2(3) = \underline{C}_2(3)\underline{q}(0) + \underline{C}_2(2)\underline{q}(1) + \underline{C}_2(1)\underline{q}(2) + \underline{C}_2(0)\underline{q}(3),$$

$$\underline{Q}_3(0) = \frac{\rho}{2}\underline{C}_3(0)V_0, \quad \underline{Q}_3(1) = \frac{\rho}{2}[\underline{C}_3(1)V_0 + \underline{C}_3(0)\underline{V}(1)],$$

$$\underline{Q}_3(2) = \frac{\rho}{2}[\underline{C}_3(2)V_0 + \underline{C}_3(1)\underline{V}(1) + \underline{C}_3(0)\underline{V}(2)],$$

$$\underline{Q}_3(3) = \frac{\rho}{2}[\underline{C}_3(3)V_0 + \underline{C}_3(2)\underline{V}(1) + \underline{C}_3(1)\underline{V}(2) + \underline{C}_3(0)\underline{V}(3)],$$

$$\underline{Q}_4(0) = \underline{Q}_3(0)\omega_{Z_0}, \quad \underline{Q}_4(1) = \underline{Q}_3(1)\omega_{Z_0} + \underline{Q}_3(0)\omega_Z(1),$$

$$\underline{Q}_4(2) = \underline{Q}_3(2)\omega_{Z_0} + \underline{Q}_3(1)\omega_Z(1) + \underline{Q}_3(0)\omega_Z(2),$$

$$\underline{Q}_4(3) = \underline{Q}_3(3)\omega_{Z_0} + \underline{Q}_3(2)\omega_Z(1) + \underline{Q}_3(1)\omega_Z(2) + \underline{Q}_3(0)\omega_Z(3),$$

$$\underline{Q}_5(0) = \underline{m}_1(0)\underline{q}(0), \quad \underline{Q}_5(1) = \underline{m}_1(1)\underline{q}(0) + \underline{m}_1(0)\underline{q}(1),$$

$$\underline{Q}_5(2) = \underline{m}_1(2)\underline{q}(0) + \underline{m}_1(1)\underline{q}(1) + \underline{m}_1(0)\underline{q}(2),$$

$$\underline{Q}_5(3) = \underline{m}_1(3)\underline{q}(0) + \underline{m}_1(2)\underline{q}(1) + \underline{m}_1(1)\underline{q}(2) + \underline{m}_1(0)\underline{q}(3),$$

$$\underline{Q}_6(0) = \frac{\rho}{2}\underline{m}_2(0)V_0, \quad \underline{Q}_6(1) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_2(1)V_0 + \underline{m}_2(0)\underline{V}(1)],$$

$$\underline{Q}_6(2) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_2(2)V_0 + \underline{m}_2(1)\underline{V}(1) + \underline{m}_2(0)\underline{V}(2)],$$

$$\underline{Q}_6(3) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_2(3)V_0 + \underline{m}_2(2)\underline{V}(1) + \underline{m}_2(1)\underline{V}(2) + \underline{m}_2(0)\underline{V}(3)],$$

$$\underline{Q}_7(0) = \frac{\rho}{2}\underline{m}_3(0)V_0, \quad \underline{Q}_7(1) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_3(1)V_0 + \underline{m}_3(0)\underline{V}(1)],$$

$$\underline{Q}_7(2) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_3(2)V_0 + \underline{m}_3(1)\underline{V}(1) + \underline{m}_3(0)\underline{V}(2)],$$

$$\underline{Q}_7(3) = \frac{\rho}{2}[\underline{m}_3(3)V_0 + \underline{m}_3(2)\underline{V}(1) + \underline{m}_3(1)\underline{V}(2) + \underline{m}_3(0)\underline{V}(3)],$$

$$\underline{q}(0) = \frac{\rho}{2}V_0^2, \quad \underline{q}(1) = \rho\underline{V}(1)V_0, \quad \underline{q}(2) = \frac{\rho}{2}[2\underline{V}(2)V_0 + \underline{V}^2(1)], \quad \underline{q}(3) = \rho[V_0\underline{V}(3) + \underline{V}(2)\underline{V}(1)],$$

$$\underline{W}(0) = (\underline{V}_{X_0})^2 + (\underline{V}_{Y_0})^2 = V_0^2, \quad \underline{W}(1) = 2V_0\underline{V}(1) = 2\underline{V}_X(1)V_{X_0} + 2\underline{V}_Y(1)V_{Y_0},$$

$$\underline{W}(2) = 2\underline{V}(2)V_0 + \underline{V}^2(1) = 2\underline{V}_X(2)V_{X_0} + \underline{V}_X^2(1) + 2\underline{V}_Y(2)V_{Y_0} + \underline{V}_Y^2(1),$$

$$\underline{V}(3) = 2\underline{V}(3)V_0 + 2\underline{V}(2)\underline{V}(1) = 2\underline{V}_X(3)V_{X_0} + 2\underline{V}_X(2)\underline{V}_X(1) + 2\underline{V}_Y(3)V_{Y_0} + 2\underline{V}_Y(2)\underline{V}_Y(1),$$

$$\underline{V}(0) = V_0, \quad \underline{V}(1) = \frac{\underline{V}_X(1)V_{X_0} + \underline{V}_Y(1)V_{Y_0}}{V_0},$$

$$\underline{V}(2) = \frac{2\underline{V}_X(2)V_{X_0} + \underline{V}_X^2(1) + 2\underline{V}_Y(2)V_{Y_0} + \underline{V}_Y^2(1) - \underline{V}^2(1)}{2V_0},$$

$$\underline{V}(3) = \frac{1}{V_0} \left[\underline{V}_X(3)V_{X_0} + \underline{V}_X(2)\underline{V}_X(1) + \underline{V}_Y(3)V_{Y_0} + \underline{V}_Y(2)\underline{V}_Y(1) - \underline{V}(2)\underline{V}(1) \right].$$

В результаті проведення алгебраїчних обчислень, отримуємо наступні вирази для отримання дискрет змінних стану траєкторного руху БАЛА:

$$\underline{V}_X(0) = V_{X_0}, \quad \underline{V}_X(1) = T_i \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2 \right], \quad (3.58)$$

$$\underline{V}_X(2) = T_i^2 \left\{ - \left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0} \right) \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 + \right. \\ \left. + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \cdot \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0} \right) V_0^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} a_1 \sin a_0 \right\}, \quad (3.59)$$

$$\underline{V}_Y(0) = V_{Y_0}, \quad \underline{V}_Y(1) = T_i \left[\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 \right], \quad (3.60)$$

$$\underline{V}_Y(2) = T_i^2 \left\{ \frac{1}{2} (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) \cdot V_{X_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) \cdot V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot a_1 \cdot \cos a_0 \right\}, \quad (3.61)$$

$$\underline{H}(0) = H_0, \quad \underline{H}(1) = T_i V_{Y_0}, \quad \underline{H}(2) = T_i^2 \left[\frac{1}{2} \tilde{\Phi}_i + \frac{1}{2} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 \right], \quad (3.62)$$

$$\underline{H}(3) = T_i^3 \left\{ \frac{1}{6} (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) \cdot V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) \cdot V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - \frac{1}{6} (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \frac{1}{6} \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot a_1 \cdot \cos a_0 \right\}, \quad (3.63)$$

де $V_0 = \sqrt{V_{X_0}^2 + V_{Y_0}^2}$ – початкова швидкість польоту.

Отримані диференціальні спектри змінних траєкторного руху будуть використані у подальшому для аналітичного конструювання термінального керування БАЛА на злітно-посадкових режимах.

3.3. Відображення задач багатоетапного виведення АКС на орбіту у спектральну модель

Побудуємо дискретно-аналітичне відображення нелінійної математичної задачі багатоетапного виведення АКС на орбіту у спектральну модель, застосувавши модифікований метод диференціальних перетворень та модифікований метод дискретно-аналітичного відображення.

3.3.1. Математична модель траєкторного руху

Знаходження оптимальної траєкторії виведення АКС на орбіту будемо здійснювати, за аналогію з БАЛА, у рамках реалізації концепції «гнучких» траєкторій. Це дозволяє використовувати для неперервної корекції спрощені математичні моделі руху АКС, за якими постійно прогнозується рух для неперервної корекції траєкторії. Помилки прогнозу, що викликані неточністю математичної моделі багатоетапного траєкторного руху АКС, будемо відносити до параметричних збурень, величини яких значно менші вітрових збурень, варіації щільності атмосфери та тяги двигунів АКС. Враховуючи, що в концепції «гнучких» траєкторій закладений зворотний зв'язок для парирування та компенсації як параметричних збурень, так й збурень зовнішнього середовища, то помилки прогнозу траєкторії руху багаторежимної АКС будуть постійно усуватися складовою керування, що формується за зворотним зв'язком під час корекції траєкторії руху АКС [21,25]. Необхідно також зазначити, що спрощена математична модель повинна зберегти усі зв'язки між значними змінними траєкторного руху.

Увесь процес виведення умовно розіб'ємо на r заданих часових інтервалів, усередині яких параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування. У подальшому будемо вважати, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних інтервалів. За спрощену математичну модель траєкторного руху багаторежимної АКС на i -ій ділянці процесу виведення ($i = \overline{1, r}$), яка зберігає усі зв'язки між значними змінними руху, оберемо систему нелінійних

диференціальних рівнянь, що описує плаский рух центру мас АКС в проекціях на осі швидкісної системи координат [25,247]:

$$m_i \dot{V} = P_i \cos \alpha - m_i g \sin \theta - X, \quad (3.64)$$

$$m_i V \dot{\theta} = P_i \sin \alpha - m_i g \cos \theta + Y + \frac{m_i V^2}{R_3 + H} \cos \theta + 2m_i V \Omega_3, \quad (3.65)$$

$$\dot{m}_i = -\mu_i, \quad (3.66)$$

$$\dot{H} = V \sin \theta, \quad (3.67)$$

$$\dot{L} = V \cos \theta, \quad (3.68)$$

$$\alpha = \vartheta - \theta. \quad (3.69)$$

В рівняннях (3.64) - (3.69) використані наступні позначення:

V – повітряна швидкість АКС; m_i – маса АКС; P_i – тяга двигунової установки АКС; α – кут атаки; θ – кут нахилу траєкторії; ϑ – кут тангажа; X – сила лобового опору АКС; Y – аеродинамічна піднімальна сила АКС; g – прискорення вільного падіння; Ω_3 – кутова швидкість добового обертання Землі; R_3 – радіус Землі; H – висота польоту АКС відносно Землі; L – поточна дальність польоту; μ_i – секундна масова витрата компонентів палива двигунової установки АКС.

Для зручності запису математичної моделі індексом « i » у рівняннях (3.64) - (3.69) позначені лише параметри, що зазнають стрибкоподібних змін на межах заданих ділянок процесу виведення.

Аеродинамічні сили подамо в загальноприйнятому вигляді:

$$X = C_X(\alpha, M) \cdot q \cdot S_\phi, \quad (3.70)$$

$$Y = C_Y(\alpha, M) \cdot q \cdot S_\phi, \quad (3.71)$$

$$q = \frac{\rho \cdot V^2}{2}, \quad (3.72)$$

де M – число Маху; q – швидкісний напір; ρ – щільність повітря на висоті H ; C_X – коефіцієнт лобового опору; C_Y – коефіцієнт піднімальної сили; S_ϕ – площа міделевого перерізу АКС.

Зміну щільності повітря залежно від висоти польоту апроксимуємо експоненціальною залежністю [248]:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\beta \cdot H}, \quad (3.73)$$

де ρ_0 - щільність повітря на висоті $H = 0$; β - постійний коефіцієнт.

Коефіцієнт лобового опору АКС моделюємо квадратичною полярною:

$$C_X = C_{X_0} + B \cdot C_Y^2, \quad (3.74)$$

де коефіцієнти C_{X_0} і B в області гіперзвукових швидкостей не залежать від числа Маху.

Аеротермодинамічні навантаження, що діють на поверхні багаторежимної АКС, апроксимуємо виразом [249,250]:

$$\dot{Q} = \frac{I}{4} S_{\phi} C_{\phi} \rho V^3, \quad (3.75)$$

де \dot{Q} – тепловий потік; C_{ϕ} – константа, що залежить від форми АКС.

Наведена вище математична модель (3.64) – (3.69) відображує основні зв'язки між істотними змінними та у явному вигляді розкриває залежність аеротермодинамічних навантажень від характеристик набору швидкості АКС та зміни щільності атмосфери від висоти. Однак дана модель потребує уточнення, так як окрім урахування аеротермодинамічних навантажень необхідно розглядати й інші критерії якості траєкторного руху АКС під час виведення її на орбіту.

Це питання буде розглянуте у розділі 5.

3.3.2. Спектральна модель процесу виведення АКС на орбіту

Складність спектральної моделі процесу виведення АКС на орбіту залежить від складності початкової математичної моделі. З метою спрощення складання спектральної моделі перетворимо наведену вище математичну модель (3.64) - (3.69). Введемо до розгляду систему координат $X_I O Y_I$ з початком в точці старту орбітального ступеня АКС. Позначимо:

$$X_1 = L, Y_1 = H, \dot{X}_1 = \dot{L} = X_2, \dot{Y}_1 = \dot{H} = Y_2, Z_1 = X/V = C_1 \cdot \rho \cdot V + C_2 \cdot \alpha \cdot Z_2, \\ Z_2 = Y/V = C_3 \cdot \alpha \cdot \rho \cdot V, C_1 = C_{x_0} \cdot S_\phi / 2, C_2 = C_y^\alpha \cdot B, C_3 = C_y^\alpha \cdot S_\phi / 2.$$

Враховуючи ці позначення, рівняння (3.59) - (3.64) набудуть наступного вигляду:

$$\dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = \frac{P_i}{m_i} \cos \vartheta - \frac{Z_1}{m_i} X_2 - \frac{Z_2}{m_i} Y_2 - \frac{X_2 Y_2}{R_3 + Y_1} - 2\Omega_3 Y_2, \\ \dot{Y}_1 = Y_2, \tag{3.76}$$

$$\dot{Y}_2 = \frac{P_i}{m_i} \sin \vartheta - g - \frac{Z_1}{m_i} Y_2 + \frac{Z_2}{m_i} X_2 + \frac{X_2^2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 X_2,$$

$$\dot{m}_i = -\mu_i,$$

$$\alpha = \vartheta - \theta,$$

$$\dot{\rho} = -\beta \cdot \rho \cdot y_2,$$

$$Z_1 = C_1 \cdot \rho \cdot V + C_2 \cdot \alpha \cdot Z_2,$$

$$Z_2 = C_3 \cdot \alpha \cdot \rho \cdot V,$$

$$V^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2}{x_2}.$$

Виразимо останні два співвідношення у диференціальній формі. Диференціюючи ці вирази за часом отримаємо:

$$V\dot{V} = X_2 \cdot \dot{X}_2 + Y_2 \cdot \dot{Y}_2, \\ \dot{X}_2 \cdot \sin \theta + X_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = \dot{Y}_2 \cdot \cos \theta - Y_2 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta. \tag{3.77}$$

Останній вираз, враховуючи позначення $X_2 = V \cdot \cos \theta$, $Y_2 = V \cdot \sin \theta$, перетворюється в диференціальну форму для визначення кута нахилу траєкторії:

$$\dot{\theta} V^2 = X_2 \dot{Y}_2 - \dot{X}_2 Y_2. \tag{3.78}$$

Застосуємо до рівнянь (3.76) - (3.78) модифікований метод диференціальних перетворень з урахуванням апроксимації нелінійних членів рівнянь (складові, що містять компоненти $X_2 Y_2 (R_3 + Y_1)^{-1}$, $X_2 X_2 (R_3 + Y_1)^{-1}$) поліномами Адоміана

$(\tilde{A}_{k-\ell}, \tilde{B}_{k-\ell})$ згідно виразів (2.21') та (2.22') та властивостей диференціальних перетворень.

Як результат, отримуємо наступну спектральну модель процесу виведення АКС на орбіту:

$$\underline{X}_1(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \underline{X}_2(k), \quad (3.79)$$

$$\underline{X}_2(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \cdot \left[\begin{array}{l} P_i \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{M}(k-\ell) \underline{Z}_3(\ell) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{X}_2(k-\ell) \underline{Z}_5(\ell) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \underline{Z}_6(\ell) - \\ - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Z}_7(\ell) \tilde{A}_{k-\ell} - 2\Omega_3 \underline{Y}_2(k) \end{array} \right], \quad (3.80)$$

$$\underline{Y}_1(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \underline{Y}_2(k), \quad (3.81)$$

$$\underline{Y}_2(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \cdot \left[\begin{array}{l} P_i \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{M}(k-\ell) \underline{Z}_4(\ell) - \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \underline{Z}_5(\ell) + \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{X}_2(k-\ell) \underline{Z}_6(\ell) + \\ + \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Z}_7(\ell) \tilde{B}_{k-\ell} + 2\Omega_3 \underline{X}_2(k) - g \cdot \mathbf{v}(k) \end{array} \right], \quad (3.82)$$

$$\underline{M}(k) = \frac{\mu_i^k T_i^k}{m_{0_i}^{k+1}}, \quad (3.83)$$

$$\underline{\alpha}(k) = \underline{\mathfrak{g}}(k) - \underline{\theta}(k), \quad (3.84)$$

$$\underline{\rho}(k+1) = -\frac{T_i \beta}{k+1} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \cdot \underline{\rho}(\ell), \quad (3.85)$$

$$\underline{Z}_1(k) = C_1 \underline{W}(k) + C_2 \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{\alpha}(k-\ell) \underline{Z}_2(\ell), \quad (3.86)$$

$$\underline{Z}_2(k) = C_3 \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{\alpha}(k-\ell) \underline{W}(\ell), \quad (3.87)$$

$$\underline{Z}_3(k) = \frac{(a_1 \cdot T_i)^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + a_0\right), \quad (3.88)$$

$$\underline{Z}_4(k) = \frac{(a_1 \cdot T_i)^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + a_0\right), \quad (3.89)$$

$$\underline{Z}_5(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{M}(k-\ell) \underline{Z}_1(\ell), \quad (3.90)$$

$$\underline{Z}_6(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{M}(k-\ell) \underline{Z}_2(\ell), \quad (3.91)$$

$$R_3 \underline{Z}_7(k) + \sum_{l=0}^{l=k} \underline{Y}_1(k-l) \underline{Z}_7(l) = \underline{X}_2(k), \quad (3.92)$$

$$\underline{W}(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{\rho}(k-\ell) \underline{V}(\ell), \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{V}(\ell+1) &= \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{X}_2(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{X}_2(\ell+1) + \\ &+ \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{Y}_2(\ell+1), \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\underline{V}^2(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}(k-\ell) \underline{V}(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{X}_2(k-\ell) \underline{X}_2(\ell) + \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \underline{Y}_2(\ell), \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{V}^2(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{\theta}(\ell+1) &= \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{X}_2(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{Y}_2(\ell+1) - \\ &- \sum_{\ell=0}^{\ell=k} \underline{Y}_2(k-\ell) \frac{\ell+1}{T_i} \underline{X}_2(\ell+1), \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\underline{\vartheta}(k) = a_0 \cdot \underline{\mathfrak{v}}(k) + a_1 \cdot T_i \cdot \underline{\mathfrak{v}}(k-1), \quad (3.97)$$

$$\underline{\mathfrak{v}}(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k > 0. \end{cases} \quad (3.98)$$

У спектральній моделі (3.79) - (3.98) прийнято позначення:

$$Z_3 = \cos \vartheta, \quad Z_4 = \sin \vartheta, \quad Z_5 = M \cdot Z_1, \quad Z_6 = M \cdot Z_2, \quad Z_7 = X_2(R_3 + Y_1)^{-1},$$

$$M = \frac{1}{m_{0_i} - \mu_i t}, \quad W = \rho \cdot V, \quad \vartheta = a_0 + a_1 \cdot t, \quad (3.99)$$

де a_0 і a_1 – вільні параметри прогнозованого керування кутом тангажа ϑ , що підлягають визначенню; m_{0_i} – початкова маса ОС АКС на i -ій ділянці процесу виведення. Масштабна стала h_i для i -ої ділянки виведення обрана такою, що

дорівнює тривалості T_i процесу керування на цієї ділянці. Риска знизу означає зображення відповідного параметру чи змінної.

Відмінність вищенаведеної спектральної моделі від відомої [25] полягає у запровадженні поліномів Адоміана для апроксимації нелінійних членів диференціальних рівнянь траєкторного руху АКС, що дає змогу подолати математичні труднощі та істотно зменшити обчислювальні витрати при знаходженні диференціальних спектрів нелінійних складових рівнянь руху.

Прогнозована програма зміни кута тангажа ϑ за часом за невеликих кутів тангажа, характерних для горизонтального старту ОС АКС, в моделі (3.79) - (3.97) обрана близькою до оптимальної програми виведення АКС на орбіту, відомої як закон лінійного тангенсу [57,59]:

$$tg\vartheta = tg\vartheta_0 - ct . \quad (3.100)$$

Вищенаведена спектральна модель (3.79) - (3.98) дає змогу в момент часу $t_0 = 0$ для довільних початкових умов за цілочислових значень аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$ визначити диференціальні спектри усіх істотних параметрів траєкторного руху АКС під час її виведення на орбіту.

Перевага спектральної моделі (3.79) - (3.98) полягає у тому, що для визначення дискрет диференціальних спектрів змінних, що характеризують процес виведення АКС на орбіту, достатньо виконати арифметичні операції складання-віднімання та добутку, послідовно присвоюючи цілочисловому аргументу k значення $k = 0, 1, 2, \dots$ Наведена вище спектральна модель є універсальною і може використовуватися для реалізації процесу виведення на орбіту різних проектів АКС.

3.3.3. Диференціальні спектри змінних траєкторного руху

Послідовно задаючи цілочислові значення аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$, за спектральною моделлю (3.79)-(3.98) в момент початку керованого руху ОС $t_0 = 0$ знайдемо дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху АКС у вигляді функцій від довільних початкових умов змінних математичної моделі (3.76)-

(3.78), довільних параметрів a_0, a_1 куту тангажа ϑ та часу T_i i -ої ділянки процесу виведення АКС на орбіту.

Детальніше зупинимося на знаходженні дискрет нелінійних складових диференціальних рівнянь руху за допомогою поліномів Адоміана відповідно до процедури (2.22).

Розглянемо нелінійні складові рівнянь (3.80) та (3.82): $F_x(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} Z_7(\ell) \tilde{A}_{k-\ell}$

$$\text{та } F_y(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} Z_7(\ell) \tilde{B}_{k-\ell}.$$

Маємо:

$$F_x(0) = Z_7(0) \tilde{A}_0,$$

$$F_x(1) = Z_7(1) \tilde{A}_0 + Z_7(1) \tilde{A}_1,$$

$$F_x(2) = Z_7(2) \tilde{A}_0 + Z_7(1) \tilde{A}_1 + Z_7(0) \tilde{A}_2,$$

$$F_x(3) = Z_7(3) \tilde{A}_0 + Z_7(2) \tilde{A}_1 + Z_7(1) \tilde{A}_2 + Z_7(0) \tilde{A}_3,$$

$$F_x(4) = Z_7(4) \tilde{A}_0 + Z_7(3) \tilde{A}_1 + Z_7(2) \tilde{A}_2 + Z_7(1) \tilde{A}_3 + Z_7(0) \tilde{A}_4, \dots,$$

$$F_y(0) = Z_7(0) \tilde{B}_0,$$

$$F_y(1) = Z_7(1) \tilde{B}_0 + Z_7(1) \tilde{B}_1,$$

$$F_y(2) = Z_7(2) \tilde{B}_0 + Z_7(1) \tilde{B}_1 + Z_7(0) \tilde{B}_2,$$

$$F_y(3) = Z_7(3) \tilde{B}_0 + Z_7(2) \tilde{B}_1 + Z_7(1) \tilde{B}_2 + Z_7(0) \tilde{B}_3,$$

$$F_y(4) = Z_7(4) \tilde{B}_0 + Z_7(3) \tilde{B}_1 + Z_7(2) \tilde{B}_2 + Z_7(1) \tilde{B}_3 + Z_7(0) \tilde{B}_4, \dots,$$

де \tilde{A}_i, \tilde{B}_i – компоненти поліномів Адоміана для функцій Y_2, X_2 відповідно, які обчислюються за формулою (2.21).

У результаті отримуємо наступні диференціальні спектри змінних траєкторного руху АКС:

$$X_2(0) = X_{20},$$

$$X_2(1) = T_i \left\{ \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_0 - \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[(C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \alpha_0^2) X_{20} + C_3 \cdot \alpha_0 Y_{20} \right] - \frac{X_{20} \cdot Y_{20}}{R_3 + Y_{10}} - 2\Omega_3 Y_{20} \right\},$$

$$X_2(2) = \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_0 - a_1 \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_0 - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right],$$

$$Y_1(0) = Y_{10}, Y_1(1) = T_i Y_{20}, Y_1(2) = \frac{A_i T_i^2}{2},$$

$$Y_2(0) = Y_{20},$$

$$Y_2(1) = T_i \left\{ \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_0 - g + \frac{(X_{20})^2}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 X_{20} + \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[C_3 \cdot \alpha_0 X_{20} - (C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \alpha_0^2) Y_{20} \right] \right\},$$

$$Y_2(2) = \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_0 + a_1 \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_0 + B_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right], \quad (3.101)$$

$$Y_1(3) = \frac{T_i^3}{6} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_0 + a_1 \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_0 + B_i \left(\frac{2 \cdot X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right],$$

де

$$A_i = \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_0 - g + \frac{(X_{20})^2}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 X_{20} + \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[C_3 \alpha_0 X_{20} - (C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2) Y_{20} \right],$$

$$B_i = \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_0 - \frac{X_{20} \cdot Y_{20}}{R_3 + Y_{10}} - 2\Omega_3 Y_{20} - \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[C_3 \alpha_0 Y_{20} + (C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \alpha_0^2) X_{20} \right], \quad (3.101')$$

$$X_2(0) = X_{20}, Y_2(0) = Y_{20}.$$

Отримані диференціальні спектри змінних траєкторного руху будуть використані у подальшому для аналітичного конструювання термінального керування процесом виведення АКС на орбіту.

3.4. Аналітичне конструювання термінального керування рухом ЛА на базі диференціальних спектрів

Покажемо, що на базі диференціальних спектрів змінних траєкторного руху можна розв'язувати нелінійні задачі аналітичного конструювання керування процесом термінального виведення ЛА. Розглянемо задачу виведення БАЛА із довільних початкових умов у задані кінцеві:

$$H(T) = H_T, \quad (3.102)$$

$$V_Y(T) = V_{Y_T}, \quad (3.103)$$

$$V_X(T) = V_{X_T} \quad (3.104)$$

на проміжному етапі його руху при керуванні кутом відхилення вектору тяги. Для спрощення, будемо розглядати плоскопаралельний рух БАЛА ($\omega_z \approx 0$).

Розв'язання даної задачі з використанням традиційних методів, наприклад, методу принципу максимуму Понтрягіна або методу динамічного програмування Беллмана, призводить до математичних труднощів та значного обсягу обчислень, так як необхідно розв'язувати або двоточкову нелінійну крайову задачу, або нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних.

Для подолання математичних труднощів та зменшення обсягу обчислень розглянемо розв'язання задачі керування процесом виведення БАЛА на задану висоту за допомогою диференціальних спектрів змінних траєкторного руху ЛА. Для цього математичну модель (3.19) траєкторного руху БАЛА замінюємо спектральною моделлю (3.21)–(3.44). Потім задаємося прогнозованою програмою зміни кута відхилення вектору тяги за часом в класі аналітичних функцій з вільними параметрами, що підлягають визначенню, наприклад у вигляді лінійної функції:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t. \quad (3.105)$$

За спектральною моделлю (3.21) – (3.44) визначаються диференціальні спектри змінних траєкторного руху БАЛА як функцій від довільних початкових умов, вільних параметрів прогнозованого керування та часу T усього процесу керування. На наступному етапі використовується властивість диференціальних спектрів (2.5), за якою алгебраїчна сума усіх дискрет диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t_0 = 0$ дорівнює значенню оригіналу в точці $t = T$ (момент завершення виведення апарата у задану точку).

Підсумовуючи дискрети (3.62)–(3.63) диференціального спектра (3.25) та підставляючи отриману суму до виразу (3.102), отримаємо рівняння, що зв'яже параметри керування та траєкторного руху БАЛА із заданою висотою:

$$H(T) = H_0 + TV_{Y_0} + \frac{T^2}{2} [\tilde{\Phi} + \tilde{P}_\Sigma \sin a_0] + \frac{T^3}{6} \left[\begin{array}{l} (C_6 + C_7)V_{Y_0} (\tilde{P}_\Sigma \cos a_0 - C_4 V_0^2) - \\ -(C_6 + C_7)V_{X_0} (\tilde{P}_\Sigma \sin a_0 + \tilde{\Phi}) + \\ + \tilde{P}_\Sigma \cdot a_1 \cdot \cos a_0 \end{array} \right] = H_T. \quad (3.106)$$

Аналогічно, підсумовуючи дискрети (3.60)–(3.61) диференціального спектра (3.22) та підставляючи отриману суму в (3.103), отримаємо рівняння, що зв'яже

параметри керування та траєкторного руху БАЛА із заданою вертикальною швидкістю набору висоти:

$$V_Y(T) = V_{Y_0} + T[\tilde{\Phi} + \tilde{P}_\Sigma \sin a_0] + \frac{T^2}{2} \left\{ \begin{array}{l} (C_6 + C_7)V_{Y_0} (\bar{P}_\Sigma \cos a_0 - C_4 V_0^2) - \\ - (C_6 + C_7)V_{X_0} (\tilde{P}_\Sigma \sin a_0 + \tilde{\Phi}) + \tilde{P}_\Sigma \cdot a_1 \cdot \cos a_0 \end{array} \right\} = V_{Y_T}. \quad (3.107)$$

Третє рівняння отримаємо шляхом підставлення до виразу (3.104) алгебраїчної суми дискрет (3.58)–(3.59):

$$V_X(T) = V_{X_0} + T \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2 \right] + T^2 \left[\begin{array}{l} - \left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0} \right) \bar{P}_\Sigma \cos a_0 + \\ + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \tilde{P}_\Sigma \sin a_0 + \\ + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \tilde{\Phi} + \\ + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0} \right) V_0^2 - \\ - \frac{1}{2} \bar{P}_\Sigma \cdot a_1 \cdot \sin a_0 \end{array} \right] = V_{X_T}. \quad (3.108)$$

Три рівняння (3.106) - (3.108) дають змогу визначити час T усього процесу виведення апарата у задану точку простору та вільні параметри a_0, a_1 керування кутом відхилення вектору тяги.

Із рівняння (3.107) знайдемо параметр керування a_1

$$a_1 = - \frac{2}{T_i^2 \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_0} \left\{ \begin{array}{l} (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + T_i [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0] + \\ + \frac{T_i^2}{2} (C_6 + C_7) \left[V_{Y_0} (\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_0 - C_4 V_0^2) - V_{X_0} (\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_0 + \tilde{\Phi}_i) \right] \end{array} \right\}. \quad (3.109)$$

Підставлення (3.109) до виразу (3.106) дає змогу отримати вираз для визначення початкового значення кута відхилення вектору тяги для довільних початкових значень змінних траєкторного руху БАЛА. Тому для поточного значення кута відхилення вектору тяги φ_k залежно від поточних значень змінних виведення БАЛА на задану висоту маємо закон керування у неявному вигляді:

$$\tilde{P}_\Sigma \sin \varphi_k = \frac{6(H_T - H)}{T^2} - \frac{2(2V_Y + V_{Y_T})}{T} \cdot \tilde{\Phi}. \quad (3.110)$$

Час T усього процесу виведення БАЛА на задану висоту визначається із рівняння (3.108) з урахуванням співвідношення (3.109):

$$T = -D + \sqrt{D^2 + \frac{4}{A} \left[(V_{X_T} - V_X) + \frac{\bar{P}_\Sigma}{\tilde{P}_\Sigma} \operatorname{tg} \varphi_k (V_{Y_T} - V_Y) \right]}, \quad (3.111)$$

де

$$\begin{aligned} A = & - \left(\frac{C_5}{2} V_Y + C_4 V_X \right) \bar{P}_\Sigma \cos \varphi_k + \left(\frac{C_5}{2} V_X - C_4 V_Y \right) \tilde{P}_\Sigma \sin \varphi_k + \\ & + \left(\frac{C_5}{2} V_X - C_4 V_Y \right) \tilde{\Phi} + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_Y + C_4^2 V_X \right) V^2 + \\ & + \frac{\bar{P}_\Sigma}{2 \tilde{P}_\Sigma} \operatorname{tg} \varphi_k (C_6 + C_7) \left[V_Y \left(\bar{P}_\Sigma \cos \varphi_k - C_4 V^2 \right) - V_X \left(\tilde{P}_\Sigma \sin \varphi_k + \tilde{\Phi} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$B = \bar{P}_\Sigma \cos \varphi_k - C_4 V^2 + \frac{\bar{P}_\Sigma}{\tilde{P}_\Sigma} \operatorname{tg} \varphi_k \left[\tilde{\Phi} + \tilde{P}_\Sigma \sin \varphi_k \right], \quad D = \frac{B}{A}.$$

Таким чином, на основі диференціальних спектрів траєкторного руху БАЛА під час його виведення на задану висоту, отримано закон керування відхиленням вектору тяги (3.110), який з урахуванням виразів (3.111)-(3.112) дає змогу для поточних значень змінних траєкторного руху здійснювати керування процесом виведення апарату у задані граничні умови (3.102)-(3.104). Закон керування (3.110)-(3.112) реалізує зворотний зв'язок по виведенню БАЛА у задані граничні умови (3.102)-(3.104). Зміна значень змінних траєкторного руху внаслідок дії зовнішніх збурень та варіацій параметрів апарату неперервно враховуються під час обчислень на БЦОМ за виразами (3.110)-(3.109) нового значення командного кута відхилення вектору тяги, що задовольняють граничним умовам (3.102)-(3.104).

Таким чином, показана можливість розв'язання нелінійних задач аналітичного конструювання керування процесом виведення ЛА на задану висоту на базі диференціальних спектрів їх траєкторного руху. Для реалізації цієї можливості необхідно визначити оптимальні програмні керування у вигляді функції $u_i(t, A_i)$ часу t та вектору вільних параметрів $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. В наступному розділі буде показано, що цю задачу для багатоетапного керування також можна ефективно розв'язати за допомогою модифікованого методу диференціальних перетворень.

Висновки до розділу 3

1. Розроблено метод дискретно-аналітичного відображення у спектральні моделі вихідних нелінійних математичних задач багатоетапного траєкторного руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови. Запропонований підхід ґрунтується на модифікованому методі диференціальних перетворень, дозволяє запобігти складностей, що пов'язані з відображенням нелінійних складових рівнянь руху, за рахунок апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана, спростити побудову спектральної моделі задачі із збереженням точності вихідної математичної моделі та дає змогу використати її для оперативної оптимізації багатоетапного керованого процесу.
2. Побудовано модифіковані спектральні моделі багатоетапних процесів виведення БАЛА на задану висоту та виведення АКС на орбіту у вигляді рекурентних виразів, що потребують виконання операцій тільки складання-віднімання та добутку. Отримані спектральні моделі дають змогу за диференціальним спектром керування знайти диференціальний спектр вектору стану та отримати набір диференціальних спектрів змінних траєкторного руху, який відповідає вихідній математичній моделі.
3. За спектральними моделями визначено дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху БАЛА та АКС, обчислювальні витрати при знаходженні яких істотно зменшені за рахунок використання поліномів Адоміана для апроксимації нелінійних складових рівнянь руху.
4. На прикладі БАЛА показано можливість на основі диференціальних спектрів траєкторного руху апарата розв'язувати нелінійні задачі аналітичного конструювання керування процесом термінального виведення БАЛА.

Список публікацій здобувача за матеріалами третього розділу

1. Гусинін А. В. Дискретно-аналітичне відображення нелінійних задач багатоетапного траєкторного руху літальних апаратів / А. В. Гусинін,

В. П. Гусинін, Ю. К. Зіатдінов // International independent scientific journal. – 2020. - Vol.1, № 21. – С. 39-44.

Метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень вихідних нелінійних математичних моделей траєкторного руху ЛА на основі модифікованого методу диференціальних перетворень.

2. Гусинін А. В. Дирижаблі. Ч.ІІ. Аеростатика, аеродинаміка та динаміка керованого польоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, В. М. Казак, М. С. Кулик, О.М. Тачиніна. - К.: НАУ, 2010. – 212 с.

Особистий внесок здобувача: розділи навчального посібнику - основи аеростатики дирижаблю (пп. 1.1-1.3), стійкість та керованість (пп. 3.1,3.3-3.5), динаміка керованого польоту дирижаблю (пп. 4.2-4.4).

3. Гусинін А. В. Диференціальні Т-перетворення в задачах автоматичного керування рухом літальних апаратів / О. В. Збруцький, А. В. Гусинін, В. П. Гусинін. - К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 176 с.

Особистий внесок здобувача: розділи навчального посібнику – елементи теорії диференціальних перетворень (пп.1.5-1.7), спектральні моделі руху літальних апаратів (пп. 3.1-3.3), синтез оптимальних алгоритмів керування рухом літальних апаратів (пп. 4,3,4.4), керування рухом ЛА (пп.5.2-5.4).

РОЗДІЛ 4
РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО
ТЕРМІНАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ
НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

4.1. Чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійної задачі оптимізації багатоетапного термінального керування

Розглянемо нелінійну задачу визначення оптимального багатоетапного керування рухом ЛА при виведенні у задані термінальні умови. Процес виведення на інтервалі $[0, T]$ умовно розіб'ємо на r заданих часових підінтервалів (ділянок):

$T_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = 0$, $i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r T_i = T$, де T - час процесу керування. Припускаємо, що

усередині підінтервалів параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування. У подальшому будемо вважати, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних підінтервалів.

Вихідну математичну модель траєкторного багатоетапного руху ЛА на i -му підінтервалі подамо у вигляді наступного нелінійного векторного диференціального рівняння:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{L_i}(t, x_i, u_i, v_i) + f_{N_i}(t, x_i, u_i, v_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4.1)$$

де $x_i(t)$ - n -вимірний вектор стану, $u_i(t)$ - m -вимірний вектор керування ($m < n$), v_i - l -вимірний вектор параметричних та зовнішніх збурень, $f_{L_i}(t, x_i, u_i, v_i)$, $f_{N_i}(t, x_i, u_i, v_i)$ - неперервні та неперервно диференційовані за сукупністю змінних t, x, u, v_i вектор-функції, які є відповідно лінійною та нелінійною складовою узагальненої сили, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Задача полягає у оптимальному багатоетапному переведенні БЛА із початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений в момент часу $t = T$ q -мірним ($q \leq n$) векторним рівнянням:

$$S[T, x_r(T)] = 0. \quad (4.2)$$

Якість процесу керування будемо оцінювати функціоналом:

$$I = G[T, x_r(T)] + \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i) dt, \quad (4.3)$$

де задані функції G та Φ_i мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i, v_i на кожному етапі процесу керування. Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховуються під час обрання вигляду функціоналу (4.3), наприклад, методом штрафних функцій [65,146]. Спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задаються у формі заданих крайових умов:

$$\varphi_i [x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i] = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (4.4)$$

Необхідно синтезувати закон керування, який є оптимальним за заданим критерієм (4.3) та забезпечує зворотний зв'язок вигляду $u_i = u_i(t, x_i)$ на кожному i -му підінтервалі багатоетапного процесу керування. Таке керування, використовуючи у кожен поточний час t інформацію щодо поточного стану $x_i(t)$, забезпечує виведення ЛА із заданого початкового стану на задану висоту при впливі збурень.

Як вже було зазначено у Розділі 1, розв'язання нелінійних задач оптимізації традиційними методами призводить до математичних труднощів та значного обсягу обчислень, так як необхідно розв'язувати або двоточкову крайову задачу, або нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних. Аналітичний розв'язок задач термінального керування отриманий, в основному, для випадку лінійних диференціальних рівнянь та квадратичного функціоналу [70]. Нижче пропонується чисельно-аналітичний підхід до розв'язання зазначеної нелінійної задачі, який ґрунтується на удосконаленому дискретно-аналітичному відображенні вихідної нелінійної математичної моделі задачі в області зображень, модифікованому методі диференціальних перетворень з апроксимацією нелінійних складових диференціальних рівнянь руху поліномами Адоміана та враховує багатоетапність оптимального процесу керування.

Синтез оптимального багатоступового керування зі зворотним зв'язком виконаємо методом замикання оптимального керування $u_i = u_i(t)$ для довільного поточного стану об'єкту $x_i(t)$ [251]. З метою уникнення обчислювальних труднощів, синтез алгоритмів оптимального керування ЛА будемо здійснювати у два етапи.

На першому етапі синтезу розглядатимемо незбурений траєкторний рух ЛА за відсутності параметричних та зовнішніх збурень та формуємо програмне оптимальне керування і відповідну оптимальну траєкторію руху, які можуть бути визначені до польоту. Відповідна задача розв'язується з умови мінімуму критерію оптимальності, котрим можуть бути кінцеві значення часу маневру, маси апарата, фазових координат та їх відхилень від потрібних значень, а також параметри траєкторії, які пов'язані з режимами руху, та виконання заданих обмежень, при досягненні заданого кінцевого стану з необхідною точністю. Сформована на першому етапі номінальна оптимальна програма керування використовується для побудови алгоритмів керування на борту ЛА.

На другому етапі формуємо командне керування шляхом розв'язання задачі синтезу алгоритмів керування зі зворотним зв'язком, що реалізує рух ЛА до кінцевого стану при впливі зовнішніх та параметричних збурень. Алгоритм керування збуреним рухом знаходиться з умов мінімуму термінального критерію – відхилення термінальних умов від потрібних значень, до якого для покращення стійкості може додаватися складова критерію, що характеризує якість керування.

На першому етапі розглядатимемо математичну модель траєкторного багатоступового руху БЛА на i -му підінтервалі за відсутності збурень ($v_i = 0$) у вигляді наступного нелінійного векторного диференціального рівняння:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{L_i}(t, x_i, u_i) + f_{N_i}(t, x_i, u_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (4.5)$$

де $x_i(t)$ – n -вимірний вектор стану, $u_i(t)$ – m -вимірний вектор керування ($m < n$), $f_{L_i}(t, x_i, u_i)$, $f_{N_i}(t, x_i, u_i)$ – неперервні та неперервно диференційовані за сукупністю змінних t, x, u вектор-функції, які є відповідно лінійною та нелінійною складовою узагальненої сили, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Задача полягає у визначенні вектора оптимального програмного керування $u^*(t)$ та фазової траєкторії $x^*(t)$ на інтервалі $[t_0, T]$, які за заданими диференціальними зв'язками (4.5) забезпечують оптимальне багатоетапне переведення БЛА з початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений у момент часу $t = T$ q -мірним ($q \leq n$) векторним рівнянням (4.2).

Якість процесу керування будемо оцінювати функціоналом:

$$I = G[T, x_r(T)] + \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t, x_i, u_i) dt, \quad (4.6)$$

де задані функції G та Φ_i мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i на кожному підінтервалі процесу керування. Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховуються під час обрання вигляду функціоналу (4.6). Спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задаються у формі заданих крайових умов (4.4).

Задачу оптимального багатоетапного програмного керування (4.2), (4.4), (4.5), (4.6) розв'язатимемо у наступній послідовності [251,252]. Спочатку розв'язуємо задачу визначення оптимального програмного керування $u_1(t)$ на першому підінтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$ із початковою умовою вектору стану $x_1(t_0) = x_1^0$. Розв'язання рівняння (4.5) в точці t_1 має значення $x_1(t_1)$. Потім розв'язуємо задачу визначення оптимального керування $u_2(t)$ на другому підінтервалі $t_1 \leq t \leq t_2$ з початковою умовою $x_1(t_1) = x_2^0$ вектору стану. Розв'язання рівняння (4.5) в точці t_2 має значення $x_2(t_2)$. Побудований таким чином розв'язок $x(t)$ і керування $u(t)$ є неперервними в усіх точках інтервалу $t_0 \leq t \leq t_2$ і у точці спряження інтервалів t_1 . Продовжуючи цей процес на усьому заданому інтервалі $[t_0, T]$ отримуємо неперервний і кусково-неперервний розв'язок $x^*(t)$ рівняння (4.5) і відповідне оптимальне керування $u^*(t)$, які за заданих граничних умов (4.2) та умов спряження граничних і початкових умов (4.4) оптимізують функціонал (4.6) за відсутності дії збурень.

Застосуємо до диференціального рівняння (4.5) модифіковане дискретно-аналітичне відображення багатоетапного динамічного процесу з обчисленням

диференціальних спектрів нелінійних складових диференціального рівняння за допомогою поліномів Адоміана та подамо рівняння (4.5) в області зображень у формі наступної спектральної моделі:

$$X_i(k+1, A_i, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1} \{ \underline{f}_{L_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)] + \underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)] \}, \quad (4.7)$$

$$X_i(0) = X_i^0; X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r}.$$

У виразі (4.7) диференціальне зображення нелінійної складової $\underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)]$ визначається з використанням поліномів Адоміана за допомогою співвідношень (2.21') або (2.22') залежно від структури нелінійної складової рівняння (4.5). Спектральна модель (4.7) є рекурентним виразом, що дає змогу визначити диференціальний спектр $X_i(k, A_i, X_i^0)$ функції $x_i(\tau, A_i)$ за диференціальним спектром вектору керування.

Для визначення вектору оптимального програмного керування $u^*(t)$, що забезпечує розв'язок нелінійної термінальної задачі (4.2), (4.4), (4.5), (4.6), оберемо всередині кожного підінтервалу оптимальне програмне керування в класі аналітичних функцій $u_i(\tau, A_i)$, де $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ – вектор вільних параметрів, τ – локальний часовий аргумент.

Диференціальні перетворення (2.6) функції $u_i(\tau, A_i)$ за умови $h = T_i$ та $\tau = 0$ визначають її диференціальний спектр на i -ому підінтервалі [253]:

$$U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0}. \quad (4.8)$$

Скористаємося властивістю диференціальних перетворень, згідно якої алгебраїчна сума усіх компонент (дискрет) диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t = t_v$, дорівнює нульовій дискреті диференціального спектра функції в точці $t_{v+1} = t_v + h$ або значенню оригіналу функції у тій самій точці:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_v(k) = X_{v+1}(0) = x(t_v + h). \quad (4.9)$$

Підставляючи диференціальний спектр керування (4.8) у вираз (4.7) визначасмо диференціальний спектр $X_i(k, A_i, X_i^0)$ вектору стану $x_i(t)$ наприкінці кожного підінтервалу процесу виведення. За сформованим диференціальним спектром $X_i(k, A_i, X_i^0)$ за допомогою співвідношення (4.9) при $t_v = t_{i-1}$ і $h = T_i$, визначасмо вектор стану наприкінці кожного i -ого підінтервалу процесу керування [254]:

$$x_i(T_i, A_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, X_i^0), i = \overline{1, r}. \quad (4.10)$$

Враховуючи спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів траєкторного руху (4.4) та вираз для вектору стану наприкінці кожного підінтервалу руху (4.10) рівняння кінцевого стану усього процесу багатоетапного траєкторного руху БЛА (4.2) перетвориться до вигляду:

$$S[T, x(T, A, x_0)] = 0. \quad (4.11)$$

Для i -ого підінтервалу вираз (4.11) має вигляд: $S_i[T_i, x_i(T_i, A_i, x_i^0)] = 0$.

Гранична умова (4.11) в неявній формі визначає q компонентів векторів вільних параметрів A_i для i -ого підінтервалу та qr компонент для усього етапу процесу керування рухом БЛА у вигляді функцій від тривалості i -ого підінтервалу T_i та початкових умов x_i^0 .

Решту компонент вектору вільних параметрів знайдемо з умов оптимізації функціоналу (4.6). Диференціальні перетворення (2.6) функціоналу (4.6) з урахуванням диференціальних спектрів (4.7), (4.8) дають змогу отримати критерій якості у вигляді функції часу T , вектору початкових умов x_0 та вектору вільних параметрів A_i [255]:

$$I(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0) = G[T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0] + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_i[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)]}{k+1}. \quad (4.12)$$

З необхідних умов оптимальності функції (4.12) отримуємо систему рівнянь для визначення часу T та $(n-q)r$ невідомих компонент векторів вільних параметрів A_1, A_2, \dots, A_r , що залишилися, у вигляді функції від вектору початкових умов x_0 :

$$\frac{\partial I(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial T} = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial I(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial a_{ij}} = 0; \quad i = \overline{1, r}; \quad j = \overline{q+1, n}. \quad (4.14)$$

Питання існування максимуму чи мінімуму критерію якості (4.12) вирішується за достатніми умовами максимуму чи мінімуму функції багатьох змінних. Якщо у задачі оптимального керування (4.2), (4.4), (4.5), (4.6) інтервал часу керування T заданий, то рівняння (4.13) виключається, а компоненти вектору $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ визначаються із системи рівнянь (4.14).

Система рівнянь (4.11) – (4.14), у випадку їх сумісності, дає змогу знайти в неявній формі усі компоненти вектору вільних параметрів A_i як функції від вектору довільного початкового стану $x_0 = x_i(t_{i_0})$. Питання сумісності даних рівнянь розглядається під час будування оптимальної програмної траєкторії та вирішується вибором розмірності вектору вільних параметрів. Враховуючи, що диференціальні перетворення є точним операційним методом, то їх застосування дає принципову можливість отримання точного розв'язку нелінійної термінальної задачі (4.2), (4.4), (4.5), (4.6) за умови точного відображення функцій часу точним диференціальним спектром.

Таким чином, в результаті виконання першого етапу синтезу для кожного i -го підінтервалу, встановлюється нелінійний зв'язок оптимального програмного керування $u_i^*[t, A_i(T_i, x_i^0)]$ з вектором початкового стану x_i^0 . Продовжуючи цей процес на усьому заданому інтервалі $[t_0, T]$ отримуємо для багатоетапного процесу керування неперервний і кусково-неперервний розв'язок $x^*[t, A(T, x_0)]$ рівняння (4.5) і відповідне оптимальне програмне керування $u^*[t, A(T, x_0)]$, які за заданих граничних умов (4.2) та умов спряження граничних і початкових умов (4.4) оптимізують функціонал (4.6) за відсутності дії збурень. Зазначимо, що компоненти вектору стану $x_i^*(t, A_i)$, які відповідають оптимальному програмному керуванню $u_i^*(t, A_i)$, можуть бути отримані за диференціальним спектром (4.7) у вигляді відрізків рядів Тейлора або на основі зворотних диференціальних перетворень в формі

багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур'є, Дирихле або у вигляді комбінацій різних апроксимуючих функцій. Вільні параметри апроксимуючих функцій визначаються із порівняння диференціальних спектрів компонент вектора стану з диференціальними спектрами апроксимуючих функцій. Рівняння зв'язку між вільними параметрами апроксимуючих функцій і дискретами диференціального спектра функції, що розшукується, у випадку відновлення функції часу в формі багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур'є, Дирихле наведено, наприклад, у роботах Г.Є. Пухова [175-177].

На другому етапі синтезу розглядається збурений рух ЛА, що постійно відхиляється від оптимальної програмної траєкторії. У цьому випадку керування $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ на i -ому підінтервалі процесу керування обчислюється з системи рівнянь (4.11), (4.13) і (4.14) для поточних значень часу t і стану $x_i(t)$. Неперервне за часом розв'язання системи рівнянь (4.11), (4.13) і (4.14) дає змогу сформулювати замкнений закон термінального керування вигляду $u_i = u_i(t, x_i)$. Розв'язання системи рівнянь (4.11), (4.13) і (4.14) для кожного поточного моменту часу t і стану $x_i(t)$ ЛА, що знаходиться під дією збурень, неперервно задає керування $u_i = u_i(t, x_i)$, що пов'язує поточний стан $x_i(t)$ з граничними (термінальними) умовами (4.2). У замкненому контурі керування використовується лише поточне значення керування $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$, яке у наступний момент часу перераховується за системою рівнянь (4.11), (4.13) і (4.14). Цим забезпечується «гнучка» адаптація оптимальної траєкторії руху ЛА до дії невідомих наперед збурюючих факторів $v_i(t)$. У результаті отримуємо кусково-неперервне керування $u[t, A(T, x)]$ для усього керованого процесу керування.

4.2. Особливості оптимізації багатоетапних процесів термінального керування на основі диференціальних перетворень

Розглянемо особливості запропонованого вище чисельно-аналітичного методу синтезу алгоритмів багатоетапного процесу термінального керування ЛА. Вихідна нелінійна математична модель (4.1)-(4.4) багатоетапного процесу термінального керування рухом ЛА за наявності збурень відноситься до багатоточкових нелінійних крайових задач. Розв'язання таких задач відомими чисельними методами має значні математичні труднощі та потребує значного обсягу обчислень, реалізація яких у реальному часі викликає ускладнення. Розглянутий вище підхід, використовуючи модифікований метод диференціальних перетворень та удосконалене дискретно-аналітичне відображення вихідної математичної задачі, дає змогу отримати системоаналогову (яка складається із декількох об'єктів-аналогів) модель у вигляді системи спектральних моделей (4.7), прив'язаних до заданих точок зміни граничних умов. Отримані спектральні моделі мають вигляд рекурентних виразів, що не містять часового аргументу, і дають змогу проводити обчислення в аналітичному вигляді. В результаті застосованого підходу вихідна нелінійна крайова задача (4.1)-(4.4) зведена до системи скінчених рівнянь (4.11), (4.13), (4.14), неперервне розв'язання яких дає змогу реалізувати керування зі зворотним зв'язком у реальному масштабі часу.

Основними перевагами застосування розглянутого підходу до визначення оптимального багатоетапного термінального керування є:

1. Базування на модифікованому методі диференціальних перетворень та удосконаленому дискретно-аналітичному відображенню вихідної нелінійної математичної задачі у дискретну (спектральну) модель.
2. Можливість знаходження оптимального керування та відповідних фазових траєкторій без використання чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь.
3. Зведення проблеми синтезу замкнених законів термінального керування до розв'язання скінченої системи рівнянь відносно параметрів керування.

4. Встановлення у неявній формі (4.11), (4.13), (4.14) нелінійного зв'язку керування $u[t, A(T, x)]$ з вектором поточного стану $x(t)$, що дає змогу сформуванню керування зі зворотним зв'язком від параметрів траєкторного руху БЛА під час багатоетапного процесу керування.
5. Аналітичне розв'язання нелінійної задачі синтезу оптимального керування.
6. Можливість подолання математичних труднощів при обчисленні диференціальних спектрів складних нелінійностей диференціальних рівнянь траєкторного руху за рахунок їх апроксимації поліномами Адоміана, що значно скорочує обсяг обчислень при отриманні розв'язку задачі в чисельному або аналітичному вигляді.
7. Забезпечення «гнучкої» адаптації оптимальної траєкторії виведення до дії невідомих збурюючих факторів.

Відмітимо, що математичний апарат диференціальних перетворень раніше вже використовувався для синтезу замкнених законів термінального керування процесом виведення АКС на орбіту, наприклад, у працях [25,201], а також для синтезу алгоритмів керування відхиленням вектора тяги аеростатичного літального апарату на етапі зльоту у праці [202]. На відміну від відомих робіт запропонований в дисертації підхід: а) базується на модифікованому методі диференціальних перетворень, що у кінцевому рахунку, як це показано у розділі 2 на прикладі розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, дає змогу розширити інтервал розв'язання та підвищити точність розв'язку; б) використовує удосконалене дискретно-аналітичне відображення вихідної математичної моделі задачі в області зображень з відсутнім часовим аргументом та апроксимацію нелінійних складових диференціальних рівнянь руху поліномами Адоміана. Це дозволяє подолати математичні труднощі при обчисленні диференціальних спектрів складних нелінійностей, істотно зменшити обчислювальні витрати при знаходженні наближеного розв'язку нелінійних задач оптимального керування та розширити сферу застосування диференціальних перетворень; в) враховує термінальні умови на окремих ділянках руху, що дає змогу підвищити точність виведення наприкінці всього процесу керування.

Зазначимо, що обмеження, пов'язане із вимогою аналітичності функцій на усьому етапі процесу керування, не дає змогу безпосередньо використовувати отримані раніше результати для багатоетапного процесу керування ЛА. Використання модифікованого методу диференціальних перетворень дає змогу зняти обмеження, пов'язане із вимогою аналітичності функцій на усьому етапі процесу керування, та побудувати неперервне та кусково-неперервне керування.

Запропонований вище чисельно-аналітичний метод зводить нелінійну проблему синтезу замкнених законів термінального керування до розв'язання системи нелінійних рівнянь без чисельного інтегрування або диференціювання нелінійних рівнянь траєкторного руху ЛА. Це дає змогу простіше розв'язати нелінійну проблему синтезу оптимальних законів термінального керування та забезпечити реалізацію запропонованих законів у реальному масштабі часу бортовими засобами ЛА.

Зазначимо, що вибір на першому етапі синтезу програми керування в класі аналітичних функцій з кінцевою кількістю вільних параметрів обмежує область застосування диференціальних перетворень до розв'язання задачі оптимізації керування [256]. Свобода вибору аналітичних функцій $u_i[t, A]$ та розмірності вектору вільних параметрів дає змогу для кожної конкретної задачі, у тому числі й для кожного часового підінтервалу багатоетапного процесу керування, обрати найкращу апроксимацію керування. Виконавши синтез вищезапропонованим методом для декількох видів аналітичних функцій $u_i[t, A]$ з різним набором компонент вектора вільних параметрів на основі моделювання руху БЛА, замкненого різними законами керування, можна обрати такий закон керування, який забезпечує найкраще значення функціоналу за мінімальних термінальних помилок, виникаючих під час дії збурень.

Підкреслимо, що ефективність розглянутого підходу знижується із зростанням розмірності вектора вільних параметрів. Тому доцільно обмежитися низькою розмірністю вектору невизначених параметрів.

4.3. Оптимальне термінальне керування виведенням авіаційно-космічної системи на орбіту

4.3.1. Синтез оптимального за витратою палива алгоритму керування

Для визначення алгоритму оптимального термінального керування процесом виведення АКС на орбіту застосуємо запропонований в п. 4.1 чисельно-аналітичний метод синтезу замкнених законів багатоетапного термінального керування.

Розглянемо процес багатоетапного виведення АКС на орбіту, що описується системою нелінійних диференціальних рівнянь (3.64)-(3.69). Увесь процес виведення умовно розіб'ємо на r заданих часових підінтервалів, усередині яких параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування: $T_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r T_i = T$, де T - час процесу керування. Вважаємо, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних інтервалів. Спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задаємо у формі заданих крайових умов (4.4).

Як критерій якості для кожного підінтервалу процесу виведення АКС на орбіту оберемо функціонал вигляду [25]:

$$I_i = \frac{\lambda_i}{2} \mu_i^2 T_i^2 - X_2(T_i), \quad 0 < \lambda_i - \text{const}, \quad (4.15)$$

де μ_i - секундна масова витрата палива.

У виразі (4.15) перший член враховує витрату палива під час виведення, а другий член - швидкість, до якої розганяється орбітальна ступень АКС наприкінці i -ого підінтервалу етапу виведення. Мінімізація зазначеного критерію враховує намір максимізувати швидкість орбітального ступеню АКС наприкінці i -ого підінтервалу етапу виведення за найменшої витрати палива.

Задача полягає в мінімізації критерію (4.15) під час виведення АКС із початкових умов:

$$X_1(0) = X_{10}, \quad X_2(0) = X_{20}, \quad Y_1(0) = Y_{10}, \quad Y_2(0) = Y_{20} \quad (4.16)$$

у задані кінцеві:

$$X_2(T_i) = V_{T_i}, \quad Y_1(T_i) = H_{T_i}, \quad Y_2(T_i) = \dot{H}_{T_i}, \quad (4.17)$$

де $V_{T_i}, H_{T_i}, \dot{H}_{T_i}$ – швидкість, висота польоту та вертикальна швидкість набору висоти наприкінці i -ого підінтервалу процесу виведення.

Для розв'язання поставленої задачі скористаємося спектральною моделлю (3.79)-(3.97) багатоетапного процесу виведення АКС на орбіту і диференціальними спектрами змінних траєкторного руху АКС, що отримані в пп. 3.3.3.

Як прогнозоване програмне керування кутом тангажа оберемо на першому етапі синтезу керування в класі аналітичних функцій: $u_i = a_{i_0} + a_{i_1} t$, де a_{i_0}, a_{i_1} – вільні параметри, які підлягають визначенню. Це керування близьке до оптимальної програми виведення АКС на орбіту та відоме як закон лінійного тангенсу [57,58].

Підсумовуючи дискрети змінної Y_1 диференціального спектру (3.81) з урахуванням граничних умов (4.17) отримуємо рівняння, що пов'язує вільні параметри керування (a_{i_0}, a_{i_1}) та параметри траєкторного руху АКС із заданою висотою [257]:

$$Y_1(T_i) = Y_{10} + T_i Y_{20} + \frac{A_i T_i^2}{2} + \frac{T_i^3}{6} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} + \\ + B_i \left(\frac{2X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right] = H_{T_i}. \quad (4.18)$$

Аналогічно, підсумовуючи дискрети змінної Y_2 диференціального спектру (3.82) з урахуванням граничних умов (4.17) отримуємо рівняння, що пов'язує вільні параметри керування (a_{i_0}, a_{i_1}) та параметри траєкторного руху АКС із заданою вертикальною швидкістю набору висоти:

$$Y_2(T_i) = Y_{20} + A_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} + B_i \cdot \left(\frac{2X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right] = \dot{H}_{T_i}. \quad (4.19)$$

Третє рівняння отримуємо шляхом підставлення у граничні умови $X_2(T_i) = V_{T_i}$ алгебраїчної суми дискрет змінної X_2 диференціального спектру (3.80):

$$X_2(T_i) = X_{20} + B_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_{i_0} - a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_{i_0} - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right] = V_{T_i}. \quad (4.20)$$

Три вищенаведених рівняння (4.18) - (4.20) дають змогу визначити тривалість T_i i -ого підінтервалу процесу виведення АКС на орбіту та вільні параметри a_{i_0} і a_{i_1} керування кутом тангажа.

Із співвідношення (4.19) визначаємо параметр керування a_{i_1} :

$$a_{i_1} = -\frac{1}{\frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_{i_0}} \left[\frac{2(Y_{20} - \dot{H}_{T_i})}{T_i^2} + \frac{2A_i}{T_i} + B_i \left(\frac{2X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right] - \frac{\mu_i}{m_{0i}} \operatorname{tg} a_{i_0}. \quad (4.21)$$

Підставляючи (4.21) в рівняння (4.18) знайдемо вираз для визначення початкового значення кута тангажа за довільних початкових значень змінних траєкторного руху АКС. Замінюючи довільні початкові значення керування та змінних траєкторного руху їх поточними значеннями, отримуємо у неявному вигляді алгоритм керування кутом тангажа ϑ_{K_i} для i -ого підінтервалу процесу багатоетапного виведення АКС на орбіту [258]:

$$\begin{aligned} \frac{P_i}{m_i} \sin \vartheta_{K_i} = & \frac{6(H_{T_i} - Y_1)}{T_i^2} - \frac{4Y_2}{T_i} - \frac{2\dot{H}_{T_i}}{T_i} + g - \frac{X_2^2}{R_3 + Y_1} - 2\Omega_3 X_2 - \\ & - \frac{\rho V}{m_i} [C_3 \alpha X_2 - (C_1 + C_2 C_3 \alpha^2) Y_2] \end{aligned} \quad (4.22)$$

При цьому, тривалість T_i процесу виведення на i -му підінтервалі визначається з рівняння (4.20) враховуючи вираз (4.21):

$$T_i = -D_i + \sqrt{D_i^2 + \frac{2}{C_i} [(V_{T_i} - X_2) + (\dot{H}_{T_i} - Y_2) \operatorname{tg} \vartheta_{K_i}]}, \quad (4.23)$$

$$\text{де } C_i = \frac{\mu_i}{m_i} \frac{P_i}{m_i} \frac{1}{\cos \vartheta_{K_i}} + B_i \left(\frac{2X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) \operatorname{tg} \vartheta_{K_i} - A_i \left(\frac{X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right), \quad (4.24)$$

$$D_i = \frac{B_i + A_i \operatorname{tg} \vartheta_{K_i}}{C_i}, \quad A_i, B_i - \text{визначаються виразом (3.102')}.$$

Перехід до замкненого закону керування в формі (4.22) потребує оптимізації критерію (4.15) із змінним ваговим множником λ_i , який змінюється під час зміни змінних траєкторного руху АКС.

Критерій (4.15) з урахуванням виразу (4.20) подамо у вигляді:

$$I_i = \frac{\lambda_i}{2} \mu_i^2 T_i^2 - X_{20} - B_i T_i - \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \frac{P_i}{m_{0i}} \cos a_{i0} - a_{i1} \frac{P_i}{m_{0i}} \sin a_{i0} - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right], \quad (4.25)$$

де A_i і B_i визначаються виразами (3.102').

Множник λ_i визначимо з необхідної умови оптимальності критерія (4.25) з урахуванням (4.20) та (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_i}{\partial T_i} = \lambda_i \mu_i^2 T_i - B_i - T_i \frac{\mu_i}{m_{0i}} \frac{P_i}{m_{0i}} \frac{1}{\cos \vartheta_{K_i}} - \left[A_i + B_i T_i \left(\frac{2X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) \right] \operatorname{tg} \vartheta_{K_i} + \\ + A_i T_i \left(\frac{X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Звідки:

$$\lambda_i = \frac{1}{\mu_i^2 T_i} \left\{ \begin{aligned} & B_i + T_i \frac{\mu_i}{m_{0i}} \frac{P_i}{m_{0i}} \frac{1}{\cos \vartheta_{K_i}} + \left[A_i + B_i T_i \left(\frac{2X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) \right] \operatorname{tg} \vartheta_{K_i} - \\ & - A_i T_i \left(\frac{X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.27)$$

Достатня умова мінімуму критерію (4.25) має вигляд:

$$\frac{\partial I_i}{\partial T_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 I_i}{\partial T_i^2} > 0. \quad (4.28)$$

Для другої складової виразу (4.28) з урахуванням співвідношень (4.23) та (4.27) маємо:

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial T^2} = \frac{1}{T} (A_i \operatorname{tg} \vartheta_{k_i} + B_i) > 0. \quad (4.29)$$

Враховуючи, що, як це видно з виразів (3.101'), під час виведення АКС на орбіту $A_i > 0$, $B_i > 0$, то достатня умова мінімуму критерію (4.25) виконується.

Таким чином, під час синтезу оптимального за критерієм (4.25) керування на i -ому підінтервалі процесу виведення АКС на орбіту з урахуванням виразів (3.101'), (3.96), (4.27) отриманий замкнений закон термінального керування у формі (4.22)-(4.24). Даний закон керування кутом тангажа дає змогу для поточних значень змінних траєкторного руху здійснювати виведення АКС у задані кінцеві умови на кожному підінтервалі виведення. Зміна змінних траєкторного руху внаслідок впливу

дії атмосферних збурень неперервно враховується під час обчислень бортовими засобами за виразами (4.22)-(4.24) нового значення командного кута тангажа. Це свідчить, що алгоритм, синтезований у вигляді функціональних залежностей від змінних траєкторного руху АКС, володіє адаптивними властивостями до дії збурень, що призводять до зміни параметрів процесу виведення АКС на орбіту.

Проведене порівняння отриманого алгоритму з відомими результатами [25,259] показало, що він забезпечує більш точне виконання термінальних (кінцевих) вимог наприкінці активної ділянки виведення АКС. Це пов'язане, по-перше, з тим, що відомий алгоритм, наведений в роботі [259], визначений за спрощеною моделлю траєкторного руху АКС, не враховує багатьох факторів, що діють на АКС під час виведення на орбіту, а саме: гравітаційне прискорення; прискорення, викликане кривиною Землі та її добовим обертанням, а також аеродинамічних сил на атмосферній ділянці виведення АКС. Ці фактори враховані у роботі [25] під час синтезу алгоритму керування за допомогою основних диференціальних перетворень. Однак синтезований автором алгоритм не враховує багатоетапність процесу виведення АКС на орбіту та не забезпечує виконання термінальних вимог на кожному підінтервалі процесу виведення. Врахування останнього, при застосуванні модифікованого методу диференціальних перетворень, привело до появи в алгоритмі керування (4.22) доданку $-\frac{2\dot{H}_{T_i}}{T_i}$, а у виразі для визначення тривалості процесу виведення (4.23) – доданку \dot{H}_{T_i} . Використання більш уточненої моделі траєкторного руху АКС з одночасним врахуванням багатоетапності процесу керування, термінальних вимог за висотою H_{T_i} та вертикальної швидкості набору висоти \dot{H}_{T_i} на кожному підінтервалі процесу виведення приводить до більш точного виконання кінцевих вимог наприкінці всього етапу виведення.

Відзначимо, що відомий алгоритм [259] входить у вигляді перших двох членів правої частини як алгоритму, запропонованому у роботі [25], так й алгоритму (4.22), що є підтвердженням працездатності запропонованого методу та уточненого алгоритму (4.22).

4.3.2. Дослідження ефективності оптимального алгоритму керування

Досліджуємо процес виведення двоступінчастої АКС «Оріль» горизонтального старту з синтезованим алгоритмом керування, який забезпечує оптимальну витрату палива та досягнення максимальної швидкості наприкінці процесу виведення. Ця АКС призначена для виведення космічних апаратів масою до однієї тони у широкому діапазоні орбіт за висотою (200-700 км) і нахилу. Двоступінчаста АКС «Оріль» як першу ступінь використовує літак-носіє, розроблений на базі серійного літака Ан-124. Як друга ступінь (орбітальна ступінь) використовується ракета-носіє, що розміщується в середині фюзеляжу літака-носія [260]. Ракета-носіє «Оріль» створювалася за чотириступінчастою схемою з послідовним розташуваннями ступенів. Керування рухом здійснюється, в основному, за допомогою відхилення сопіл маршових двигунів ступенів. Відокремлення ракети-носія здійснюється методом «парашутного» зриву на висоті 9 000 м за швидкості $M = 0,7$ (рис. 4.1).

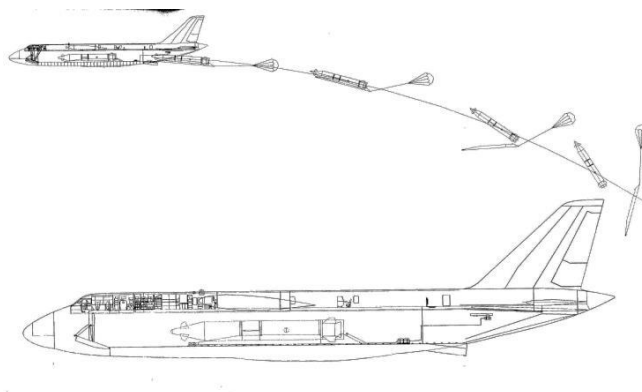


Рис. 4.1. Двоступінчаста АКС «Оріль» та відокремлення ракети-носія методом «парашутного» зриву

Ракета-носіє, після відокремлення від літака-носія, здійснює вільний рух до моменту вмикання її маршових двигунів. Рух у цей проміжок часу є некерованим і не потребує синтеза алгоритму керування. Кінцеві умови цього проміжку часу задають область початкових умов для реалізації керованого процесу виведення ракети-носія на орбіту. Кожен ступінь ракети-носія реалізовує різні режими

керування. Вихідними даними для дослідження оптимального керування та траєкторії виведення були: а) дискрети диференціального спектру спектральної моделі, що отримані у пп. 3.3.2 з використанням модифікованого методу диференціальних перетворень, удосконаленого дискретно-аналітичного відображення вихідної математичної моделі в області зображень з відсутнім часовим аргументом та апроксимацією нелінійних складових диференціальних рівнянь руху поліномами Адоміана; б) синтезований алгоритм (4.22), що є оптимальним за витратою палива.

Під час дослідження процесу виведення АКС на орбіту для відновлення часових процесів зміни параметрів виведення за диференціальними спектрами прийнято найпростіший в обчислювальному відношенні метод відновлення часових процесів у формі рядів Тейлора (п.1.8). Відповідно до цього методу, для отримання значень параметрів руху АКС в момент часу $t_i = t_{i-1} + h$, алгебраїчно підсумовувалися дискрети диференціального спектру за кожною змінною, що підраховані для моменту часу t_{i-1} . Виконання операцій алгебраїчного підсумовування дискрет диференціального спектра потребує мінімальних витрат часу.

Нижче наведено результати дослідження ефективності отриманого оптимального алгоритму керування процесом багатоетапного виведення на задану орбіту висотою $H_{кр} = 200$ км з розгоном до необхідній швидкості $V = 6200$ м/с орбітальної ступені (ракети-носія) АКС «Оріль» після її відділення від літака-носія та запуску двигунів першого ступеню. Дослідження здійснювалося шляхом моделювання на ЕОМ оптимальної траєкторії виведення за синтезованим алгоритмом керування. Увесь процес виведення розбитий на чотири ділянки. Як перша ділянка ($i = 1$) обрано ділянку від моменту запуску двигунів першого ступеню ($H_0 = 9000$ м, $V = 220$ м/с) до завершення їх роботи. Друга ділянка ($i = 2$) починається з моменту запуску двигунів другого ступеню та продовжується до моменту скидання головного обтічника. Третя ділянка ($i = 3$) починається з моменту скидання головного обтічника та продовжується до закінчення роботи

двигунів другого ступеню. Як четверта ділянка ($i=4$) обрано ділянку від моменту запуску двигунів третього ступеню до завершення їх роботи та завершення процесу керування виведенням на задану орбіту ($H_{кр} = 200$ км, $V = 6200$ м/с). Під час виведення додержувалися обмеження за перевантаженням та припустимому максимальному значенню добутку кута атаки на швидкісний напір $q \cdot \alpha$, а також забезпечувалося неперевищення припустимих значень за тепловим та аеродинамічним навантаженням.

При моделюванні використані проектні значення початкових та кінцевих умов відповідних ділянок виведення, що прийняті на етапі розробки аванпроекту АКС «Оріль» [260]. Результати моделювання оптимальної траєкторії виведення подано на рис. 4.2-4.4.

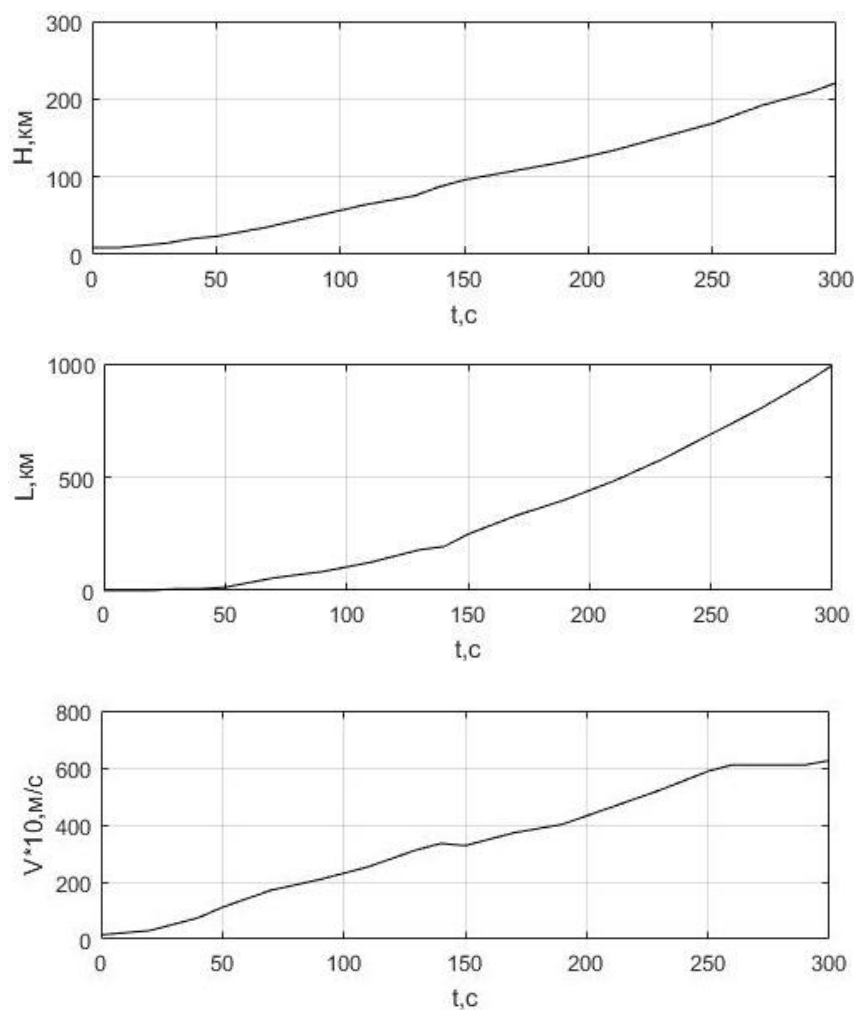


Рис. 4.2. Зміна за часом висоти H , дальності L та швидкості V АКС «Оріль» під час виведення на задану висоту $H_{кр} = 200$ км

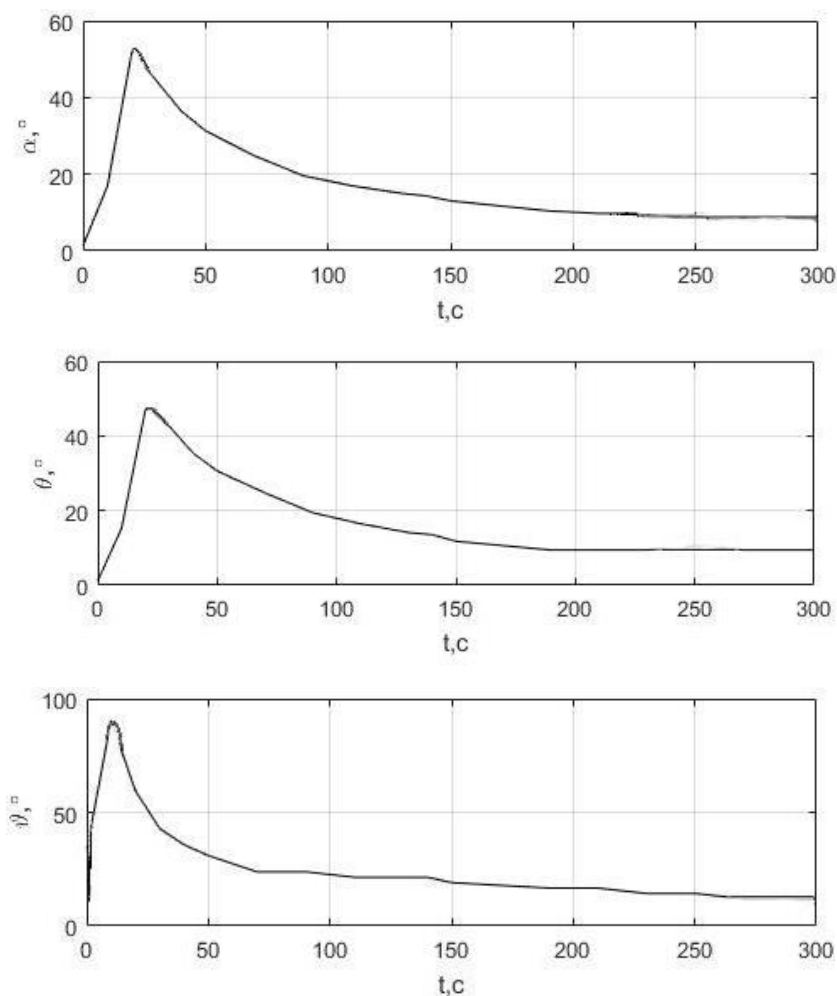


Рис. 4.3. Зміна за часом кутів атаки α , нахилу траєкторії θ та тангажа φ ОС АКС «Оріль» під час виведення на задану висоту $H_{кр} = 200$ км

Алгоритм (4.22), реалізація якого не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху, порівнювався з алгоритмом траєкторного керування АКС «Оріль» на ділянці виведення, що використовує прогноз-модель. Отримані результати дослідження показали, що алгоритм термінального керування (4.22), розроблений із застосуванням модифікованого методу диференціальних перетворень, виводив АКС «Оріль» на задану висоту 200 км з розгоном до необхідної швидкості $V = 6200$ м/с з економією палива $\approx 1\%$ [257,258].

З метою оцінки точності термінального виведення АКС «Оріль» на задану орбіту проведено порівняння результатів моделювання кінцевих значень траєкторних параметрів руху з алгоритмами керування, синтезованими із

застосуванням базового (одноетапного) [25] та модифікованого (багатоетапного) методів диференціальних перетворень (4.22).

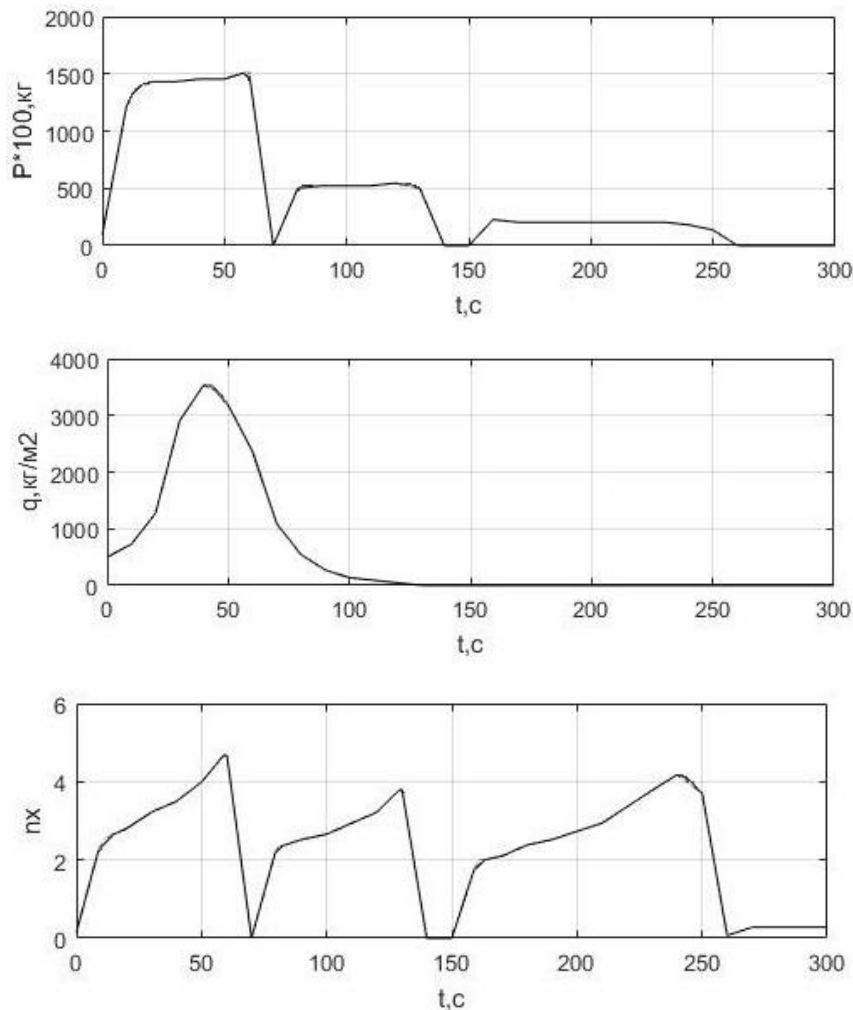


Рис. 4.4. Зміна за часом тяги P двигунової установки, швидкісного напору q та перевантажень n_x АКС «Оріль» при виведенні на задану висоту $H_{кр} = 200$ км

Результати отримані шляхом застосування для моделювання методу інтегрування диференціальних рівнянь вихідної математичної моделі руху апарату методом Рунге-Кутта 4-го порядку, а також шляхом використання базового та модифікованого методу диференціальних перетворень для розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь. За точку порівняння прийнято час виведення АКС на задану висоту $H = 200$ км, отриманий при застосуванні методу Рунге-Кутта ($t = 274$ с). Порівняння результатів моделювання наведено у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Порівняння кінцевих значень траєкторних параметрів руху АКС

Параметр	Метод Рунге-Кутта 4-го порядку	Метод диференціальних перетворень	
		Базовий	Модифікований
H, км	200	187 (0,935)	191 (0,955)
L, км	785	748 (0,953)	763 (0,972)
V, м/с	6210	6002 (0,968)	6124 (0,988)
t, с	274	274	274

У таблиці 4.1 у дужках наведено нормовані значення кінцевих параметрів (відносно значення, отриманого методом Рунге-Кутта).

Наведені результати підтверджують позитивний ефект (поліпшення точності досягнення термінальних умов виведення на $\sim 2\%$ за висотою та швидкістю), отриманий завдяки застосуванню до синтезу алгоритму керування процесом виведення АКС на орбіту модифікованого метода диференціальних перетворень.

4.4. Оптимальне термінальне керування аеростатичним літальним апаратом на злітно-посадкових режимах

4.4.1. Синтез алгоритму оптимального термінального керування

Застосуємо розроблений у пп. 4.1 чисельно-аналітичний метод синтезу замкнених законів багатоетапного термінального керування для визначення алгоритму оптимального термінального керування БАЛА (дирижабля) на режимі посадки. Питання синтезу алгоритму термінального керування БАЛА на режимі зльоту з використанням основних диференціальних перетворень, а також оцінки ефективності автоматичного керування відхиленням вектору тяги розглянуто в роботах [211,261-263].

Розглянемо процес багатоетапного керування посадкою БАЛА, що описується системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (3.19). Увесь процес керування умовно розіб'ємо на r заданих часових підінтервалів, усередині яких

параметри апарата не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування: $T_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r T_i = T$, де T - час процесу керування. Вважаємо, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних підінтервалів. Спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задаємо у формі заданих крайових умов (4.4).

Аналіз результатів льотних випробувань дирижабля «Skyship 500» при виконанні посадки показав, що на цьому етапі зміни кута тангажа є незначними [246]. Таким чином, у першому наближенні, при синтезі алгоритмів керування рухом БАЛА на етапі посадки можна знехтувати обертальним рухом апарата. Будемо розглядати лише плоскопаралельний рух БАЛА у вертикальній площині, перехресні зв'язки не враховуються.

За критерій якості для кожного підінтервалу процесу посадки БАЛА приймемо мінімум функціоналу:

$$I_i = V_X(T_i). \quad (4.30)$$

Даний критерій враховує намір мінімізувати горизонтальну посадкову швидкість апарата наприкінці i -ого підінтервалу процесу посадки. У загальному випадку (для літальних апаратів, що використовують динамічний принцип польоту), при виборі вигляду функціоналу враховуються, як правило, обмеження на вектори стану та керування. Для аеростатичних літальних апаратів врахування обмежень на параметри руху практично не мають істотного значення, оскільки екстремальні випадки, що виникають у польоті, такі як, наприклад, відмова двигунів, не призводить до виникнення аварійних ситуацій. Що стосується обмежень на параметри керування, то, за необхідністю, можуть бути враховані обмеження на кути та швидкість відхилення органів керування.

Задача оптимального термінального керування полягає в переведенні апарата із заданих початкових умов:

$$V_X(0) = V_{X_0}, \quad V_Y(0) = V_{Y_0}, \quad H(0) = H_0 \quad (4.31)$$

у задані кінцеві:

$$H(T_i) = H_{T_i}, \quad V_Y(T_i) = V_{Y_{T_i}} \quad (4.32)$$

з досягненням наприкінці i -ого підінтервалу процесу посадки мінімальної горизонтальної посадкової швидкості $V_{X_{i \min}}$. Тут $V_{Y_{T_i}}$ та H_{T_i} – задані вертикальна швидкість зниження та висота польоту апарата наприкінці i -ого підінтервалу процесу посадки відповідно.

Для синтезу алгоритму багатоетапного термінального керування траєкторним рухом БАЛА використовуємо спектральну модель (3.21)-(3.44) і диференціальні змінні траєкторного руху БАЛА, отримані в пп. 3.2.3. На базі диференціальних спектрів змінних траєкторного руху БАЛА та граничних умов (4.32) отримаємо наступні співвідношення [264]:

$$H(T_i) = H_0 + T_i V_{Y_0} + \frac{T_i^2}{2} [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}] + \frac{T_i^3}{6} \left[(C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot a_{1_i} \cdot \cos a_{0_i} \right] = H_{T_i} \quad (4.33)$$

$$V_Y(T_i) = V_{Y_0} + T_i [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}] + \frac{T_i^2}{2} \left\{ (C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 + \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot a_{1_i} \cdot \cos a_{0_i} \right\} = V_{Y_{T_i}} \quad (4.34)$$

$$V_X(T_i) = V_{X_0} + T_i [\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - C_4 V_0^2] + \frac{T_i^2}{2} \left[- \left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0} \right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0} \right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0} \right) V_0^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot a_{1_i} \cdot \sin a_{0_i} \right] = V_{X_{i \min}} \quad (4.35)$$

Рівняння (4.33) - (4.45) дають змогу отримати вільні параметри a_{0_i}, a_{1_i} закону керування кутом відхилення вектору тяги силової установки та час процесу керування на i -му підінтервалі посадки. Із співвідношення (4.34), визначаємо параметр керування a_{1_i} :

$$a_{1_i} = - \frac{2}{T_i^2 \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i}} \left\{ (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + T_i [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}] + \frac{T_i^2}{2} \left[(C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 \right] \right\} \quad (4.36)$$

Після підставлення (4.36), вирази (4.33) і (4.35) перетворюються до вигляду:

$$H(T_i) = 6(H_0 - H_{T_i}) + 2T_i(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) + T_i^2[\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}] = 0. \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} V_X(T_i) = & (V_{X_0} - V_{X_{i\min}}) + T_i[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - C_4 V_0^2] + \\ & + T_i^2 \left[-\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0}\right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0}\right) V_0^2 \right] - \\ & - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \cdot tga_{0_i} \left[\left(V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}\right) + T_i(\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}) + \right. \\ & \left. + \frac{T_i^2}{2} \left((C_6 + C_7) V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (C_6 + C_7) V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Підставлення виразу (4.38) у вираз (4.30) дає змогу подати критерій якості в наступному вигляді:

$$I_i(a_{0_i}, T_i) = \left\{ \begin{aligned} & V_{X_0} - V_{X_{i\min}} - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} tga_{0_i} (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + \\ & + T_i \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - C_4 V_0^2 - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} tga_{0_i} (\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}) \right] + T_i^2 \left[d_2 - \frac{d_1}{2} \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} tga_{0_i} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (4.39)$$

де

$$\begin{aligned} d_1 = & \frac{(C_6 + C_7)}{2} [V_{Y_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - V_{X_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} - V_{X_0} \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) V_{Y_0} C_4 V_0^2], \\ d_2 = & -\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_0} + C_4 V_{X_0}\right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i} + \\ & + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_0} - C_4 V_{Y_0}\right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_0} + C_4^2 V_{X_0}\right) V_0^2. \end{aligned}$$

Особливість задачі мінімізації функції (4.39) полягає у тому, що мінімум функції (4.39) необхідно знайти серед безлічі значень параметру керування a_{0_i} та тривалості T_i i -ого підінтервалу процесу посадки БАЛА, що задовольняють системі рівнянь (4.37) і (4.38). Для розв'язання цієї задачі скористаємося методом прямої підстановки.

З рівняння (4.37) знайдемо вираз для визначення в явному вигляді тривалості T_i i -ого підінтервалу посадки БАЛА:

$$T_i = \frac{I}{A_i} \left[-\left(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}\right) \pm \sqrt{\left(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}\right)^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right], \quad (4.40)$$

$$\text{де } A_i = \tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}. \quad (4.41)$$

Підставляючи співвідношення (4.40) у вираз (4.38) отримаємо:

$$\begin{aligned} & V_{X_0} - V_{X_{i\min}} + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_0 (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + \\ & + \frac{1}{A_i} \left[- (2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) \pm \sqrt{(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}})^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right] \cdot \\ & \cdot \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{0_i} - C_4 V_0^2 + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_{0_i} (\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{0_i}) \right] + \\ & + \frac{1}{A_i^2} \left[- (2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) \pm \sqrt{(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}})^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right]^2 \cdot \left[d_2 - d_1 \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} a_{0_i} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Тепер задачу синтезу алгоритму оптимального керування рухом БАЛА можна розв'язати наступним чином. Для заданих початкових значень змінних траєкторного руху H_0, V_{X_0}, V_{Y_0} необхідно знайти усі розв'язки трансцендентного рівняння (4.42) відносно параметра керування a_{0_i} , який є початковим значенням φ_{0_i} кута відхилення вектору тяги. Підставляючи це значення параметра керування a_{0_i} у вирази (4.39) - (4.41), визначимо відповідні значення критерію (4.39) та оберемо таке значення параметра керування a_{0_i} , яке доставляє найменше значення критерію (4.39). Отримане значення параметра керування a_{0_i} подається в систему автоматичного керування БАЛА як сигнал встановлення певного кута відхилення вектору тяги φ_i відповідно для кожного підінтервалу процесу посадки.

Так як усі математичні операції під час виводу виразів (4.39) - (4.41) виконувалися із довільними початковими значеннями змінних траєкторного руху БАЛА H_0, V_{X_0}, V_{Y_0} , то під час керування апаратом на етапі посадки можна замінити ці значення поточними параметрами траєкторного руху апарату $H(t), V_X(t), V_Y(t)$ і за допомогою бортової ЕОМ обчислювати значення кута відхилення вектору тяги φ_i за виразом (4.41), замінюючи в ньому параметр a_{0_i} на поточний кут відхилення вектору тяги φ_i . Якщо рівнянню (4.41) задовольняють декілька значень кута відхилення вектору тяги φ_i , то необхідно обрати з цих значень таке, яке доставляє мінімум критерію, що обчислюється за виразами (4.39) - (4.41). Неперервне

обчислення кута відхилення вектору тяги φ_i системою автоматичного керування забезпечує переведення БАЛА у задані граничні умови (4.32).

Обсяг обчислень на бортовій ЕОМ можна істотно зменшити, якщо вибір оптимальних значень кута відхилення вектора тяги, обчислених із рівняння (4.42), виконувати не з умов мінімізації критерію (4.39), а з умов мінімізації прогнозованого часу (4.40) посадки БАЛА. Аналіз виразу (4.39) показує, що мінімум критерію $I_i(a_{0_i}, T_i)$ досягається при прагненні тривалості T_i i -ого підінтервалу посадки БАЛА до нульового значення. Отже, з усіх розв'язків рівняння (4.42) відносно кута відхилення вектора тяги можна обрати таке, яке доставляє мінімальне значення тривалості i -ого підінтервалу посадки (4.40). З урахуванням цього, процес керування посадкою БАЛА можна реалізувати наступним чином.

Замінімо у виразах (4.39) - (4.41) початкові значення змінних траєкторного руху літального апарата їх поточними значеннями і замість параметра керування a_{0_i} підставимо поточне значення кута відхилення вектору тяги φ_i . В результаті замість виразів (4.39) - (4.41) отримаємо наступні співвідношення:

$$V_{X_0} - V_{X_{i \min}} + \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} \varphi_i (V_{Y_0} - V_{Y_{T_i}}) + \frac{I}{A_i} \left[- (2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) \pm \sqrt{(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}})^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right] \cdot \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos \varphi_i - C_4 V_0^2 - \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} \varphi_i (\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i) \right] + \frac{I}{A_i^2} \left[- (2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) \pm \sqrt{(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}})^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right]^2 \cdot \left[d_2 - d_1 \frac{\bar{P}_{\Sigma_i}}{\tilde{P}_{\Sigma_i}} \operatorname{tg} \varphi_i \right] = 0, \quad (4.43)$$

$$\min_{\varphi_i} T_i = \min_{\varphi_i} \frac{I}{A_i} \left[- (2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}}) \pm \sqrt{(2V_{Y_0} + V_{Y_{T_i}})^2 + 6(H_{T_i} - H_0) \cdot A_i} \right], \quad (4.44)$$

$$\text{де } A_i = \tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin \varphi_i. \quad (4.45)$$

Використовуючи результати вимірів змінних траєкторного руху БАЛА, за допомогою бортової ЕОМ за виразом (4.43) обчислюються усі значення кута відхилення вектору тяги φ_i , які задовольняють рівнянню (4.43). Обчисленні значення φ_i підставляються у вирази (4.44) і (4.45), за якими визначаються

прогнозовані значення часу посадки літального апарата. До системи автоматичного керування БАЛА видається таке значення кута відхилення вектору тяги φ_i , яке відповідає мінімальному значенню прогнозованого часу $T_{i_{\min}}$ посадки апарата.

Якщо змінні траєкторного руху БАЛА змінюються внаслідок впливу збурень, то це неперервно враховується під час обчислень на бортовій ЕОМ нового значення кута відхилення вектора тяги, що задовольняє умовам (4.43) – (4.45) для поточних значень змінних траєкторного руху.

Так як рівняння (4.43) виведено для заданих кінцевих умов (4.32), то нове значення кута відхилення вектора тяги буде забезпечувати посадку апарата в задані кінцеві умови при впливі збурень.

Постійний контроль виконання граничних умов (4.32) за виразом (4.43) дає змогу реалізовувати процес керування рухом БАЛА на етапі посадки за більш крутими траєкторіями, які характеризуються більш високими значеннями вертикальної швидкості зниження V_{Y_i} порівняно з алгоритмами посадки, в яких прогноз та корекція траєкторії посадки здійснюється в окремі моменти часу, що розділені значними інтервалами.

Слід відмітити, що на окремих підінтервалах посадки БАЛА збільшення вертикальної швидкості зниження V_{Y_i} може увійти у протиріччя з припустимими значеннями піднімальної аеростатичної сили. На цих ділянках з метою задоволення заданих обмежень (з аеростатичної піднімальної сили) рекомендується тимчасово перейти на неоптимальні значення кута відхилення вектора тяги, але на такі, що задовольняють заданим граничним умовам (4.32). Такий розв'язок існує, так як у обмеженні (4.43), що враховує умови (4.32), перед радикалами може бути обраний знак мінус, за якого згідно виразу (4.44) $A_i < 0$ тривалість T_i i -ого підінтервалу процесу посадки БАЛА збільшується, даючи змогу за більш пологими траєкторіям посадки виконувати необхідні обмеження на цих ділянках польоту. Як тільки ділянка (підінтервал) посадки з піковими значеннями вертикальної швидкості зниження (або піднімальної аеростатичної сили) долається, можна знову перейти на оптимальні значення кута відхилення вектора тяги, що задовольняє обмеженню

(4.44) та умові (4.45). Перехід на окремій ділянці польоту на неоптимальні значення кута відхилення вектора тяги дозволяє підтримувати параметри траєкторного руху БАЛА у припустимих межах із гарантованим його переведенням в задані кінцеві умови (4.32).

4.4.2. Дослідження ефективності оптимального алгоритму керування на режимі зльоту з виведенням на задану висоту

Досліджуємо процес зльоту та виведення на задану висоту аеростатичного літального апарата за синтезованим алгоритмом керування, який забезпечує досягнення на заданій висоті максимальної горизонтальної швидкості.

Як об'єкт дослідження БАЛА, прийнято гіпотетичний автономний класичний дирижабль невеликого об'єму типу «Skyship 500» (рис.4.5). Розробники останнього, розглядали можливість використання цього дирижабля та його модифікацій у пілотованому та безпілотному варіантах.



Рис. 4.5. Дирижабль «Skyship-500»

Конструкція апарата виконана за м'якою схемою. Оболонка корпусу, об'ємом 6670 м³, виготовлена із композиційного матеріалу. По обидва боки гондоли дирижабля, в районі центру прикладення аеростатичної піднімальної сили, встановлено два реверсивних маршових двигуни з повітряними гвинтами у кільцевих насадках, які відхиляються до +90° вгору (на кабрирування) і до -120° вниз

(на пікірування). Розглядалося традиційне для дирижаблів сучасного покоління керування кутом відхилення вектору тяги [265]. Максимальна швидкість відхилення вектора тяги становила $5^\circ/\text{с}$. Ця величина прийнята на основі результатів досліджень динамічних характеристик зльоту та посадки апаратів аналогічного типу [11,12]. Динаміка приводів виконавчих механізмів відхилення кільцевих насадок моделювалася ланкою першого порядку.

Дослідження ефективності отриманого оптимального алгоритму керування та відповідної траєкторії руху БАЛА на злітно-посадкових режимах здійснювалося методом математичного моделювання на ЕОМ з використанням спектральної моделі, отриманої в п. 3.2.2. Додатково до моделі було включено доданки, що враховують вплив близькості землі та відповідні вирази для визначення алгоритму керування відхиленням вектора тяги.

На базі розробленої спектральної моделі було розроблено методичне та програмне (з використанням середовища MATLAB) забезпечення з моделювання повздовжнього руху БАЛА на злітно-посадкових режимах. Для відновлення часових процесів зміни параметрів траєкторного руху за диференціальними спектрами прийнято найпростіший в обчислювальному відношенні метод відновлення часових процесів у формі рядів Тейлора. Відповідно до цього методу, для отримання значень параметрів руху апарату в момент часу $t_v = t_{v-1} + h$, алгебраїчно підсумовуються дискрети диференціального спектру, що визначені для моменту часу t_{v-1} .

Моделювалася оптимальна траєкторія руху БАЛА під час зльоту та виведення на задану висоту $H=350$ м з використанням алгоритму термінального керування, що забезпечує досягнення на заданій висоті максимальної горизонтальної швидкості [211].

Відповідно до Критеріїв льотної придатності дирижаблів [13] припускалося, що засоби забезпечення регулювання тиску усередині оболонки (газові клапани) та подачі повітря у балонети (повітряні клапани) мають достатню продуктивність, щоб забезпечити максимальну розрахункову швидкопідйомність апарату без перевищення тиску газу в оболонці вище встановленого розрахункового значення. У

даній роботі прийнято середнє значення максимальної швидкопідйомності сучасних АЛА, що становить 5 м/с.

Увесь етап зльоту з виведенням на задану висоту БАЛА умовно розіб'ємо на дві ділянки. Як першу ділянку ($i = 1$), обираємо ділянку від моменту початку руху до набору висоти 15,2 м, за досягнення якої дирижабль, відповідно до критеріїв льотної придатності дирижаблів [13-15], має досягти рекомендовану вертикальну швидкість набору висоти. Друга ділянка ($i = 2$) починається з висоти 15,2 м та продовжується до моменту підняття на задану висоту $H = 350$ м, за досягнення якої дирижабль повинен мати максимальну горизонтальну швидкість.

Вважаємо, що встановлений на апарату автопілот керма висоти балансує сумарний повздовжній момент апарата та підтримує практично постійною куту швидкість тангажа. За вхідні сигнали в автопілоті керма висоти прийнято висоту польоту, швидкість зміни висоти польоту, кут атаки та швидкість зміни кута атаки [9,12]. При моделюванні прийнято наступні початкові та кінцеві умови.

Перша ділянка:

а) початкові умови: $V_{X_1}(0) = V_{X_{10}} = 0$, $V_{Y_1}(0) = V_{Y_{10}} \approx 0$, $H_1(0) = H_{10} = 0$;

б) кінцеві умови: $V_{X_1}(T_1) = V_{X_{1\max}}$, $V_{Y_1}(T_1) = V_{Y_{T_1}}$, $H_1(T_1) = 15,2$ м.

Друга ділянка:

а) початкові умови: $V_{X_2}(0) = V_{X_{20}} = V_{X_{1\max}}$, $V_{Y_2}(0) = V_{Y_{T_1}}$, $H_2(0) = H_{1T_1} = 15,2$ м;

б) кінцеві умови: $V_{X_2}(T_2) = V_{X_{2\max}}$, $V_{Y_2}(T_2) = V_{Y_{T_2}}$, $H_2(T_2) = 350$ м.

Результати моделювання траєкторних параметрів БАЛА під час зльоту та виведення на задану висоту $H = 350$ м з використанням алгоритму термінального керування відхиленням вектору тяги, що забезпечує досягнення на заданій висоті максимальної горизонтальної швидкості, наведено у таблиці 4.2, де H – висота, L – відстань, V – повітряна швидкість, V_x – горизонтальна швидкість, V_y – вертикальна швидкість, α – кут атаки, θ – кут нахилу траєкторії, φ – кут відхилення вектору тяги, E – енергія, що витрачається апаратом під час зльоту та підняття на задану висоту, T – час підняття на задану висоту.

Встановлено, що тривалість першої ділянки руху (з моменту початку руху до моменту набору висоти $H=15,2$ м) складає 9,1 с. При цьому, апарат піднімається на безпечну висоту $H=15,2$ м на відстані ~ 50 м від початку руху, набирає швидкість - 10,4 м/с та практично виходить на максимальну швидкопідйомність $V_y = 4,6$ м/с. Максимальний кут відхилення вектору тяги та витрати енергії на цій ділянці дорівнюють 62° та 0.02 кВт*ч відповідно.

Таблиця 4.2

Початкові та кінцеві значення параметрів траєкторії БАЛА
на етапі зльоту з виведенням на задану висоту $H=350$ м

Параметр	1-й етап		2-й етап	
	Початкове значення	Кінцеве значення	Початкове значення	Кінцеве значення
H, м	0	15.2	15.2	350.0
L, м	0	50.5	50.5	1 580,0
V, м/с	0.01	10.4	10.4	32,9
V _x , м/с	0.01	9.4	9.4	32,5
V _y , м/с	0	4,6	4,6	5,0
α°	0	-14.1	-14.1	-2,3
φ°	0	61.9	61.9	29,8
E, кВт*ч	0	0.02	0.02	2,75
T, с	0	9.08	9.08	75,5

Тривалість другої ділянки (піднімання від безпечної висоти $H = 15,2$ м до заданої висоти $H = 350$ м) складає $\sim 66,4$ с. Під час піднімання апарат набирає горизонтальну швидкість 32,5 м/с, витрачаючи при цьому 2.75 кВт*ч енергії.

4.4.3. Дослідження ефективності оптимального алгоритму керування на режимі посадки

Ефективність оптимального алгоритму керування на режимі посадки оцінювалася шляхом моделювання на ЕОМ траєкторії посадки. При моделюванні

посадки БАЛА припускалося, що елементи системи забору повітря балонету апарата (повітрозбирачі, трубопроводи, вентилятори або їх сполучення) мають достатню продуктивність, щоб забезпечити максимальну розрахункову швидкість зниження апарата без зменшення тиску газу в оболонці нижче встановленого розрахункового значення [13]. У даній роботі прийнято середню для сучасних АЛА максимальну швидкість зниження 5 м/с.

Процедура моделювання посадки БАЛА з відхиляємим вектором тяги за синтезованим алгоритмом полягала у наступному. У вихідному стані апарат був збалансований на висоті 50 м в усталеному польоті на швидкості 36 км/г. Після цього, відповідно до синтезованого алгоритму, вектор тяги двигунів відхилявся з таким розрахунком, щоб забезпечити зниження з досягненням мінімальної горизонтальної посадкової швидкості.

Увесь етап посадки умовно розбивається на дві ділянки. Як перша ділянка ($i=1$) обрано ділянку від моменту початку посадки (висота 50 м) до висоти 15,2 м над посадковою поверхнею, за досягнення якої дирижабль відповідно до критеріїв льотної придатності для дирижаблів [13-15] має досягти рекомендовану для конкретного апарата вертикальну швидкість зниження. Друга ділянка ($i=2$) починається з висоти 15,2 м та продовжується до моменту торкання посадковим шасі дирижабля землі, за досягнення якої дирижабль повинен мати мінімальну горизонтальну посадкову швидкість та задану вертикальну швидкість зниження, яка не повинна перевищувати 0,91 м/с [13]. Вважаємо, що на першій ділянці посадки встановлений на апарату автопілот керма висоти балансує сумарний повздовжній момент апарата та підтримує практично постійною куту швидкість тангажа. За вхідні сигнали в автопілоті керма висоти взято висоту польоту, швидкість зміни висоти польоту (швидкість зниження), кут атаки та швидкість зміни кута атаки. Відмітимо, що для дирижабля, що розглядається, автопілот керма висоти є ефективним за швидкості польоту не менше 30 км/г, тобто практично він використовується тільки на першій ділянці.

При моделюванні прийняті наступні початкові та кінцеві умови.

Перша ділянка:

а) початкові умови: $V_{X_1}(0) = V_{X_{10}} = 10 \text{ м/с}$, $V_{Y_1}(0) = V_{Y_{10}} \approx 0 \text{ м/с}$, $H_1(0) = H_{10} = 50 \text{ м}$;

б) кінцеві умови: $V_{X_1}(T_1) = V_{X_{1\min}}$, $V_{Y_1}(T_1) = -0,61 \text{ м/с}$, $H_1(T_1) = 15,2 \text{ м}$.

Друга ділянка:

а) початкові умови: $V_{X_2}(0) = V_{X_{20}} = V_{X_{1\min}}$, $V_{Y_2}(0) = V_{Y_{T_1}} = -0,61 \text{ м/с}$, $H_2(0) = H_{1T_1} = 15,2 \text{ м}$;

б) кінцеві умови: $V_{X_2}(T_2) = V_{X_{2\min}}$, $V_{Y_2}(T_2) = -0,71 \text{ м/с}$, $H_2(T_2) \approx 0 \text{ м}$.

На рис. 4.6 – 4.8 наведено зміну траєкторних параметрів БАЛА під час посадки за синтезованим алгоритмом керування відхилення вектора тяги (4.22). Результати моделювання показали наступне [266,267]. Після початку процесу посадки, апарат починає знижуватися та досягає нормованої висоти $H = 15,2 \text{ м}$ над посадковою поверхнею на відстані $\sim 289 \text{ м}$ (рис.4.6).

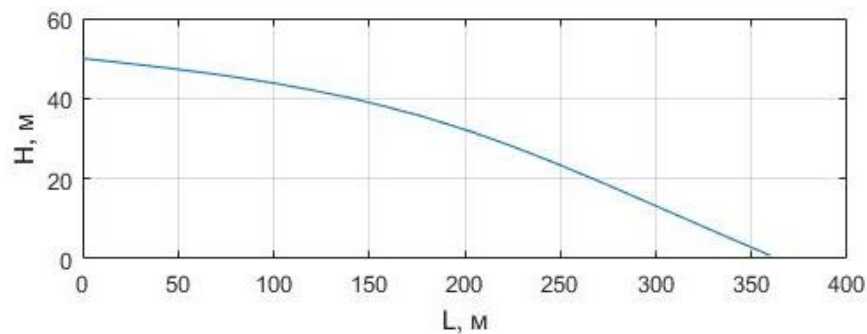


Рис.4.6. Залежність посадкової дистанції L від висоти польоту H за термінального керування відхиленням вектора тяги

При цьому отримано, що керування вектором тяги за синтезованим алгоритмом керування забезпечує наприкінці першої ділянки на заданій висоті $H = 15,2 \text{ м}$ досягнення із прийнятною точністю заданої швидкості зниження $V_y = -0,58 \text{ м/с}$ ($V_{Y_1}(T_1) = -0,61 \text{ м/с}$) та значення горизонтальної швидкості $V_x = 7,33 \text{ м/с}$. Тривалість першої ділянки склала $T_1 \approx 32,1 \text{ с}$.

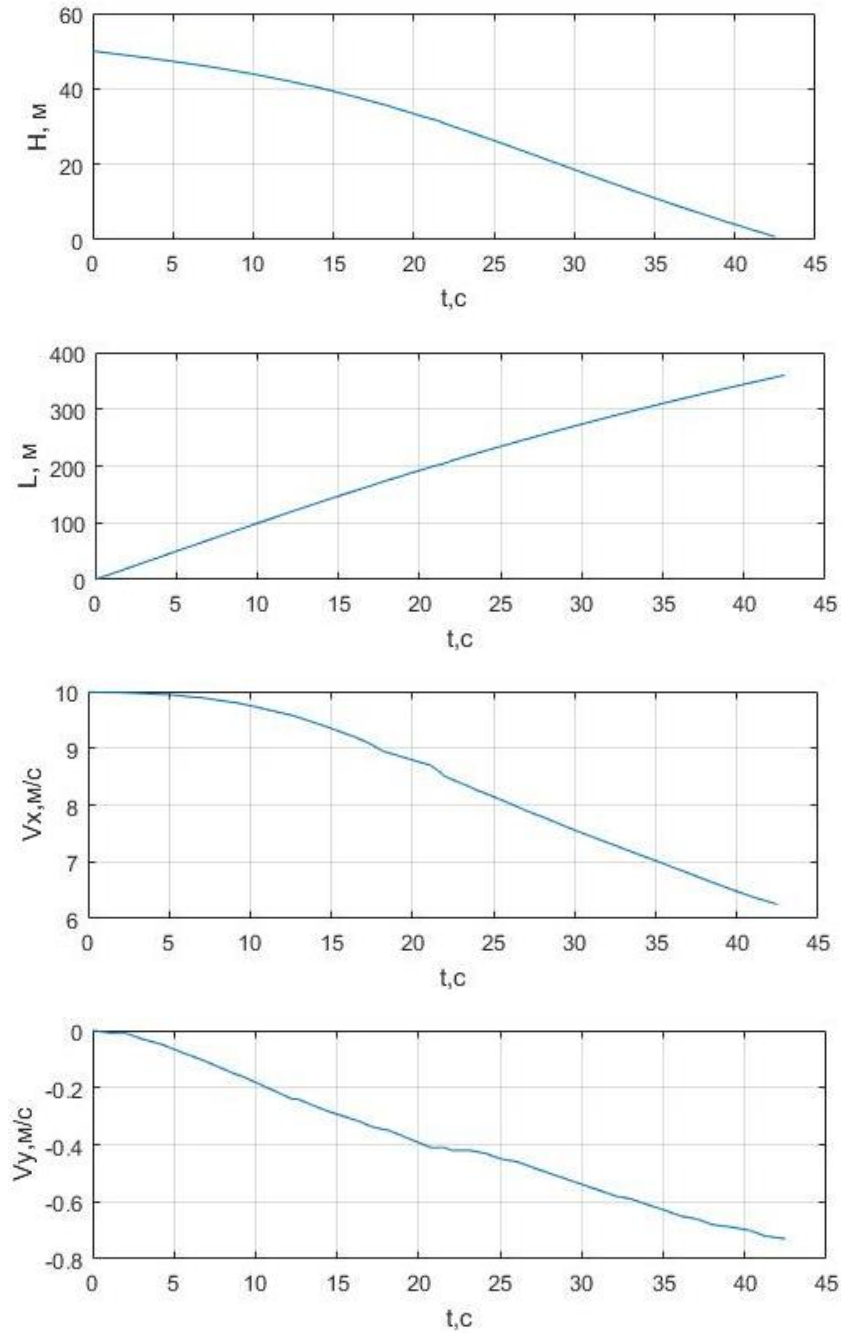


Рис. 4.7. Зміна за часом висоти H , посадкової дистанції L , горизонтальної швидкості V_x та швидкості зниження V_y під час посадки

Наприкінці другої ділянки досягається значення горизонтальної швидкості $V_x = 6,2$ м/с. У момент торкання, значення вертикальної швидкості зниження складає $V_y = -0,73$ м/с. Тривалість другої ділянки становить $T_2 \approx 11$ с.

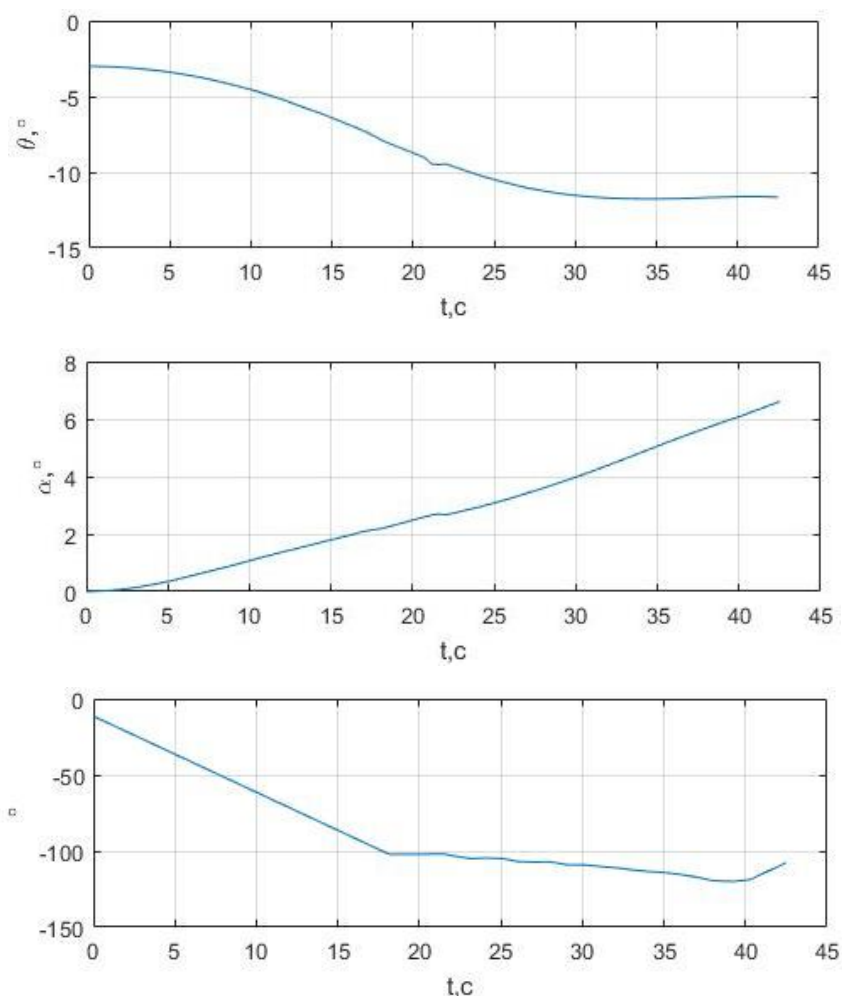


Рис. 4.8. Зміна за часом кутів нахилу траєкторії θ , атаки α та куту відхилення вектору тяги φ під час посадки

Отримано, що за заданих термінальних умов та застосуванні на АЛІА автоматичного відхилення вектора тяги за синтезованим алгоритмом, вектор тяги першочергово відхиляється на пікірування на кут $\sim -90^\circ$, а потім відхилення вектора тяги на пікірування збільшується до $\sim -120^\circ$ для забезпечення зниження швидкості посадки та досягнення найменшої горизонтальної посадкової швидкості. За такого керування досягається посадка з коротким пробігом по землі. Застосування автоматичного керування кутом повороту тяги одночасно з керуванням величиною тяги (реверс) надасть можливість не тільки зменшити пробіг дирижабля після торкання посадкової поверхні, але й здійснювати практично вертикальну посадку дирижабля. Це питання потребує окремого дослідження та у даній дисертації не розглядається.

4.5. Застосування зміщених диференціальних перетворень до оптимізації багатоетапного термінального керування

Розглянемо можливість застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язання задачі оптимізації багатоетапних термінальних процесів керування БЛА, якій відповідає математична модель (4.1)-(4.4). Будемо вважати, що всі функції часу в задачі (4.1)-(4.4) є аналітичними. На першому етапі розглядатимемо незбурений рух ЛА та оберемо всередині кожної ділянки процесу керування оптимальне програмне керування $u^*(t)$, що забезпечує розв'язок нелінійної термінальної задачі (4.1)-(4.4), в класі аналітичних функцій $u_i(t, A_i)$, де $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\ell})$ - вектор вільних параметрів розмірності ℓ . Задача оптимізації полягає у визначенні вектору оптимального керування $u^*(t)$ та фазової траєкторії $x^*(t)$, які за заданими диференціальними зв'язками (4.1) та умов спряження кінцевих умов попередніх ділянок та початкових умов наступних ділянок (4.4) забезпечують оптимальне багатоетапне переведення БЛА із початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан, визначений у кінцевий момент часу $t=T$ q -мірним ($q \leq n$) векторним рівнянням граничних умов (4.2), та оптимізують функціонал (4.3).

Задачу визначення оптимального багатоетапного програмного керування (4.1)-(4.4) з використанням зміщених диференціальних перетворень розв'язатимемо у тій самій послідовності, що й при застосуванні основних диференціальних перетворень. Спочатку розв'язуємо задачу визначення оптимального програмного керування $u_1(t)$ на відрізку $t_0 \leq t \leq t_1$ із початковою умовою вектору стану $x_1(t_0) = x_1^0$. Розв'язок рівняння (4.1) в точці t_1 має значення $x_1(t_1)$. Потім розв'язуємо задачу визначення оптимального керування $u_2(t)$ на відрізку $t_1 \leq t \leq t_2$ з початковою умовою $x_1(t_1) = x_2^0$ вектору стану. Розв'язок рівняння (4.1) в точці t_2 має значення $x_2(t_2)$. Побудований таким чином розв'язок $x(t)$ і керування $u(t)$ є неперервними в усіх точках інтервалу $t_0 \leq t \leq t_2$ і у точці спряження інтервалів t_1 . Продовжуючи цей процес на усьому заданому інтервалі $[t_0, T]$ отримуємо неперервний і кусково-неперервний розв'язок

$x^*(t)$ рівняння (4.1) і відповідне оптимальне керування $u^*(t)$, які за заданих граничних умовах (4.2) та умов спряження граничних і початкових умов (4.4) оптимізують функціонал (4.3) за відсутності дії збурень.

На i -ій ділянці процесу керування зміщені диференціальні перетворення (1.11) та (1.12) програмних керувань $u_i(t, A_i)$ та $\bar{u}_i(t, A_i)$ визначають їх диференціальні спектри у вигляді:

$$U_i(k, t_{v_i}, A_i) = \frac{h_{1_i}^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{v_i} + \tau, A_i)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0}, \quad (4.46)$$

$$\bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i) = \frac{(-h_{2_i})^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{v_i} - \tau, A_i)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0}. \quad (4.47)$$

Диференціальне рівняння (4.1) на i -ій ділянці процесу керування на основі зміщених перетворень (1.11) та (1.12) в області зображень подається в формі системи спектральних моделей:

$$X_i(k+1, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i) = \frac{h_{1_i}}{k+1} \left\{ \frac{f_{L_i}}{+} \left[\underline{t}(k, t_{v_i}), X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), U_i(k, t_{v_i}, A_i) \right] + \right\} \\ \left\{ + \frac{f_{N_i}}{+} \left[\underline{t}(k, t_{v_i}), X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), U_i(k, t_{v_i}, A_i) \right] \right\}, \quad (4.48)$$

$$\bar{X}_i(k+1, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i) = -\frac{h_{2_i}}{k+1} \left\{ \frac{f_{L_i}}{+} \left[\underline{t}_c(k, t_{v_i}), X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i) \right] + \right\} \\ \left\{ + \frac{f_{N_i}}{+} \left[\underline{t}_c(k, t_{v_i}), \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i) \right] \right\}, \quad (4.49)$$

де $X_i(t_{i-1}) = \bar{X}_i(t_{i-1}) = x_i(t_{v_i}) = x_{v_i}$, $h_{1_i} = t_i - t_{v_i}$, $h_{2_i} = t_{v_i} - t_{i-1}$, \underline{f}_{L_i} та \underline{f}_{N_i} - ДТ-зображення оригіналів функцій f_{L_i} та f_{N_i} , \underline{t} та \underline{t}_c - ДТ-зображення часового аргументу відповідно на інтервалах $[t_{v_i}, t_i]$ та $[t_{i-1}, t_{v_i}]$. Зазначимо, що спектральна модель (4.49) отримана шляхом перетворення лівої частини рівняння (4.1):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{dx_i(t_{v_i} - \tau)}{d(t_{v_i} - \tau)} = -\frac{dx_i(t_{v_i} - \tau)}{d\tau}$$

похідної за часовим аргументом τ .

У виразах (4.48) - (4.49) диференціальні зображення нелінійних складових $\underline{f}_{N_i} \left[\underline{t}(k, t_{v_i}), X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), U_i(k, t_{v_i}, A_i) \right]$ та $\underline{f}_{N_i} \left[\underline{t}_c(k, t_{v_i}), \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i) \right]$ визначаються

з використанням поліномів Адоміана за допомогою співвідношень (2.21') або (2.22') залежно від структури нелінійної складової рівняння (4.1). Система двох спектральних моделей (4.48) і (4.49) є системою двох рекурентних виразів, що дає змогу визначити диференціальні спектри $X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ та $\bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ функції $x_i(t, A_i)$ за диференціальними спектрами вектора керування (4.46) та (4.47). Вираз (4.48) описує в області зображень вихідне диференціальне рівняння (4.1) на підінтервалі часу $[t_{v_i}, t_i]$, а вираз (4.49) – на підінтервалі $[t_{i-1}, t_{v_i}]$.

За рекурентними виразами (4.48) та (4.49) і диференціальними спектрами (4.46) та (4.47), послідовно присвоюючи цілочислові значення аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$, формуємо диференціальні спектри $X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ та $\bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ вектору стану $x_i(t)$ як функції початкових умов $X_i(t_{i-1}) = \bar{X}_i(t_{i-1}) = x_i(t_{v_i}) = x_{v_i}$.

Підставляючи знайдені дискрети $X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ та $\bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)$ до виразів обернених перетворень (1.11) та (1.12), отримаємо вирази для початкових та кінцевих значень розв'язку рівняння (4.1) на інтервалі T_i :

$$x_i(t_{i-1}) = x_i^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \quad (4.50)$$

$$x_i(T_i) = x_i(T_i, x_{v_i}, A_i) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i). \quad (4.51)$$

Тоді рівняння кінцевого стану процесу керування (4.2) з урахуванням виразу для спряження граничних та початкових ділянок процесу керування (4.4), а також виразу для вектора стану наприкінці кожної ділянки керування (4.51) перетвориться до q -мірного векторного рівняння:

$$S[T_i, x(T_i, x_{v_i}, A_i)] = 0. \quad (4.52)$$

Аналогічно для рівняння початкового стану процесу керування на i -ій ділянці з урахуванням виразу (4.50) отримуємо:

$$x_i^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i) = 0. \quad (4.53)$$

Векторне рівняння (4.52) має розмірність q , а рівняння (4.53) - n .

Зазначимо, що якщо розмірність вектору вільних параметрів A_i дорівнює $\ell = s - 1$, де s - кількість врахованих дискрет, то рівняння (4.52) визначає час T_i та компоненти вектору A_i , який формує вектор керування $u_i(t, A_i)$ [189].

Таким чином, розв'язання задачі багатоетапного термінального керування (4.1)-(4.4) на i -ій ділянці з використанням зміщених диференціальних перетворень зводиться до розв'язання системи рівнянь розмірністю $n + q$, яка складається з термінальної умови (4.52) і рівняння (4.48) та дозволяє знайти n -мірний вектор x_{v_i} , граничне значення часу T_i та $\ell = s - 1$ компонент вектору вільних параметрів A_i .

Решту компонент вектора вільних параметрів знайдемо з умов оптимізації функціоналу (4.3). Диференціальні перетворення (1.11) функціоналу (4.3) з урахуванням диференціальних спектрів (4.46) – (4.49) дають змогу отримати критерій якості у вигляді функцій вектору вільних параметрів A_i . З цією метою відрізок інтегрування $t \in [t_{i-1}, t_i]$ розіб'ємо на два підінтервали $[t_{i-1}, t_{v_i}]$ і $[t_{v_i}, t_i]$. На підінтервалі $[t_{i-1}, t_{v_i}]$ перетворимо визначений інтеграл за правилом підставлення $t = t_v - \tau$, а на підінтервалі $[t_{v_i}, t_i]$ використаємо підставлення $t = t_v + \tau$. Врахуємо співвідношення (4.51) в функції G та подамо підінтегральні функції $\underline{\Phi}_i(x_i, u_i)$ на підінтервалах $[t_{i-1}, t_{v_i}]$ і $[t_{v_i}, t_i]$ через диференціальні спектри (4.46) – (4.49). В результаті функціонал (4.3) перетвориться до функції вигляду:

$$\begin{aligned} I(T_i, x_v, A) = & G[x_i(T_i, x_{v_i}, A_i), T_i] + \\ & + \sum_{i=1}^r h_{1i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \underline{\Phi}_i[\underline{t}_i(k, t_{v_i}), \underline{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \underline{U}_i(k, t_{v_i}, A_i)] + \\ & + \sum_{i=1}^r h_{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \underline{\Phi}_i[\underline{t}_{c_i}(k, t_{v_i}), \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i)], \quad i = \bar{1}, r \end{aligned} \quad (4.54)$$

де \underline{t}_{c_i} і \underline{t}_i - зображення часового аргументу на підінтервалах $[t_{i-1}, t_{v_i}]$ і $[t_{v_i}, t_i]$ відповідно.

У загальному випадку задача оптимізації функції (4.54) з обмеженнями (4.52) розв'язується методом множників Лагранжа [268]. У цьому випадку функція (4.54) і

умова (4.52) об'єднуються множниками Лагранжа $\lambda_x = (\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \dots, \lambda_{x_n})$, $\lambda_y = (\lambda_{y_1}, \lambda_{y_2}, \dots, \lambda_{y_q})$ в нову функцію:

$$J(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y, x_i^0) = I(T_i, x_{v_i}, A_i) + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{l=1}^n \lambda_{x_l} \Psi_l(t_{v_i}, x_{v_i}, A_i, x_i^0) + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{j=1}^q \lambda_{y_j} S_j[x_i(T_i, x_{v_i}, A_i), T_i] \quad (4.55)$$

де Ψ_l – компоненти векторної функції $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$, яка в векторній формі визначається виразом:

$$\Psi(t_{v_i}, x_{v_i}, A_i, x_i^0) = x_i^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i) = 0. \quad (4.56)$$

Задача оптимізації функції (4.55) за умови (4.52) зводиться до безумовної оптимізації функції $J(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y)$, необхідні умови екстремуму якої спільно з рівнянням (4.53) дають систему скінчених рівнянь відносно невідомих компонент векторів $x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y$ та часу T_i для довільного початкового стану $x_1(t_0) = x_1^0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y, x_i^0)}{\partial T_i} &= 0, \\ \frac{\partial J(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y, x_i^0)}{\partial x_{v_i}} &= 0, \\ \frac{\partial J(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_y, x_i^0)}{\partial a_j} &= 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, \ell}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

У випадку виконання достатніх умов екстремуму функції (4.55) неперервне розв'язання системи скінчених рівнянь (4.57) дає змогу знайти для кожної i -ї ділянки у реальному часі усі компоненти вектору вільних параметрів керування $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\ell})$ як функції від вектора довільного початкового стану $x_i(t_{i_0}) = x_i^0$, а також оптимальне програмне керування $u^*(t)$ у класі аналітичних функцій $u_i(t, A_i)$. Компоненти вектору стану $x^*(t)$, які відповідають оптимальному програмному керуванню $u^*(t)$, можуть бути отримані за диференціальними спектрами (1.11), (1.12) у вигляді відрізків рядів Тейлора або на основі зворотних диференціальних

перетворень в формі багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур'є, Дирихле і у вигляді комбінацій різних апроксимуючих функцій. Вільні параметри апроксимуючих функцій визначаються із порівняння диференціальних спектрів компонент вектора стану з диференціальними спектрами апроксимуючих функцій. Рівняння зв'язку між вільними параметрами апроксимуючих функцій і дискретами диференціального спектра функції, що розшукується, у випадку відновлення функції часу в формі багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур'є, Дирихле наведено, наприклад, в роботах Г.Є. Пухова [175-177].

Таким чином, зміщені диференціальні перетворення (1.11), (1.12) також дають змогу отримати в аналітичній формі систему рівнянь (4.52), (4.53), (4.57) для довільних значень початкового стану $x_i(t_{i_0}) = x_i^0$, моменту часу t_{i_0} та часу багатоетапного процесу керування T [269].

Отримане вище програмне керування, що оптимізує функціонал (4.3), реалізує оптимальне керування за розімкнутим контуром та гарантує виконання граничних умов (4.2) за відсутності дії збурень. У реальних умовах вплив зовнішнього середовища на динаміку руху ЛА може призвести до значних термінальних помилок у момент завершення процесу керування за програмою $u_i = u_i(t)$. Тому на другому етапі синтезу керування на кожній i -ій ділянці розглядається збурений рух ЛА, що постійно відхиляється від оптимальної програмної траєкторії, та з метою компенсації дії збурень синтезується алгоритм оптимального за критерієм (4.3) керування зі зворотним зв'язком вигляду $u_i = u_i(t, x_i)$, який у кожний момент часу t використовує інформацію про поточний стан $x_i(t)$ ЛА. Керування зі зворотним зв'язком забезпечує переведення ЛА із довільного початкового стану у заданий кінцевий стан при дії збурень.

Синтез оптимального багатоетапного керування зі зворотним зв'язком на базі зміщених диференціальних перетворень також можна виконати методом замикання оптимального програмного керування $u_i = u_i(t)$ для довільного поточного стану об'єкта $x_i(t)$. З цією метою неперервне розв'язання системи скінчених рівнянь (4.52), (4.53), (4.57) у реальному часі дає змогу знайти вектор A_i у вигляді $A_i[T_i, x_i(t)]$,

де довільний початковий стан $x_i(t_{i_0})$ прийнято таким, що дорівнює поточному стану $x_i(t)$. Підставлення розв'язків $A_i(T_i, x_i)$ системи скінчених рівнянь (4.52), (4.53), (4.57) до обраної аналітичної структури керування $\bar{u}_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ і $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ визначає оптимальне керування із зворотним зв'язком вигляду $u_i = u_i(x_i, t)$, яке здатне адаптуватися до дії вектору збурень $v_i(t)$. Таким чином, у замкненому контурі керування використовується тільки поточне значення керування $\bar{u}_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ і $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$, яке у наступний момент часу перераховується за системою рівнянь (4.52), (4.53), (4.57).

Переваги застосування зміщених перетворень порівняно з основними диференціальними перетвореннями збільшуються під час розв'язання задачі синтезу замкнених законів оптимального керування на значних часових інтервалах. Недоліком застосування вищенаведеного підходу на базі зміщених перетворень до розв'язання задачі синтезу замкнених законів оптимального керування, у тому числі й порівняно з модифікованим методом диференціальних перетворень, є збільшення кількості невідомих в системі скінчених рівнянь на n компонентів векторів $x(t_v)$ [270].

Висновки до розділу 4

1. Запропоновано підхід до побудови оптимальних багатоетапних програмних керувань з використанням удосконаленого дискретно-аналітичного відображення нелінійних задач виведення БЛА у задані термінальні умови та модифікованого методу диференціальних перетворень. На відміну від відомих зазначених підхід не потребує розв'язання двоточкової крайової задачі або нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, зводить проблему побудови керування до розв'язання скінченої системи рівнянь відносно параметрів керування.
2. Розвинуто численно-аналітичний метод розв'язання нелінійних задач оптимізації термінального керування рухом ЛА. На відміну від відомих методів ґрунтується на

удосконаленому дискретно-аналітичному відображенні нелінійних вихідних математичних задач в область зображень, модифікованому методі диференціальних перетворень та враховує багатоетапність траєкторного руху. Метод виключає необхідність чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, дозволяє отримувати алгоритм керування в аналітичному вигляді, здійснювати оперативний синтез керування та проводити моделювання динамічного процесу у реальному часі.

3. Виконано аналітичний синтез алгоритму оптимального за витратою палива керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту, що забезпечує приведення АКС в задані термінальні умови та досягнення наприкінці виведення максимальної швидкості.
4. Моделювання багатоетапного процесу виведення АКС «Оріль» на орбіту показало, що синтезований з використанням модифікованого методу диференціальних перетворень алгоритм керування забезпечує економію палива порівняно з відомим алгоритмом $\sim 1\%$.
5. Виконано аналітичний синтез алгоритму оптимального керування БАЛА на етапі посадки. Моделюванням показано, що запропонований алгоритм забезпечує з прийнятною точністю досягнення заданої вертикальної швидкості зниження у момент торкання посадкової поверхні та мінімальної горизонтальної посадкової швидкості апарата з коротким пробігом по землі.
6. Показано можливість застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язання задачі оптимізації багатоетапного термінального керування ЛА. Доведено, що застосування зміщених перетворень до розв'язання задач синтезу замкнених законів оптимального керування призводить до ускладнення отримання спектральної моделі задачі та збільшення кількості невідомих в системі скінчених нелінійних рівнянь для визначення параметрів керування.

Список публікацій здобувача за матеріалами четвертого розділу

1. Гусьнин А. В. Применение дифференциальных преобразований к синтезу алгоритма многоэтапного терминального управления летательным аппаратом /

А. В. Гусынин // Науковий вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2015. - № 2(10). – С. 24-33.

2. Гусынин А. В. Модель оптимизации многоэтапного процесса управления летательным аппаратом на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Я. О. Замирец // Системи обробки інформації. – 2015. - В.8(113). – С.77-81.

Особистий внесок здобувача: модель оптимізації багатоетапного процесу керування ЛА.

3. Гусынин А. В. Методы оптимизации управления многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 13-а Українська конференція з космічних досліджень, 2-6 сентября 2013 г.: тези доп. – Евпатория (Украина), 2013. – С. 121.
4. Gusynin A. An application of differential transformation for optimal control of non-linear processes // A. Gusynin // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2017. – Vol.26(102). – С.95-104.

5. Гусынин А. В. Моделирование процесса терминального управления многорежимными объектами на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция (ISDMCI'2010), 17-21 мая 2010 г.: тези доп. – Евпатория (Украина), 2010. – С. 59-60.

Особистий внесок здобувача: дослідження процесу термінального керування динамічним об'єктом з використанням модифікованого методу диференційних перетворень та урахуванням багатоетапності процесу керування.

6. Гусинін А. В. Оптимізація керування виведенням на орбіту багаторежимної авіаційно-космічної системи на основі диференціальних перетворень / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2008. - В.2(24). - С. 32-38.

Особистий внесок здобувача: математична постановка задачі та метод синтезу алгоритмів багатоетапного керування виведенням авіаційно-космічної системи на орбіту на базі диференційних перетворень.

7. Гусынин А. В. Синтез алгоритма терминального управления многоэтапным процессом выведения авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, О. С. Урусский // Проблемы інформаційних технологій. – 2015. - №02 (018). - С. 60-67.

Особистий внесок здобувача: метод синтезу оптимального алгоритму керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту, алгоритм в аналітичному вигляді.

8. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут». – 2008. - №3. - С. 87-95.

Особистий внесок здобувача: метод оптимізації керування рухом БАЛА на етапі зльоту з підняттям на задану висоту.

9. Gusynin A. V. The algorithm synthesis for automatic control of airship thrust vector tilting at takeoff stage / A. V. Gusynin, V. P. Gusynin // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr.71154.

Особистий внесок здобувача: синтез алгоритму термінального керування дирижаблем на етапі зльоту.

10. Гусинін А. В. Порівняльна оцінка ефективності ручного та автоматичного керування відхиленням вектора тяги дирижабля на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Вісник Національного авіаційного університету. – 2008. - В. 2(24). – С.68-72.

Особистий внесок здобувача: дослідження ефективності оптимізації керування БАЛА на етапі зльоту.

11. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі посадки / А. В. Гусинін // Проблемы інформаційних технологій. – 2013. - №01(013). - С. 53-60.

12. Гусынин А. В. Оптимизация управления посадкой дирижабля на основе многоэтапного метода дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, Ю. В. Антонова-Рафи, А. В. Яровой // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2017. – В.5(45). - С.12-17.

Особистий внесок здобувача: математична постановка задачі, метод синтезу та алгоритм оптимального керування посадкою дирижабля.

13. Гусынин А. В. Оптимизация автоматической посадки дирижабля / А. В. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 28-31 мая 2014 г.: тезисы доп. – Евпатория (Украина), 2014. – С. 64-65.

14. Гусынин А. В. Системоаналоговое моделирование законов оптимального управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 14-а Українська конференція з космічних досліджень, 8-12 сентября 2014 г.: тезисы доп. – Ужгород (Украина), 2014. – С. 103.

15. Гусынин А. В. Моделирование оптимального процесса управления движением дирижабля смещенными дифференциальными преобразованиями / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании: международная научно-практическая конференция, 21-28 декабря 2009 г.: тезисы доп. – Одесса (Украина), 2009. – Т.2. – С. 17-18.

Особистий внесок здобувача: синтез та дослідження оптимального процесу керування рухом дирижабля з використанням зміщених диференціальних перетворень.

РОЗДІЛ 5

БАГАТОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕРМІНАЛЬНОГО БАГАТОЕТАПНОГО КЕРУВАННЯ ЛІТАЛЬНИМИ АПАРАТАМИ

5.1. Постановка задачі багатокритерійної оптимізації багатоетапних динамічних процесів

Сформулюємо постановку багатокритерійної нелінійної задачі оптимізації багатоетапного керування рухом ЛА при виведенні у задані термінові умови. Увесь процес багатоетапного виведення умовно розіб'ємо на r заданих часових підінтервалів, усередині яких параметри апарату не мають стрибкоподібних змін і не відбувається перемикання керування: $T_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, r}$, $\sum_{i=1}^r T_i = T$, де T - час процесу керування. У подальшому будемо вважати, що всі ці зміни відбуваються на межах вибраних підінтервалів.

Задачу багатокритерійної оптимізації досліджуватимемо у межах математичної моделі термінального багатоетапного керування ЛА, траєкторний рух якого на i -му підінтервалі описується векторним нелінійним звичайним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{L_i}(t, x_i, u_i) + f_{N_i}(t, x_i, u_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (5.1)$$

де $x_i = x_i(t)$ - n -вимірний вектор стану; $u_i = u_i(t)$ - m -вимірний вектор керування, $m \leq n$; $f_{L_i}(t, x_i, u_i)$, $f_{N_i}(t, x_i, u_i)$ - неперервні та неперервно диференціюємі за сукупністю змінних t, x, u вектор-функції, які є відповідно лінійною та нелінійною складовою узагальненої сили; $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Процес керування починається в момент $t = t_0$ ($i = 1$), закінчується в момент $t = t_r = T$ ($i = r$).

Задача термінального багатоетапного керування полягає у переведенні БЛА із заданого початкового стану $x_1(t_0)$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений у момент часу $t = T$ q -вимірним ($q \leq n$) векторним рівнянням:

$$S[T, x_r(T)] = 0. \quad (5.2)$$

Якість процесу керування оцінюється сукупністю часткових критеріїв, заданих функціоналами:

$$I_j = G_j[T, x_r(T)] + \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_{ij}(t, x_i, u_i) dt, \quad (5.3)$$

де задані функції G_j та Φ_{ij} мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i ; $j = 1, 2, \dots, p$. Часткові критерії (5.3) є компонентами p -вимірного векторного критерію $I = (I_1, I_2, \dots, I_p)$, $I \in \Omega(I)$, де $\Omega(I)$ - припустима область векторного критерію. Кожна компонента векторного критерію I описується функціоналами (5.3), які визначені на розв'язках векторного нелінійного диференціального рівняння (5.1) при керуванні з класу припустимих керувань $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}) \in U$. Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховуються під час обрання вигляду функціоналу (5.3).

Спряження кінцевих умов попередніх підінтервалів та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задається у формі заданих крайових умов:

$$\varphi_i[x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i] = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (5.4)$$

Багатокритерійна задача синтезу оптимального багатоетапного керування полягає у визначенні екстремалей $\{x_i^*(t), u_i^*(t)\}$, $u_i^* \in U$, $I^* \in \Omega(I)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, які за заданих диференціальних зв'язках (5.1), граничних умов (5.2) та умов спряження підінтервалів (5.4) оптимізують векторний функціонал I . Будемо вважати, що вигляд частинних критеріїв (5.3) обраний таким чином, що компоненти векторного критерію I мінімізуються, а припустима область їх змін задається системою обмежень:

$$0 \leq I_j \leq C_j, \quad j \in [1, p], \quad (5.5)$$

де C_j - верхня межа припустимого значення компоненти I_j векторного критерію I .

5.2. Багатокритерійні моделі оптимізації

Для дослідження динамічних процесів застосовується системний підхід, що характеризується розглядом множини властивостей та взаємозв'язків, властивому даному процесу. Властивості динамічного процесу часто суперечать один одному і покращення одного нерідко викликає погіршення іншого. Тому жодним не можна знехтувати, оскільки тільки у своїй сукупності вони дають повне уявлення про дане явище [159-164].

Системні властивості динамічного процесу виведення БЛА у задані термінальні умови кількісно оцінюються відповідними частинними критеріями якості (п. 1.7). Задача багатокритерійної (векторної) оптимізації полягає у знаходженні оптимального компромісного розв'язку серед усіх критеріїв якості, які характеризують даний процес. Це привело до появи багаточисленних напрямків розв'язання задач векторної оптимізації.

Розглянемо багатокритерійні моделі, які можна застосувати для розв'язання задачі оптимізації багатоетапних динамічних процесів. Враховуючи результати аналізу різноманітних моделей у розділі 1 (п. 1.7) найбільш придатними для розв'язання багатокритерійних задач оптимізації динамічних процесів є наступні моделі.

Згідно *першої моделі* проблема багатокритерійної оптимізації задачі (5.1)-(5.5) зводиться до мінімізації лінійної згортки компонентів векторного критерію зі сталими ваговими коефіцієнтами [271] (оскільки область Парето описується лінійною комбінацією частинних критеріїв):

$$I_{L_1} = \sum_{j=1}^p \alpha_j I_j, \quad (5.6)$$

де $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, p}$, $\sum_{j=1}^p \alpha_j = 1$.

Як було зазначено у п. 1.7, у випадку застосування критерію у формі (5.6) виникає проблема вибору вагових коефіцієнтів α_j , $j = \overline{1, p}$, що призводить до певних труднощів, особливо при оптимізації керування системами великої розмірності.

Відомий підхід [271], згідно якого визначення оптимального розв'язку багатокритерійної задачі здійснюється шляхом мінімізації суми $\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \dots + \alpha_p I_p$, де вагові коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ обираються заздалегідь у вигляді $\alpha_1 = \frac{1}{I_{10}}, \alpha_2 = \frac{1}{I_{20}}, \dots, \alpha_p = \frac{1}{I_{p0}}$. Тут I_{α_0} є значення критерію I_α , яке отримане при оптимізації лише його одного.

У моделях другої групи визначається ідеальна (утопічна) точка в просторі векторних критеріїв $\Omega(I)$ та вводиться норма в цьому просторі [271]. З цією метою кожний функціонал (5.3) оптимізується окремо від інших на диференціальних зв'язках (5.1) та граничних умов (5.2) з урахуванням умов спряження (5.4). В результаті отримують p векторних оптимальних керувань $u^{(j)}, j = \overline{1, p}$ для кожного частинного критерію. Цим оптимальним керуванням відповідають значення функціоналів (5.3) $I_j^0(u^{(j)})$, які є координатами ідеальної (утопічної) точки. Потім розв'язується задача мінімізації узагальненої норми:

$$I_N = \left[\sum_{j=1}^p [I_j(u) - I_j^0(u^{(j)})]^N \right]^{\frac{1}{N}}, \quad N \geq 1. \quad (5.7)$$

за диференціальних зв'язках (5.1), граничних умов (5.2) та умов спряження (5.4).

Вираз (5.7) за $N=1$ являє собою лінійну комбінацію компонент вектору $I(u) - I^0(u)$. У випадку $N=2$ вираз (5.7) співпадає з евклідовою нормою $\|I(u) - I^0(u)\|$, а за $N = \infty$ перетворюється до вигляду [161]:

$$\max_j [I_j(u) - I_j^0(u^{(j)})], \quad j = \overline{1, p}.$$

В окремому випадку моделі (5.7) ставиться задача мінімізації суми квадратів відносних відхилень функціоналів (5.3) від своїх оптимальних значень:

$$I_{L_2} = \sum_{j=1}^p \left[\frac{I_j(u) - I_j^0(u^{(j)})}{I_j^0(u^{(j)})} \right]^2. \quad (5.8)$$

Тут $[I_j(u) - I_j^0(u^{(j)})]^2$ є квадратом відстані від утопічної точки до деякої точки з області Парето.

У цьому випадку багатокритерійна задача (5.1)-(5.5) зводиться до мінімізації функції (5.8) за диференціальних зв'язках (5.1), граничних умов (5.2) та умов спряження (5.4), а вектор керування обирається з умов мінімізації квадрату відстані від точки, що відповідає в просторі критеріїв обраному вектору керування, до ідеальної (утопічної) точки. Отриманий таким чином компромісний розв'язок є Парето-оптимальним і забезпечує максимальну близькість критеріїв якості до своїх найкращих значень. Особливістю даної моделі є те, що розв'язання багатокритерійної задачі за моделлю (5.1)-(5.5), (5.8) не потребує вибору вагових коефіцієнтів α_j , на відміну від критерію (5.6), але є достатньо працемістким та характеризується високою обчислювальною складністю, так як потребує розв'язання p задач оптимального керування (5.1)-(5.5) за кожним частинним критерієм I_j з метою визначення координат ідеальної точки $\{I_1^0(u^{(1)}), I_2^0(u^{(2)}), \dots, I_p^0(u^{(p)})\}$ та розв'язання додаткової задачі мінімізації функції (5.8) за умов (5.1), (5.2), (5.4) для визначення вектора оптимального керування. Крім цього, недоліком цієї моделі є відсутність обмежень на вектор частинних критеріїв, що може призвести до випадку, коли знайдений розв'язок буде виходити за межі цих обмежень.

У межах багатокритерійних моделей *третьої групи* розглядається скалярна згортка частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів, запропонованої Вороніним А.М. [160,161,169-171]. У цьому випадку немає потреби вибирати вагові коефіцієнти, що використовуються в моделях першої групи, і не потрібно розв'язувати p задач оптимізації, як у випадку застосування моделей другої групи. Багатокритерійна задача (5.1) - (5.5) тут зводиться до розв'язання задачі оптимізації виразу:

$$I_{L_3} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\left(1 - \frac{I_j}{C_j}\right)^{\beta_j}}, \quad (5.9)$$

за умов (5.1), (5.2), (5.4), (5.5), де задані константи $\beta_j > 0$, C_j - обмеження зверху j -ого частинного критерію, за умови рівнозначності критеріїв $\beta_j = 1, j = \overline{1, p}$.

Важливою властивістю скалярної згортки (5.9) є її адаптивність до зміни параметрів задачі (5.1)-(5.5), у тому числі вектору керування u під час оптимізації. У випадку наближення одного з частинних критеріїв I_j до верхньої межі C_j припустимих значень (5.4) нелінійна згортка (5.9) реалізує за цим частинним критерієм дію Чебишевського (мінімаксного) оператора, запобігаючи порушенню умови (5.4). В інших випадках модель (5.9) діє еквівалентно інтегральній оптимальності з різним ступенем вирівнювання частинних критеріїв, де погіршення одного з них компенсується покращенням решти частинних критеріїв. Відзначимо також, що багатокритерійна модель (5.9) задовольняє оптимальності за Парето [161,169].

Якщо в задачі необхідно ввести пріоритет деяких частинних критеріїв над іншими або мати різну ступень їх чутливості до змін параметрів задачі, то в цьому випадку можливе застосування більш узагальненої багатокритерійної моделі:

$$I_{L_3} = \sum_{j=1}^p \frac{\alpha_j}{\left(1 - \frac{I_j}{C_j}\right)^{\beta_j}}, \alpha_j > 0, \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1, \beta_j > 0. \quad (5.10)$$

В окремому випадку, коли критерії (5.4) рівнозначні та усі константи $\beta_j = 1$, $j = \overline{1, p}$, скалярну згортку (5.10) можна подати у більш простому вигляді та розв'язувати задачу оптимізації функціоналу:

$$I_{L_3} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{\left(1 - \frac{I_j}{C_j}\right)}. \quad (5.11)$$

Порівняльний аналіз можливості застосування кожної з моделей (5.6), (5.8), (5.9) для розв'язання багатокритерійної задачі (5.1)-(5.5) приводить до наступних висновків.

Модель (5.6) дає змогу розв'язати багатокритерійну задачу (5.1)-(5.5) та побудувати множину P оптимальних за Парето розв'язків. Однак вибір одного розв'язку з усієї множини P потребує попереднього обґрунтування конкретних значень вагових коефіцієнтів α_j , що призводить до певних труднощів, особливо при оптимізації керування системами великої розмірності.

Розв'язання багатокритерійної задачі (5.1)-(5.5) з використанням моделі (5.8) не потребує вибору вагових коефіцієнтів α_j , однак при її використанні необхідно розв'язувати декілька оптимізаційних задач. Недоліком цієї моделі також є відсутність обмежень на вектор частинних критеріїв.

Застосування моделі (5.9) до оптимізації багатоетапних динамічних процесів позбавлено цих недоліків. Вона не потребує вибору вагових коефіцієнтів, дає змогу враховувати обмеження на припустиму область зміни векторного критерія та забезпечує Парето-оптимальний розв'язок задачі багатокритерійної оптимізації з урахуванням цих обмежень, якщо множина Парето P належить цієї області. Скалярна згортка (5.9) має властивості унімодальності (тобто задача стає одноекстремальною) та безупинної адаптації до різних ситуацій, у яких потрібно прийняти багатокритерійний розв'язок. Властивість унімодальності скалярної згортки (5.9) значно спрощує розв'язання задачі оптимізації. При цьому, застосування нелінійної схеми компромісів дає змогу підвищити точність розв'язку завдяки неперервності адаптації.

Таким чином, для розв'язання задач багатокритерійної оптимізації багатоетапних динамічних процесів з урахуванням обмежень на частинні критерії більш ефективним є застосування моделей третьої групи у вигляді скалярної згортки частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів у вигляді (5.9)-(5.11).

Розв'язання нелінійних задач багатокритерійної оптимізації потребує значних обчислювальних витрат, оскільки обчислювальна складність лінійно залежить від розмірності векторного критерію якості та експоненціально - від розмірності простору змінних [169,272]. Тому застосування традиційних методів (наприклад, методу динамічного програмування) для розв'язання нелінійних багатокритерійних задач у реальному часі практично неможливе. Проблема обчислювальної складності значно спрощується, якщо розв'язання нелінійної задачі багатокритерійної оптимізації розглядати в області зображень з відсутнім часовим аргументом. Ця багатокритерійна задача для оптимізації багатоетапного процесу керування нелінійним динамічним процесом розв'язується в п. 5.3.

5.3. Чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації багатоетапного термінального керування

Розглянемо багатокритерійну задачу багатоетапного термінального керування рухом БЛА, що описується нелінійною математичною моделлю (5.1)-(5.5). Для багатокритерійної оптимізації скористаємося методом скалярної згортки частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів у формі (5.11). Це дає змогу звести багатокритерійну задачу до розв'язання однієї задачі оптимізації функціоналу (5.11) за умов (5.1), (5.2), (5.4) та (5.5).

Програмне керування $u = u(t)$, що оптимізує функціонал (5.11), реалізує оптимальне керування за розімкнутим контуром та гарантує виконання граничних умов (5.2) за відсутності впливу збурень. У реальних умовах вплив зовнішнього середовища на динаміку руху БЛА може призвести до значних термінальних помилок у момент завершення процесу керування за програмою $u = u(t)$. З метою компенсації цих збурень синтезуємо закон оптимального за критерієм (5.11) керування зі зворотним зв'язком вигляду $u = u(t, x)$. Дане керування забезпечує переведення БЛА з довільного початкового стану у кінцевий (5.2) при впливі збурень.

Нижче пропонується чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації для розв'язання нелінійних задач синтезу оптимального багатоетапного керування рухом ЛА за нелінійною схемою компромісів. Метод базується на використанні модифікованого методу диференціальних перетворень, застосуванні удосконаленого дискретно-аналітичного відображення початкової нелінійної багатокритерійної задачі (5.1)-(5.5) в область зображень з відсутнім часовим аргументом та апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь траєкторного руху ЛА поліномами Адоміана [273,274].

Синтез оптимального керування зі зворотним зв'язком $u = u(t, x)$ для багатокритерійної задачі багатоетапного процесу (5.1)-(5.5) виконаємо методом

замикання оптимального програмного керування $u = u(t)$ для довільного початкового стану $x(t)$ динамічного об'єкта.

На першому етапі синтезу будемо розглядати незбурений рух об'єкта. Виберемо всередині кожного підінтервалу траєкторного руху програмне керування в класі аналітичних функцій $u_i(\tau, A_i)$, де $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ – вектор вільних параметрів, τ – локальний часовий аргумент. Диференціальні перетворення функції $u_i(\tau, A_i)$ визначають за $h = T_i$ і $\tau = 0$ її диференціальний спектр у вигляді:

$$\underline{u}_i(\tau, A_i) = U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}. \quad (5.12)$$

Диференціальне рівняння (5.1) на основі перетворень (2.6) в області зображень подається в формі наступної спектральної моделі:

$$X_i(k+1, A_i, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1} \{ \underline{f}_{L_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)] + \underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)] \}, \quad (5.13)$$

$$X_i(0) = X_i^0(A_{i-1}, A_{i-2}, \dots, A_1); X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r}.$$

У виразі (5.13) диференціальне зображення нелінійної складової $\underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)]$ визначається з використанням поліномів Адоміана за допомогою співвідношень (2.21') або (2.22') залежно від структури нелінійної складової рівняння (5.1). Спектральна модель (5.13) є рекурентним виразом, що дає змогу визначити диференціальний спектр $X_i(k, A_i, X_i^0)$ функції $x_i(t, A_i, x_i^0)$ за диференціальним спектром вектору керування.

Скористаємося властивістю диференціальних перетворень, згідно якої алгебраїчна сума усіх дискрет диференціального спектру будь-якої аналітичної функції в точці $t = t_v$ дорівнює нульовій дискреті диференціального спектру в точці $t_{v+1} = t_v + h$ або значенню оригіналу функції в тій самій точці, тобто:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_v(k) = X_{v+1}(0) = x(t_v + h). \quad (5.14)$$

Із співвідношення (5.14) за $t_v = t_{i-1}$ і $h = T_i$ знаходимо вектор стану наприкінці кожного підінтервалу процесу керування:

$$x_i(T_i, A_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, X_i^0), i = \overline{1, r}. \quad (5.15)$$

Тоді рівняння кінцевого стану (5.2) усього процесу керування, враховуючи умови спряження підінтервалів (5.4), а також вираз для вектора стану наприкінці кожного підінтервалу (5.15), перетвориться до вигляду [275]:

$$S[A_1, A_2, \dots, A_r] = 0. \quad (5.16)$$

Дана термінальна умова в неявній формі визначає q -компонент кожного з векторів вільних параметрів $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$, $i = \overline{1, r}$. Решту компонент векторів вільних параметрів визначаємо із умов оптимальності функціонала (5.3).

Диференціальні перетворення (2.6) функціоналу (5.3) з урахуванням диференціальних спектрів (5.12) та (5.13) дають змогу подати даний функціонал у вигляді функції векторів вільних параметрів A_i . Отже, отримуємо частинні критерії у вигляді:

$$I_j(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0) = G_j[T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0] + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_{ij}[T_i, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)]}{k+1}. \quad (5.17)$$

Підставлення (5.17) до виразу (5.11) дає скалярну функцію:

$$J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{1 - \frac{I_j(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{C_j}}. \quad (5.18)$$

Необхідними умови оптимальності керування $u_i(t, A_i) \in$:

$$\frac{\partial J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial a_{ik}} = 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial T^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial a_{ik}^2} \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{q+1, N_i}. \quad (5.20)$$

Достатні умови – вирази (5.19) та умови (5.20), у яких має місце суворона нерівність. Необхідні умови (5.19) дають змогу отримати систему рівнянь для визначення часу T_i та решти невідомих компонент векторів вільних параметрів $A = (A_1, A_2, \dots, A_r)$:

$$\frac{\partial J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial J(T, A_1, A_2, \dots, A_r, x_0)}{\partial a_{ik}} = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{q+1, N_i}. \quad (5.21)$$

Отримана система нелінійних рівнянь (5.16) і (5.21), за умови їх сумісності, в неявній формі визначає компоненти вектору вільних параметрів $A = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ як функції від вектору довільного початкового стану $x_i^0 = x_i(t_{i-1})$ та часу T_i , якщо існує екстремум функції J в середині припустимої області (5.5).

На другому етапі синтезу розглядається динамічний процес (5.1) в умовах впливу збурень, при якому траєкторний рух БЛА постійно відхиляється від оптимальної програмної траєкторії. У цьому випадку компромісне керування $u^*[t, A(T, x)]$ неперервно обчислюється з системи рівнянь (5.16) і (5.21) для поточних значень часу t і стану $x(t)$, що дає змогу сформулювати замкнений закон термінального керування $u = u(t, x)$. Розв'язок системи рівнянь (5.16) і (5.21) для кожного поточного моменту t і стану $x(t)$ динамічного об'єкту, що знаходиться під впливом збурень, неперервно задає керування $u = u(t, x)$, що пов'язує поточний стан $x(t)$ динамічного об'єкта з термінальними умовами (5.4).

У замкненому контурі керування динамічним процесом (5.1) використовується тільки поточне значення керування $u[t, A(T, x)]$, яке в наступний момент часу перераховується за системою рівнянь (5.16) і (5.21). Цим забезпечується «гнучка» адаптація оптимальної траєкторії БЛА до дії наперед невідомих збурюючих факторів.

Основна перевага запропонованого методу полягає у тому, що він дає змогу, не використовуючи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь багатоетапних динамічних процесів, звести проблему багатокритерійної оптимізації до розв'язання скінченної системи нелінійних рівнянь, для розв'язання яких у реальному масштабі часу можуть бути застосовані традиційні методи. Метод встановлює у неявній формі (5.16), (5.21) нелінійний зв'язок багатокритерійного керування $u[t, A(T, x)]$ з вектором поточного стану $x(t)$, що дає змогу сформулювати керування зі зворотним зв'язком від компонент траєкторного руху БЛА.

У випадку, коли багатоетапний процес розбивається на підінтервали аргументу, що перевищують радіус збіжності ряду Тейлора, або виникає необхідність підвищити точність моделювання динамічного процесу за обмеженої кількості дискрет диференціального спектру можна або збільшити кількість підінтервалів або застосувати зміщені ДТ-перетворення [269,270]. Застосування зміщених ДТ-перетворень до розв'язання задач багатокритерійного синтезу алгоритмів керування багатоетапним динамічним процесом здійснюється шляхом поєднання отриманих у цьому розділі результатів дослідження з багатокритерійного синтезу з процедурою реалізації зміщених ДТ-перетворень, описаних у п. 4.5. Це питання розглядається у п. 5.7.

5.4. Оптимізація виведення авіаційно-космічної системи на орбіту

5.4.1. Синтез багатокритерійного алгоритму керування

Застосуємо запропонований у п.5.3 метод розв'язання нелінійної задачі синтезу багатокритерійної оптимізації керування до побудови алгоритму керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту.

Як було зазначено у п. 1.7, траєкторний рух АКС на різних ділянках їх багатоетапного процесу виведення на орбіту може оцінюватися низкою критеріїв: масою корисного навантаження, що виводиться на орбіту, витратами палива на процес виведення, часом виводу на орбіту, помилками досягнення термінальних умов, тепловими та аеродинамічними навантаженнями на поверхні АКС, обмеженнями на швидкісний напір, піднімальну силу, кут атаки та ін. Усі ці критерії з урахуванням можливості реалізації підходу до синтезу алгоритмів керування, пов'язаного із зведенням багатокритерійної термінальної задачі до скалярної задачі оптимального керування, можна згрупувати в три групи.

До *першої групи* частинних критеріїв введені критерії, що характеризують масу корисного навантаження, що виводиться на орбіту, витрати палива на процес виведення та час виведення АКС на орбіту. Глобальний критерій оцінки усієї

транспортної космічної системи потребує максимуму маси корисного навантаження, що виводиться на орбіту. Зазначимо, що у задачі про оптимальну траєкторію піднімання аерокосмічного літального апарату задача максимізації маси корисного навантаження еквівалентна задачі мінімуму витрати палива, яка, у свою чергу, за постійної швидкості витрати палива еквівалентна задачі мінімізації часу виведення транспортної космічної системи на орбіту [70,247].

До *другої групи* частинних критеріїв входять критерії, що характеризують теплові навантаження на поверхні АКС та аеродинамічні навантаження, які оцінюються швидкісним напором, кутом атаки та піднімальною силою. Теплові навантаження на поверхні АКС, які пропорційні кубу швидкості польоту, у більшому ступені залежать від швидкості польоту, ніж від аеродинамічного навантаження, що оцінюються швидкісним напором та пропорційні квадрату швидкості польоту. Тому зменшення теплових навантажень, що досягається шляхом їх мінімізації під час виведення АКС на орбіту, забезпечує й зменшення аеродинамічних навантажень на АКС.

Як критерій оцінки аеротермодинамічних навантажень на кожному i -му підінтервалі процесу виведення АКС на орбіту виберемо функціонал вигляду [249]:

$$I_{1_i} = k_D \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho V^3 dt, \quad (5.22)$$

де $k_D = C_D S_D / 4$, C_D - коефіцієнт, що залежить від форми поверхні АКС, S_D - площа перерізу міделів, ρ - щільність атмосфери, V - швидкість польоту АКС, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Під час виведення АКС на орбіту повинні бути виконані обмеження на теплові навантаження:

$$0 \leq I_{1_i} \leq I_{1_{mi}}, \quad (5.23)$$

де $I_{1_{mi}}$ - максимально припустимі теплові навантаження на поверхні АКС на i -му підінтервалі процесу виведення на орбіту.

Третя група частинних критеріїв оцінює помилки досягнення термінальних вимог за вертикальною швидкістю $Y_2(T_i)$, висотою $Y_1(T_i)$ та орбітальною швидкістю $X_2(T_i)$:

$$I_{2_i} = [\dot{H}_{T_i} - Y_2(T_i)]^2, \quad (5.24)$$

$$I_{3_i} = [H_{T_i} - Y_1(T_i)]^2, \quad (5.25)$$

$$I_{4_i} = [V_{T_i} - X_2(T_i)]^2, \quad (5.26)$$

де H_{T_i} – задана висота, \dot{H}_{T_i} – задана вертикальна швидкість польоту, V_{T_i} – задана орбітальна швидкість польоту, $T_i = t_i - t_{i-1}$ – тривалість i -го підінтервалу.

З частинних критеріїв кожної групи складемо узагальнений векторний критерій для i -го підінтервалу:

$$I_i = (T_i, I_{1_i}, I_{2_i}, I_{3_i}, I_{4_i}), \quad (5.27)$$

де перша компонента характеризує тривалість i -ого підінтервалу процесу виведення, друга – аеротермодинамічні навантаження на АКС під час виведення, а решта компонент – помилки досягнення термінальних умов.

Задача багатокритерійної оптимізації полягає в мінімізації векторного критерія (5.27) під час багатоетапного виведення АКС на орбіту, рух якої описується векторним нелінійним диференціальним рівнянням (5.1), із заданих початкових умов в задані кінцеві (5.2) за умови спряження попередніх та наступних підінтервалів (5.4) і виконанні обмежень (5.5).

Для розв'язання даної задачі скористаємося вищезапропонованим методом багатокритерійного синтезу алгоритму багатоетапного термінального керування, нелінійною згортокою частинних критеріїв та спектральною моделлю (3.79)-(3.97), наведену в пп. 3.1.2 для нелінійної математичної моделі (3.64)-(3.69). Програмну зміну кута тангажа ϑ_i за часом в класі аналітичних функцій в спектральній моделі обираємо близькою до оптимальної програми виведення АКС на орбіту $\vartheta_i = a_{i_0} + a_{i_1} t$.

За спектральною моделлю (3.79)-(3.97) знаходимо диференціальні спектри змінних траєкторного руху АКС у вигляді функцій від довільних початкових умов,

вільних параметрів a_{i_0}, a_{i_1} керування прогнозованим кутом тангажа та тривалості i -ого підінтервалу процесу виведення T_i .

Підсумовуючи дискрети $Y_1(0), Y_1(1), Y_1(2), Y_1(3)$ диференціального спектру (3.81) і підставляючи отриману суму до виразу (4.17) для кінцевих умов за висотою польоту $Y_1(T_i) = H_{T_i}$, отримаємо рівняння, що пов'язує параметри керування кутом тангажа (a_{i_0}, a_{i_1}) і параметри траєкторного руху АКС із заданою висотою H_{T_i} у вигляді співвідношення (4.18) для i -го підінтервалу. Підстановка алгебраїчної суми дискрет $Y_2(0), Y_2(1), Y_2(2)$ диференціального спектру (3.82) в термінальну умову (4.17) за вертикальною швидкістю набору висоти $Y_2(T_i) = \dot{H}_{T_i}$ дає змогу отримати рівняння у вигляді співвідношення (4.19) для i -го підінтервалу, що пов'язує параметри керування (a_{i_0}, a_{i_1}) і параметри траєкторного руху АКС із заданою вертикальною швидкістю набору висоти \dot{H}_{T_i} . Третє рівняння, яке отримане шляхом підставлення у вираз (4.17) для кінцевих умов за необхідною швидкістю польоту $X_2(T_i) = V_{T_i}$ алгебраїчної суми дискрет $X_2(0), X_2(1), X_2(2)$ диференціального спектра (3.80), дає змогу отримати рівняння у вигляді співвідношення (4.20) для визначення тривалості T_i процесу виведення АКС на i -му підінтервалі, що є достатньою для її розгону до необхідної орбітальної швидкості V_{T_i} [276].

Враховуючи, що рівняння (4.18) і (4.20) отримані з термінальних умов за висотою і орбітальною швидкістю (4.17), часткові критерії I_{3_i} (5.25) і I_{4_i} (5.26) можна виключити з компонент узагальненого векторного критерію (5.27).

З рівняння (4.20) знайдемо час виведення АКС на орбіту на i -му підінтервалі, що забезпечує її розгін до необхідної швидкості:

$$T_i = -D_i + \sqrt{D_i^2 + \frac{2}{C_i} [(V_{T_i} - X_2)]}, \quad (5.28)$$

$$\text{де } C_i = \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} - a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right], \quad D_i = \frac{B_i}{C_i},$$

A_i і B_i – визначаються виразами (3.101').

Вираз (5.28) визначає тривалість T_i i -го підінтервалу процесу виведення АКС на орбіту як функції вільних параметрів a_{i_0} і a_{i_1} . Тому першу компоненту векторного критерія (5.27) можна також виключити із розгляду і звести багатокритерійну задачу за векторним критерієм (5.27) до двокритерійної:

$$I_i(a_{i_0}, a_{i_1}) = (I_{1_i}, I_{2_i}). \quad (5.29)$$

Параметр a_{i_0} в неявній формі визначається виразом (4.18). Вільний параметр a_{i_1} знаходять із розв'язку задачі мінімізації векторного критерія (5.29), на компоненти якого покладено обмеження (5.23) і обмеження:

$$0 \leq I_{2_i} \leq I_{2_{m_i}}, \quad (5.30)$$

де $I_{2_{m_i}}$ – максимально припустима термінальна помилка за вертикальною швидкістю $Y_2(T_i)$.

Задачу мінімізації векторного критерію (5.29) за диференціальних зв'язках (5.1) та обмеженнях (5.23) і (5.30) за нелінійною схемою компромісів (5.9) зведемо до задачі мінімізації скалярного критерію:

$$J_i = \frac{I_{1_{m_i}}}{I_{1_{m_i}} - I_{1_i}} + \frac{I_{2_{m_i}}}{I_{2_{m_i}} - I_{2_i}}. \quad (5.31)$$

Диференціальні спектри змінних траєкторного руху АКС, що визначені за спектральною моделлю (3.79)-(3.97), дають змогу подати частинні критерії I_{1_i} і I_{2_i} як функції довільних початкових умов і параметрів керування a_{i_0} і a_{i_1} . Застосувавши диференціальні перетворення до виразу (5.22), подамо критерій оцінки теплових навантажень у наступному вигляді [277]:

$$I_{1_i} = \int_0^{T_i} \rho V \cdot V^2 dt = \int_0^{T_i} W V^2 dt = T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_p(k)}{k+1}, \quad (5.32)$$

$$\text{де } z_p(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} W(k-\ell) V^2(\ell). \quad (5.33)$$

Введемо до розгляду допоміжну функцію:

$$z_p = \rho V^3. \quad (5.34)$$

Функція z_p визначає щільність теплового потоку на поверхні АКС, яка пропорційна четвертій ступені температури T_p на поверхні АКС [247]:

$$\frac{C_\phi S_\phi}{4} \rho V^3 = \eta \cdot \sigma \cdot T_p^4, \quad (5.35)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}^4} \right]$, C_ϕ – коефіцієнт, що характеризує форму поверхні АКС,

η – коефіцієнт, що залежить від матеріалу поверхні АКС та його обробки.

З іншого боку, функція z_p може характеризувати аеродинамічні навантаження, так як вона залежить від швидкісного напору q :

$$z_p = 2qV, \quad (5.36)$$

$$\text{де } q = \frac{\rho V^2}{2}. \quad (5.37)$$

Враховуючи (5.35) і (5.36) вважаємо, що критерій (5.22) є оцінкою аеротермодинамічних навантажень на АКС під час її виведення на орбіту.

Для визначення частинного критерія (5.32) необхідно знайти дискрети диференціального спектра допоміжної функції (5.34). Нульова дискрета допоміжної функції (5.27) має наступний вигляд:

$$z_p(0) = W(0) \cdot V^2(0) = \rho_0 V_0^3. \quad (5.38)$$

Використовуючи (5.38), отримаємо вираз для знаходження першої дискрети допоміжної функції (5.34):

$$z_p(1) = T \rho_0 V_0^2 \left[\begin{array}{l} 3 \frac{X_{20}}{V_0} \frac{P}{m_0} \cos a_0 + 3 \frac{Y_{20}}{V_0} \left(\frac{P}{m_0} \sin a_0 - g \right) - \\ - 3 \frac{\rho_0 V_0^2}{m_0} (C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2) - \beta Y_{20} V_0 \end{array} \right]. \quad (5.39)$$

Друга дискрета допоміжної функції (5.34) визначається із виразу:

$$z_p(2) = 3 \rho_0 V_0 \left[\begin{array}{l} \frac{T_i^2 \beta V_0^2}{6} (\beta Y_{20}^2 - A_i) - T_i \beta V_0 Y_{20} V(1) + \frac{T_i^2}{2} (A_i^2 + B_i^2) - \\ - \frac{V^2(1)}{2} + X_{20} X_2(2) + Y_{20} Y_2(2) \end{array} \right]. \quad (5.40)$$

Розглянемо критерій теплових навантажень (5.22) на підінтервалі часу $T_i = [t_{i-1}, t_i]$, на якому теплові навантаження мають найбільш загрозливий характер. Тоді в дискретах диференціального спектра допоміжної функції (5.34) масштабний коефіцієнт приймається таким, що дорівнює T_i . Враховуючи це, отримаємо критерій теплових навантажень шляхом підстановки дискрет (5.38), (5.39) і (5.40) у вираз (5.32) у наступному вигляді:

$$I_1 = \frac{\rho_0 V_0^2}{2} T_1 \left\{ \begin{array}{l} \left[2V_0 + 3T_1 \left[\frac{X_{20}}{V_0} \frac{P}{m_0} \cos a_0 + \frac{Y_{20}}{V_0} \left(\frac{P}{m_0} \sin a_0 - g \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_0 V_0^2}{m_0} (C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2) - \frac{\beta Y_{20} V_0}{3} \right] + \right. \\ \left. + 2T_1^2 \left[\frac{\beta V_0}{6} (\beta Y_{20}^2 - A_i) - \beta Y_{20} \frac{V(1)}{T_1} + \frac{A_i^2 + B_i^2}{2V_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{V^2(1)}{2T_1^2 V_0} + \frac{X_{20} X_2(2)}{V_0 T_1^2} + \frac{Y_{20} Y_2(2)}{V_0 T_1^2} \right] \right. \end{array} \right\}, \quad (5.41)$$

де A_i і B_i визначаються виразами (3.101'), $X_2(2), Y_2(2)$ - другі дискрети диференціальних спектрів (4.25) і (4.24), $V(1)$, $V^2(1)$ - перші дискрети диференціальних спектрів (3.94) і (3.95).

Аналіз виразу (5.41) показує, що критерій теплових навантажень залежить від швидкісного напору та параметрів керування a_{i_0} і a_i . Параметр керування a_{i_0} визначається виразом (4.18). Рівняння для визначення параметру керування a_i отримаємо з необхідної умови мінімуму узагальненого критерію (5.31):

$$\frac{\partial J_i}{\partial a_i} = \frac{I_{1m_i} \frac{\partial I_{1i}}{\partial a_i}}{(I_{1m_i} - I_{1i})^2} + \frac{I_{2m_i} \frac{\partial I_{2i}}{\partial a_i}}{(I_{2m_i} - I_{2i})^2} = 0. \quad (5.42)$$

В області заданих обмежень (5.23) і (5.30) на частинні критерії умову (5.42) можна замінити виразом:

$$I_{1m_i} (I_{2m_i} - I_{2i})^2 \frac{\partial I_{1i}}{\partial a_i} + I_{2m_i} (I_{1m_i} - I_{1i})^2 \frac{\partial I_{2i}}{\partial a_i} = 0, \quad (5.43)$$

де I_{1i} задається співвідношенням (5.41).

Частинний критерій I_{2_i} визначається із виразів (5.24) і (4.24).

Диференціюючи вирази (5.41) и (4.24) за параметром керування a_{i_1} , знайдемо похідні:

$$\frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}} = \frac{\rho_0 V_0^2}{2} T_i^3 \left(\frac{Y_{20}}{V_0} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} - \frac{X_{20}}{V_0} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} \right), \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial I_{2_i}}{\partial a_{i_1}} = \frac{T_i^2}{2} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0}. \quad (5.45)$$

Вираз (5.43) з урахуванням співвідношень (4.24), (5.41), (5.44) і (5.45), є квадратним рівнянням відносно параметра керування a_{i_1} .

Для спрощення запису подамо частинні критерії (4.24) та (5.41) у вигляді:

$$I_{1_i} = K_1 + K_2 a_{i_1}, \quad (5.46)$$

$$I_{2_i} = L_1 + L_2 a_{i_1}, \quad (5.47)$$

де

$$K_2 = \frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}}, \quad (5.48)$$

$$L_2 = \frac{\partial I_{2_i}}{\partial a_{i_1}}. \quad (5.49)$$

$$K_1 = \frac{\rho_0 V_0^2}{2} T_i \left\{ \begin{aligned} & 2V_0 + 3T_i \left[\frac{X_{20}}{V_0} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} + \frac{Y_{20}}{V_0} \left(\frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} - g \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\rho_0 V_0^2}{m_{0_i}} (C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2) - \frac{\beta Y_{20} V_0}{3} \right] + \\ & + T_i^2 \left[\frac{\beta V_0}{3} (\beta Y_{20}^2 - A_i) - 2\beta Y_{20} \frac{V(1)}{T_i} + \frac{A_i^2 + B_i^2}{V_0} - \frac{V^2(1)}{V_0 T_i^2} \right] + \\ & + \frac{X_{20}}{V_0} \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right] T_i^2 + \\ & + \frac{Y_{20}}{V_0} \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + B_i \left(\frac{2X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right] T_i^2 \end{aligned} \right\}, \quad (5.50)$$

$$L_1 = Y_{20} + A_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + B_i \left(\frac{2X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right] - \dot{H}_{T_i}. \quad (5.51)$$

Враховуючи уведені позначення (5.46) – (5.51) умова (5.43) перетворюється в форму квадратного рівняння:

$$a_i^2 (I_{1m_i} K_2 L_2^2 + I_{2m_i} L_2 K_2^2) - 2a_i L_2 K_2 [I_{1m_i} (I_{2m_i} - L_1) + I_{2m_i} (I_{1m_i} - K_1)] + I_{1m_i} K_2 (I_{2m_i} - L_1)^2 + I_{2m_i} L_2 (I_{1m_i} - K_1)^2 = 0 \quad (5.52)$$

З рівняння (5.52) знайдемо в неявній формі параметр керування a_i :

$$a_i = \frac{1}{I_{1m_i} L_2 + I_{2m_i} K_2} \left\{ \begin{array}{l} I_{1m_i} (I_{2m_i} - L_1) + I_{2m_i} (I_{1m_i} - K_1) \pm \\ \pm [L_2 (I_{1m_i} - K_1) - K_2 (I_{2m_i} - L_1)] \cdot \sqrt{\frac{I_{1m_i} I_{2m_i}}{-K_2 L_2}} \end{array} \right\}. \quad (5.53)$$

Враховуючи, що:

$$K_2 = \frac{\partial I_i}{\partial a_i} < 0, \quad (5.54)$$

$$L_2 = \frac{\partial I_{2i}}{\partial a_i} > 0 \quad (5.55)$$

підкореневий вираз в формулі (5.53) є додатнім.

Умови (5.54) і (5.55) виконуються у випадку конфліктуючих частинних критеріїв, коли зменшення одного критерія призводить до збільшення другого. З аналізу виразу (5.44) видно, що умова (5.54) виконується за:

$$\sin \theta_{i_0} \cos a_{i_0} - \cos \theta_{i_0} \sin a_{i_0} < 0. \quad (5.56)$$

Замість виразу (5.55) можна записати:

$$\sin(\nu_{i_0} - \theta_{i_0}) > 0. \quad (5.57)$$

Вираз (5.57) означає, що кут атаки $\alpha_{i_0} = \nu_{i_0} - \theta_{i_0}$ повинен бути додатнім на етапі зниження теплових навантажень на АКС. Умова $\alpha_{i_0} > 0$ виконується в першій фазі процесу виведення АКС на орбіту, коли теплові навантаження на АКС є мінімальними [25].

Перевіримо достатню умову існування мінімуму узагальненого критерію (5.31). Диференціюючи вираз (5.42) за параметром керування a_i з урахуванням позначень (5.46) – (5.51), отримаємо другу похідну узагальненого критерію:

$$\frac{\partial^2 J_i}{\partial a_i^2} = \frac{2I_{1m_i} K_2^2}{(I_{1m_i} - I_{1i})^3} + \frac{2I_{2m_i} L_2^2}{(I_{2m_i} - I_{2i})^3} > 0. \quad (5.58)$$

Достатня умова (5.58) мінімуму узагальненого критерія (5.31) виконується при виконанні обмежень (5.23) і (5.30) на частинні критерії.

Вирази (5.28), (5.53) і (4.23) визначають алгоритм багатокритерійного керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту. Переходячи до поточних значень змінних та замінюючи параметр керування a_{i_0} початковим значенням кута тангажа ϑ_{k_i} , алгоритм багатокритерійного керування на основі виразу (4.23) та (3.98') подамо у наступному вигляді [278]:

$$\begin{aligned} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin \vartheta_{k_i} &= \frac{2(H_{T_i} - Y_1)}{T_i^2} - \frac{2Y_2}{T_i} + g - \frac{X_2^2}{R_3 + Y_1} - 2\Omega_3 X_2 - \\ &- \frac{\rho V}{m_i} [C_3 \alpha X_2 - (C_1 + C_2 C_3 \alpha^2) Y_2] - \\ &- \frac{T_i}{3} \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin \vartheta_{k_i} + a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos \vartheta_{k_i} + B_i \left(\frac{2X_2}{R_3 + Y_1} + 2\Omega_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Тривалість T_i i -го підінтервалу процесу виведення АКС на орбіту визначається з виразу (5.28):

$$T_i = -D_i + \sqrt{D_i^2 + \frac{2}{C_i} [(V_{T_i} - X_2)]}, \quad (5.60)$$

$$\text{де } C_i = \left[\frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} - a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} - A_i \left(\frac{X_{20}}{R_3 + Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right], \quad D_i = \frac{B_i}{C_i}. \quad (5.60')$$

Параметри A_i , B_i і a_{i_1} визначаються за виразами (3.101') і (5.53) відповідно. Значення параметра a_{i_1} обирається з умов мінімуму тривалості T_i i -го підінтервалу процесу виведення АКС на орбіту, тобто з двох розв'язків (5.53) обирається таке a_{i_1} , якому відповідає менше значення часу T_i .

Проведене порівняння структури отриманого алгоритму (5.69), (5.60) з відомими результатами [25] показали наступні їх відмінності. У запропонованому алгоритмі враховуються термінальні умови з вертикальної швидкості набору висоти, що входять до алгоритму (5.59) через параметр a_{i_1} згідно виразу (5.53), до якого входить параметр L_1 , що визначається виразом (5.51). У виразі для визначення тривалості процесу виведення (5.60) термінальні умови з вертикальної швидкості

набору висоти враховуються через параметри C_i , a_i та L_1 згідно виразів (5.60'), (5.53) та (5.51). Термінальні вимоги з висоти на кожній ділянці виведення входять у першу складову алгоритму (5.59).

Врахування термінальних вимог з висоти та вертикальної швидкості набору висоти на кожному підінтервалі процесу виведення дозволяє більш точно виконати вимоги наприкінці всієї активної ділянки виведення.

5.4.2 Комбінований алгоритм керування

В першій фазі виведення на орбіту, під час проходження АКС щільних шарів атмосфери, необхідно враховувати частинні критерії та обмеження, що пов'язані з умовами польоту у цьому середовищі, а саме частинні критерії та обмеження на теплові та аеродинамічні навантаження, кут атаки тощо. З порівняння багатокритерійного (5.59) та оптимального за витратою палива (4.22) алгоритмів витікає, що зниження теплових та аеродинамічних навантажень досягається шляхом зменшення коефіцієнтів підсилення в зворотному зв'язку за розузгодженням висоти та вертикальної швидкості. Як результат, обмеження цих навантажень на АКС при застосуванні алгоритмів багатокритерійного керування обмежує значення кута тангажа під час виведення АКС на орбіту. Тому алгоритм керування (5.59) доцільно використовувати в першій фазі виведення АКС на орбіту під час проходження щільних шарів атмосфери, яка характеризується високими значеннями теплових та аеродинамічних навантажень.

У другій фазі виведення АКС на орбіту, після проходження щільних шарів атмосфери, частинні критерії та обмеження на теплові навантаження, швидкісний напір, піднімальну силу, кут атаки тощо, пов'язаних з умовами польоту в щільних шарах атмосфери, при польоті в розряджених шарах атмосфери можна не враховувати. Це пояснюється тим що, як показав аналіз результатів відомих досліджень [25,70,259] піднімальна сила, швидкісний напір, тепловий потік та кут атаки після проходження щільних шарів атмосфери починають монотонно

зменшуватися, а обмеження на їх амплітуду виконуються на всьому етапі виведення в розряджених шарах атмосфери. Це дозволяє, з метою підвищення точності виведення на етапі польоту у другої фази, перейти на оптимальний за витратами палива алгоритм термінального керування (4.22).

Як було вище зазначено, основна відмінність алгоритмів оптимального за витратою палива (4.22) та багатокритерійного (5.59) полягає в різних коефіцієнтах підсилення в контурі зворотного зв'язку за сигналами висоти та вертикальної швидкості. Тому перехід від алгоритму (5.59) до алгоритму (4.22) можна здійснити перестроюючи коефіцієнти підсилення за цими сигналами. В такому випадку, можна плавно, перестроюючи ці коефіцієнти підсилення, перейти від багатокритерійного керування АКС до термінального керування без різких стрибків за кутом тангажа, який є змінною керування.

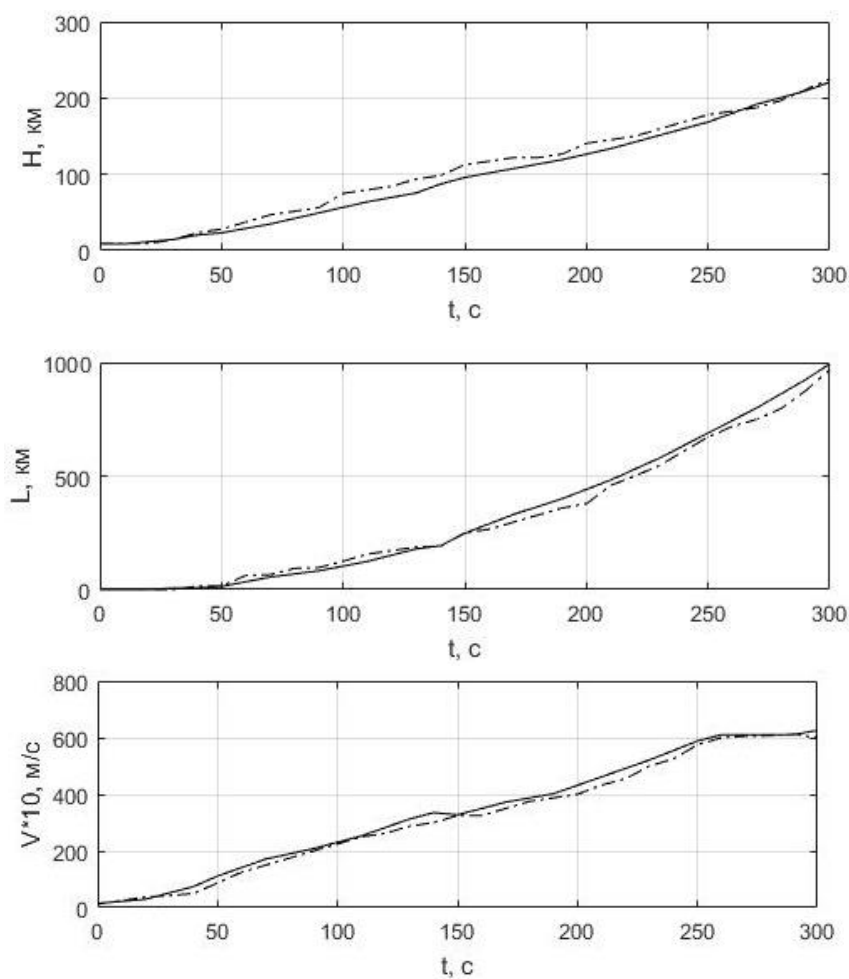
Таким чином, процес керування багатоетапним виведенням АКС на орбіту можна розбити на два етапи: політ у щільних шарах атмосфери і політ у розряджених шарах атмосфери. Траєкторія виведення на кожному з етапів розбивається на окремі часові підінтервали, в середині яких параметри АКС і режими польоту двигунової установки та системи керування не мають стрибкоподібних змін, а усі зміни в формі заданих стрибків відбуваються на межах заданих часових інтервалів. Цим межам відповідають моменти стрибкоподібної зміни маси і моментів інерції АКС в моменти відокремлення ступенів та скидання головного обтічника, вмикання та вимикання двигунів АКС, а також моменти виходу траєкторії та керування на обмеження. Результируюча траєкторія відновлюється за ділянками із стикуванням крайових умов.

На першому етапі розв'язується задача багатокритерійної оптимізації з урахуванням часткових критеріїв та обмежень, пов'язаних з умовами польоту у щільних шарах атмосфери. Керування польотом АКС здійснюється на основі багатокритерійного алгоритму (5.59) з плавним перестроюванням коефіцієнтів підсилення за сигналами висоти та вертикальної швидкості. На другому етапі розв'язується задача термінального багатоетапного керування виведенням АКС на орбіту на основі термінального алгоритму (4.22).

Отриманий у результаті алгоритм керування у подальшому будемо називати комбінованим алгоритмом керування АКС «Оріль» на етапі виведення на орбіту.

5.4.3. Дослідження ефективності комбінованого алгоритму

Ефективність комбінованого алгоритму керування досліджено шляхом порівняння з термінальним алгоритмом (4.22). На рис. 5.4 подано результати моделювання змін параметрів траєкторного руху АКС «Оріль» за комбінованого та термінального алгоритмів керування процесом виведення на висоту $H = 200\text{км}$, а у таблиці 5.1 подано нормовані (відносно термінального керування) значення частинних критеріїв при застосування комбінованого алгоритму.



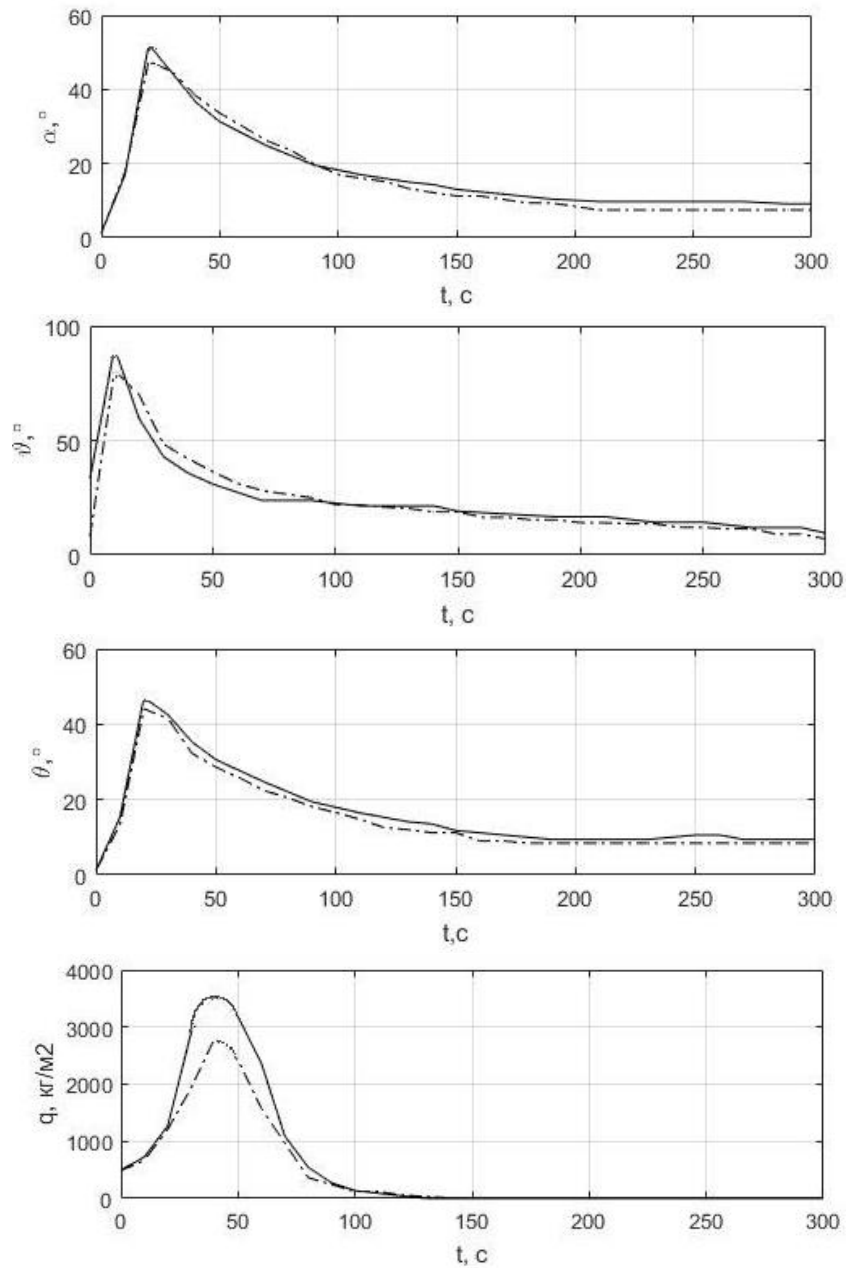


Рис. 5.4. Порівняння результатів моделювання багатоетапного процесу виведення АКС «Оріль» на орбіту з використанням термінального (---) та комбінованого алгоритмів (-.-)

Таблиця 5.1

Нормовані значення частинних критеріїв за комбінованого керування

Частинний критерій	Керування	
	Термінальне	Комбіноване
Витрати палива	1	1.0012
Максимальний швидкісний напір	1	0.81
Максимальна піднімальна сила	1	0.97
Тепловий потік	1	0.57

Порівняльний аналіз комбінованого та термінального алгоритмів керування АКС (рис. 5.4, табл. 5.1) показує, що комбінований алгоритм дає змогу знизити швидкісний напір на 19%, тепловий потік на 43%, максимальну піднімальну силу на 3% та забезпечує таку саму точність виведення в задані кінцеві умови практично за той самий час. Цей додатній ефект досягається за рахунок збільшення витрат палива усього на 0,12 % порівняно з термінальним алгоритмом [279]. При цьому, комбінований алгоритм не тільки знижує максимальне аеродинамічне навантаження за величиною, але й зменшує час їх впливу на конструкцію АКС. Так, наприклад, за $t = 60$ с швидкісний напір у випадку виведення АКС за комбінованим алгоритмом у $\sim 1,8$ рази менший, ніж для процесу виведення з використанням термінального алгоритму.

Результати моделювання багатоетапного процесу виведення АКС «Оріль» на орбіту та якісне порівняння отриманих результатів моделювання з відомими результатами [25,259] підтвердили працездатність та ефективність комбінованого алгоритму, розробленого на основі багатокритерійного (5.59) та термінального (4.22) алгоритмів керування, які синтезовані з використанням модифікованого методу диференціальних перетворень.

5.5. Оптимізація керування аеростатичним літальним апаратом на режимі зльоту з виведенням на задану висоту

5.5.1. Синтез багатокритерійного алгоритму керування

При оптимізації траєкторії польоту автоматично керованих БАЛА в вертикальній площині враховують, як правило, наступні параметри – тривалість польотного часу, споживання енергії при виконанні конкретної місії (зліт, набір висоти, крейсерський політ, посадка, причалювання тощо), помилки досягнення термінальних вимог тощо [140]. Усі ці частинні критерії можна умовно згрупувати в три групи.

До *першої групи* входять критерії, що характеризують тривалість польотного часу при виконанні конкретної місії.

До *другої групи* входять критерії оцінки споживання енергій при виконанні конкретної місії. Сумарну енергію, яка споживається БАЛА в польоті, можна виразити у вигляді інтегралу від необхідної сумарної потужності [140,141,145]. Сумарна потужність складається з: а) потужності двигунів апарата, б) потужності, необхідної для забезпечення роботи корисного навантаження (наприклад, радіолокаційної станції дальнього огляду) та/або в) потужності для забезпечення роботи експлуатаційних систем (наприклад, системи регулювання тиску в корпусі АЛА). Потужності б) і в) є достатньо малими порівняно із потужністю а), тому їх можна не враховувати при плануванні траєкторії польоту АЛА. Отже, без великої похибки, сумарну енергію, яка витрачається АЛА в польоті, можна виразити як інтеграл від потужності двигунів, необхідної для створення тяги P при швидкості польоту V :

$$E = \int_{t_0}^T \frac{P \cdot V}{\eta} dt, \quad (5.61)$$

де η - к.к.д. двигунів. У подальшому будемо вважати, що к.к.д. двигунів БАЛА не залежить від швидкості польоту.

Зазначимо, що у задачах оптимізації траєкторії набору висоти БАЛА часто розглядають два види оптимальних траєкторій, що відповідають мінімальному часу піднімання та мінімальній енергії, яка витрачається на підняття апарату на задану висоту [140,141]. Траєкторії з мінімальним часом піднімання можуть використовуватися при виконанні спеціальних місій (наприклад, військових), коли знаходження на малій висоті являє собою ризик для апарату, або у випадках експлуатації апарату, коли корисне навантаження повинне бути доставлено на експлуатаційну висоту як найшвидше. Траєкторії з мінімальними витратами енергії на піднімання можуть бути важливі у випадках, коли апарат має обмежені за потужністю можливості, наприклад, нічний політ.

У цих випадках загальний критерій якості оптимізації траєкторії польоту БАЛА при переведенні із початкових умов $x(t_0)$ у кінцеві $x(T)$ можна виразити у вигляді:

$$\min I = K_f \cdot T + K_p \cdot E, \quad (5.62)$$

де K_f, K_p - додатні вагові коефіцієнти, E, T - енергія, що споживається, та тривалість польоту відповідно.

Обираючи значення вагових коефіцієнтів можна отримати задачу оптимізації траєкторії за мінімальним часом ($K_f = 1, K_p = 0$), мінімальним споживанням енергії ($K_f = 0, K_p = 1$) або мінімальної енергії з фіксованим кінцевим часом T ($K_f > 0, K_p > 0$).

Під час розгляду задачі виведення БАЛА з початкової на задану висоту за мінімальної кількості енергії з урахуванням припущення, що повітряна швидкість є змінною величиною, потрібну тягу P двигунів апарату можна подати у вигляді:

$$P = \frac{1}{2} \rho V^2 U^{2/3} C_x, \quad (5.63)$$

де $q = \frac{\rho V^2}{2}$ - швидкісний напір; U, C_x - відповідно об'єм корпусу та лобовий опір апарату. Необхідну при цьому енергію для підняття апарату можна визначити виразом:

$$E = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \frac{\rho V^3 U^{2/3} \cdot C_x dt}{\eta}. \quad (5.64)$$

Як критерій оцінки споживання енергії на i -му підінтервалі багатоетапного процесу набору висоти обирається функціонал виду:

$$I_i = \frac{1}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\rho V_i^3 U^{2/3} \cdot C_x dt}{\eta}, \quad (5.65)$$

де V_i, T_i - відповідно швидкість та час набору висоти на i -му підінтервалі, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

При цьому, повинні виконуватися наступні обмеження на споживання енергії:

$$0 \leq I_i \leq I_{lm}, \quad (5.66)$$

де I_{lm} - максимально припустиме споживання енергії при зльоті та набору висоти.

До *третьої групи* входять критерії оцінки похибки досягнення термінальних умов за висотою, вертикальної та горизонтальної швидкості:

$$I_{2_i} = [H_{T_i} - H(T_i)]^2, \quad (5.67)$$

$$I_{3_i} = [V_{Y_{T_i}} - V_Y(T_i)]^2, \quad (5.68)$$

$$I_{4_i} = V_X(T_i), \quad (5.69)$$

де T_i - тривалість зльоту та набору висоти на i -му підінтервалі; $H(T_i), V_X(T_i), V_Y(T_i)$ - задані значення висоти польоту, горизонтальної та вертикальної швидкості в момент часу T_i .

Складемо узагальнений векторний критерій із частинних критеріїв кожної групи:

$$I_i = (T_i, I_{1_i}, I_{2_i}, I_{3_i}, I_{4_i}). \quad (5.70)$$

Задача багатокритерійної оптимізації полягає в мінімізації векторного критерію (5.70) під час керування рухом БАЛА на етапі зльоту та набору висоти з початкових умов (4.31) в задані кінцеві (4.32).

З метою подолання обчислювальної складності задачі багатокритерійної оптимізації за векторним критерієм (5.70) спростимо її, використавши наведену в пп.5.3 методику синтезу багатокритерійного керування на основі нелінійної згортки частинних критеріїв та диференціальних перетворень вихідної нелінійної математичної моделі траєкторного руху БАЛА [280].

Покажемо, що першу компоненту, а також частинні критерії I_{2_i} та I_{3_i} векторного критерію (5.70) можна виключити із розгляду. Як вихідну математичну модель процесу керування рухом БАЛА використаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь (3.3)-(3.11), що описує рух апарату у вертикальній площині на i -му підінтервалі процесу зльоту та набору висоти, та лінійний програмний закон зміни кута відхилення вектора тяги двигунів. На базі цієї моделі розроблена спектральна модель (3.21)-(3.44) процесу керування рухом БАЛА та отримані відповідні дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху апарату у вигляді функцій від довільних початкових умов, вільних параметрів a_{i_0} та

a_{i_1} керування вектором тяги та часу T_i тривалості i -го підінтервалу траєкторії руху (3.58)-(3.63).

Підсумовуючи дискрети відповідних диференціальних спектрів (3.60) та (3.61), а також (3.62) та (3.63) і підставляючи отримані суми в (4.34) та (4.33) для відповідних кінцевих умов диференціальних спектрів, отримуємо рівняння, що пов'язують параметри керування (a_{i_0}, a_{i_1}) та параметри траєкторного руху БАЛА із заданою висотою H_{T_i} та вертикальною швидкістю набору висоти $V_{Y_{T_i}}$ на i -му підінтервалі відповідно. Враховуючи, що зазначені рівняння отримані з термінальних умов за висотою та вертикальною швидкістю, частинні критерії I_{2_i} та I_{3_i} можна виключити з компонент векторного критерію (5.70).

З рівняння (4.34) знайдемо тривалість T_i i -го підінтервалу процесу керування рухом БАЛА:

$$T_i = -D_i + \sqrt{D_i^2 + \frac{2}{C_i}(V_{Y_{T_i}} - V_{Y_{i_0}})}, \quad (5.71)$$

де $B_i = [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0}]$, $D_i = \frac{B_i}{C_i}$,

$$C_i = (C_6 + C_7) \left[V_{Y_{i_0}} \left(\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - C_4 V_{i_0}^2 \right) - V_{X_{i_0}} \left(\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} \right) \right] + \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot a_{i_1} \cdot \cos a_{i_0}.$$

Вираз (5.71) визначає тривалість процесу керування апаратом на i -му підінтервалі руху у вигляді функції вільних параметрів a_{i_0} і a_{i_1} . Тому першу компоненту векторного критерія (5.70) також можна виключити із розгляду та звести багатокритерійну задачу до двокритерійної:

$$I_i(a_{i_0}, a_{i_1}) = (I_{1_i}, I_{4_i}). \quad (5.72)$$

Параметр a_{i_0} в неявній формі визначається з виразу (4.33). Вільний параметр a_{i_1} знаходимо з розв'язку задачі мінімізації векторного критерію (5.72), на компоненти якого покладені обмеження (5.66) та обмеження:

$$0 \leq I_{4_i} \leq I_{4_{m_i}}, \quad (5.73)$$

де I_{4m_i} – максимально припустима термінальна помилка за горизонтальною швидкістю польоту $V_X(T_i)$.

Задачу мінімізації векторного критерію (5.72) за диференціальних зв'язках (5.1) та обмеженнях (5.66) і (5.73) за нелінійною схемою компромісів (5.11) зводимо до мінімізації скалярного критерію:

$$J = \frac{I_{1m_i}}{I_{1m_i} - I_{1i}} + \frac{I_{4m_i}}{I_{4m_i} - I_{4i}}. \quad (5.74)$$

Диференціальні спектри змінних траєкторного руху БАЛА (3.58)-(3.63), що визначені за спектральною моделлю (3.21)-(3.44), дають змогу виразити часткові критерії I_{1i} і I_{4i} у вигляді функцій довільних початкових умов і параметрів керування a_{i_0} і a_{i_1} . Застосувавши властивості диференціальних перетворень до виразу (5.65), подамо критерій оцінки споживання енергії у наступному вигляді:

$$I_1 = \frac{1}{2} \rho U^{2/3} C_{X_0} \int_0^T W V dt = \frac{1}{2} \rho U^{2/3} C_{X_0} T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(k)}{k+1}, \quad (5.75)$$

де $z(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} W(k-\ell)V(\ell)$ - допоміжна функція. (5.76)

Для визначення частинного критерія (5.75) необхідно знайти дискрети диференціального спектра допоміжної функції (5.76):

$$V_X(1) = T_i (\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - C_4 V_0^2) = T_i k_1, \quad V_Y(1) = T_i (\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0}) = T_i k_2, \quad V_X(2) = T_i^2 A_i, \quad V_Y(2) = T_i^2 B_i,$$

$$A_i = \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{C_5}{2} V_{Y_{i_0}} + C_4 V_{X_{i_0}} \right) \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_{i_0}} - C_4 V_{Y_{i_0}} \right) \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} + \\ + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_{i_0}} - C_4 V_{Y_{i_0}} \right) \cdot \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_{i_0}} + C_4^2 V_{X_{i_0}} \right) V_0^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} a_{i_1} \sin a_{i_0} \end{array} \right\},$$

$$B_i = \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{Y_{i_0}} (\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - C_4 V_0^2) - \frac{1}{2} (C_6 + C_7) V_{X_{i_0}} (\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} + \tilde{\Phi}_i) + \frac{1}{2} \tilde{P}_{\Sigma_i} a_{i_1} \cos a_{i_0},$$

$$W(0) = V_0^2,$$

$$W(1) = 2[V_{X_{i_0}} V_X(1) + V_{Y_{i_0}} V_Y(1)] = 2T_i [V_{X_{i_0}} k_1 + V_{X_{i_0}} k_2],$$

$$W(2) = 2V_X(2)V_{X_{i_0}} + V_X^2(1) + 2V_Y(2)V_{Y_{i_0}} + V_Y^2(1) = 2T_i^2 V_{X_{i_0}} A_i + 2T_i^2 V_{Y_{i_0}} B_i + T_i^2 k_1^2 + T_i^2 k_2^2 =$$

$$= 2T_i^2 (V_{X_{i_0}} A_i + V_{Y_{i_0}} B_i) + T_i^2 (k_1^2 + k_2^2),$$

$$V(0) = V_0,$$

$$V(1) = \frac{1}{V_0} [V_{X_{i_0}} V_X(1) + V_{Y_{i_0}} V_Y(1)] = \frac{1}{V_0} T_i [V_{X_{i_0}} k_1 + V_{Y_{i_0}} k_2],$$

$$V(2) = \frac{1}{2V_0} [2V_{X_{i_0}} V_X(2) + V_X^2(1) + 2V_{Y_{i_0}} V_Y(2) + V_Y^2(1) - V^2(1)] =$$

$$= \frac{1}{2V_0} [2T_i^2 (V_{X_{i_0}} A_i + V_{Y_{i_0}} B_i) + T_i^2 (k_1^2 + k_2^2) - V^2(1)]$$

Нульова дискрета допоміжної функції (5.76) має вигляд:

$$z(0) = W(0) \cdot V(0) = V_0^3. \quad (5.77)$$

Перша дискрета допоміжної функції (5.76) визначається із рівняння:

$$z(1) = W(1)V(0) + W(0)V(1) = 3T_i V_0 [V_{X_{i_0}} k_1 + V_{Y_{i_0}} k_2] = 3T_i V_0^2 \left[\frac{V_{X_{i_0}}}{V_0} k_1 + \frac{V_{Y_{i_0}}}{V_0} k_2 \right]. \quad (5.78)$$

Друга дискрета допоміжної функції (5.76), визначається виразом:

$$z(2) = W(2)V(0) + W(1)V(1) + W(0)V(2) = 3V_0^2 \left\{ 2T_i^2 \left[\frac{V_{X_{i_0}}}{2V_0} A_i + \frac{V_{Y_{i_0}}}{2V_0} B_i + \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{4V_0} \right] + \frac{V^2(1)}{4V_0} \right\}. \quad (5.79)$$

Розглянемо критерій оцінки споживання енергії (5.75) на i -му підінтервалі тривалістю T_i . Тоді в дискретах диференціального спектра допоміжної функції (5.76) масштабний коефіцієнт приймається таким, що дорівнює T_i . Підставляючи дискрети (5.77), (5.78) і (5.79) до виразу (5.75), отримаємо критерій оцінки спожитої енергії у вигляді:

$$I_{1_i} = \frac{\rho V_0^2}{2} U^{2/3} C_{X_0} T_i \cdot \left(V_0 + 3T_i \left[\frac{V_{X_{i_0}}}{2V_0} k_1 + \frac{V_{Y_{i_0}}}{2V_0} k_2 \right] + \right. \\ \left. + 2T_i^2 \left[\frac{V_{X_{i_0}}}{2V_0} A_i + \frac{V_{Y_{i_0}}}{2V_0} B_i + \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{4V_0} + \frac{V^2(1)}{4V_0 T_i^2} \right] \right). \quad (5.80)$$

Аналіз виразу (5.80) показує, що критерій оцінки спожитої енергії в значній мірі залежить від швидкості польоту V_0 і параметрів A_i, B_i . До останніх входять параметри керування a_{i_0} і a_{i_1} . Рівняння для визначення параметра a_{i_1} отримаємо з необхідної умови мінімуму узагальненого критерію:

$$\frac{\partial J_i}{\partial a_{i_1}} = \frac{I_{1m_i} \frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}}}{(I_{1m_i} - I_{1_i})^2} + \frac{I_{4m_i} \frac{\partial I_{2_i}}{\partial a_{i_1}}}{(I_{4m_i} - I_{4_i})^2} = 0. \quad (5.81)$$

В області заданих обмежень (5.66) і (5.73) на частинні критерії умову (5.81) замінимо виразом:

$$I_{1m_i}(I_{4m_i} - I_{4_i})^2 \frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}} + I_{4m_i}(I_{1m_i} - I_{1_i})^2 \frac{\partial I_{4_i}}{\partial a_{i_1}} = 0, \quad (5.82)$$

де I_{1_i} задається виразом (5.80), а I_{4_i} визначається з виразів (4.35) і (5.69).

Диференціюючи вирази (5.80) та (4.35) за параметром керування a_{i_1} , знайдемо похідні:

$$\frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}} = \frac{\rho V_0^2}{2} U^{2/3} C_{X_0} T_i^3 \left(\frac{V_{Y_{i_0}}}{V_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - \frac{V_{X_{i_0}}}{V_0} \bar{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} \right), \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial I_{4_i}}{\partial a_{i_1}} = -\frac{T_i^2}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin a_{i_0}. \quad (5.84)$$

Вираз (5.82) із врахуванням співвідношень (4.35), (5.80), (5.83), (5.84), є квадратним рівнянням відносно параметру керування a_{i_1} .

Для спрощення запису подамо частинні критерії (5.80) і (4.35) у вигляді:

$$I_{1_i} = K_1 + K_2 a_{i_1}, \quad (5.85)$$

$$I_{4_i} = L_1 + L_2 a_{i_1}, \quad (5.86)$$

$$\text{де } K_2 = \frac{\partial I_{1_i}}{\partial a_{i_1}}, \quad (5.87)$$

$$L_2 = \frac{\partial I_{4_i}}{\partial a_{i_1}}, \quad (5.88)$$

$$K_1 = \frac{\rho V_0^2}{2} U^{2/3} C_{X_0} T_i \cdot \left(V_0 + 3T_i \left[\frac{V_{X_{i_0}}}{2V_0} k_1 + \frac{V_{Y_{i_0}}}{2V_0} k_2 \right] + 2T_i^2 \left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)}{4V_0} + \frac{V^2(1)}{4V_0 T_i^2} \right] \right), \quad (5.89)$$

$$L_1 = V_{X_{i_0}} + T_i \left[\bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - C_4 V_0^2 \right] + \\ + T_i^2 \left[-\left(\frac{C_5}{2} V_{Y_{i_0}} + C_4 V_{X_{i_0}} \right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_{i_0}} - C_4 V_{Y_{i_0}} \right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} + \right. \\ \left. + \left(\frac{C_5}{2} V_{X_{i_0}} - C_4 V_{Y_{i_0}} \right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_{i_0}} + C_4^2 V_{X_{i_0}} \right) V_0^2 \right]. \quad (5.90)$$

Враховуючи введені позначення (5.85) - (5.90) умова (5.82) перетвориться в форму квадратного рівняння:

$$a_i^2 (I_{1m_i} K_2 L_2^2 + I_{4m_i} L_2 K_2^2) - 2a_i L_2 K_2 [I_{1m_i} (I_{4m_i} - L_1) + I_{4m_i} (I_{1m_i} - K_1)] + I_{1m_i} K_2 (I_{4m_i} - L_1)^2 + I_{4m_i} L_2 (I_{1m_i} - K_1)^2 = 0 \quad (5.91)$$

Із рівняння (5.91) знайдем в неявній формі параметр керування a_i :

$$a_i = \frac{1}{I_{1m_i} L_2 + I_{4m_i} K_2} \left\{ \begin{array}{l} I_{1m_i} (I_{4m_i} - L_1) + I_{4m_i} (I_{1m_i} - K_1) \pm \\ \pm [L_2 (I_{1m_i} - K_1) - K_2 (I_{4m_i} - L_1)] \sqrt{\frac{I_{1m_i} I_{4m_i}}{-K_2 L_2}} \end{array} \right\} \quad (5.92)$$

Підкорений вираз в формулі (5.92) є додатним за умови:

$$K_2 = \frac{\partial I_{1i}}{\partial a_i} < 0, \quad L_2 = \frac{\partial I_{4i}}{\partial a_i} > 0. \quad (5.93)$$

Умова (5.93) виконується у випадку конфлікуючих частинних критеріїв, коли зменшення одного критерія призводить до збільшення другого.

Вирази (5.71), (5.92) та (4.34) визначають алгоритм багатокритерійного керування процесом злетом та набором висоти БАЛА з мінімальними витратами енергії на виконання заданої місії. Переходячи до поточних значень змінних та замінюючи параметр керування a_i командним значенням кута відхилення вектору тяги Φ_{ki} , алгоритм багатокритерійного керування за мінімумом енергії на основі виразу (4.33) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} &= \frac{2(H_{T_i} - H_0)}{T_i^2} - \frac{2V_{Y_{i_0}}}{T_i} - \tilde{\Phi}_i - \\ &- \frac{T_i}{3} \left[V_{Y_{i_0}} (C_6 + C_7) (\tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - C_4 V_0^2) - V_{X_{i_0}} (C_6 + C_7) (\tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0} + \tilde{\Phi}_i) + \tilde{P}_{\Sigma_i} a_{i_1} \cos a_{i_0} \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

Час T_i i -го підінтервалу процесу керування рухом БАЛА на етапі зльоту та набору висоти визначається із виразу (4.34) наступним чином:

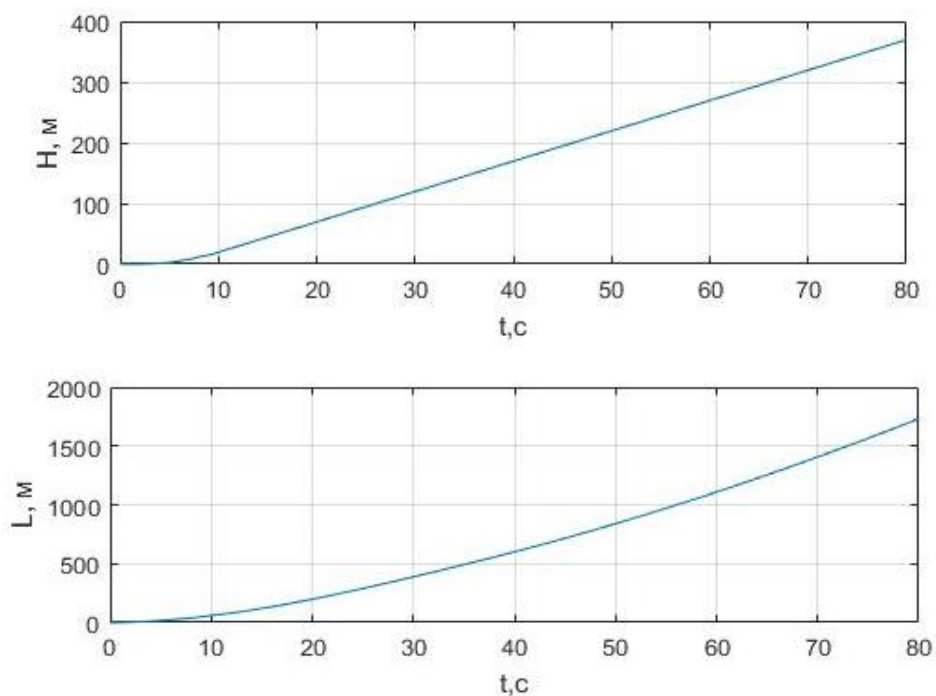
$$T_i = -D_i + \sqrt{D_i^2 + \frac{2}{C_i} (V_{Y_{T_i}} - V_{Y_{i_0}})}, \quad (5.95)$$

де $B_i = [\tilde{\Phi}_1 + \tilde{P}_{\Sigma_i} \sin a_{i_0}]$, $D_i = \frac{B_i}{C_i}$, $C_i = (C_6 + C_7) [V_{Y_0} \tilde{P}_{\Sigma_i} \cos a_{i_0} - V_{X_0} \tilde{\Phi}_1 - V_{X_0} C_4 V_0^2] + \tilde{P}_{\Sigma_i} a_{i_1} \cos a_{i_0}$.

Значення параметра a_i обирається із умови найменшого мінімуму часу процесу керування, тобто з двох значень (5.92) обирається таке a_i , якому відповідає менше значення часу T_i i -го підінтервалу руху.

5.5.2. Дослідження ефективності багатокритерійного алгоритму

Дослідження ефективності багатокритерійного алгоритму керування БАЛА на етапі зльоту з виведенням на задану висоту (5.94) проведено за тих самих умов, що й оптимального термінального алгоритму (4.22). На рис. 5.5 наведено зміну параметрів траєкторного руху БАЛА за багатокритерійного керування процесом зльоту з виведенням на задану висоту, а у табл. 5.2 наведено порівняння результатів моделювання оптимальних траєкторій БАЛА для двох сценаріїв керування: термінальне керування з досягненням максимальної горизонтальної швидкості (п. 4.3.2.2) та багатокритерійне керування (5.94) за мінімумом енергії з досягненням максимальної горизонтальної швидкості.



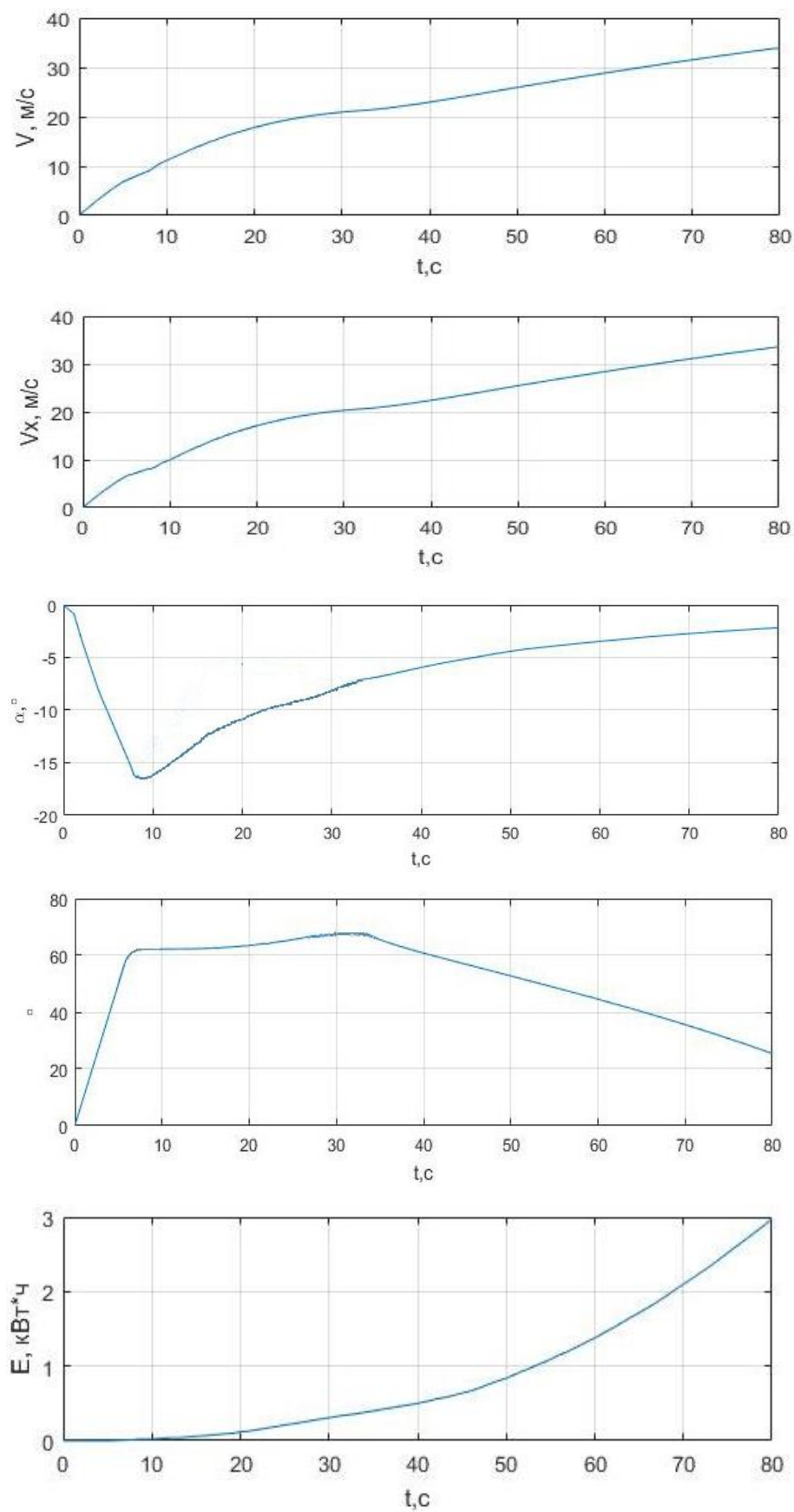


Рис. 5.5. Зміна параметрів траєкторного руху БАЛІА за багатокритерійного керування під час зльоту та виведення на висоту $H = 350$ м

Таблиця 5.2

Кінцеві значення параметрів тракторного руху БАЛА на етапі зльоту з підняттям на задану висоту $H=350$ м за термінального та багатокритерійного керування

Параметр	Керування	
	Термінальне	Багатокритерійне
$L, \text{м}$	1 580,0	1 602,0
$V, \text{м/с}$	32,8	33,1
$V_x, \text{м/с}$	32,5	32,7
$V_y, \text{м/с}$	5,0	5,0
α°	-2,3	-2,4
φ°	29,8	29,5
$E, \text{кВт*ч}$	2,75	2,6
$T, \text{с}$	75,5	76,1

Встановлено, що порівняно з термінальним керуванням, застосування багатокритерійного керування потребує менших витрат енергії на виведення БАЛА на задану висоту та дозволяє отримати, за наявності достатньої потужності двигунів, більшу горизонтальну швидкість за досягнення тієї самої заданої висоти. Зазначимо, що із збільшенням висоти виведення БАЛА стратегія керування у більший мірі впливає на співвідношення споживання енергії та часу піднімання. Для порівняння, у таблиці 5.3 наведено результати відомих досліджень [140-142,145] щодо оптимізації траєкторії виведення стратосферного БАЛА з початкової висоти $H = 18,5 \text{ км}$ до $H = 22 \text{ км}$ при керуванні за мінімумом часу (термінальне керування) та мінімумом енергії.

Наведені дані показують значні відмінності між часом польоту та витратою енергії при застосуванні різних стратегій керування польотом. БАЛА може витратити у 10 разів більше енергії для досягнення заданої висоти, використовуючи при цьому у 10 разів менше часу або навпаки, спожити менше у 10 разів енергії, але витратити у 10 разів більше часу. Тому важливо використовувати відповідні стратегії керування польотом, які сорозмірні із заданими польотними цілями БАЛА.

Таблиця 5.3

Порівняння стратегій керування стратосферним БАЛА

Стратегія керування	Час польоту, г	Нормалізована енергія
Мінімальний час	2,5	11,0
Мінімальна енергія	23,2	1,0

Проведений аналіз результатів досліджень багатокритерійного закону керування за мінімумом енергії з досягненням максимальної горизонтальної швидкості та термінального з досягненням максимальної горизонтальної швидкості, а також результати відомих досліджень [140-145] дають можливість зробити висновок, що зменшення кількості споживання енергії досягається зменшенням коефіцієнта зі зворотним зв'язком за розузгодженням висоти та вертикальної швидкості. Таким чином, зменшення споживання енергії при наборі висоти БАЛА може бути досягнуто використанням багатокритерійного керування (5.94), який обмежує значення кута відхилення вектора тяги при русі апарату. Це дає змогу запропонувати комбінований алгоритм керування БАЛА при зльоті та виведенні на задану висоту, що складається з термінального алгоритму на етапі зльоту з досягненням висоти $15,2 \text{ м}$ та багатокритерійного алгоритму на етапі піднімання з висоти $H = 15,2 \text{ м}$ до заданої висоти $H = 350 \text{ м}$ [281]. При цьому одержуємо додатній ефект від застосування комбінованого алгоритму: зниження витрат енергії на $\sim 6\%$, збільшення горизонтальної швидкості на $\sim 1\%$ (табл. 5.2).

5.6. Дослідження впливу вітрових збурень на якість процесів керування

5.6.1 Виведення авіаційно-космічної системи на орбіту

Для оцінки впливу вітрових збурювань на якість функціонування запропонованого комбінованого алгоритму при виведенні АКС «Оріль» на орбіту у роботі обрана модель струминного потоку в атмосфері, що здійснює найбільший вплив на витрату палива під час виведення АКС на орбіту. Поля вітрів в атмосфері

Землі враховано на основі даних розподілення за висотами компонент вітру [248]. Розглядалися варіанти попутньої та зустрічної горизонтальної складової вітру, а також висхідні та низхідні потоки вертикальної складової вітру. Для зручності викладання приймемо наступні позначення складових вітру: позначимо знак попутньої горизонтальної складової вітру та висхідної вертикальної складової вітру “+”, а знак зустрічної горизонтальної складової і низхідної вертикальної складової вітру “-“. Для позначення різних варіантів дії вітрових збурень приймемо кодування з одиниць, знак яких відповідає прийнятим вище позначенням знаків горизонтальної та вертикальної компонент вітру. Перша одиниця позначає знак горизонтальної складової вітру, а друга одиниця – вертикальної складової вітру. Наприклад, варіант дії вітрових збурень, позначений (-1,1), відповідає випадку зустрічного вітру за висхідного потоку, а варіант (1,-1) відповідає випадку попутного вітру за низхідного потоку.

Результати дослідження впливу різних варіантів вітрових збурень на частинні критерії траєкторного руху АКС «Оріль» отримані шляхом моделювання на ЕОМ процесу виведення на орбіту та наведено у таблиці 5.4, де подано нормовані значення (відносно відповідних значень параметрів руху в умовах відсутності вітру) частинних критеріїв.

Таблиця 5.4

Нормовані значення частинних критеріїв за комбінованого керування за різних варіантах дії вітрових збурень

Частинний критерій	Варіант вітрових збурень				
	Без вітру	(1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(-1,-1)
Витрати палива	1.0	0.9987	0.9995	1.0020	1.0015
Максимальний швидкісний напір	1.0	0.901	1.254	0.635	1.022
Максимальна піднімальна сила	1.0	0.894	0.994	1.138	1.143
Максимальний тепловий потік	1.0	0.874	1.309	0.524	1.006
Час виведення	1.0	1.001	1.001	1.009	1.005

Встановлено, що варіант дії вітрових збурювань «попутний+висхідний» (1,1) приводить до зменшення витрат палива на 0,13%, зниження максимальних значень

швидкісного напору на 9,9%, піднімальної сили на 10,6% та теплового потоку на 12,6%. Алгоритм комбінованого керування в умовах дії цього варіанту вітру забезпечив виведення АКС у задані термінальні умови з високою точністю практично за той самий час, як й у випадку відсутності вітрових збурювань.

Наведене у таблиці 5.5 порівняння нормованих частинних критеріїв за термінального та комбінованого керування та дії вітрових збурень за варіантом (1,1) показує, що позитивний ефект від застосування комбінованого керування (зниження аеродинамічних та теплових навантажень) зберігається й в умовах дії вітрових збурень.

Таблиця 5.5

Нормовані значення частинних критеріїв за термінального та багатокритерійного керування в умовах дії ветру за варіантом (1,1)

Частинний критерій	Керування	
	Термінальне	Багатокритерійне
Витрати палива	1	1.01
Максимальний швидкісний напір	1	0.82
Максимальна піднімальна сила	1	0.96
Тепловий потік	1	0.58

Однак, для решти варіантів дії вітрових збурювань отримано погіршення тих чи інших частинних критеріїв. До найбільших витрат палива на процес виведення АКС «Оріль» на орбіту призвела дія вітрових збурювань за варіантом «зустрічний+висхідний». За цим варіантом дія вітрових збурювань призвела до збільшення на 0,2% витрат палива, збільшення часу виведення на орбіту на 0,9%. Але у той самий час швидкісний напір знизився на 36%, а тепловий потік на 48%. Отже, виведення АКС на орбіту за комбінованим алгоритмом у випадку найгіршого варіанту дії вітрових збурювань «зустрічний+висхідний» за критерієм витрати палива дозволив досягти найменших аеродинамічних та теплових навантажень на конструкцію АКС. У цьому випадку реалізується властивість багатокритерійного

алгоритму, згідно якому покращення одного з частинних критеріїв компенсується погіршенням значень інших частинних критеріїв.

До найменших витрат палива на процес виведення АКС на орбіту за комбінованим алгоритмом привела дія вітрових збурювань за варіантом «попутний+низхідний». У цьому випадку зменшення витрати палива склало 0,05%, максимальна піднімальна сила знизилася на 0,6%. У той самий час максимальний швидкісний напір збільшився на 25%, а тепловий потік на 31%. Решта частинних критеріїв мали близькі значення.

Дія вітрових збурювань за варіантом «зустрічний+низхідний» призвела до найбільшого значення максимуму піднімальної сили як при порівнянні з іншими варіантами дії вітру, так і у випадку відсутності вітру. Максимальне значення піднімальної сили у випадку дії вітру за цим варіантом збільшилось на 14% порівняно з випадком відсутності вітру, але на 30% нижче гранично-припустимого значення.

Отримані результати дослідження комбінованого алгоритму керування в умовах дії різних варіантів вітрових збурювань показало працездатність алгоритму та можливість досягнення позитивного ефекту в частині зниження аеродинамічних та теплових навантажень під час проходження щільних шарів атмосфери. Додаткові витрати палива, що були викликані дією вітрових збурювань, не перевищували 0,2%. У той самий час ці додаткові витрати палива компенсувалися додатковим зниженням максимального швидкісного напору на 36% та теплового потоку на 48%.

Таким чином, у випадку керування за комбінованим алгоритмом до найбільших додаткових витрат палива (збільшення на 0,2%) призвів зустрічний вітер спільно з висхідним потоком. До найменших витрат палива (зниження на 0,05%) привела дія попутного вітру спільно із низхідним потоком. Найбільше значення максимуму піднімальної сили було досягнуто в умовах дії зустрічного вітру спільно з низхідним потоком. При цьому, в усіх варіантах дії вітрових збурювань комбінований алгоритм забезпечив високоточне виведення АКС на орбіту за припустимих значень аеродинамічних та теплових навантажень на конструкцію АКС.

Проведені дослідження впливу вітрових збурень на якість процесу керування виведенням АКС «Оріль» на задану орбіту з синтезованими алгоритмами термінального, багатокритерійного та комбінованого алгоритмів з урахуванням багатоетапності процесу керування та порівняння з аналогічними відомими результатами [25] показали таку саму якісну картину впливу вітрових збурень на якість процесу виведення АКС на орбіту. Врахування багатоетапності процесу керування дозволило декілька уточнити кількісні показники щодо зміни витрат палива, максимальних значень швидкісного напору, піднімальної сили та теплового потоку. Отримані результати моделювання показали, що це уточнення знаходиться у межах 3-5% порівняно з відповідними алгоритмами, синтезованими без урахування багатоетапності процесу керування.

5.6.2 Виведення аеростатичного літального апарату на задану висоту

Зовнішні, у першу чергу вітрові, збурення істотно впливають на динаміку польоту аеростатичних апаратів [8,11,145]. З метою оцінки якості функціонування запропонованого комбінованого алгоритму керування при дії вітрових збурень виконано моделювання на ЕОМ дослідження траєкторії багатоетапного процесу зльоту з набором заданої висоти БАЛА.

Урахування впливу вітру на динаміку польоту аеростатичного літального апарату може проводитися з використанням різних моделей вітрових збурень, у т.ч.

- турбулентна модель вітру – враховуються ефекти турбулентності з використанням різних нелінійних і імовірнісних моделей;
- градієнтна модель (порив) вітру – швидкість повітряного потоку лінійно змінюється у просторі в межах об'єму аеростатичного апарату;
- зсув вітру - зміна швидкості та напрямку вітру у просторі, включаючи висхідні та низхідні потоки повітря.

Одним із розрахункових випадків при розгляданні задач динаміки польоту дирижабля, оцінки його характеристик стійкості та керованості, а також якості

керування та безпеки польоту є вплив градієнтного пориву вітру. Математична модель градієнтного пориву вітру використовує стандартну форму «1-cosine» [8]:

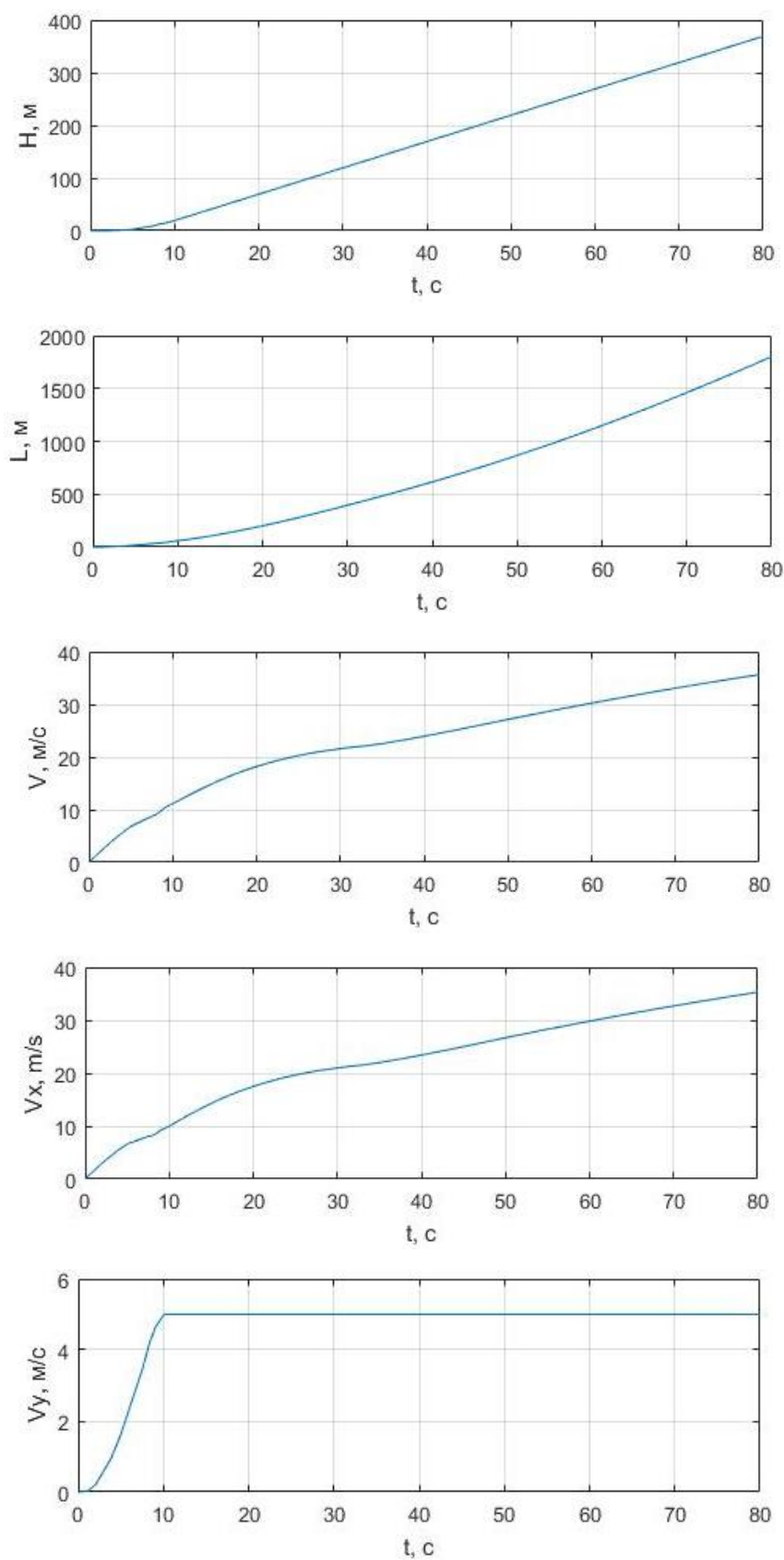
$$V_{vind} = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{V_m}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(t-t_0)}{t_m-t_0} \right) \right), & t_0 \leq t \leq t_m, \\ V_m, & t > t_m, \end{cases}$$

де V_m - амплітуда пориву, V_{vind} - результуюча швидкість вітру в зв'язаній системі координат, t_0, t_m, t - час початку дії пориву, час наростання пориву та поточний час відповідно.

Вплив вітрових збурень на термінальні похибки руху БАЛА з використанням комбінованого алгоритму керування розглянемо на прикладі режиму зльоту з розбігом до 10 м/с із наступним набором висоти до значення $H = 350$ м і градієнтним поривом вітру 3 м/с. Розглядалися варіанти попутного та зустрічного горизонтального пориву вітру, а також висхідні та низхідні пориви вітру. Для зручності викладання приймемо ті самі позначення складових вітру, що прийняти для дослідження процесу виведення АКС на орбіту, а саме позначимо знак попутньої горизонтальної складової пориву вітру і висхідного пориву вітру “+”, а знак зустрічної горизонтальної складової пориву вітру та низхідного пориву “-“. Для позначення різних варіантів дії поривів вітру приймемо кодування з одиниць, знак яких відповідає прийнятим вище позначенням знаків горизонтальної та вертикальної компонент поривів вітру, і нуля, що означає відсутність відповідної компоненти вітру. Перша одиниця або нуль позначають знак горизонтального пориву вітру або його відсутність відповідно, а друга одиниця або нуль – вертикальну компоненту пориву вітру або його відсутність відповідно. Наприклад, варіант моделювання позначений (1,0) відповідає випадку попутнього пориву вітру за відсутності вертикального пориву, а варіант (0,-1) відповідає випадку низхідного вертикального пориву за відсутності горизонтального пориву. Варіанти одночасної дії горизонтального та вертикального поривів вітру в даній роботі не розглядаються.

Результати дослідження для різних варіантів дії вітру подано наступними графіками: для варіанту (-1,0) - на рис. 5.6, варіанту (1,0) -на рис. 5.7, варіанту (0,1) –

на рис. 5.8, варіанту (0,-1) – на рис. 5.9. Порівняння значень параметрів руху БАЛА наприкінці виходу на задану висоту для різних варіантів дії вітру надано у таблицях 5.6 та 5.7.



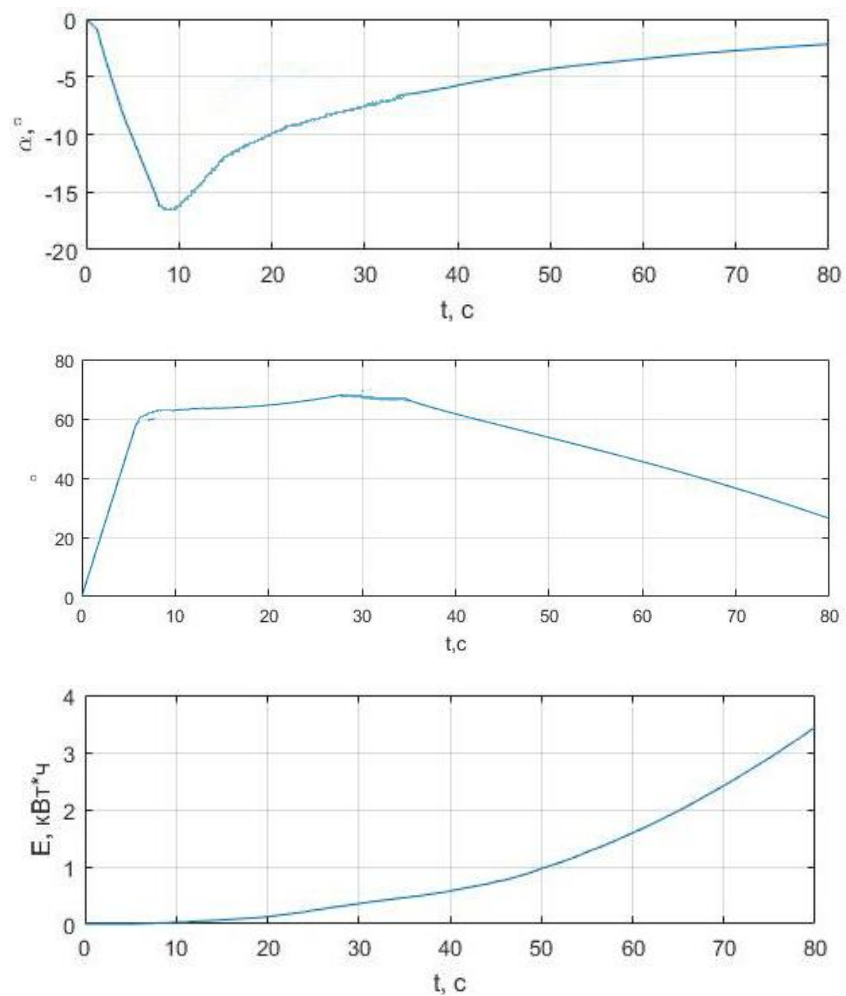
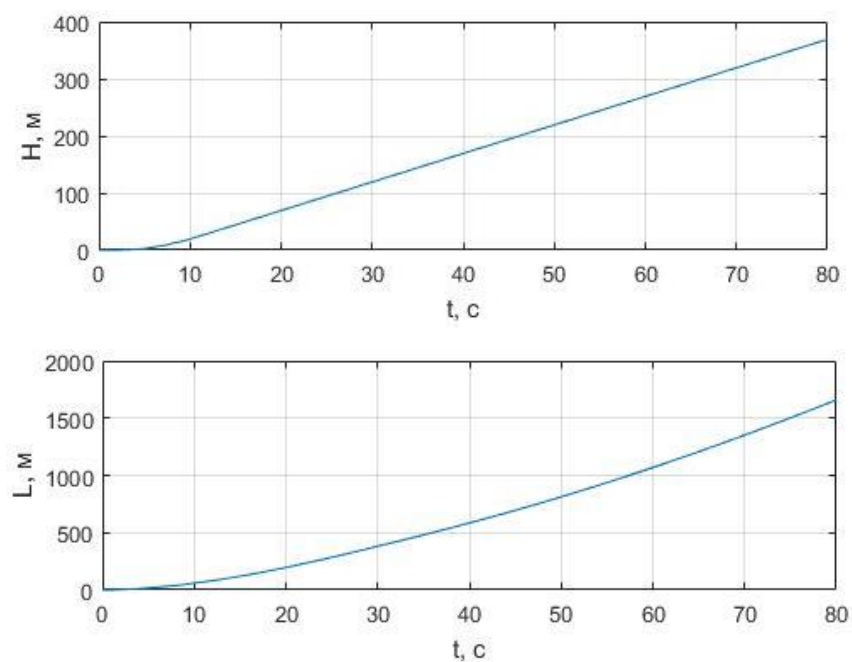
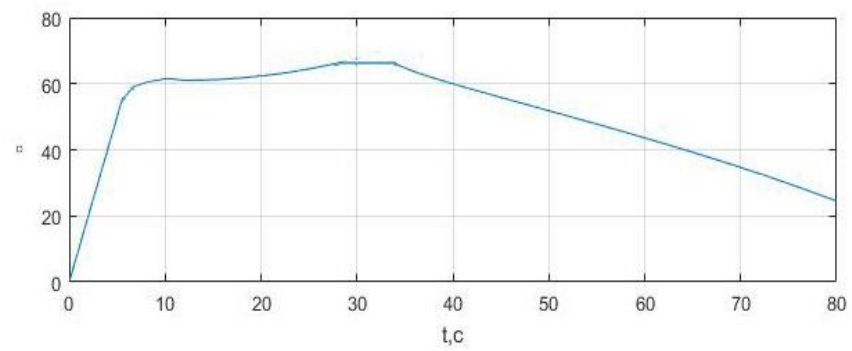
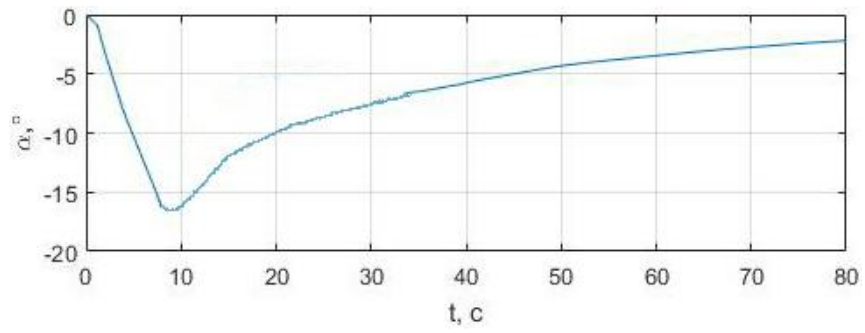
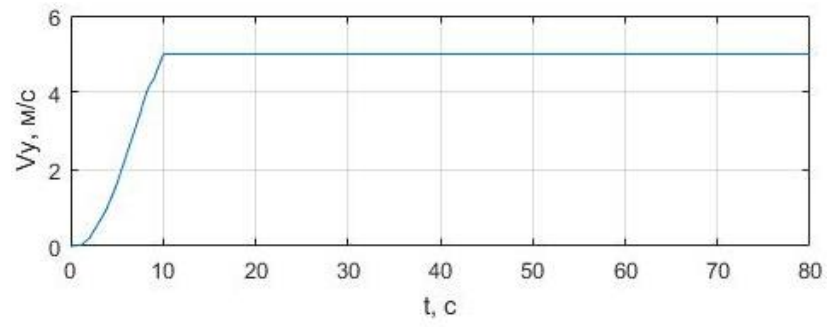
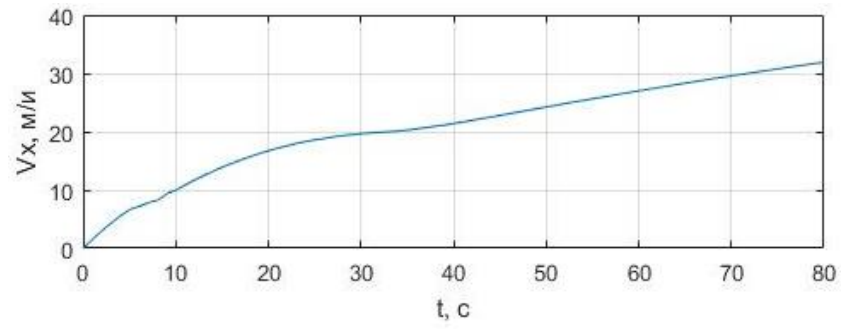
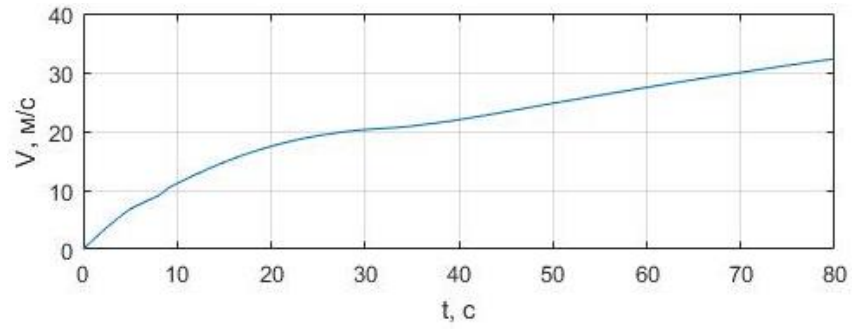


Рис. 5.6 Зміни параметрів руху БАЛА при зльоті та виведенні на задану висоту $H = 350 \text{ м}$ в умовах дії зустрічного вітру





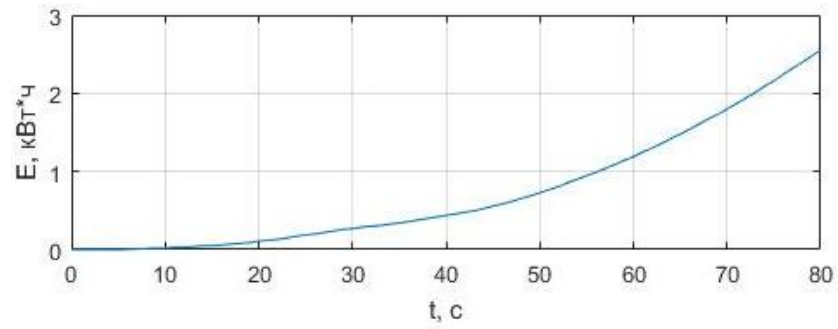
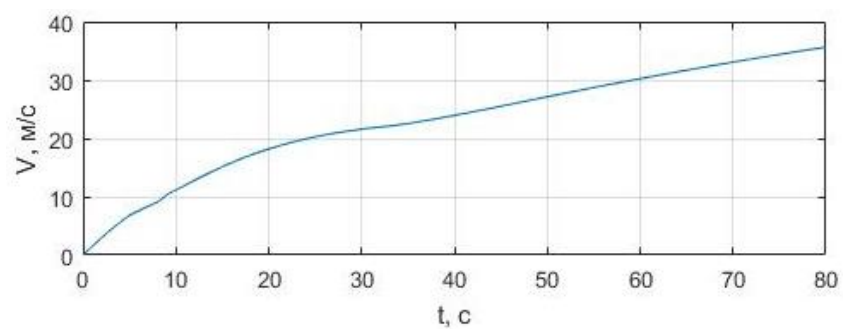
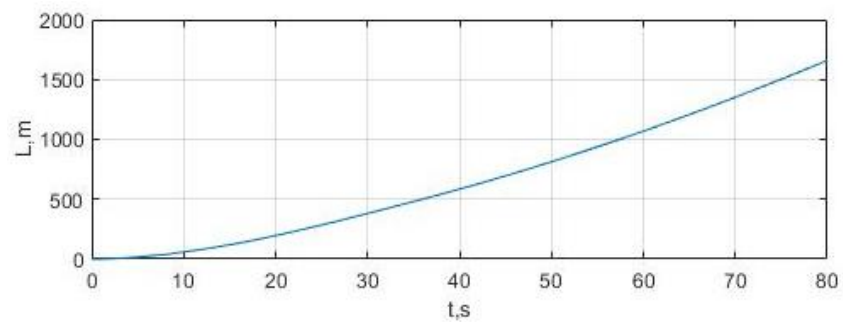
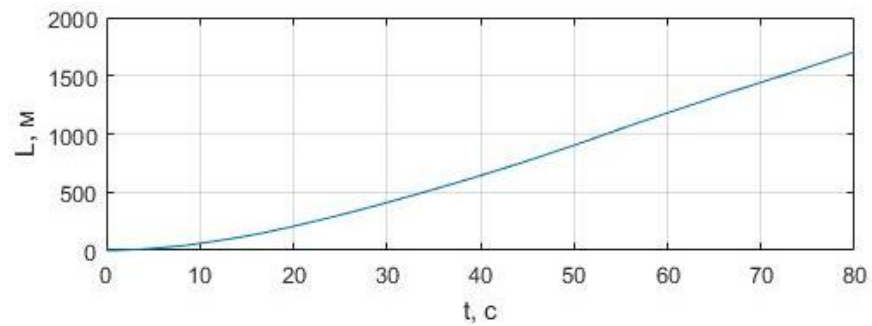
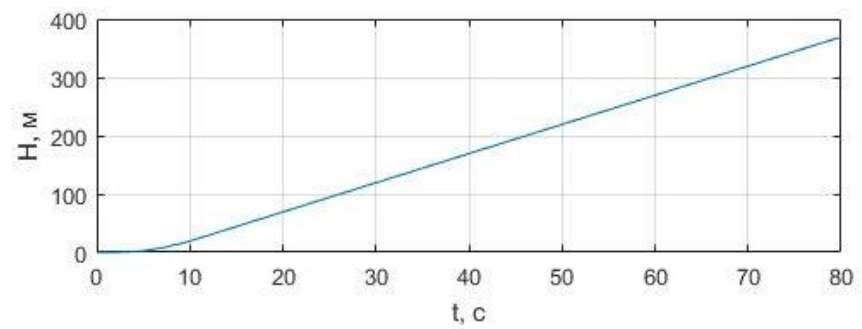


Рис. 5.7. Зміна параметрів руху БАЛА при зльоті та виведенні на задану висоту $H = 350$ м в умовах дії попутнього вітру



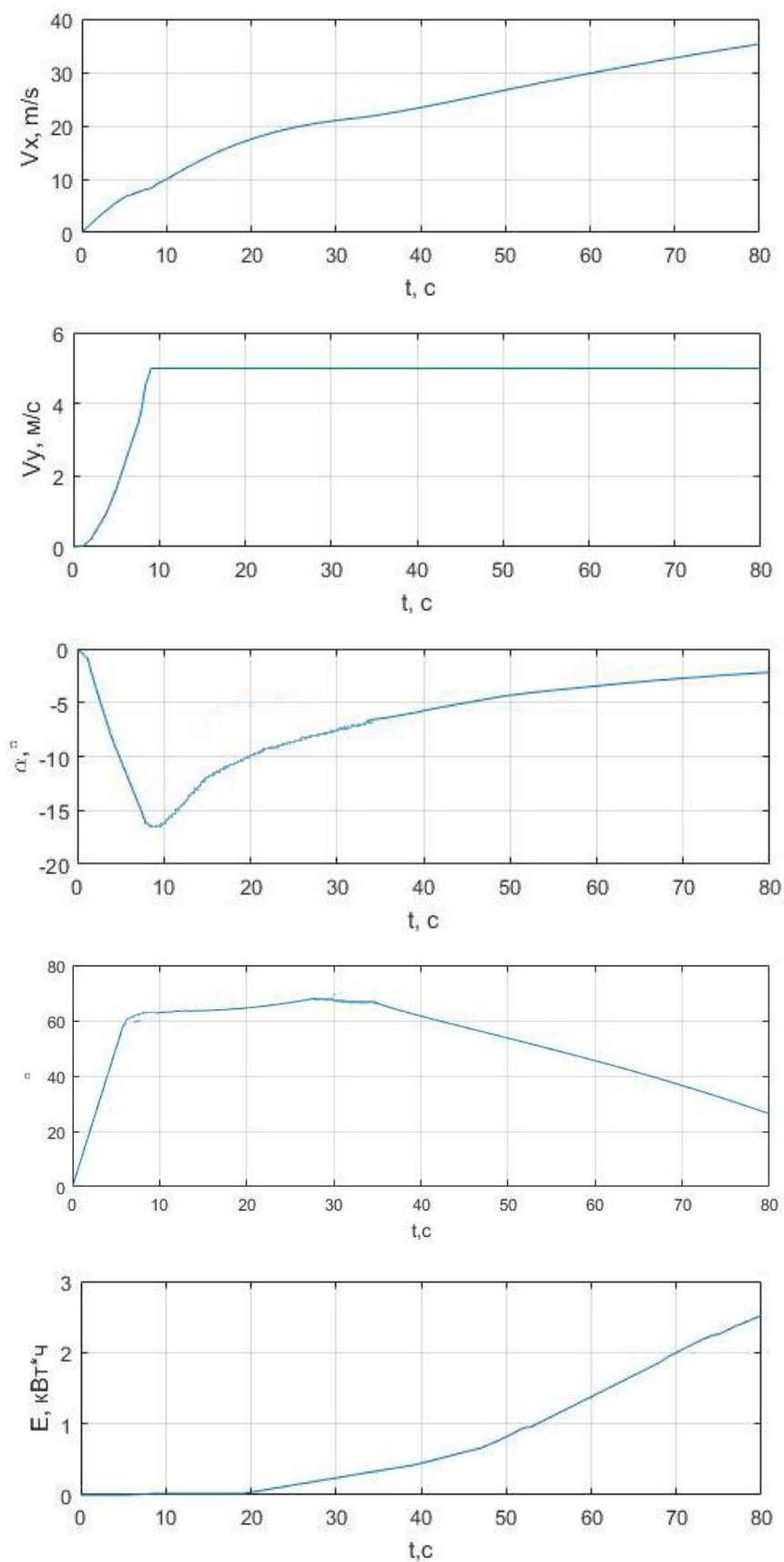
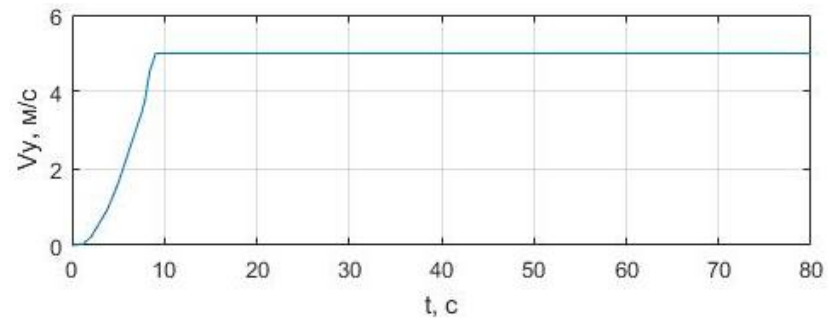
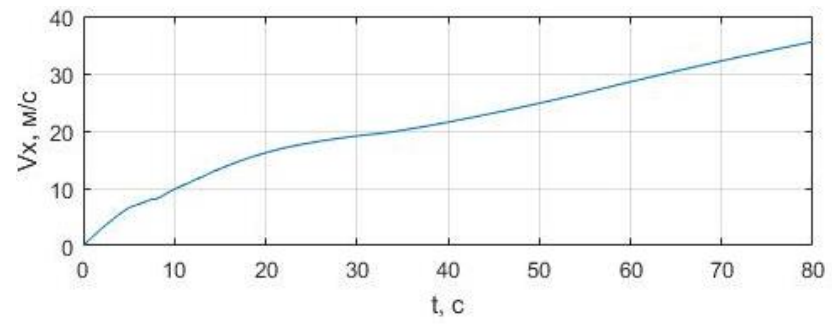
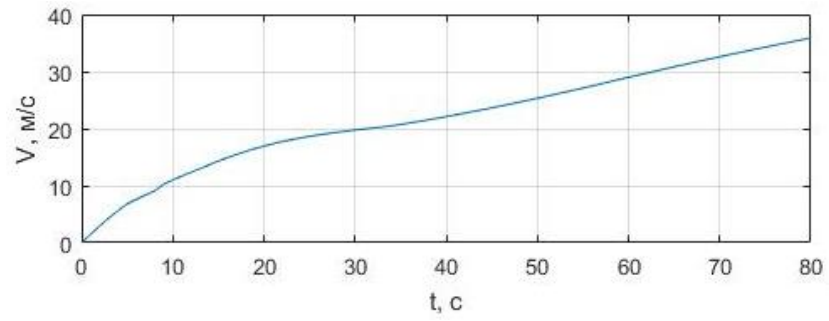
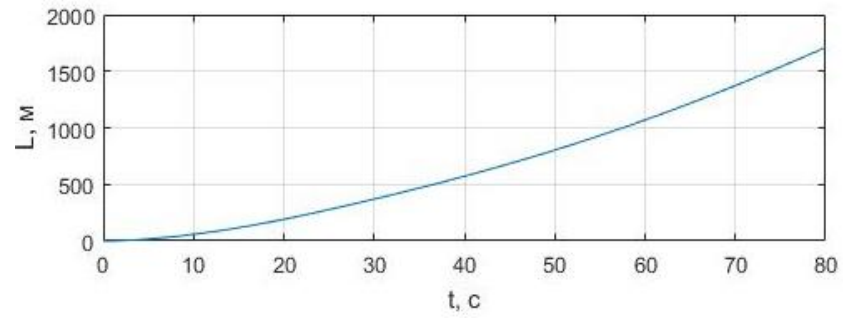
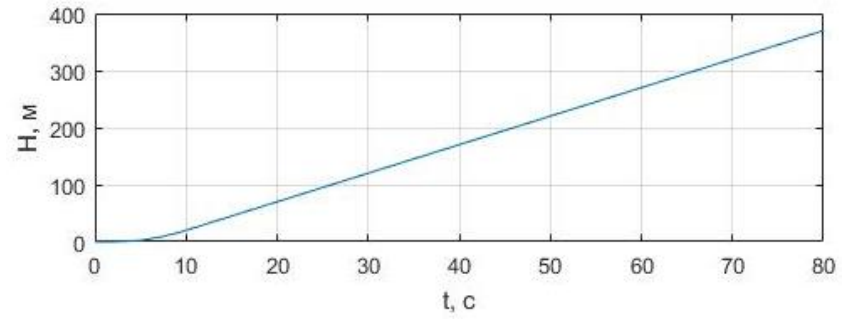


Рис. 5.8. Зміна параметрів руху БАЛА при зльоті та виведенні на задану висоту $H = 350 \text{ м}$ в умовах дії висхідного пориву вітру



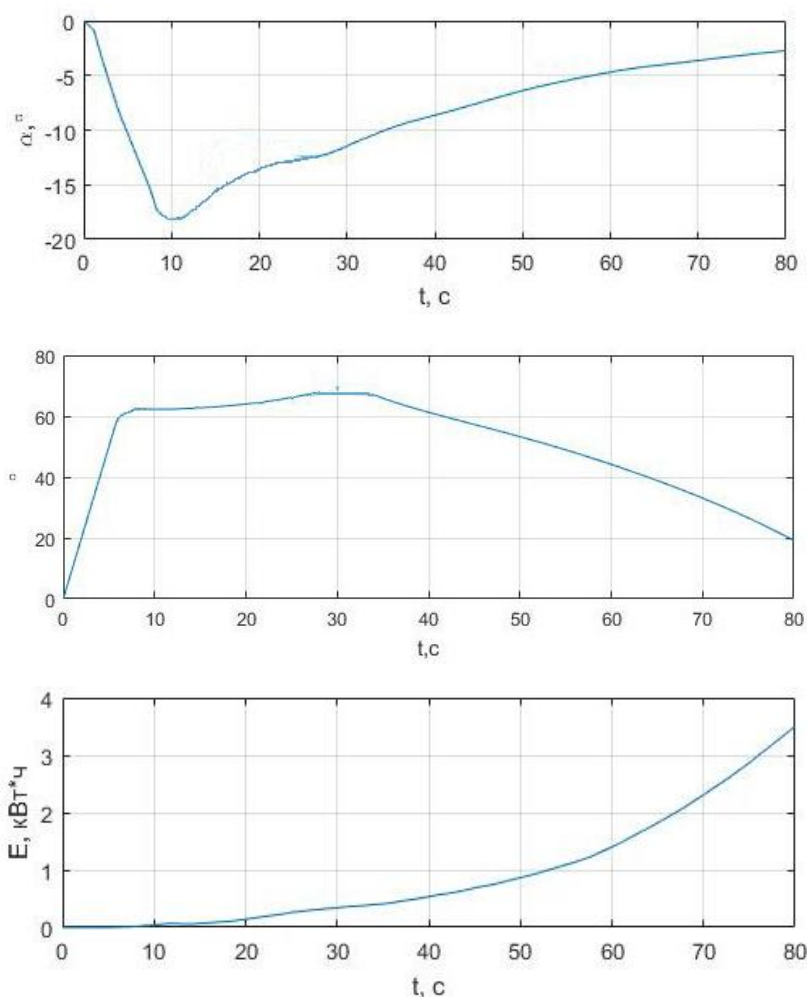


Рис. 5.9. Зміна параметрів руху БАЛА при зльоті та виведенні на задану висоту $H = 350 \text{ м}$ в умовах дії низхідного пориву вітру

Аналіз отриманих даних дослідження комбінованого керування в умовах дії вітрових збурень показав наступне. Як за відсутності вітру, так й при дії всіх варіантів вітру апарат практично одразу виходив на максимальну припустиму вертикальну швидкість набору висоти. При цьому, час виведення БАЛА на задану висоту практично однаковий як за відсутності вітрових збурень так й при дії вітру за різними варіантами, а дистанція від початку руху до моменту набору заданої висоти $H = 350 \text{ м}$ відрізняється не більш ніж на $\sim 4\%$. До найбільших витрат енергії на процес зльоту БАЛА з виведенням на задану висоту призводить дія вітрових збурень за варіантами $(-1,0)$ та $(0,-1)$. Порівняння результатів моделювання цих варіантів з результатами за відсутності вітрових збурень дозволяє зробити висновок, що дія вітрових збурень за цими варіантами призводить до збільшення витрат

енергії на $\sim 16\%$ та горизонтальної швидкості на $\sim 5\%$. При варіанті вітру (-1,0) збільшення відхилення вектору тяги незначне ($\sim 3\%$), у той самий час дія вітру (0,-1) призводить до необхідності збільшення відхилення вектору тяги на $\sim 20\%$.

Таблиця 5.6

Кінцеві значення параметрів тракторного руху БАЛІА на етапі зльоту з виведенням на задану висоту $H = 350$ м за комбінованого керування та дії різних варіантів вітру

Параметр	Варіант дії вітру				
	(0,0)	(-1,0)	(1,0)	(0,1)	(0,-1)
L,м	1 602,0	1 667,8	1 537,6	1 598,0	1 610,1
V, м/с	33,1	34,7	31,4	33,0	34,6
V _x , м/с	32,7	34,3	31,0	32,6	34,2
V _y , м/с	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
α°	-2,4	-2,3	-2,4	-2,4	-3,3
φ°	29,5	30,4	28,6	29,3	35,5
E, кВт*ч	2,60	3,02	2,25	2,52	3,04
T,с	76,12	76,14	76,12	76,09	77,01

Таблиця 5.7

Нормовані кінцеві значення параметрів тракторного руху БАЛІА на етапі зльоту з виведенням на задану висоту $H = 350$ м за комбінованого керування та дії різних варіантів вітру

Параметр	Варіант дії вітру				
	(0,0)	(-1,0)	(1,0)	(0,1)	(0,-1)
L,м	1	1,041	0,960	0,998	1,005
V, м/с	1	1,048	0,949	0,997	1,045
V _x , м/с	1	1,049	0,948	0,997	1,046
V _y , м/с	1	5,0	5,0	5,0	5,0
α°	1	0,96	1	1	1,375
φ°	1	1,031	0,969	0,993	1,203
E, кВт*ч	1	1,162	0,865	0,969	1,169
T,с	1	1,001	1	0,999	1,012

Найменші витрати енергії спостерігаються за попутнього вітру (на $\sim 13\%$ менше ніж за відсутності вітру). При цьому досягається й менша горизонтальна швидкість (на $\sim 3\%$). Вплив вертикальних вітрових збурень за варіантом (0,1) порівняно з відсутністю вітру незначний (зменшення енергії на $\sim 3\%$ та горизонтальної швидкості на $\sim 0,3\%$), що пояснюється швидким виходом на максимально припустиму швидкопідйомність апарату (обмеження з роботи газових та повітряних клапанів). Але при цьому може виникнути надмірна піднімальна сила, що, у цілях безпеки польоту, може призвести до необхідності її зменшення за рахунок випуску несучого газу або зменшення кута повороту вектора тяги. Це потребує окремих досліджень з урахуванням динаміки роботи газових та повітряних клапанів й у даній роботі не розглядається.

У результаті дослідження процесу зльоту БАЛА з виведенням на задану висоту встановлено, що вітрові збурення не завжди приводять до погіршення критеріїв оцінки якості процесу комбінованого керування. Попутній горизонтальний вітер найбільше зменшує витрати енергії та незначно зменшує горизонтальну швидкість. До найбільш додаткових витрат енергії (на $\sim 16\%$) призводить зустрічний горизонтальний вітер та низхідний порив вітру.

У всіх варіантах дії вітрових збурень комбінований алгоритм забезпечує виведення БАЛА на задану висоту за припустимих витрат енергії.

5.7. Застосування зміщених диференціальних перетворень до багатокритерійної оптимізації багатоетапних процесів керування

Покажемо можливість застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язання задачі багатокритерійної оптимізації багатоетапних процесів керування БАЛА, якій відповідає математична модель (5.1)-(5.5). Цю задачу розв'язатимемо у тій самій послідовності, що й при застосуванні прямих диференціальних перетворень (п.5.3).

Перший етап синтезу, на якому визначають вектор керування $u_i(t, A_i)$ в класі аналітичних функцій з вектором вільних параметрів $A_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_\ell})$, здійснюється відповідно до виразів (4.46)-(4.53). Далі, застосувавши ЗДТП (1.11) та (1.12) до виразу (5.3) отримаємо частинні критерії у вигляді [282]:

$$\begin{aligned} I_j(T_i, x_{v_i}, A_i) &= G_j[x_i(T_i, x_{v_i}, A_i), T_i] + \\ &+ \sum_{i=1}^r h_{1_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \Phi_{ij}[T_{c_i}(k, t_{v_i}), X_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), U_i(k, t_{v_i}, A_i)] + \\ &+ \sum_{i=1}^r h_{2_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \Phi_{ij}[\bar{T}_{c_i}(k, t_{v_i}), \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i), \bar{U}_i(k, t_{v_i}, A_i)], \quad j = \bar{1}, r. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Підставлення (5.96) до виразу скалярної згортки частинних критеріїв (5.11) і замінюючи зміщені диференціальні перетворення (1.11) і (1.12) дає скалярну функцію вигляду:

$$J(T_i, x_{v_i}, A_i) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{1 - \frac{I_j(T_i, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i)}{C_j}}. \quad (5.97)$$

Задачу оптимізації функції (5.97) з урахуванням рівностей (4.52) і (4.53) розв'язуємо методом множників Лагранжу. Попередньо введемо векторну функцію $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$, яка визначається виразом (4.53):

$$\Psi(t_{v_i}, x_{v_i}, A, x_i^0) = x_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}_i(k, t_{v_i}, x_{v_i}, A_i) = 0. \quad (5.98)$$

Функція (5.97) та умови (5.98), (4.52) об'єднуються множниками Лагранжу $\lambda_x = (\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \dots, \lambda_{x_n})$ і $\lambda_s = (\lambda_{s_1}, \lambda_{s_2}, \dots, \lambda_{s_q})$ у нову функцію:

$$\begin{aligned} J^*(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_{x_i}, \lambda_{s_i}, x_i^0) &= J(T_i, x_{v_i}, A_i) + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i} \Psi_i(t_{v_i}, x_{v_i}, A_i, x_i^0) + \\ &+ \sum_{i=1}^r T_i \sum_{j=1}^q \lambda_{s_j} S_j[x_i(T_i, x_{v_i}, A_i), T_i]. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Необхідні умови екстремуму функції (5.99) складають систему скінчених рівнянь для визначення векторів $A_i, x_{v_i}, \lambda_x, \lambda_s$ і граничного значення часу T за будь-якого початкового стану $x_i(t_0) = x_i^0$:

$$\frac{\partial J^*(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_s, x_i^0)}{\partial x_{v_i}} = 0; \quad \frac{\partial J^*(T_i, x_{v_i}, A_i, \lambda_x, \lambda_s, x_i^0)}{\partial a_{ij}} = 0; \quad (5.100)$$

$$i = \overline{1, r}; \quad j = \overline{1, p}.$$

Якщо достатні умови мінімуму чи максимуму функції (5.97) виконуються, то неперервне розв'язання системи скінчених рівнянь (5.100) у реальному часі дає змогу знайти вектор A_i у вигляді $A_i[T_i, x_i(t)]$, де довільний початковий стан $x_i(t_0)$ прийнято таким, що дорівнює поточному стану $x_i(t)$. Підставлення розв'язків $A_i(T_i, x_i)$ системи скінчених рівнянь (5.100) в обрану аналітичну структуру системоаналогового адаптивного керування $\bar{u}_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ і $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ визначає оптимальне керування із зворотним зв'язком на i -му підінтервалі, яке здатне адаптуватися до дії вектору збурень.

Основна перевага використання зміщених диференціальних перетворень, порівняно із застосуванням основних диференціальних перетворень, полягає у підвищенні точності обчислень оптимального керування динамічним об'єктом та зменшенні оцінки верхньої межі похибки в 2^q раз, де q – кількість врахованих дискрет зміщених диференціальних спектрів [164]. При цьому, ця перевага збільшуються під час розв'язання задачі синтезу замкнених законів оптимального керування на значних часових інтервалах. Основним обмеженням застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язання задачі багатокритерійного синтезу законів багатоетапного оптимального керування, у тому числі й порівняно з багатоетапним методом диференціальних перетворень, є ускладнення отримання системи спектральних моделей задачі та, як результат, збільшення кількості невідомих в системі скінчених нелінійних рівнянь для визначення параметрів керування.

Висновки до розділу 5

1. Сформульовано постановку задачі багатокритерійної оптимізації багатоетапних динамічних процесів.
2. На основі порівняльного аналізу багатокритерійних моделей оптимізації динамічних процесів обґрунтований вибір моделі оптимізації для розв'язання задачі синтезу алгоритмів багатоетапного керування процесом виведення БЛА в задані термінальні умови у вигляді скалярної згортки частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів. Вибрана модель враховує обмеження на часткові критерії якості, забезпечує адаптацію щодо змін параметрів моделі та, у разі опуклості часткових критеріїв якості забезпечує унімодальність скалярної згортки, що значно спрощує оптимізацію багатоетапних процесів.
3. Уперше на базі удосконаленого дискретно-аналітичного відображення траєкторного руху ЛА та модифікованого методу диференціальних перетворень, з використанням нелінійної схеми компромісів розроблено численно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації для розв'язання нелінійних задач синтезу оптимального багатоетапного керування рухом літальних апаратів. Запропонований підхід дає можливість спростити процес знаходження розв'язку нелінійної задачі оптимізації та звести проблему векторної оптимізації до розв'язання скінченої системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування.
4. Синтезовано алгоритм багатокритерійного керування багатоетапним процесом виведення АКС «Оріль» на орбіту, що забезпечує компромісний розв'язок між термінальними помилками виведення та тепловими навантаженнями на поверхні АКС.
5. Моделюванням на ЕОМ обґрунтовано працездатність, ефективність та адаптивність запропонованого комбінованого алгоритму, складеного з синтезованих модифікованим методом диференціальних перетворень алгоритмів термінального та багатокритерійного керування виведенням АКС «Оріль» на орбіту. Показано, що комбінований алгоритм, порівняно з

термінальним, забезпечує зниження теплового потоку на 43%, швидкісного напору на 19%, максимальної піднімальної сили на 3% та забезпечує таку саму точність виведення в задані кінцеві умови практично за той самий час, витрачаючи, при цьому, більше палива усього на 0,12 %.

6. Синтезовано алгоритм багатокритерійного керування багатоетапним процесом зльоту БАЛА з виведенням на задану висоту, що забезпечує компромісний розв'язок між термінальними помилками виведення та енергетичними витратами на підняття апарату на задану висоту.
7. Моделюванням на ЕОМ обґрунтовано працездатність, ефективність та адаптивність комбінованого алгоритму, складеного з алгоритмів багатокритерійного та термінального керування процесом зльоту БАЛА з підніманням на задану висоту. Встановлено, що комбінований алгоритм, порівняно з термінальним, забезпечує зниження витрат енергії на піднімання апарату на висоту 350 м на 6% та дозволяє отримати більшу горизонтальну швидкість наприкінці процесу піднімання. Зниження витрат енергії збільшується із збільшенням висоти піднімання.
8. Дослідження процесів виведення БАЛА в задані термінальні умови при дії різних варіантів вітрових збурень показало, що комбіновані алгоритми забезпечують виведення з припустимою точністю:
 - АКС «Оріль» на задану орбіту за припустимих значень аеродинамічних та теплових навантажень на конструкцію апарату;
 - БАЛА на задану висоту за припустимих витратах енергії з досягненням максимальної горизонтальної швидкості.
9. Встановлено, що застосування зміщених ДТ-перетворень до багатокритерійного синтезу алгоритмів багатоетапного керування рухом літальних апаратів дозволяє підвищити точність моделювання динамічного процесу за обмеженої кількості дискрет диференціального спектру. Однак, у той самий час, значно ускладнюється система спектральних моделей і, як результат, збільшується кількість невідомих в системі скінчених нелінійних рівнянь для визначення параметрів керування.

Список публікацій здобувача за матеріалами п'ятого розділу

1. Гусинін А. В. Багатокритеріальна оптимізація керування рухом багаторежимних літальних апаратів / А. В. Гусинін // *Технология приборостроения*. – 2011. - Т.2. - С. 3-5.
2. Gusynin A. The system of injection of subminiature satellites (nanosatellites) to near-earth orbit on the basis of AN-124-100 and AN-225 airplane / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko/ S. Chumachenko, I. Chekanova, I. Alexeeva // *Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об'єктах критичної інфраструктури: II міжнародна науково-практична конференція, 26-28 травня 2016 г.* – К., 2016. – С. 278-292.
Особистий внесок здобувача: алгоритм багатокритеріальної оптимізації процесу керування виведенням АКС з наносупутниками на навколосезну орбіту.
3. Gusynin A. The differential-and-taylor model of multicriterion optimization by control launch into orbit of multimode aerospace system / A. Gusynin // *Науковий вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка»*. – 2016. - № 1-2 (11). – С. 104 -118.
4. Gusynin A. The method of injection of subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on An-124-100 and An-225 airplanes / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko, S. Chumachenko // *Methods and Systems of Navigation and Motion Control: IEEE 4th International Conference, October 18-20, 2016.* – К., 2016. – P. 200-205. – doi:10.1109/ MSNMC. 2016.7783142.
Особистий внесок здобувача: метод багатокритеріальної оптимізації процесу керування виведенням транспортно-космічної системи з наносупутниками на орбіту.
5. Гусынин А. В. Снижение аэротермодинамических нагрузок на конструкцию многорежимной транспортно-космической системы путем многокритериальной оптимизации траекторного управления / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // *Материалы и покрытия в экстремальных условиях: исследования, применение, экологически чистые технологии производства и утилизации изделий: VII международная конференция, 24-28 сентября 2012 г.: тезисы доп.* – Кацивели (Украина), 2012. – С. 82.

Особистий внесок здобувача: метод багатокритеріальної оптимізації керування виведенням транспортно-космічної системи на орбіту.

6. Гусынин А. В. Многокритериальная оптимизация процесса выведения на орбиту многорежимной авиационно-космической системы на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 12-а Українська конференція з космічних досліджень, 3-7 сентября 2012 г.: тези доп. – Евпатория (Украина), 2012. – С. 115.

7. Гусынин А. В. Комбинированное управление выведением многорежимной авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин. В. П. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 25-29 мая 2012 г.: тези доп. – Евпатория (Украина), 2012. - С. 476.

Особистий внесок здобувача: комбінований алгоритм керування виведенням АКС на орбіту.

8. Гусынин А.В. Многокритериальная оптимизация движения автоматически управляемого аэростатического летательного аппарата / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Е. Н. Тачинина // Проблеми інформатизації та управління. – 2015. - Т.4(52). - С. 22-30.

Особистий внесок здобувача: розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації багатоступінчастого руху БАЛА.

9. Гусынин А. В. Метод многокритериальной оптимизации управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // Проблеми інформаційних технологій. – 2015. – №02(016). – С. 97-102.

10. Гусинін А.В. Оптимальне комбіноване керування автономним аеростатичним літальним апаратом / А.В. Гусинін, В.П. Гусинін // The scientific heritage. – 2020. – Vol.1, № 54 (54). – С. 39-47.

Особистий внесок здобувача: оптимальне комбіноване керування автономним аеростатичним літальним апаратом на етапі зльоту.

РОЗДІЛ 6

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ РУХОМ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ЗА НАЯВНОСТІ ЗБУРЕНЬ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ІГРОВОГО ПІДХОДУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

6.1. Переваги застосування диференціально-ігрових моделей

Синтез алгоритмів оптимального багатоетапного керування траєкторним рухом ЛА на етапі їх виведення у задані термінальні умови при наявності збурень є складною проблемою. При цьому, як правило, відсутня апріорна інформація щодо компонент зовнішніх збурень. Водночас, високі вимоги до термінальних параметрів потребують врахування впливу збурень на досягнення цілей керування.

Одним із способів розкриття невизначеності, пов'язаної з непередбаченою дією зовнішніх збурень і зміною параметрів траєкторного багатоетапного руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови, є, як зазначено у розділі 1, застосування гарантовано-адаптивного підходу до синтезу алгоритмів керування. Цей підхід, на відміну від стандартних методів адаптивного керування, ґрунтується на використанні методів теорії диференціальної гри. Розкриття невизначеності базується на використанні принципу максимального гарантованого результату [151-156] за найбільш несприятливих умов, які можуть мати місце при впливі збурень та яким приписується цілеспрямована поведінка протидіючого гравця.

Сумісне використання методів теорії диференціальних ігор та математичного апарату диференціальних перетворень дає змогу значно спростити розв'язання нелінійної задачі оптимального керування рухом ЛА при впливі невизначених збурень. Ефективність та переваги даного підходу до синтезу алгоритмів оптимального керування траєкторним рухом ЛА при дії невизначених збурень із застосуванням диференціально-ігрових моделей та модифікованого методу диференціальних перетворень обумовлені низкою обставин:

- диференціально-ігрові моделі відкривають можливості дослідження оптимального багатоетапного руху ЛА при дії невизначених збурень, адекватно

відображають антагонізм інтересів учасників гри. Ігровий підхід гарантує досягнення термінальних умов динамічного процесу за будь-яких припустимих реалізаціях вектору збурень, тому що синтез алгоритмів оптимального керування орієнтовано на найбільш несприятливі умови дії збурень;

- застосування операційного модифікованого методу диференціальних перетворень дає змогу розв'язувати складні диференціально-ігрові задачі в області зображень з відсутнім неперервним аргументом і зводити їх до більш простих, які легко розв'язуються відомими методами. При цьому, на відміну від інших операційних методів, область застосування модифікованого методу диференціальних перетворень розповсюджується й на нелінійні диференціальні рівняння;
- з'являється можливість отримання розв'язку задачі диференціальної гри в аналітичному, чисельно-аналітичному та числовому вигляді за відсутності методичної похибки методу. Відсутність методичної похибки забезпечує достовірність методів та адекватність диференціально-ігрової моделі реальним процесам.

Синтез гарантовано-адаптивних алгоритмів оптимального багатоетапного керування ЛА при дії невизначених збурень методами теорії диференціальної гри та математичного апарату диференціальних перетворень ґрунтується на наявності диференціально-ігрової моделі динамічного процесу, що містить: систему нелінійних диференціальних рівнянь траєкторного руху ЛА; цілі гравців у вигляді функціоналів, що визначені на розв'язках системи диференціальних рівнянь руху; область припустимих керувань гравців у вигляді класу функцій, на які покладені обмеження; область припустимих змін параметрів руху, на які покладені обмеження; інформацію, що доступна гравцям - початкові та термінальні умови процесу керування; умови спряження попередніх та наступних підінтервалів, з яких складається багатоетапний процес керування.

6.2. Диференціально-ігрова модель процесу багатоетапного керування

Математична модель оптимального процесу багатоетапного керування траєкторним рухом ЛА на i -му підінтервалі виведення у задані термінальні умови містить опис руху апарата у вигляді векторного нелінійного диференціального рівняння:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{L_i}(t, x_i, u_i, v_i) + f_{N_i}(t, x_i, u_i, v_i), \quad x_i(t_{i-1}) = x_i^0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (6.1)$$

де $x_i = x_i(t)$ – n -вимірний вектор стану; $u_i = u_i(t)$ – m -вимірний вектор керування (стратегія першого гравця), $m < n$; $v_i = v_i(t)$ – l -вимірний вектор невизначених збурень (протидіюча стратегія другого гравця); $f_{L_i}(t, x_i, u_i, v_i)$, $f_{N_i}(t, x_i, u_i, v_i)$ – неперервні та неперервно диференційовані за сукупністю змінних t, x_i, u_i, v_i вектор-функції, які є відповідно лінійною та нелінійною складовою узагальненої сили; $t \in [t_{i-1}, t]$ – час процесу керування на i -му підінтервалі виведення; $[t_0, T]$ – відрізок, на якому розглядається процес керування, граничне значення часу T якого не фіксоване.

Задача оптимального термінального керування полягає у визначенні на кожному підінтервалі вектора оптимального програмного керування $u_i^*(t)$ та фазової траєкторії $x_i^*(t)$, які за заданими диференціальними зв'язками (6.1) забезпечують оптимальне багатоетапне переведення ЛА з початкового стану $x_1(t_0) = x_1^0$ в кінцевий (термінальний) стан $x_r(T)$, визначений у момент часу $t = T$ q -мірним ($q \leq n$) векторним рівнянням:

$$S[T, x_r(T)] = 0. \quad (6.2)$$

та забезпечують мінімізацію функціоналу:

$$I = G[T, x_r(T)] + \sum_{i=1}^r \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i) dt, \quad (6.3)$$

де задані функції G та Φ_i мають неперервні частинні похідні за x_i, u_i, v_i . Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховуються під час обрання вигляду

функціоналу (6.3). Спряження кінцевих умов попередніх та початкових умов наступних підінтервалів процесу керування задається у формі заданих крайових умов:

$$\varphi_i[x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i] = 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (6.4)$$

Розглянемо задачу термінального керування (6.1)-(6.4) як математичну модель диференціальної гри двох гравців з протилежними інтересами. Рух ЛА, що описується диференціальним рівнянням (6.1), залежить від стратегії керування першого гравця $u_i(t)$ та від вибору другим гравцем вектору збурень (стратегії) $v_i(t)$. Задача першого гравця полягає у такому переведенні об'єкту керування (6.1) з початкового стану $x_i(t_{i-1}) = x_i^0$ в термінальний стан (6.2), який доставляє мінімум (максимум) функціоналу (6.3) за умови максимізації (мінімізації) його під час обрання вектору збурень $v_i(t)$ другим гравцем. Функції $u_i(t), v_i(t)$ називаються програмними стратегіями гравців. Вважаємо, що обмеження на стратегії гравців враховано при обранні вигляду функціоналу (6.3).

Пара стратегій гравців u_i^* і v_i^* називається оптимальною, якщо має місце співвідношення (сідлова точка) [151, 283]:

$$I(u_i^*, v_i) \leq I(u_i^*, v_i^*) \leq I(u_i, v_i^*). \quad (6.5)$$

Диференціальна гра, у якій існує сідлова точка (6.5), володіє властивістю, що будь-яке відхилення від оптимального керування одним гравцем призводить до зниження його виграшу за умови обрання оптимального керування другим гравцем.

Необхідні умови оптимальності стратегій u_i^* і v_i^* мають вигляд:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_i} = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial u_i^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial v_i^2} \leq 0, \quad (6.7)$$

Співвідношення (6.6) і (6.7), в якому має місце суворі нерівність, є достатніми умовами оптимальності. У подальшому будемо розглядати тільки такі математичні моделі (6.1)-(6.4), які задовольняють достатнім умовам оптимальності (6.6), (6.7).

Стратегії гравців u_i^* і v_i^* , що задовольняють достатнім умовам, забезпечують існування сідлової точки (6.5) диференціальної гри (6.1)–(6.4).

З виразу (6.5) видно, що довільний закон зміни вектору збурень, відмінний від оптимального v_i^* , не погіршує якість процесу керування об'єктом, яке досягається за оптимального керування u_i^* . Тому керування u_i^* гарантує якість процесу керування не гірше оцінки (u_i^*, v_i^*) в умовах дії довільних обмежених збурень. Враховуючи, що керування u_i^* забезпечує отримання гарантованої оцінки якості процесу керування та адаптивність до конкретного вигляду дії збурень, то таке керування u_i^* є гарантовано-адаптивним [157, 158].

Моделювання процесу багатоетапного керування БЛА в формі диференціальної гри знімає невизначеність, що викликана дією збурень. Зазначимо, що розкриття невизначеності досягається ціною ускладнення математичної моделі і процесу синтезу алгоритмів керування, в результаті чого, крім оптимального керування u_i^* , необхідно визначити закон зміни вектора збурень v_i^* , що описує максимальну протидію цілям термінального керування.

Синтез алгоритмів оптимального керування багатоетапним рухом БЛА з використанням диференціально-ігрової моделі (6.1)–(6.7) являє собою складну задачу. Відомі дослідження [151,156,283-286] з використання методів теорії диференціальних ігор для керування ЛА в умовах дії невизначених збурень базуються, звичайно, на отриманні чисельних результатів шляхом інтегрування вихідних диференціальних рівнянь руху. Це не дозволяє отримати аналітичні розв'язки задачі та ускладнює розв'язання у реальному часі. Аналітичні розв'язки диференціальних ігор отримано, в основному, для випадку опису траєкторного руху ЛА лінійними диференціальними рівняннями та обранням критерію у вигляді квадратичного функціоналу [151,154-156].

Нижче пропонується чисельно-аналітичний метод побудови оптимальних програмних стратегій та синтезу ігрових алгоритмів термінального керування БЛА в умовах максимальної протидії збурюванню, що не потребує для своєї реалізації

чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь та зберігає потенційну можливість отримання точного розв'язку диференціальної гри. Метод базується на модифікованому методі диференціальних перетворень функцій та рівнянь, враховує багатоетапність термінального керування та спрощує переведення вихідної нелінійної математичної моделі в область зображень за рахунок апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь руху поліномами Адоміана.

6.3. Метод побудови оптимальних програмних стратегій

Розглянемо задачу побудови оптимальних програмних стратегій термінального керування БЛА в умовах максимальної протидії збурюванню. Вважаємо, що усі функції часу, які описують процес багатоетапного керування БЛА на i -му підінтервалі виведення, є аналітичними. Вектори оптимального програмного керування $u_i^*(t)$ і протидіючого збурення $v_i^*(t)$, що задовольняють умовам (6.6) і (6.7), визначимо в класі аналітичних функцій $u_i(t, A_i)$ і $v_i(t, B_i)$, де $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ і $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iM})$ – вектори вільних параметрів керувань. Оберемо масштабну сталу $h = T_i$ та покладемо $t_0 = 0$. Диференціальне рівняння (6.1) на основі перетворень (2.6) в області зображень подається в формі наступної спектральної моделі:

$$\begin{aligned} X_i(k+1, A_i, B_i, X_0) &= \frac{T_i}{k+1} \{ \underline{f}_{L_i} [t, X_i(k, A_i, B_i), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)] + \\ &+ \underline{f}_{N_i} [t, X_i(k, A_i, B_i), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)] \} \\ X_i(0) &= X_i^0; X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

У виразі (6.8) диференціальне зображення нелінійної складової $\underline{f}_{N_i} [t, X_i(k, A_i, B_i), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)]$ визначається з використанням поліномів Адоміана за допомогою співвідношень (2.21') або (2.22') залежно від структури нелінійної складової рівняння (6.1). Спектральна модель (6.8) є рекурентним виразом, що дає змогу визначити диференціальний спектр $X_i(k, A_i, B_i, X_i^0)$ функції $x_i(t, A_i, B_i)$ за диференціальними спектрами векторів керування $U(k, A_i)$ та $V(k, B_i)$.

Застосувавши ДП (2.6) до функцій $u_i(t, A_i)$ та $v_i(t, B_i)$ отримаємо їх диференціальні спектри:

$$\underline{u}_i(\tau, A_i) = U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}. \quad (6.9)$$

$$\underline{v}_i(\tau, B_i) = V_i(k, B_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k v_i(t_{i-1} + \tau, B_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}. \quad (6.10)$$

Врахуємо, що згідно властивостей диференціальних перетворень, алгебраїчна сума усіх компонентів (дискрет) диференціального спектра довільної аналітичної функції в точці $t = t_v$ дорівнює нульовій дискреті диференціального спектра функції в точці $t_{v+1} = t_v + h$ або значенню оригіналу функції у тій самій точці. Тоді вектор кінцевого стану $x_i(T_i, A_i, B_i)$ наприкінці кожного підінтервалу керування визначається сумою усіх компонент (дискрет) диференціального спектра $X_i(k, A_i, B_i, X_i^0)$:

$$x_i(T_i, A_i, B_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, B_i, X_i^0). \quad (6.11)$$

Рівняння кінцевого стану (6.2) з урахуванням виразу для спряження кінцевих попередніх та початкових наступних ділянок процесу керування (6.4), а також виразу для вектору стану наприкінці кожної ділянки (6.11) перетворюється до вигляду:

$$S[T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, x_0] = 0. \quad (6.12)$$

Для i -го підінтервалу маємо наступне рівняння кінцевого стану:

$$S_i[T_i, A_i, B_i, x_i^0] = 0 \quad (6.12')$$

Дана термінальна умова у неявній формі визначає на кожному підінтервалі q -компонент векторів вільних параметрів A_i і B_i у вигляді функцій від T_i та x_i^0 . Час T_i та решту компонент $(M+N-q)$ векторів вільних параметрів визначимо з умов (6.6) та (6.7) стаціонарності функціоналу (6.3). Диференціальні перетворення (2.6) функціоналу (6.3) подають його у вигляді функції часу T , векторів невизначених параметрів A, B та початкових умов x_0 :

$$I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0) = G[T, X_T(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)] + \sum_{i=1}^r T_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_i[t_i, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)]}{k+1}. \quad (6.13)$$

Умови стаціонарності (6.6) та (6.7) функції (6.13) задають систему рівнянь для визначення кінцевого часу T і решти компонент векторів A_i і B_i :

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial T} = 0, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial a_{ij}} = 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad q+1 \leq j \leq N, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial b_{il}} = 0, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (6.16)$$

Розв'язання нелінійних рівнянь (6.12), (6.14)-(6.16), у випадку їх сумісності, дає змогу знайти для кожної ділянки процесу керування момент часу T_i та всі компоненти довільних параметрів A_i і B_i програмних стратегій обох гравців. Після цього перевіряються достатні умови (6.6) та (6.7) оптимальності стратегій гравців $u_i(t, A_i)$ та $v_i(t, B_i)$ за умови суворої нерівності у виразі (6.7). Коли система рівнянь (6.12), (6.14)-(6.16) несумісна, то диференціальна гра (6.1)-(6.7) немає розв'язку за обраного виду функцій $u_i(t, A_i)$ та $v_i(t, B_i)$. У цьому випадку необхідно змінити вигляд функції керування з довільними параметрами або розширити розмірність векторів довільних параметрів.

Основна перевага запропонованого підходу до побудови оптимальних програмних стратегій багатоетапного керування траєкторним рухом БЛА полягає у виключенні необхідності інтегрування диференціальних рівнянь (6.1), замінюючи цю трудомістку у обчислювальному відношенні операцію обчисленням дискрет диференціального спектра за рекурентним виразом (6.8). Це дає змогу розв'язувати задачу синтезу програмних стратегій гравців без використання функції часу. Крім цього, метод припускає аналітичні перетворення, які дають змогу істотно скоротити обсяг обчислень для отримання розв'язку в чисельному вигляді, та дає змогу проводити неперервні обчислення програмних стратегій гравців у реальному масштабі часу та отримати керування зі зворотним зв'язком, що враховує вплив

різних збурень. Похибки, що виникають через обмеження кількості врахованих дискрет диференціальних спектрів і розмірності векторів вільних параметрів, можуть бути зведені до необхідного рівня під час уточнення розв'язку, наприклад, градієнтним методом.

Метод також дає потенційну можливість отримати точний розв'язок диференціальної гри (6.1)-(6.7) за умови точного відображення всіх функцій часу, які описують процес багатоетапного термінального керування, скінченим диференціальним спектром, враховуючи те, що диференціальні перетворення (2.6) є точним операційним методом [175-177].

6.4. Програмний алгоритм керування аеростатичним літальним апаратом за максимальній протидії збуренням

Розглянемо задачу термінального багатоетапного керування процесом виведення БАЛА у задані термінальні умови за дії невизначених збурень в формі математичної моделі диференціальної гри. За вихідну математичну модель траєкторного руху приймемо спрощену модель. Вважаємо, що БАЛА знаходиться під дію аеростатичної піднімальної сили, сумарної сталої сили тяги та сили ваги. Аеродинамічну піднімальну силу, враховуючи те, що вона значно менша за аеростатичну силу, не враховуємо. Силу лобового опору, у першому наближенні, для ілюстрації ігрового підходу до розв'язку даної задачі, не враховуємо. Сумарна сила тяги $P_{\Sigma} = n \cdot m_i \cdot g \cdot \chi$ складається з n двигунів однакової тяги; $n \cdot \chi$ - тягоозброєність апарату, m_i - маса апарата на i -му підінтервалі траєкторії, g - гравітаційне прискорення. Розглянемо плаский рух БАЛА в інерційній системі координат OXY . Компоненти швидкості позначимо через V_x та V_y . Як керуючу функцію $\varphi_i(t)$ оберемо кут напрямку сумарної тяги з віссю OX . У якості невизначених збурень розглядатимемо вплив варіації рівня тяги одного з n двигунів до його повної відмови. Зміну рівня тяги одного з двигунів поставимо в

залежність від функції збурення $1-\beta_i^2(t)$, де $\beta_i(t) = \frac{P_1(t)}{P_H}$, $P_1(t)$ – тяга одного двигуна;

P_H – номінальна тяга одного двигуна. За прийнятих припущень траєкторний рух БАЛА на i -му підінтервалі описується наступною математичною моделлю диференціальної гри [287]:

$$\dot{L}_i = V_{X_i}, \quad L_i(0) = 0, \quad (6.17)$$

$$\dot{V}_{X_i} = \zeta_{i_1} (n-1 + \beta_i^2) \cos \varphi_i, \quad V_{X_i}(0) = 0, \quad (6.18)$$

$$\dot{H}_i = V_{Y_i}, \quad H_i(0) = 0, \quad (6.19)$$

$$\dot{V}_{Y_i} = \zeta_{i_2} (n-1 + \beta_i^2) \sin \varphi_i + \tilde{\phi}_i - \zeta_{i_3} g, \quad V_{Y_i}(0) = 0, \quad (6.20)$$

де $\zeta_{i_1} = \frac{1}{m_i + m_x} g \cdot \chi$, $\zeta_{i_2} = \frac{1}{m_i + m_y} g \cdot \chi$, $\zeta_{i_3} = \frac{m_i}{m_i + m_y}$, m_x, m_y - приєднанні маси апарату

вздовж осей OX, OY - відповідно; $\tilde{\phi}_i = \frac{1}{m_i + m_y} \gamma U$ – відносна аеростатична піднімальна

сила; U - об'єм корпусу апарату; $\gamma = \gamma_n - \gamma_z$; γ_n, γ_z - питома вага повітря та несучого газу відповідно; $\varphi_i = \varphi_i(t)$ – програмна стратегія першого гравця, $\beta_i = \beta_i(t)$ – програмна стратегія другого гравця.

Задача термінального керування полягає у переведенні БАЛА із заданих початкових умов в площині OXY на траєкторію, паралельну осі OX та розташовану на заданій висоті H_{T_i} від неї з максимізацією горизонтальної швидкості наприкінці кожного підінтервалу виведення.

Як програмну стратегію перший гравець обирає керування $\varphi_i(t)$ БАЛА з умови досягнення в момент часу T_i максимального значення критерію:

$$I_i = V_{X_{T_i}} - \frac{\lambda}{2} T_i^2 \beta_i, \quad \lambda > 0 = const \quad (6.21)$$

та заданих граничних умов:

$$H(T_i) = H_{T_i}, \quad (6.22)$$

$$V_Y(T_i) = V_{Y_{T_i}}. \quad (6.23)$$

Стратегія другого гравця протилежна цілі керування БАЛА та полягає у такому виборі функції збурення $1-\beta_i^2(t)$, що моделює падіння рівня тяги одним з n двигунів, який забезпечує мінімальне значення критерію (6.21).

В критерії (6.21) константа λ враховує намір першого гравця мінімізувати час T_i виведення БАЛА залежно від режиму роботи двигунової установки. У номінальному режимі роботи двигунової установки та за часткової втрати тяги одним з двигунів, перший гравець максимізує критерій (6.21) та намагається виконувати граничні умови (6.22) та (6.23). У випадку відмови одного з двигунів на i -му підінтервалі ($\beta_i=0$), перший гравець обирає керування тільки з умови досягнення максимального значення горизонтальної швидкості та виконання граничних умов (6.22) та (6.23), без урахування часу виведення.

Досліджуємо вплив втрати тяги одним з двигунів в момент початку виведення. Припускаємо, що функція збурення є сталою та починає діяти в початковий момент часу $t_0=0$ виведення апарату. Базуючись на математичній моделі диференціальної гри (6.17)-(6.23) виконаємо синтез програмних алгоритмів керування гравців запропонованим у п. 6.3 методом.

Алгоритм керування першого гравця на i -му підінтервалі будемо шукати у вигляді:

$$\varphi_i(t, A_i) = a_{i_0} + a_{i_1} t, \quad (6.24)$$

а стратегію другого гравця - у формі сталої функції:

$$\beta_i(t, B_i) = b_{i_0}. \quad (6.25)$$

Для складання спектральної моделі диференціальної гри (6.17)-(6.23) запишемо рівняння (6.18), (6.20) у вигляді диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\ddot{V}_{x_i} = -\frac{a_{i_1} \cdot \zeta_{i_1}}{\zeta_{i_2}} (\dot{V}_{y_i} + \zeta_{i_3} g - \tilde{\phi}), \quad (6.26)$$

$$\ddot{V}_{y_i} = \frac{\zeta_{i_2} \cdot a_{i_1}}{\zeta_{i_1}} \dot{V}_{x_i}. \quad (6.27)$$

Рівняння (6.26), (6.27) отримано шляхом диференціювання виразів (6.18), (6.20) з урахуванням (6.24), (6.25).

Диференціальні перетворення (2.6) рівнянь (6.17), (6.19), (6.26), (6.27) за $h=T_i$ та $t=0$ з урахуванням апроксимації нелінійних членів рівнянь (складові, що містять компоненти $\sin \varphi_i, \cos \varphi_i$) поліномами Адоміана згідно виразу (2.21') визначають їх спектральні моделі в наступному вигляді:

$$\underline{L}_i(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \underline{V}_{X_i}(k), \quad (6.28)$$

$$\frac{(k+2)!}{k!T_i^2} \underline{V}_{X_i}(k+2) = -a_{i_1} \frac{\zeta_{i_1}}{\zeta_{i_2}} \left[\frac{k+1}{T_i} \underline{V}_{Y_i}(k+1) + (\zeta_{i_3} g - \tilde{\phi}) \underline{v}(k) \right], \quad (6.29)$$

$$\underline{H}_i(k+1) = \frac{T_i}{k+1} \underline{V}_{Y_i}(k), \quad (6.30)$$

$$\frac{(k+2)!}{k!T_i^2} \underline{V}_{Y_i}(k+2) = a_{i_1} \frac{\zeta_{i_2}}{\zeta_{i_1}} \frac{k+1}{T_i} \underline{V}_{X_i}(k+1), \quad (6.31)$$

$$\text{де } \underline{v}(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}, \quad k=0,1,2,\dots$$

За рекурентними виразами (6.28)-(6.31), з урахуванням керувань (6.24), (6.25) та нульових початкових умов отримуємо диференціальні спектри змінних L, H, V_X, V_Y :

$$L_i(0)=0, \quad L_i(1)=0, \quad L_i(2) = \frac{\zeta_{i_1} T_i^2}{2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}, \quad L_i(3) = -\frac{a_{i_1} T_i^3}{6} \zeta_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0}, \dots \quad (6.32)$$

$$H_i(0)=0, \quad H_i(1)=0, \quad H_i(2) = \frac{T_i^2}{2} \left[\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\phi} - \zeta_{i_3} g \right] \quad (6.33)$$

$$H_i(3) = \frac{a_{i_1} T_i^3}{6} \zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}, \dots$$

$$V_{X_i}(0)=0, \quad V_{X_i}(1) = \zeta_{i_1} T_i (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}, \quad V_{X_i}(2) = -\frac{a_{i_1} T_i^2}{2} \zeta_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0}, \dots \quad (6.34)$$

$$V_{Y_i}(0)=0, \quad V_{Y_i}(1) = T_i \left[\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\phi} - \zeta_{i_3} g \right] \quad (6.35)$$

$$V_{Y_i}(2) = \frac{a_{i_1} T_i^2}{2} \zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}, \dots$$

Граничні умови (6.22) і (6.23) на основі виразу (6.11) подамо через диференціальні спектри (6.33) і (6.35):

$$H(T_i) = \frac{T_i^2}{2} \left[\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\phi} - \zeta_{i_3} g \right] - \frac{a_{i_1} T_i^3}{6} \zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} + \dots = H_{T_i}, \quad (6.36)$$

$$V_Y(T_i) = T_i \left[\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\phi} - \zeta_{i_3} g \right] + \frac{a_{i_1} T_i^2}{2} \zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} + \dots = V_{Y_{T_i}}. \quad (6.37)$$

В останніх виразах обмежимося двома ненульовими дискретими диференціальних спектрів змінних H, V_Y . Тоді отримаємо два рівняння для визначення вільних параметрів керування (6.24) для першого гравця. З рівняння (6.37) знайдемо параметр a_{i_1} функції керування (6.24):

$$a_{i_1} = -\frac{2}{T_i} \operatorname{tg} a_{i_0} - \frac{2}{T_i} \frac{[\tilde{\phi} - \zeta_{i_3} g]}{\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}} + \frac{2}{T_i^2} \frac{V_{Y_{T_i}}}{\zeta_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0}}. \quad (6.38)$$

Для часткового випадку, за $V_{Y_{T_i}} = 0$ та $g = 0$, відсутності аеростатичної сили ($\tilde{\phi} = 0$) приєднаних мас ($m_x = m_y = 0, \zeta_{i_3} = 1$) та функції збурень, термінальна задача (6.17)-(6.23) аналогічна термінальній задачі виведення матеріальної точки на орбіту навколо безатмосферної планети, що розглянута в роботі [268], в якій отримано аналітичний розв'язок:

$$a_1 = -\frac{2}{T} \operatorname{tg} a_0,$$

що впливає з більш загального виразу (6.38).

Якщо в останньому випадку врахувати гравітаційне прискорення g , то отримаємо розв'язок термінальної задачі виведення матеріальної точки на орбіту навколо безатмосферної планети, що розглянута в роботі [25] у формі математичної моделі диференціальної гри:

$$a_1 = -\frac{2}{T} \operatorname{tg} a_0 + \frac{2}{\alpha T} \frac{g}{(n-1+b_0^2) \cos a_0}.$$

Зазначимо, що розв'язок (6.38) диференціальної гри (6.17)-(6.23) є наближенням, тому що були використані лише перші дві ненульові дискрети диференціальних спектрів змінних параметрів. Крім кількості врахованих дискрет, на точність розв'язку також впливає вибір розмірності векторів довільних параметрів для аналітичного опису стратегій гравців $\varphi(t, A), \beta(t, B)$.

Підставляючи диференціальний спектр (6.34) у вираз (6.11) знайдемо граничні значення горизонтальної складової швидкості:

$$V_{x_{T_i}} = \varsigma_{i_1} T_i (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} - \frac{a_{i_1} T_i^2}{2} \varsigma_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \dots \quad (6.39)$$

Обмежимося у виразі (6.39) першими двома членами та підставимо їх в критерій (6.21):

$$I_i = \varsigma_{i_1} T_i (n-1+b_{i_0}^2) \left(\cos a_{i_0} - \frac{a_{i_1} T_i}{2} \sin a_{i_0} \right) - \frac{\lambda}{2} T_i^2 b_{i_0}. \quad (6.40)$$

З урахуванням співвідношення (6.38), вираз (6.40) подамо у вигляді:

$$I_i = \frac{\varsigma_{i_1} T_i (n-1+b_{i_0}^2)}{\cos a_{i_0}} + T_i \frac{\varsigma_{i_1}}{\varsigma_{i_2}} \tilde{\phi} \operatorname{tga}_{i_0} - T_i \frac{\varsigma_{i_1}}{\varsigma_{i_2}} \varsigma_{i_3} g \cdot \operatorname{tga}_{i_0} - \frac{\lambda}{2} T_i^2 b_{i_0} - \frac{\varsigma_{i_1}}{\varsigma_{i_2}} V_{Y_{T_i}} \operatorname{tga}_{i_0}. \quad (6.41)$$

Підставляючи (6.41) в умови стаціонарності критерія (6.14) отримуємо зв'язок між вільним параметром a_{i_0} та часом підйому T_i на i -му підінтервалі зльоту:

$$\frac{\varsigma_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2)}{\cos a_{i_0}} + \frac{\varsigma_{i_1}}{\varsigma_{i_2}} \tilde{\phi} \operatorname{tga}_{i_0} - \frac{\varsigma_{i_1}}{\varsigma_{i_2}} \varsigma_{i_3} g \cdot \operatorname{tga}_{i_0} - \lambda T_i b_{i_0} = 0. \quad (6.42)$$

З урахуванням обмеження двома членами в рівнянні (6.36) та виключенням з нього вільного параметра a_{i_1} згідно (6.38), отримаємо вираз для визначення тривалості i -го підінтервалу процесу виведення:

$$T_i = \sqrt{\frac{6HT_i}{\varsigma_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\phi} - \varsigma_{i_3} g}}. \quad (6.43)$$

З рівняння (6.16) для критерія (6.41) знайдемо вільний параметр функції збурення на i -му підінтервалі:

$$b_{i_0} = \frac{\lambda T_i}{4\varsigma_{i_1}} \cos a_{i_0}. \quad (6.44)$$

Таким чином, отримані вирази (6.38), (6.42)-(6.44) для визначення вільних параметрів a_{i_0} і a_{i_1} керуючої функції (6.24) першого гравця, тривалості T_i та параметру b_{i_0} стратегії другого гравця (6.25) на i -му підінтервалі багатоетапного процесу виведення. Проведена перевірка достатніх умов (6.6), (6.7) для критерію (4.40) показала, що для диференціальної гри (6.17)-(6.23) існує сідлова точка (6.5) за вільними параметрами стратегії гравців (6.24) та (6.25).

Відновлення функцій часу за диференціальними спектрами може бути виконано різними способами. Компоненти вектора оптимальної траєкторії можуть відновлюватися у вигляді відрізків степеневих рядів Тейлора за диференціальними спектрами (6.32)-(6.35) та виразу (1.8):

$$\begin{aligned}
 L_i(t) &= \frac{\varsigma_{i_1} t^2}{2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} - \frac{a_{i_1} t^3}{6} \varsigma_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0}, \dots \\
 V_{X_i}(t) &= \varsigma_{i_1} t (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} - \frac{a_{i_1} t^2}{2} \varsigma_{i_1} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \dots \\
 H_i(t) &= \frac{t^2}{2} [\varsigma_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\varphi} - \varsigma_{i_3} g] + \frac{a_{i_1} t^3}{6} \varsigma_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$V_{Y_i}(t) = t [\varsigma_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \sin a_{i_0} + \tilde{\varphi} - \varsigma_{i_3} g] + \frac{a_{i_1} t^2}{2} \varsigma_{i_2} (n-1+b_{i_0}^2) \cos a_{i_0} + \dots$$

або на основі обернених перетворень у формі багаточленів Лежандра, Чебишева, рядів Фур'є, Діріхле, апроксимації Паде та їх комбінацій [175-177].

Загальний розв'язок задачі термінального керування виведенням БАЛА із заданих початкових умов у задані кінцеві умови визначається у вигляді об'єднання розв'язків на підінтервалах:

$$L(t) = \sum_{i=1}^r L_i(t), H(t) = \sum_{i=1}^r H_i(t), V_X(t) = \sum_{i=1}^r V_{X_i}(t), V_Y(t) = \sum_{i=1}^r V_{Y_i}(t), \varphi(t) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(t), \beta(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i(t).$$

Розв'язання модельного прикладу диференціальної гри (6.17)-(6.23) показало, що головна перевага запропонованого підходу до синтезу алгоритмів керування багатоетапними динамічними процесами в умовах дії невизначених збурень на базі диференціальних перетворень полягає у можливості здійснювати аналітичні перетворення, що дає змогу значно скоротити об'єм обчислень для отримання розв'язку у чисельному вигляді без застосування чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь.

Спільне застосування диференціально-ігрового підходу та диференціальних перетворень до синтезу алгоритмів керування динамічними процесами в умовах дії невизначених збурень дозволяє здійснювати неперервні обчислення програмних стратегій гравців у реальному часі та отримати можливість керування динамічними

об'єктами зі зворотним зв'язком, що враховує дію різних збурень. Похибки, які виникають через обмеженість кількості врахованих дискрет диференціальних спектрів та розмірності векторів довільних параметрів програмних керувань, можуть бути знижені до необхідного рівня під час уточнення розв'язку градієнтним методом в області диференціальних спектрів.

6.5. Метод синтезу гарантовано-адаптивного багатоетапного керування

У п. 6.3 запропоновано метод побудови оптимальних програмних стратегій керування рухом БЛА при дії невизначених збурень. Метод ґрунтується на базі диференціально-ігрового підходу та диференціальних перетворень і враховує максимальну протидію збуренням. Однак не враховує зміну стану об'єкту, що відбувається протягом процесу керування під впливом невизначених збурень. Для врахування поточного стану необхідно синтезувати замкнені алгоритми керування рухом та максимальної протидії збуренням у формі позиційних стратегій гравців із зворотним зв'язком:

$$u = u(t, x), \quad v = v(t, x). \quad (6.46)$$

Відомі методи розв'язання задач теорії диференціальних ігор у формі (6.46) [151,152,283-286] базуються, звичайно, на отриманні чисельних результатів шляхом інтегрування вихідних диференціальних рівнянь руху, що не дозволяє отримати аналітичні розв'язки задачі та ускладнює розв'язання у реальному часі.

Розглянемо метод синтезу позиційних стратегій (6.46) для багатоетапного процесу керування, що базується на методах теорії диференціальної гри та модифікованому методі диференціальних перетворень, не потребує для своєї реалізації чисельного інтегрування диференціальних рівнянь і зберігає потенційну можливість отримання точного розв'язку задачі. Керування $u = u(t, x)$, що забезпечує гарантовану оцінку якості процесу керування рухом літального апарата та адаптивність до дії збурень будемо вважати гарантовано-адаптивним.

Синтез гарантовано-адаптивних алгоритмів керування виконується у два етапи. На першому етапі виконуємо синтез оптимальних алгоритмів програмного

керування $u_i^*(t)$ і максимально протидіючого збурення $v_i^*(t)$ в класі аналітичних функцій $u_i(\tau, A_i)$ і $v_i(\tau, B_i)$ всередині кожного i -го підінтервалу керування, де $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ і $B_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iM})$ – вектори вільних параметрів, τ – локальний часовий аргумент.

Оберемо масштабну сталу $h = T_i$ і прийmemo $\tau = 0$. Застосовуючи диференціальні перетворення (2.6) до функцій $u_i(\tau, A_i)$ і $v_i(\tau, B_i)$ отримаємо їх диференціальні спектри у вигляді:

$$\underline{u}_i(\tau, A_i) = U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}, \quad (6.47)$$

$$\underline{v}_i(\tau, B_i) = V_i(k, B_i) = \frac{T_i^k}{k!} \left[\frac{d^k v_i(t_{i-1} + \tau, B_i)}{dt^k} \right]_{\tau=0}. \quad (6.48)$$

Диференціальне рівняння (6.1) в області зображень на основі перетворень (2.6) подамо у формі наступної спектральної моделі:

$$X_i(k+1, A_i, B_i, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1} \{ \underline{f}_{L_i}[t, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)] + \underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)] \}, \quad (6.49)$$

$$X_i(0) = X_i^0; X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r},$$

де диференціальне зображення нелінійної складової $\underline{f}_{N_i}[t, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)]$ визначається з використанням поліномів Адаміана за допомогою співвідношень (2.21') або (2.22') залежно від структури нелінійної складової рівняння (6.1). Спектральна модель (6.49) є рекурентним виразом, що дає змогу визначити диференціальний спектр $X_i(k, A_i, B_i, X_i^0)$ вектору стану $x_i(t, A_i, B_i, x_i^0)$ за диференціальними спектрами векторів керування $U_i(k, A_i)$ та збурень $V_i(k, B_i)$.

Скористаємося властивістю диференціальних перетворень, згідно якому алгебраїчна сума усіх дискрет диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t = t_v$ дорівнює нульовій дискреті диференціального спектру функції в точці $t_{v+1} = t_v + h$ або значенню оригіналу функції в тій самій точці:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_v(k) = X_{v+1}(0) = x(t_v + h). \quad (6.50)$$

Із співвідношення (6.50) за $t_v = t_{i-1}$ і $h = T_i$ знаходимо вектор стану наприкінці кожного підінтервалу керування залежно від тривалості T_i процесу керування, вектора вільних параметрів A_i, B_i та початкових значень змінних кожного підінтервалу процесу керування:

$$x_i(T_i, A_i, B_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), i = \overline{1, r}. \quad (6.51)$$

Тоді рівняння кінцевого стану всього процесу керування (6.2) з урахуванням виразу для спряження термінальних і початкових ділянок (6.4), а також виразу для вектора стану наприкінці кожної ділянки (6.51) перетвориться до виразу [288,289]:

$$S[T, A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, B_2, \dots, B_r, x_0] = 0. \quad (6.52)$$

Дана термінальна умова в неявній формі визначає q -компонент векторів вільних параметрів A_i і B_i , $i = \overline{1, r}$, у вигляді функцій від T_i і x_i^0 . Решту $M + N - q$ компонент векторів вільних параметрів визначимо з умов (6.6)-(6.7) стаціонарності функціоналу (6.3). Подамо функціонал (6.3) на основі диференціальних перетворень (2.6) у вигляді векторів невизначених параметрів A і B [290]:

$$I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0) = G[T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0] + \sum_{i=1}^r T_i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_i[T_i, X_i(k, A_i, B_i, X_i^0), U_i(k, A_i), V_i(k, B_i)]}{k+1} \quad (6.53)$$

Умови оптимальності (6.6) функції (6.53) дають змогу отримати систему рівнянь для визначення тривалості T_i i -го підінтервалу керування та решти $M + N - q$ невідомих компонент векторів вільних параметрів A_1, A_2, \dots, A_r і B_1, B_2, \dots, B_r :

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial T} = 0, \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial a_{ij}} = 0, \quad 1 \leq i \leq r, \quad q+1 \leq j \leq N, \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial I(T, A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r, X_0)}{\partial b_{il}} = 0, \quad 1 \leq l \leq M. \quad (6.56)$$

Розв'язання системи нелінійних рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56), у випадку їх сумісності, дає змогу знайти компоненти векторів вільних параметрів $A = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ і $B = (B_1, B_2, \dots, B_r)$ програмних стратегій обох гравців для кожного підінтервалу у вигляді функцій від T_i і x_i^0 . Після цього можуть бути перевірені достатні умови (6.6), (6.7) оптимальності стратегій гравців за суворої нерівності у виразі (6.7).

У випадку, коли система рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56) є несумісною, диференціальна гра (6.1)–(6.7) не має розв'язку за обраного вигляду функцій $u_i(t, A_i)$ і $v_i(t, B_i)$. Тоді необхідно змінити вигляд функцій з вільними параметрами або розширити розмірність векторів вільних параметрів.

Таким чином, диференціальні перетворення (2.6) дають змогу отримати в аналітичній формі систему рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56) для довільних значень початкового стану x_{i_0} , моменту часу t_{i_0} та тривалості T_i кожного підінтервалу процесу керування з метою формування оптимальних програмних стратегій обох гравців $u_i(t, A_i)$ і $v_i(t, B_i)$ на цих підінтервалах та програмних стратегій гравців на всьому інтервалі керування:

$$u(t, A) = \sum_{i=1}^r u_i(t, A_i), \quad v(t, B) = \sum_{i=1}^r v_i(t, B_i).$$

На другому етапі синтезу зробимо наступне припущення [25,290]. Будемо розглядати тільки такі моделі процесу керування, в яких позиційні стратегії гравців існують та дозволяють зв'язати довільну початкову умову в межах заданої області простору із заданими термінальними умовами (6.2). Синтез позиційних стратегій поза заданої області простору стану не розглядається.

В кожний поточний момент часу t для кожного поточного стану гри $x_i(t)$ з розв'язку системи рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56) визначається для конкретного підінтервалу пара стратегій гравців, що пов'язують поточний стан гри з заданими термінальними умовами (6.2). Якщо організувати неперервний за часом процес обчислення параметрів A_i і B_i стратегій гравців з системи рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56), то на множині розв'язків можна сформулювати стратегії гравців на кожному

підінтервалі руху у вигляді функції від поточного стану гри $x_i(t)$ та тривалості ділянки T_i : $u_i[t, A_i(T_i, x_i)]$ і $v_i[t, B_i(T_i, x_i)]$. Перший гравець, який реалізує таку позиційну стратегію $u[t, A(T, x)]$, що неперервно визначається з системи рівнянь (6.52), (6.54) - (6.55), гарантує багатоступеневе керування ви веденням БЛА з досягненням заданих термінальних умов (6.2) за максимальної протидії збурюванню, вплив яких моделюється стратегією другого гравця $v[t, B(T, x)]$.

За необхідності знайти оптимальну траєкторію $x(t, A, B)$, її компоненти можуть бути визначені у вигляді відрізків рядів Тейлора або з використанням обернених диференціальних перетворень у формі багаточленів Лежандра, Чебишова, рядів Фур'є. При цьому, вільні параметри апроксимуючих функцій визначають із порівняння диференціальних спектрів компонент вектору стану з диференціальними спектрами апроксимуючих функцій. Рівняння зв'язку між вільними параметрами декількох апроксимуючих функцій та дискретами диференціального спектра невідомої функції часу наведено в [157].

Перевагою розглянутого підходу до розв'язання задач оптимального керування виведенням БЛА у задані термінальні умови при впливі невизначених збурень на базі диференціально-ігрового підходу є відсутність необхідності інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху динамічного об'єкта, заміна операції інтегрування обчисленнями за рекурентним виразом (2.6) і потенціальна можливість отримання точного розв'язку диференціальної гри (6.1)–(6.7) за умови точного відображення функцій часу скінченим диференціальним спектром. Така можливість з'являється внаслідок того, що диференціальні перетворення (2.6) є точним операційним методом.

На відміну від відомих методів, застосування математичного апарата диференціальних перетворень для розв'язання задач диференціальних ігор замінює процес знаходження позиційних стратегій гравців з розв'язку інтегрування рівнянь у часткових похідних розв'язком скінченої системи нелінійних рівнянь (6.52), (6.54) - (6.56). Крім цього, такий підхід припускає аналітичні перетворення, що дає змогу значно скоротити об'єм обчислень для отримання розв'язку, виконувати синтез

алгоритмів керування у реальному часі та отримати ефект адаптивного керування зі зворотним зв'язком, що враховує дію невизначених збурень.

6.6. Гарантовано-адаптивні алгоритми термінального керування літальними апаратами

6.6.1. Виведення аеростатичного літального апарату на задану висоту

Розв'яжемо задачу синтезу гарантовано-адаптивного алгоритму керування відхиленням вектора тяги при виведенні БАЛА на задану висоту. Синтез виконуємо запропонованим вище методом за диференціально-ігровою моделлю, що описує траєкторний рух аеростатичного апарата (3.3)-(3.11). Програмну зміну кута відхилення вектору тяги на i -му підінтервалі процесу керування φ_i подаємо як суму двох складових:

$$\varphi_i = u_i + \delta_i, \quad (6.57)$$

де u_i – керування кутом відхилення вектору тяги за відсутності впливу збурень, δ_i - приріст кута відхилення вектора тяги, що є необхідним для парирування впливу зовнішніх збурень.

Складова δ_i являє собою сумарну характеристику дій різних збурень при виведенні БАЛА у задані термінальні умови. На відміну від стохастичних моделей задач виведення БАЛА, в яких збурення подають у вигляді випадкових функцій з відомими стохастичними характеристиками [148,149], опис процесу виведення БАЛА у формі диференціальної гри не потребує апріорної інформації щодо стохастичних моделей зовнішніх збурень та гарантує досягнення заданих термінальних умов за найнесприятливішого випадку сполучення дій факторів збурень.

Припускаємо, що складовою керування u_i володіє перший гравець, а додаткова складова керування δ_i визначається діями факторів збурення, які розглядаються з позицій другого гравця, що має протилежні цілі керування.

Якість процесу керування на i -му підінтервалі будемо оцінювати функціоналом:

$$I_i = \frac{\mu_1}{2} [H_{T_i} - H_i]^2 + \frac{\mu_2}{2} [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}]^2 + \frac{\mu_3}{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u_i^2 - \lambda \delta_i^2) dt, \quad (6.58)$$

де μ_1, μ_2, μ_3 та λ – додатні вагові множники, $H_{T_i}, V_{Y_{T_i}}$ – задані кінцеві значення висоти та вертикальної швидкості апарата наприкінці i -го підінтервалу процесу керування, а H_i, V_{Y_i} – поточні значення висоти та вертикальної швидкості апарата на i -му підінтервалі процесу керування тривалістю T_i . Перші два доданка виразу (6.58) характеризують термінальні помилки за висотою та вертикальною складовою швидкості. Інтегральна складова функціонала (6.58) обмежує вибір керування БАЛА та дію факторів збурень під час керування траєкторним рухом апарату.

Задача першого гравця полягає в переведенні БАЛА із початкових умов (4.31) в задані кінцеві (4.32) з мінімальним значенням функціонала якості (6.58), за умови його максимізації другим гравцем, який імітує дію найбільш несприятливого сполучення факторів збурень.

Програмні стратегії обох гравці будемо визначати в класі аналітичних функцій:

$$u_i = c_{i0} + c_{i1}t, \quad (6.59)$$

$$\delta_i = b_{i0} + b_{i1}t, \quad (6.60)$$

де $c_{i0}, c_{i1}, b_{i0}, b_{i1}$ – параметри програмних стратегій, що підлягають визначенню.

Алгоритм програмної зміни кута відхилення вектора тяги подаємо у вигляді:

$$\varphi_i = a_{i0} + a_{i1}t, \quad (6.61)$$

де $a_{i0} = c_{i0} + b_{i0}$, $a_{i1} = c_{i1} + b_{i1}$.

Застосовуючи диференціальні перетворення (2.6) до виразу (6.61) визначимо диференціальний спектр кута відхилення вектора тяги:

$$\underline{\varphi}_i = (c_0 + b_0)b(k) + (c_1 + b_1)T_i b(k-1), \quad (6.62)$$

а застосування диференціальних перетворень (2.6) до функцій (6.59), (6.60) дають наступні дискрети їх диференціальних спектрів:

$$\underline{u}_i(0) = c_{i0}, \underline{u}_i(1) = T_i \cdot c_{i1}, \underline{u}_i(k \geq 2) = 0, \quad (6.63)$$

$$\underline{\delta}_i(0) = b_{i0}, \underline{\delta}_i(1) = T_i \cdot b_{i1}, \underline{\delta}_i(k \geq 2) = 0. \quad (6.64)$$

Використовуючи властивості диференціальних перетворень перетворимо третій доданок функціонала (6.58) до вигляду:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (u_i - \lambda \delta_i) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{l=0}^k u_i(k-l) \cdot u_i(l) - \lambda \sum_{l=0}^k \delta_i(k-l) \cdot \delta_i(l)}{k+1}.$$

Тоді з урахуванням виразів (6.63), (6.64) для функціонала (6.58) отримуємо:

$$I_i = \frac{\mu_1}{2} [H_{T_i} - H_i]^2 + \frac{\mu_2}{2} [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}]^2 + \frac{\mu_3 T_i}{2} \left[c_{i0}^2 - \lambda b_{i0}^2 + T_i \cdot (c_{i0} c_{i1} - \lambda b_{i0} b_{i1}) + \frac{T_i^2}{3} (c_{i1}^2 - \lambda b_{i1}^2) \right]. \quad (6.65)$$

У подальшому будемо користуватися спектральною моделлю (3.21)–(3.44) та обчисленими за нею дискретними диференціальними спектрами змінних траєкторного руху БАЛА у вигляді функцій від початкових значень змінних математичної моделі (3.3)–(3.11) та вільних параметрів a_{i0}, a_{i1} керування кутом відхилення вектору тяги φ_i .

Скористаємося необхідними умовами оптимальності (6.55), (6.56) функціонала (6.65) та знайдемо його похідні за вільними параметрами керування $c_{i0}, c_{i1}, b_{i0}, b_{i1}$ [291]. Отримуємо:

$$\frac{\partial I_i}{\partial c_{i0}} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial H_i}{\partial c_{i0}} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial c_{i0}} + \frac{\mu_3 T_i^2}{2} (2c_{i0} + c_{i1} T_i) = 0, \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial b_{i0}} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial H_i}{\partial b_{i0}} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial b_{i0}} - \frac{\mu_3 \lambda T_i^2}{2} (2b_{i0} + b_{i1} T_i) = 0, \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial c_{i1}} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial H_i}{\partial c_{i1}} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial c_{i1}} + \frac{\mu_3 T_i^2}{2} \left(c_{i0} + \frac{2}{3} c_{i1} T_i \right) = 0, \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial b_{i1}} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial H_i}{\partial b_{i1}} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial b_{i1}} - \frac{\mu_3 \lambda T_i^2}{2} \left(b_{i0} + \frac{2}{3} b_{i1} T_i \right) = 0 \quad (6.69)$$

Визначимо значення частинних похідних, що входять до правих частин виразів (6.66) - (6.69). Підставляючи вирази $a_{i0} = c_{i0} + b_{i0}$, $a_{i1} = c_{i1} + b_{i1}$ у співвідношення (4.33), (4.34) та беручи частинні похідні за параметрами програмних стратегій $c_{i0}, c_{i1}, b_{i0}, b_{i1}$ отримаємо:

$$\frac{\partial H_i}{\partial c_{i0}} = \frac{\partial H_i}{\partial b_{i0}}; \quad \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial c_{i0}} = \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial b_{i0}}; \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial c_{i1}} = \frac{\partial H_i}{\partial b_{i1}}; \quad \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial c_{i1}} = \frac{\partial V_{Y_i}}{\partial b_{i1}}. \quad (6.71)$$

Віднімаючи вираз (6.67) з виразу (6.66) з урахуванням співвідношень (6.70) отримуємо наступне рівняння для визначення вільних параметрів:

$$2(c_{i0} + \lambda b_{i0}) + T_i(c_{i1} + \lambda b_{i1}) = 0. \quad (6.72)$$

Друге рівняння отримуємо, віднімаючи вираз (6.69) з виразу (6.68) з урахуванням співвідношень (6.71):

$$(c_{i0} + \lambda b_{i0}) + \frac{2}{3}T_i(c_{i1} + \lambda b_{i1}) = 0. \quad (6.73)$$

Розв'язання системи рівнянь (6.72), (6.73) дає змогу встановити співвідношення між оптимальними значеннями параметрів керування та збурень [292]:

$$c_{i0} = -\lambda b_{i0}, \quad (6.74)$$

$$c_{i1} = -\lambda b_{i1}. \quad (6.75)$$

Аналіз других похідних функціоналу (6.65) за параметрами $c_{i0}, c_{i1}, b_{i0}, b_{i1}$, які мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i0}^2} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial^2 H_i}{\partial c_{i0}^2} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial^2 V_{Y_i}}{\partial c_{i0}^2} + \mu_3 T_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial b_{i0}^2} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial^2 H_i}{\partial b_{i0}^2} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial^2 V_{Y_i}}{\partial b_{i0}^2} - \mu_3 \lambda T_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i1}^2} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial^2 H_i}{\partial c_{i1}^2} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial^2 V_{Y_i}}{\partial c_{i1}^2} + \frac{\mu_3 T_i^3}{3},$$

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial b_{i1}^2} = -\mu_1 [H_{T_i} - H_i] \cdot \frac{\partial^2 H_i}{\partial b_{i1}^2} - \mu_2 [V_{Y_{T_i}} - V_{Y_i}] \cdot \frac{\partial^2 V_{Y_i}}{\partial b_{i1}^2} - \frac{\mu_3 \lambda T_i^3}{3},$$

показує, що за нульових термінальних помилок за висотою і вертикальною швидкістю другі похідні функціоналу (6.65) за параметрами c_{i0}, c_{i1} додатні, а за параметрами b_{i0}, b_{i1} - від'ємні. Це підтверджує існування сідлової точки функції (6.65) при виведенні БАЛА в задані термінальні умови.

Таким чином, задача синтезу алгоритму керування рухом аеростатичного літального апарату при наявності зовнішніх збурень зводиться до визначення

параметрів c_{i0}, c_{i1} та тривалості T_i i -го підінтервалу процесу керування. Для їх визначення маємо три рівняння (6.66), (6.68) та (4.38). З цих рівнянь, з урахуванням виразів (6.74) та (6.75), виключимо параметри збурень b_{i0}, b_{i1} . Із рівняння (6.68) визначимо в явній формі параметр керування c_{i1} та виключимо його з виразів (6.66) та (4.38). Після цього, замінюючи довільні початкові значення змінних траєкторного руху їх поточними значеннями, а параметр керування c_{i0} – поточним значенням кута відхилення вектору тяги БАЛА φ_i , отримаємо гарантовано-адаптивний алгоритм процесу керування рухом БАЛА на i -му підінтервалі у наступній формі:

$$\varphi_i = \frac{T_i^2}{\mu_3} \left[\frac{\mu_1 \eta_1 (H_{T_i} - H_i)}{T_i^2} + \frac{\mu_2 \eta_2 V_{Y_{T_i}}}{T_i^2} - \frac{V_{Y_i}}{T_i} \left(\mu_1 \eta_1 + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) - A_i \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{2} + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) + \right. \\ \left. + \tilde{\Phi}_i \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{2} - \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} - \frac{B_i}{2} \left[\mu_1 \eta_1 \frac{T_i}{3} + \mu_2 \eta_2 \right] \right) - d_1 \frac{T_i}{2} \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{3} + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) \right] - \frac{T_i}{2} c_{i1}, \quad (6.76)$$

$$\text{де } A_i = \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i, \quad B_i = (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i}, \quad r = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$d_1 = (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i - \left[(C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} + r \cdot a_{i1} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \right] \cdot \cos r \varphi_i + (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot C_4 \cdot V_i^2,$$

$$d_2 = -(C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i - \left[(C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} + r \cdot a_{i1} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \right] \cdot \sin r \varphi_i,$$

$$\eta_1 = \frac{T_i}{2} \left(\tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i + \frac{T_i}{3} \cdot d_2 \right),$$

$$\eta_2 = \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i + \frac{T_i}{2} \cdot d_2,$$

$$c_{i1} = -\frac{1}{T_i} \cdot \frac{\mu_1 N_3 N_4 + \mu_2 M_3 M_4 + \frac{\mu_3}{2} \varphi_i}{r T_i (\mu_1 N_4^2 + \mu_2 M_4^2) + \frac{\mu_3}{3}},$$

$$N_3 = H_i - H_{T_i} + T_i \cdot V_{Y_i} + \frac{T_i^2}{2} [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i] + \frac{T_i^3}{6} \left[\begin{aligned} & (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i - (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i - \\ & - (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot C_4 \cdot V_i^2 \end{aligned} \right],$$

$$N_4 = \frac{T_i}{6} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i,$$

$$M_3 = V_{Y_i} - V_{Y_{T_i}} + T_i [\tilde{\Phi}_i + \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i] + \frac{T_i^2}{2} \left[\begin{aligned} & (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i - (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r \varphi_i - \\ & - (C_6 + C_7) \cdot V_{X_i} \cdot \tilde{\Phi}_i - (C_6 + C_7) \cdot V_{Y_i} \cdot C_4 \cdot V_i^2 \end{aligned} \right],$$

$$M_4 = \frac{1}{2} \cdot \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r \varphi_i.$$

Загальне керування процесом виведення БАЛА на задану висоту отримуємо об'єднуючи керування на підетапах.

Тривалість T_i i -го підінтервалу процесу траєкторного руху БАЛА з урахуванням введених позначень визначається з рівняння (4.38):

$$T_i = \frac{1}{2d_3} \left[-D_i + \sqrt{D_i^2 + 4(V_{X_{T_i}} - V_{X_i})d_3} \right], \quad (6.77)$$

де $D_i = \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r\varphi_i - C_4 \cdot V^2$,

$$d_3 = -\left(\frac{C_5}{2} \cdot V_{Y_i} + C_4 \cdot V_{X_i} \right) \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot \cos r\varphi_i + \left(\frac{C_5}{2} \cdot V_{X_i} - C_4 \cdot V_{Y_i} \right) \tilde{P}_{\Sigma_i} \cdot \sin r\varphi_i + \\ + \left(\frac{C_5}{2} \cdot V_{X_i} - C_4 V_{Y_i} \right) \tilde{\Phi}_i + \left(\frac{C_5}{2} C_4 V_{Y_i} + C_4^2 V_{X_i} \right) V_i^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_{\Sigma_i} \cdot r \cdot a_1 \cdot \sin r\varphi_i$$

Вибір вагових множників μ_1, μ_2, μ_3 здійснюється виходячи з вимог до термінальних помилок за висотою і вертикальною швидкістю, а також достатніми умовами екстремуму функціоналу (6.65).

Порівняння алгоритму (6.76) з алгоритмами термінального (п.4.4) та багатокритерійного (п.5.5) керування виведенням БАЛА показує, що гарантовано-адаптивний алгоритм (6.76), синтезований за моделлю диференціальної гри процесу керування рухом аеростатичного апарату з використанням математичного апарата диференціальних перетворень, є більш складним у обчислювальному відношенні. Однак це ускладнення алгоритму (6.76) забезпечує гарантію багатоетапного приведення БАЛА в задані термінальні умови при впливі збурень, обмежених інтегральною складовою функціонала (6.58). Аналіз рівнянь (6.74), (6.75) показує, що для парирування найгіршого сполучення факторів збурень та виведення БАЛА в задані термінальні умови рівень складових параметрів за кутом відхилення вектора тяги повинен бути в λ раз більшим, ніж вплив параметрів збурень. Тому гарантія приведення аеростатичного літального апарату в задані термінальні умови у випадку найгіршого сполучення факторів збурень може бути реалізована тільки за наявності ресурсу керування, достатнього для парирування дії збурень та виведення апарату в задані термінальні умови.

Особливістю гарантовано-адаптивного алгоритму (6.76) порівняно з алгоритмами, отриманими в пп. 4.4 та 5.5, є досягнення найменших термінальних помилок при впливі збурень на процес керування рухом аеростатичного апарату, якщо сполучення факторів збурень не є найгіршим.

Коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку за розузгодженням висоти та вертикальної швидкості алгоритму (6.76) є змінними, що залежать від траєкторних параметрів процесу керування рухом аеростатичного апарату, характеристик аеростатичного апарату, а також від параметра λ обмеження впливу збурень в складовій функціонала (6.58).

6.6.2. Виведення авіаційно-космічної системи на орбіту

Для виконання синтезу гарантовано-адаптивного керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту запропонованим вище методом використаємо математичну модель диференціальної гри, яка містить опис багатоетапного траєкторного руху АКС (3.64)-(3.69) з урахуванням впливу збурень.

Програмну зміну кута тангажа на i -му підінтервалі траєкторного руху ϑ_i задаємо у вигляді суми двох складових:

$$\vartheta_i = u_i + \delta_i, \quad (6.78)$$

де u_i – керування процесом виведення АКС на i -му підінтервалі за відсутності впливу збурень, δ_i – приріст кута тангажа ϑ_i , необхідний для парирування сумарного впливу дій різних збурень на i -му підінтервалі.

Складова δ_i являє собою сумарну характеристику дії різних збурень при виведенні АКС на орбіту. Зазначимо, що опис процесу виведення АКС на орбіту в формі диференціальної гри не потребує апріорної інформації щодо стохастичних моделей зовнішніх збурень і гарантує досягнення заданих термінальних умов за найбільш несприятливого випадку сполучення дії факторів збурень.

Припускаємо, що складовою керування u_i володіє перший гравець, а додаткова складова керування δ_i визначається діями факторів збурень, які розглядаються з позицій другого гравця, який має протилежні цілі керування.

Синтез програмного керування кутом тангажа ϑ_i , а також програмних стратегій обох гравців виконуємо в класі аналітичних функцій:

$$\vartheta_i = a_{i_0} + a_{i_1} t, \quad (6.79)$$

$$u_i = c_{i_0} + c_{i_1} t, \quad (6.80)$$

$$\delta_i = b_{i_0} + b_{i_1} t, \quad (6.81)$$

де $a_{i_0} = c_{i_0} + b_{i_0}$, $a_{i_1} = c_{i_1} + b_{i_1}$, c_{i_0} , c_{i_1} , b_{i_0} , b_{i_1} - параметри, що підлягають визначенню.

Задача першого гравця полягає у переведенні АКС із початкових умов:

$$X_1(0) = X_{10}, X_2(0) = X_{20}, Y_1(0) = Y_{10}, Y_2(0) = Y_{20} \quad (6.82)$$

в задані кінцеві умови:

$$Y_{1_{T_i}} = H_{T_i}, Y_{2_{T_i}} = \dot{H}_{T_i} = V_{Y_{T_i}}, X_{2_{T_i}} = V_{X_{T_i}} \quad (6.83)$$

з мінімальним значенням функціоналу якості, за умови максимізації його другим гравцем, який імітує дію найнесприятливішого сполучення факторів збурень. Як функціонал якості приймемо функціонал (6.58).

Для визначення гарантовано-адаптивного алгоритму скористаємося спектральною моделлю (3.79) - (3.97), за якою обчислимо дискрети диференціальних спектрів змінних траєкторного руху АКС у вигляді функцій від початкових значень змінних математичної моделі (3.64) - (3.69), вільних параметрів (a_{i_0}, a_{i_1}) керування кутом тангажа ϑ_i та тривалості i -го підінтервалу виведення T_i .

Синтез гарантовано-адаптивного керування виведенням АКС на орбіту виконуємо аналогічно синтезу гарантовано-адаптивного керування процесом виведення БАЛА на задану висоту (п.6.6.1).

Скориставшись властивістю диференціальних перетворень, згідно якої алгебраїчна сума всіх дискрет диференціального спектра будь-якої аналітичної функції в точці $t_0 = 0$ дорівнює значенню оригіналу функції в точці $t = T_i$ закінчення процесу керування на i -му підінтервалі, з урахуванням граничної умови (6.83)

отримаємо рівняння, що пов'язують параметри керування a_{i_0}, a_{i_1} та параметри траєкторного руху АКС із заданими значеннями висоти H_{T_i} , вертикальної швидкості набору висоти \dot{H}_{T_i} та горизонтальної швидкості $V_{X_{T_i}}$ відповідно:

$$Y_{1_{T_i}} = Y_{10} + T_i Y_{20} + \frac{A_i T_i^2}{2} + \frac{T_i^3}{6} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} + \\ + B_i \cdot \left(\frac{2X_{20}}{Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right] = H_{T_i}. \quad (6.84)$$

$$Y_{2_{T_i}} = Y_{20} + A_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} + a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} + \\ + B_i \cdot \left(\frac{2X_{20}}{Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right] = \dot{H}_{T_i}. \quad (6.85)$$

$$X_{2_{T_i}} = X_{20} + B_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \cdot \frac{P_i}{m_{0_i}} \cos a_{i_0} - a_{i_1} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin a_{i_0} - \\ - A_i \cdot \left(\frac{X_{20}}{Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right] = V_{X_{T_i}}. \quad (6.86)$$

Отримані у п. 6.6.1 співвідношення (6.74), (6.75) між параметрами керування та збурень дають змогу звести задачу синтезу керування до визначення параметрів c_{i_0} , c_{i_1} та тривалості T_i процесу виведення АКС на орбіту на i -му підінтервалі.

В результаті, для визначення трьох невідомих c_{i_0}, c_{i_1} та часу T_i маємо три рівняння (6.66), (6.68) та (6.86). З цих рівнянь, спираючись на вирази (6.74) і (6.75), виключимо параметри збурень b_{i_0}, b_{i_1} . Із рівняння (6.68) з урахуванням виразів (6.84), (6.85) знайдемо в явній формі параметр керування c_{i_1} :

$$c_{i_1} = -\frac{1}{T_i} \frac{\mu_1 N_3 N_4 + \mu_2 M_3 M_4 + \frac{\mu_3}{2} \vartheta_i}{r T_i (\mu_1 N_4^2 + \mu_2 M_4^2) + \frac{\mu_3}{3}}, \quad (6.87)$$

де

$$N_3 = Y_{10} - H_{T_i} + T_i Y_{20} + \frac{A_i T_i^2}{2} + \frac{T_i^3}{6} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_i}{m_{0_i}} \frac{P_i}{m_{0_i}} \sin r \vartheta_i + B_i \left(\frac{2X_{20}}{Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \end{array} \right],$$

$$N_4 = \frac{T_i}{6} \frac{P_i}{m_{0i}} \cos r\vartheta_i,$$

$$M_3 = Y_{20} - \dot{H}T_i + A_i T_i + \frac{T_i^2}{2} \left[\frac{\mu_i}{m_{0i}} \frac{P_i}{m_{0i}} \sin r\vartheta_i + B_i \left(\frac{2X_{20}}{Y_{10}} + 2\Omega_3 \right) \right],$$

$$M_4 = \frac{1}{2} \frac{P_i}{m_{0i}} \cos r\vartheta_i,$$

$$r = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$A_i = \frac{P_i}{m_{0i}} \sin r\vartheta_k - g + \frac{(X_{20})^2}{Y_{10}} + 2\Omega_3 X_2 + \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[C_3 \alpha_0 X_{20} - (C_1 + C_2 C_3 \alpha_0^2) Y_{20} \right],$$

$$B_i = \frac{P_i}{m_{0i}} \cos r\vartheta_i - \frac{X_{20} \cdot Y_{20}}{Y_{10}} - 2\Omega_3 Y_{20} - \frac{\rho_0 V_0}{m_{0i}} \left[C_3 \alpha_0 Y_{20} + (C_1 + C_2 \cdot C_3 \cdot \alpha_0^2) X_{20} \right],$$

та виключимо його з виразів (6.64) та (6.84). Після цього, замінюючи довільні початкові умови поточними значеннями змінних траєкторного руху та параметр керування c_i – командним значенням кута тангажа ϑ_i , отримаємо гарантовано-адаптивний алгоритм виведення АКС на орбіту на i -му підінтервалі у наступній формі [293]:

$$\vartheta_i = \frac{T_i^2}{\mu_3} \left[\begin{array}{l} \frac{\mu_1 \eta_1 (H_{T_i} - H_i)}{T_i^2} + \frac{\mu_2 \eta_2 V_{Y_{T_i}}}{T_i^2} - \frac{V_{Y_i}}{T_i} \cdot \left(\mu_1 \eta_1 + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) - \\ - A_i \cdot \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{2} + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) - \frac{T_i}{2} d_1 \cdot \left(\frac{\mu_1 \eta_1}{3} + \frac{\mu_2 \eta_2}{T_i} \right) \end{array} \right] - \frac{T_i}{2} c_i, \quad (6.88)$$

де

$$d_1 = \frac{\mu_i}{m_i} \cdot \frac{P_i}{m_i} \sin r\vartheta_i + r c_i \frac{P_i}{m_i} \cos r\vartheta_i + B_i \left(\frac{2V_{X_i}}{H_i} + 2\Omega_3 \right),$$

$$d_2 = \frac{P_i}{m_i} \left\{ \frac{\mu_i}{m_i} \cos r\vartheta_i - \sin r\vartheta_i \left[r c_i + \left(\frac{2V_{X_i}}{H_i} + 2\Omega_3 \right) \right] \right\},$$

$$\eta_1 = \frac{T_i}{2} \cdot \left(\frac{P_i}{m_i} \cos r\vartheta_i + \frac{T_i}{3} d_2 \right),$$

$$\eta_2 = \frac{P_i}{m_i} \cos r\vartheta_i + \frac{T_i}{2} d_2.$$

Загальне керування процесом виведення АКС на орбіту отримуємо шляхом об'єднання керувань на підетапах з врахуванням умов сполучення підінтервалів.

Час виведення АКС на орбіту, враховуючи уведені позначення, визначається з рівняння (6.86):

$$T_i = \frac{1}{d_3} \left[-B_i + \sqrt{B_i^2 + 2(V_{x_{T_i}} - V_{x_i})d_3} \right], \quad (6.89)$$

$$\text{де } d_3 = \frac{\mu_i}{m_i} \cdot \frac{P_i}{m_i} \cos r \vartheta_i - r c_{i_1} \frac{P_i}{m_i} \sin r \vartheta_i - A_i \left(\frac{V_{x_i}}{H_i} + 2\Omega_3 \right).$$

Обрання вагових множників μ_1, μ_2, μ_3 у виразі (6.87) визначається вимогами до термінальних помилок виведення АКС на орбіту, а також достатніми умовами екстремуму функції (6.58).

Особливістю гарантовано-адаптивного алгоритму (6.88) порівняно з алгоритмами, отриманими в пп. 4.3 та 5.4, є досягнення менших термінальних помилок при впливі збурень на процес керування виведенням АКС на орбіту. Наявність сідлової точки функціоналу (6.58) забезпечує зниження термінальних помилок, якщо в реальному процесі багатоетапного керування виведенням АКС на орбіту сполучення факторів збурень не є найгіршим [157].

Гарантовано-адаптивний алгоритм (6.88), синтезований за моделлю диференціальної гри процесу виведення АКС на орбіту, є більш складним у обчислювальному відношенні порівняно з іншими алгоритмами, отриманими у пп. 4.3 та 5.4 для оптимізації процесу виведення. Однак це ускладнення забезпечує гарантію виведення АКС в задані термінальні умови у випадку дії збурень, обмежених інтегральною складовою функціоналу (6.59). Зазначимо, що згідно виразів (6.74), (6.75) для парирування найгіршого сполучення факторів збурень та виведення АКС на орбіту у задані термінальні умови рівень складових кута відхилення тангажа повинен бути в λ раз більшим, ніж вплив параметрів збурення. Тому гарантія виведення АКС на орбіту у випадку найгіршого сполучення факторів збурень може бути реалізована тільки за наявності ресурсу керування, достатнього для парирування дії збурень та виведення АКС в задані термінальні умови.

На відміну від аналогічного алгоритму, отриманого у роботі [25] на базі моделі диференціальної гри процесу виведення АКС на орбіту з використанням основних диференціальних перетворень, алгоритм (6.88) враховує багатоетапність керування та задані значення висоти та вертикальної швидкості набору висоти наприкінці кожного підінтервалу процесу керування. Це призводить до більшого зменшення термінальних похибок наприкінці всього процесу керування.

Висновки до розділу 6

1. Розроблено диференціально-ігрову модель процесу багатоетапного керування траєкторним рухом БЛА при виведенні у задані термінальні умови при дії невизначених збурень. Модель подано у формі диференціальної гри між системою керування та впливом факторів невизначених збурень і ґрунтується на сумісному використанні методів диференціальної гри та математичного апарату диференціальних перетворень. Розкриття невизначеності досягається застосуванням принципу максимального гарантованого результату.
2. На основі розробленої диференціально-ігрової моделі запропоновано чисельно-аналітичний метод побудови програмних алгоритмів багатоетапного керування траєкторним рухом БЛА за максимальної протидії невизначених збурень. Запропонований підхід виключає необхідність інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху, розв'язує задачу побудови програмних стратегій гравців без використання функції часу та дає змогу проводити неперервні обчислення програмних стратегій гравців у реальному часі.
3. На прикладі виведення БАЛА на задану висоту показано можливість побудови оптимальних програмних стратегій учасників диференціальної гри шляхом аналітичних перетворень, що дозволяє значно скоротити об'єм обчислень для отримання розв'язку у чисельному або аналітичному вигляді.
4. Розроблено метод оптимізації гарантовано-адаптивного багатоетапного керування БЛА при виведенні у задані термінальні умови при впливі невизначених збурень завдяки застосуванню удосконаленого дискретно-

аналітичного відображення вихідної нелінійної математичної задачі в область зображень та модифікованого методу диференціальних перетворень. Метод використовує диференціально-ігрову модель багатоетапного динамічного процесу, спрощує дискретно-аналітичне відображення вихідної математичної моделі в область зображень, не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, зводить проблему синтезу до розв'язання скінченної системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування та збурень і припускає аналітичний розв'язок задачі.

5. Запропоновано гарантовано-адаптивний алгоритм багатоетапного керування БАЛА при виведенні в задані термінальні умови, що враховує термінальні умови на кожній ділянці виведення, володіє властивостями адаптації до дії збурень та забезпечує гарантію реалізації процесу багатоетапного виведення за найгіршого сполучення факторів обмежених збурень.
6. Синтезовано гарантовано-адаптивний алгоритм керування процесом виведення АКС на орбіту в умовах дії невизначених збурень, що враховує термінальні умови за висотою та вертикальною швидкістю на кожній ділянці виведення, забезпечує гарантію багатоетапного виведення на орбіту в задані термінальні умови за найгіршого сполучення дії обмежених збурень та володіє властивостями адаптації до дії збурень.

Список публікацій здобувача за матеріалами шостого розділу

1. Гусынин А. В. Терминальное управление многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциально-игрового подхода / А. В. Гусынин // Людина і космос: XIV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 11-13 квітня 2012 р.: тези доповіді. – Дніпропетровськ (Україна), 2012. – С. 129.
2. Гусинін А. В. Диференціально-ігровий підхід до синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів / А. В. Гусинін // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. - №1(88). - С. 40-45.

3. Gusynin A. Synthesis of optimal multi-step control algorithms by UAVs based on differential-and-game approach / A. Gusynin, O. Yarovoy, J. Antonova-Rafi, I. Khudetsky // Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Development: IEEE 4th International Conference, October 17-19, 2017. – Kyiv (Ukraine), 2017. – P. 100-103.

Особистий внесок здобувача: метод синтезу та алгоритм оптимального багатоступового керування АЛА на основі диференціально-ігрового підходу.

4. Gusynin A. Algorithm of guaranteed-and-adaptive control of aerostatic vehicle under undetermined external disturbances / A. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2014. – No.4(61). - P. 36-44.

Особистий внесок здобувача: гарантовано-адаптивний алгоритм керування багатоступовим траєкторним рухом БАЛА при виведенні на задану висоту в умовах дії невизначених збурень.

5. Гусинін А. В. Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень / А. В. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2013. -В.4(44). - С. 27-35.

Особистий внесок здобувача: метод синтезу гарантовано-адаптивного алгоритму керування процесом виведення АКС на орбіту в умовах дії невизначених збурень.

6. Gusynin A. Guaranteed adaptive terminal control of an aerostatic aircraft based on differential game approach / Y. Ziatdinov, V. Gusynin, A Gusynin // Proceedings of the National Aviation University. – 2020. – Т.82. - № 1. - P.12-22.

Особистий внесок здобувача: метод синтезу та алгоритм гарантовано-адаптивного керування багатоступовим траєкторним рухом БАЛА в умовах дії невизначених збурень.

7. Гусинін А. В. Синтез программных алгоритмов терминального управления аэростатическим летательным аппаратом / А. В. Гусинін // Sciences of Europe. – 2020. – Vol.1, № 58. – С. 46-59.

ВИСНОВКИ

У дисертації в перспективному напрямку створення сучасних зразків авіаційно-космічної техніки вирішена актуальна наукова проблема розвитку методів розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень та їх застосування до оптимізації керування виведенням БЛА у задані термінальні умови з метою підвищення ефективності їх функціонування завдяки можливості здійснювати оперативний синтез оптимального керування у реальному часі.

В рамках досягнення поставленої мети і вирішення задач досліджень отримані наступні основні наукові результати:

1. Розвинута наукова та методична база для забезпечення розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом ЛА на основі математичного апарату диференціальних перетворень. Зокрема, розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних крайових задач та метод дискретно-аналітичного відображення в область зображень вихідної нелінійної математичної моделі траєкторного руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови. Запропоновані підходи не потребують чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, спрощують та підвищують точність розв'язку крайових задач, що описуються нелійними диференціальними рівняннями, створюють умови для оперативної оптимізації керування процесів завдяки забезпечення можливості отримання розв'язку в аналітичній формі.

2. Уперше розроблено модифікований метод диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що базується на сумісному використанні методу основних диференціальних перетворень, методу припасовування та застосуванні апроксимації нелінійних складових диференціальних рівнянь поліномами Адоміана. Метод дозволяє розширити інтервал розв'язання та спростити дискретно-аналітичне відображення задачі, забезпечує зниження верхньої межі оцінки похибки в p^s раз, де p - кількість

підінтервалів, на які розбивається інтервал розв'язку, s - кількість врахованих дискрет диференціального спектра.

3. На базі модифікованого методу диференціальних перетворень запропоновано підхід до розв'язання крайових задач, що описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Запропонований підхід не потребує чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, спрощує знаходження диференціальних зображень складних нелінійностей задачі за рахунок їх апроксимації поліномами Адоміана, дає змогу розширити інтервал та підвищити точність розв'язку.

4. Уперше розроблено метод дискретно-аналітичного відображення у спектральні моделі вихідних нелінійних математичних задач траєкторного руху ЛА при виведенні у задані термінальні умови. Метод дозволяє запобігти складностей, що пов'язані з відображенням нелінійних складових рівнянь руху, спростити побудову спектральної моделі та дає змогу використати її для оперативної оптимізації багатоетапного керованого процесу у реальному масштабі часі.

5. Отримав подальший розвиток метод диференціальних перетворень функцій та рівнянь в області застосування до розв'язання нелінійних задач оптимізації керування рухом літальних апаратів. Запропонований підхід ґрунтується на застосуванні модифікованого методу диференціальних перетворень та удосконаленого методу дискретно-аналітичного відображення нелінійних задач в область зображень. За зазначеним підходом розвинуті та розроблені нові методи розв'язання нелінійних задач оптимального термінального, багатокритерійного та гарантовано-адаптивного керування траєкторним рухом ЛА при виведенні у задані термінальні умови.

6. Розвинуто чисельно-аналітичний метод розв'язання нелінійних задач оптимального термінального керування траєкторним рухом ЛА завдяки застосуванню модифікованого методу диференціальних перетворень та удосконаленого дискретно-аналітичного відображення вихідних нелінійних математичних задач в область зображень з врахуванням багатоетапності траєкторного руху. Метод не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь, дозволяє отримати алгоритм керування в аналітичному

вигляді, здійснювати оперативну оптимізацію керування та траєкторії руху та проводити моделювання динамічного процесу у реальному часі.

7. Уперше на базі удосконаленого дискретно-аналітичного відображення в область зображень нелінійних задач траєкторного руху ЛА та модифікованого методу диференціальних перетворень, з використанням нелінійної схеми компромісів розроблено чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації багатоетапного керування траєкторним рухом літальних апаратів. Запропонований підхід дає можливість спростити процес знаходження розв'язку нелінійної задачі оптимального керування та звести проблему векторної оптимізації до розв'язання скінченної системи нелінійних рівнянь відносно параметрів керування.

8. Уперше розроблено метод оптимізації гарантовано-адаптивного термінального керування рухом літальних апаратів при впливі невизначених збурень на базі удосконаленого дискретно-аналітичного відображення вихідної нелінійної математичної задачі в область зображень та модифікованого методу диференціальних перетворень. Запропонований метод ґрунтується на диференціально-ігровій моделі багатоетапного динамічного процесу, спрощує дискретно-аналітичне відображення нелінійної вихідної математичної моделі в область зображень, не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь руху, зводить проблему оптимізації до розв'язання скінченної системи рівнянь відносно параметрів керування та збурень та припускає аналітичний розв'язок задачі.

Крім основних наукових результатів у дисертаційній роботі отримані наступні наукові та практичні результати:

- запропоновано підхід до спрощення обчислення дискрет диференціальних спектрів нелінійних змінних траєкторного руху ЛА за рахунок їх апроксимації поліномами Адоміана;
- модифікована спектральна модель процесу багатоетапного виведення АКС на орбіту;
- модифікована спектральна модель траєкторного руху БАЛА на етапах зльоту з набором заданої висоти та посадки;

- показано можливість на основі використання диференціальних спектрів траєкторного руху ЛА розв'язувати нелінійні задачі аналітичного конструювання керування процесом термінального виведення ЛА;
- показано можливість застосування зміщених диференціальних перетворень функцій та рівнянь до розв'язання задачі оптимізації багатоетапного термінального процесу керування ЛА;
- показано можливість застосування зміщених диференціальних перетворень функцій та рівнянь до багатокритерійної оптимізації багатоетапних процесів керування ЛА;
- доведено, що застосування зміщених перетворень до розв'язання задачі синтезу замкнених законів оптимального керування призводить до ускладнення отримання спектральної моделі задачі та збільшення кількості невідомих в системі скінчених нелінійних рівнянь для визначення параметрів керування;
- виконано аналітичний синтез алгоритму оптимального за витратою палива керування багатоетапним процесом виведення АКС на орбіту, що забезпечує приведення АКС в задані термінальні умови та досягнення наприкінці виведення максимальної швидкості. Моделювання багатоетапного процесу виведення АКС «Оріль» на орбіту показало, що синтезований з використанням модифікованого методу диференціальних перетворень алгоритм керування забезпечує економію палива порівняно з відомим алгоритмом $\sim 1\%$;
- виконано аналітичний синтез алгоритму оптимального керування БАЛА на етапі посадки. Моделюванням показано, що запропонований алгоритм забезпечує досягнення заданої вертикальної швидкості зниження у момент торкання посадкової поверхні та мінімальної горизонтальної посадкової швидкості апарата з коротким пробігом по землі;
- синтезовано алгоритм багатокритерійного керування багатоетапним процесом виведення АКС «Оріль» на орбіту, що забезпечує компромісний розв'язок між термінальними помилками виведення та тепловими навантаженнями на поверхні АКС;

- моделюванням на ЕОМ обґрунтовано працездатність, ефективність та адаптивність комбінованого алгоритму, складеного з синтезованих модифікованим методом диференціальних перетворень алгоритмів багатокритерійного та термінального керування виведенням АКС на орбіту. Показано, що комбінований алгоритм, порівняно з термінальним, забезпечує зниження теплового потоку на 43%, швидкісного напору на 19%, максимальної піднімальної сили на 3% та забезпечує таку саму точність виведення у задані термінальні умови практично за той самий час, витрачаючи, при цьому, більше палива на 0,12%;
- синтезовано алгоритм багатокритерійної оптимізації багатоетапного процесу зльоту БАЛА з виведенням на задану висоту, що забезпечує компромісний розв'язок між термінальними помилками виведення та енергетичними витратами на піднімання апарату на задану висоту;
- моделюванням на ЕОМ обґрунтовано працездатність, ефективність та адаптивність комбінованого алгоритму, складеного з синтезованих модифікованим методом диференціальних перетворень алгоритмів багатокритерійного та термінального керування процесом зльоту БАЛА з підніманням на задану висоту. Показано, що комбінований алгоритм, порівняно з термінальним, забезпечує зменшення витрат енергії на піднімання апарату на висоту 350 м на 6% та дозволяє отримати більшу горизонтальну швидкість наприкінці процесу піднімання. Зниження витрат енергії збільшується із збільшенням висоти піднімання;
- синтезовано гарантовано-адаптивний алгоритм керування процесом виведення АКС на орбіту в умовах дії невизначених збурень, що враховує термінальні умови за висотою та вертикальною швидкістю на кожній ділянці виведення, забезпечує гарантію багатоетапного виведення на орбіту в задані термінальні умови за найгіршого сполучення дії обмежених збурень та володіє властивостями адаптації до дії збурень;
- запропоновано гарантовано-адаптивний алгоритм багатоетапного керування БАЛА при виведенні в задані термінальні умови, що враховує термінальні

умови на кожній ділянці виведення, володіє властивостями адаптації до дії збурень та забезпечує гарантію реалізації процесу багатоетапного виведення за найгіршого сполучення факторів обмежених збурень;

- показано доцільність врахування багатоетапності траєкторного руху БЛА при виведенні у задані термінальні умови, що приводить до більш точного виконання термінальних умов.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гусинін А. В. Системи повітряного старту ракет-носіїв легкого класу / А. В. Гусинін // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут». – 2010. - №1. – С.140-145.
2. Гусынин А. В. Аэростатические платформы воздушного старта ракет-носителей / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // АВИА-2009: IX міжнародна науково-практична конференція, 21-23 сентября 2009. – К., 2009. – С. 16.25-16.28.
3. Гусинін А. В. Оцінка можливості старту ракети-носія з дирижабля / А. В. Гусинін // Людина і космос: XV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 10-12 квітня 2013 г.: тези доп. – Дніпропетровськ (Україна), 2013. – С. 301.
4. Ларьков С. Н. Перспективы развития ракетно-космических комплексов в Украине / С. Н. Ларьков, В. И. Присяжный, В. В. Ожинский, В. Н. Мамарев // Авиационно-космическая техника и технология. – 2016. – №6(133). – С. 32-35.
5. Гусинін А. В. Кероване повітроплавання / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін. – К.: Кафедра, 2012. – 364 с.
6. Березин А. Дирижабли возвращаются / А. Березин [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://lenta.ru/articles/2015/02/28/zeppelins>.
7. Gusynin A. V. The project of semi-blimp airship “D-1500” / A. V. Gusynin, G. G. Kozachenko // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr. 71164.
8. Пшихопов В. Х. Управление воздухоплавательными комплексами: теория и технологии проектирования / В. Х. Пшихопов, М. Ю. Медведев, Р. В. Федоренко, М. Ю. Сиротенко и т.д. – М.: Физматлит, 2010. – 394 с.
9. Sebbane Y. Lighter than Air Robots. Guidance and Control of Autonomous Airships / Y. Sebbane. – Springer Netherlands, 2012. – 260 p.

10. Гусынин А. В. Проектирование дирижабля с уменьшенной статической устойчивостью / А. В. Гусынин // Современные направления теоретических и прикладных исследований: международная научно-практическая конференция, 15-26 марта 2010 г.: тезисы доп. – Одесса (Украина). – Т.2. - С. 57-58.
11. Nagabhushan B. L. Thrust-vectoring takeoff, landing and ground handling of an airship / B. L. Nagabhushan, N. P. Tomlinson // J. of aircraft. – 1985. - Vol.23, No.3. - P. 250-256.
12. Nagabhushan B. L. Thrust vector control of a V/STOL airship / B. L. Nagabhushan, G. D. Faiss // J. of aircraft. – 1984. - Vol.21, No.6. - P. 408-413.
13. Критерии летной годности для дирижаблей. – М.: РВО, 1999. – 143 с.
14. Airship design criteria. – U.S. Department of Transport, federal Aviation Administration, № FAA-P-8110-2, 1987. – 119 pp.
15. Transport Airship Airworthiness Requirements (TAR). – Luftfahrt-Bundesamt, in NfL II 22/01, Offenbach/Braunschweig, 2001. – 150 pp.
16. Батенко А. П. Системы терминального управления / А. П. Батенко. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
17. Кучеров Д. П. Методы синтеза адаптивных систем терминального управления / Д. П. Кучеров, А. П. Козуб. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 316с.
18. Моисеев Н. Н. Оптимизация и управление (Эволюция идей и перспективы) / Н. Н. Моисеев // Техническая кибернетика. – 1974. - №4. – С.3-16.
19. Теряев Е. Д. Развитие концепции гибких траекторий в задачах терминального управления подвижными объектами / Е. Д. Теряев, К. В. Петрин, А. Б. Филимонов, Н. Б. Филимонов // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: 13-я международная конференция, 15-17 июня 2011 г.: тезисы доклада. – Самара (Россия). – 2011. – С.18-23.
20. Сухарулидзе Ю. Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов / Ю. Г. Сухарулидзе. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015. – 407 с.

21. Разработка автономной системы наведения для воздушно-космического аппарата, создаваемого по программе NASP // Экспресс-инф. Сер. Астронавтика и ракетодинамика. – 1992. - №11. – С. 2-18.
22. Шуминин А. А. Авиационно-космические системы США. История, современность, перспективы / А. А. Шуминин. - М.: Вече, 2005. – 528 с.
23. Проблемы управления воздушно-космическим самолётом системы «Спейс шаттл» при спуске в атмосфере // Центр. аэрогидродин. ин-т. – 1985. - № 653. – 158 с.
24. Сыров А. С. «Буран». Основы проектирования интеллектуальной системы управления орбитальным кораблем на атмосферном участке полета / А. С. Сыров. – М.: Марс, 2013. – 276 с.
25. Урусский О. С. Методы решения задач выведения авиационно-космических систем на орбиту, основанные на дифференциальных преобразованиях / О. С. Урусский: дис.докт.техн.наук: 05.07.09 и 01.02.06. - К., 1997. – 297 с.
26. Лобатый А. А. Оптимальное программное управление беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, Ю. Ф. Икуас // Наука и техника. – 2012. - №3. – С.17-20.
27. Платунова А. В. Особенности формирования адаптивных законов управления высокоточными летательными аппаратами / А. В. Платунова, А. Н. Клишин, С. Н. Илюхин // Инженерный вестник. – 2016. - №10. – С.519-526.
28. Буков В. Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом / В. Н. Буков. - М.: Наука, 1987. - 232 с.
29. Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем / А. А. Красовский. - М.: Физматгиз, 1963. - 468 с.
30. Krstic M. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems / M. Krstic, H. Wang // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – P. 595–601.
31. Красовский А. А. Теория самоорганизующегося оптимального регулятора с экстраполяцией // Современная прикладная теория управления (в 3-х частях). Ч. I «Оптимизационный подход в теории управления». – Таганрог: ТРТУ, 2000. – С. 268–311.

32. Глумов В. М. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами: некоторые результаты и направления развития / В. М. Глумов С. Д. Земляков, В. Ю. Рутковский // Автоматика и Телемеханика. - 1999. - № 6. - С. 100-116.
33. Сыров А. С. Задачи управления движением многорежимных беспилотных летательных аппаратов / А. С. Сыров, А. М. Пучков, В. Ю. Рутковский, В. М. Глумов // Проблемы управления. – 2014. - №4. – С.45-52.
34. Рутковский В. Ю. Прецизионное управление нестационарными летательными аппаратами по углу крена / В. Ю. Рутковский, В. М. Глумов, В. М. Суханов // Проблемы управления. – 2011. - №5. – С.82-87.
35. Семенов А. Д. Идентификация объектов управления. / А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В. Брюхачев. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 211 с.
36. Воронов А. А. Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем / А. А. Воронов, В. Ю. Рутковский // Сб. ВК-59 «Вопросы кибернетики: проблемы теории и практики адаптивного управления». – М. : Изд-во АН СССР, 1985. – С. 5–48.
37. Bellman R. Adaptive Control Processes – A Guided Tour. / R. Bellman. – Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1961. – P. 302.
38. Фрадков А. Л. Адаптивная стабилизация минимально-фазовых объектов с векторным входом без измерения производных от выхода / А. Л. Фрадков // Докл. РАН. – 1994. – Т. 337, №5. – С. 592-594.
39. Андриевский Б. Р. Адаптивное управление летательным аппаратом с идентификацией на скользящих режимах / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков [Электронный ресурс] // Управление большими системами. – 2009. – В.26. – С.113-144. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/contents.phtml?wshow=issue&jrnid=ubs&year=2009&volume=26&series=0&option_lang=rus.
40. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В. И. Уткин. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
41. Емельянов С. В. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности / С. В. Емельянов, С. К. Коровин. – 1997. – М.: Наука. – 352 с.

42. Шевчук Д. О. Системні методи автоматизації процесів реконфігурації керування повітряними кораблями в особливих ситуаціях у польоті / Д. О. Шевчук: дис.докт.тех.наук: 095.13.07. – К., 2015. – 351 с.
43. Буков В. Н. Синтез управляющих сигналов с помощью прогнозирующей модели в адаптивной системе управления / В. Н. Буков // Проблемы управления и теории информации. – 1980. – В.9, №5. – С. 329-337.
44. Урусский О.С. Алгоритм траекторного управления составным объектом на участке выведения с использованием прогноз-модели / О. С. Урусский // Оборудование летательных аппаратов. – К.: КВВАИУ, 1990. – В.6-7. – С. 23-25.
45. Girish C. Adaptive Neural Network Flight Control Using both Current and Recorded Data / C. Girish [Electronic resource]. - Available at: http://smartech.getech.edu/bitstream/handle/1853/35867/chowdhary_gnc_2007_51.pdf?sequence=1.
46. Міщук А. С. Огляд сучасних систем керування, які використовуються на безпілотних літальних апаратах / А. С. Міщук // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – В.2/9 (68). - С.23-27.
47. Lewis F. L. Neural Network in Feedback Control Systems / F. L. Lewis [Electronic resource] // Available at: http://pdx.edu/sites/www.pdx.edu.sysc/files/SySc576_FrankLewisNNcControl.pdf.
48. Тюкин И. Ю. Адаптация в нелинейных динамических системах / И. Ю. Тюкин, В. А. Терехов. - СПб., 2006. - 378 с.
49. Матросов В. М. Метод векторных функция Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов. – М.: Физматлит, 2001. – 228 с.
50. Летов А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М.:Наука, 1969. - 359с.
51. Стенин А. А. Анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными динамическими объектами / А. А. Стенин, В. П. Пасько, Е. Ю. Мелкумян, М. А. Солдатова //Адаптивні системи автоматичного управління. – 2015. - №2(27). – С. 101-109.

52. Бойчук Л. М. Синтез координирующих систем автоматического управления / Л. М. Бойчук. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 160 с.
53. Колесников А. А. Синергетическая теория управления / А. А. Колесников. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.
54. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. A new generation of adaptive controllers for linear systems // Proc. of 31-st IEEE Conf. Dec. Control, Tuscon. – 1992. – P. 3644-3651.
55. Медведев М. Ю. Алгоритмы адаптивного управления исполнительными приводами / М. Ю. Медведев // Мехатроника, автоматизация и управление. – 2006. – № 6. – С. 17-22.
56. Кунцевич В. М. Синтез дискретных адаптивных систем управления линейными и некоторыми классами нелинейных объектов / В. М. Кунцевич // Межд. научно-технич. журнал «Проблемы управления и информатики». – 2009. – № 3. – С. 59–72.
57. Охоцимский Д. Е. Динамика космических полетов / Д. Е. Охоцимский. - М.: МГУ, 1968. – 158 с.
58. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации / Д. Ф. Лоуден. - М.: Мир, 1966. – 152 с.
59. Аппазов Р. Ф. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли / Р. Ф. Аппазов, О. Г. Сытин. – М.: Наука, 1987. – 440 с.
60. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. – М.: Наука, 1976. – 393 с.
61. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. - М.: ИЛ. – 1960. - 400с.
62. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
63. Филатьев А. С. Сквозная оптимизация ветвящихся траекторий выведения космических летательных аппаратов в атмосфере на основе принципа

максимума Понтрягина / А. С. Филатьев: дис. д-р. техн. наук. 05.07.09. – Жуковский, 2001. – 395 с.

64. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А. А. Красовский. – М.: Наука, 1973. – 560 с.
65. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
66. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления / П. Д. Крутько. – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
67. Олифанов О. М. Баллистические ракеты и ракеты-носители / О. М. Олифанов, А. Н. Андреев, В. Н. Гущин, А. А. Золотов. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
68. Пышный И. А. Запуск малых искусственных спутников Земли с использованием самолетов-носителей / И. А. Пышный, В. Е. Чепига. – М.: Машиностроение, 2005. – 168 с.
69. Ван Л. Оптимизация траектории выведения ракеты-носителя с малым космическим аппаратом на солнечно-синхронную орбиту на основе псевдоспектрального метода / Л. Ван // Наука и образование. МГУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. - №01. – С.53-67.
70. Бузулук В. И. Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов / В. И. Бузулук. – М.: ЦАГИ, 2008. – 476 с.
71. Лысенко Л. Н. Наведение и навигация баллистических ракет / Л. Н. Лысенко. – М.: МГУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 672 с.
72. Васильева А. Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – 1982. – Т.20. – С. 3–77.
73. Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – В.1. – С.3–51.
74. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Бином, 2015. – 639 с.
75. Романова И. К. Современные методы редукции систем и их применение к задачам анализа и синтеза систем управления / И. К. Романова // Вестник

МГТУ им. Н.Э.Баумана. Спец. вып. “Специальная робототехника и мехатроника”. – 2011. – С.142–152.

76. Кубицкий Г. М. Оперативная реализация оптимальной траектории методом сращивания асимптотических разложений / Г. М. Кубицкий, П. Б. Лоскутов // Оптимиз. задач динам. полета. – М.: МАИ, 1990. – С. 47-53
77. Тачиніна О.М. Методи синтезу оптимального керування детермінованими складними динамічними системами із розгалуженими траєкторіями руху / О. М. Тачиніна: дис.докт.техн.наук: 05.13.03. - К., 2018. – 307 с.
78. Garg D. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems / D. Garg, W. W. Hager, A. V. Rao // Automatica. – 2011. – Vol.47, No.4. - P. 829-837. – doi: 10.1016/j.automatica.2011.01.085.
79. Bensen D. A gauss pseudospectral transcription for optimal control / D. A. Bensen: Ph.D. thesis. Cambridge, 2005.- 243 p.
80. Лазарев Ю. Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов / Ю.Н. Лазарев. - Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. – 274 с.
81. Оморов Т. Т. Краткий обзор методов анализа и синтеза нелинейных САУ / Т. Т. Оморов, Б. О. Джолдошов // Известия КГТУ им. И. Рязанова. – 2012. - №26. – С. 28-40.
82. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
83. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses / G. Zames // IEEE Trans. On Automat. Contr. – 1981. – P. 301–320.
84. Doyle J. C. State space solution to standard H_2 and H_∞ , control problems / J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1989. – Vol. 34, № 8. – P. 831–847.
85. Тимин В. Н. Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра / В. Н. Тимин, А. П. Курдюков // Известия РАН, Техническая кибернетика. -1993. - №6. – С.100-108.

86. Пупков К. А. Методы робастного, нейронечеткого и адаптивного управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов. – М.: МГТУ, 2001. – 744 с.
87. Grimble Michael J. Robust industrial control systems: optimal design approach for polynomial systems / Michael J. Grimble. – UK, University of Strathclyde, 2006. – 698 p.
88. Никифоров В. О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений / В. О. Никифоров. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
89. Бобцов А. А. Адаптивное управление по выходу: проблематика, прикладные задачи и решения / А.А. Бобцов, В.О. Никифоров // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – Вып. 1(83). – С. 1-15.
90. Павлов В. В. Интеллектуальное управление: подходы, результаты и перспективы развития / В. В. Павлов, Ю. М. Шепетуша, С. В. Мельников, А. Е. Волков // Кибернетика и вычислительная техника. - 2017. - В.1. - С. 30-48.
91. Макарова И. М. Интеллектуальные системы автоматического управления / И. М. Макарова, В. М. Лохина. - М.: Физматлит, 2001. - 375 с.
92. Усков А. А. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика / А. А. Усков, А. В. Кузьмин. - М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 143 с.
93. Омату С. Нейроуправление и его приложения / С. Омату, М. Халид, Р. Юсоф. – М.: ИПРЖР, 2000. – 272 с.
94. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс / С. Хайкин. – М., С-Пб., Киев: Вильямс, 2006. – 1104 с.
95. Cichocki A., Unbehauen R. Neural Networks for Optimization and Signal Processing / A. Cichocki, R. Unbehauen. – Stuttgart: Teubner, 1993. – 526 p.
96. Хижняков Ю. Н. Алгоритмы нечеткого, нейронного и нечетко-нейронного управления в системах реального времени / Ю. Н. Хижняков. – Пермь: ПНИПУ, 2013. - 160 с.
97. Селезнева М. С. Применение интеллектуальных технологий при проектировании систем управления и измерительных комплексов / М. С.

- Селезнева. - Ч.І. Техн.науки - от теории к практике: сб. ст. по матер. LVIII междунар. науч.-практ. конф. – 2016. - № 5(53). – Новосибирск: СибАК. – С. 93-98.
98. Bauer P. A brief course in Fuzzy Logic and Fuzzy Control / P. Bauer, S. Nouak, R. Winkler [Electronic resource]. - Available at: <ftp://ftp.flll.uni-linz.ac.at/pub/info>.
99. Кудинов Ю. И. Нечеткие регуляторы и системы управления / Ю. И. Кудинов, И. Н. Дорохов, Ф. Ф. Пащенко // Проблемы управления. – 2004. - №3. – С.2-15.
100. Поспелов Д.А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Д. А. Поспелов. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
101. Тирано Т. Прикладные нечеткие системы / Т. Тирано, К. Асаи, М. Сугэно. – М.: Мир, 1983. – 368 с.
102. Гостев В. И. Нечеткие регуляторы в системах автоматического управления / В. И. Гостев. - К.: Радіоаматор, 2008. - 972 с.
103. Суханов Н. В. Схема управления летательным аппаратом на основе нейронных сетей / Н. В. Суханов [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – В.65. – Режим доступа: www.mai.ru/science/trudy.
104. Михайлин Д. А. Нейросетевой алгоритм безопасного облета воздушных препятствий и запрещенных наземных зон / Д. А. Михайлин [Электронный ресурс] // Научный вестник МГНУ ГА. – 2017. – Т.20, № 4. – С.18-24. - doi: 10.26467/2079-0619-2017-20-4-18-24. - Режим доступа: <http://avia.mstuca.ru/jour/issue/view/49> \t "_parent.
105. Лебедев Г. Н. Нейросетевое планирование маршрута разнорысотного полета беспилотного летательного аппарата / Г. Н. Лебедев, А. В. Румакина // Авиакосмическое приборостроение. - 2014. - № 5. - С.3–8.
106. Абросимов В. К. Моделирование движения и маневрирования летательных аппаратов на нейронных сетях / В. К. Абросимов, В. И. Гончаренко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. - С.122-129.

107. Михайлин Д. А. Нейросетевая система управления посадкой самолетного типа для беспилотного летательного аппарата / Д. А. Михайлин: дисс...канд.тех. наук 05.13.01. – М.: МАИ, 2009. – 99 с.
108. Calise A. J. Adaptive Flight Control using Neural Networks / A. J. Calise, R. T. Rysdyk [Electronic resource]. - Mode of access: http://www.aa.washington.edu/research/afsl/publications/rysdyk_1998adaptiveNN.pdf.
109. Белоглазов Д. А. Анализ методов устойчивости нечетких систем управления / Д. А. Белоглазов, Е. Ю. Косенко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. - С.127-132.
110. Белоглазов Д. А. Разработка и исследование методов синтеза адаптивных регуляторов на основе нейронечетких сетевых структур / Д. А. Белоглазов: дис...канд. тех. наук 05.13.01. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2012. – 164 с.
111. Пугачев Ю. А. Интеллектуальные бортовые системы перспективных летательных аппаратов / Ю. А. Пугачев [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://mipt.ru/upload/cea/f_9nd0-arpeur8zvmb.pdf.
112. Матвеев Е. В. Модель нечеткой системы управления летательного аппарата / Е. В. Матвеев, В. А. Глинчиков // Датчики и системы. – 2011. - № 3. – С.59-62.
113. Карпович Д. С. Система управления беспилотным летательным аппаратом с применением теории нечетких множеств / Д. С. Карпович, А. Н. Шумский, В. В. Сарока // Труды БГТУ. - 2016. - № 6 (188). - С. 110-116.
114. Гладков, Л. А. Генетические алгоритмы / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. - М: Физматлит, 2006. – 320 с.
115. Бюшгенс Г. С. Динамика самолета. Пространственное движение / Г. С. Бюшгенс, Р. В. Студнев. – М.: Машиностроение, 1983. – 320 с.
116. Пшихопов В. Х. Аналитический синтез позиционно-траекторных систем управления подвижными объектами / В. Х. Пшихопов. - дисс...докт.техн.наук 05.13.01. – Таганрог, 2009. - 361 с.
117. Moutinho A. B. Modeling and nonlinear control for airship autonomous flight / A. B. Moutinho. – Ph.D. thesis, Instituto Superior Tecnico, Technical University of Lisbon, 2007. – 178p.

118. Чебыкин Д. В. Backstepping - метод синтеза управления для нелинейных объектов / Д. В. Чебыкин // Информационные технологии, телекоммуникации и системы управления: международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, 2016 г.: тезисы доклада. - Екатеринбург, 2015. - С. 248-254.
119. Hygounenc E. The autonomous blimp project of LAAS-CNRS: Achievements in flight control and terrain mapping / E. Hygounenc, I. Jung, Ph. Soures, S. Lacroix // The International Journal of Robotics Research. – 2004. - Issue 23(4-5). – P. 473-511.
120. Avenant G. C. Autonomous Flight Control System for an Airship / G. C. Avenant: Master of Science thesis, Stellenbosch University, 2010. – 215 pp.
121. Федоренко Р. В. Методы проектирования и исследования автопилота взлета и посадки роботизированного дирижабля / Р. В. Федоренко: дис...канд. техн. наук. 05.02.05. – Таганрог, 2011. – 150 с.
122. Hong Ch. H. Applications of Adaptive Neural Network Control to an Unmanned Airship / Chun-Han Hong, Kwang-Chan Choi, Byoung-Soo Kim // International Journal of Control, Automation and Systems. – 2009. - Issue 7(6). – P. 911-917.
123. De Paiva E. Nonlinear Control Approaches for an Autonomous Unmanned Robotic Airship / E. de Paiva, F. Benjovengo, S. Bueno, J. Azinheira, A. Moutinho // 7th AIAA ATIO Conf., 2nd CEIAT Int’l Conf. on Innov. and Integr. in Aero. Science, 17th LTA Systems Tech. Conf., Belfast, Northern Ireland. - Sep. 2007.
124. Kim K. Robust backstepping control for slew maneuver using nonlinear tracking function / K. Kim, Y. Kim // IEEE Transactions on control systems Technology. – 2003. - Issue 11(6). – pp. 822-829.
125. Федоренко Р. В. Алгоритмы автопилота посадки роботизированного дирижабля [Электронный ресурс] / Р. В. Федоренко // Электронный научно-инновационный журнал Инженерный вестник Дона. – 2011. - №1. – Режим доступа: http://ivdon.ru/uploaddir/articles.371.big_image.doc
126. Saiki H. Automatic Landing Control of Outdoor Blimp Robots / H. Saiki, T. Fukao, T. Kohno // IFAC Proceedings Volumes. – 2009. – Vol.42, Issue 16. – P. 32-37.

127. Beji L. Tracking control of trim trajectories of a blimp for ascent and descent flight maneuvers / L. Beji, A. Abichou // *International Journal of Control*. – 2005. - Vol.78. - P.706-719.
128. Kwon Ji-Wook. Vector field guided auto-landing control of airship with wind disturbance / Kwon Ji-Wook, Kim Jin Hyo, Seo Jiwon // *19th World Congress - The International Federation of Automatic Control*. – Cape Town, South Africa, August 24-29, 2014. – P.1114-1119.
129. Saiki H. Takeoff and Landing Control of Outdoor Blimp Robots / H. Saiki, T. Fukao, T. Kohno, Y. Ishimori // *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series C*. – 2011. - Vol.77(2011), No.775. – P.1004-1016.
130. Takaya T. PID landing orbit motion controller for an indoor blimp robot / T. Takaya, H. Kawamura, Y. Managawa, Y. Yoshihiro, O. Masahito, A. Azuma // *Artificial Life and Robotics*. – 2007. - Vol.11, No.2. - P. 227.
131. Azinheira J. R. Visual servo control for the hovering of all outdoor robotic airship / J. R. Azinheira, P. Rives, J. R. H. Carvalho, G. F. Silveira, E. C. de Paiva, S. S. Bueno // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. – 2002. - Vol.3. - P. 2787-2792.
132. Azinheira J. R. Hover control of an UAV with backstepping design including input saturations / J. R. Azinheira, A. Mautinho // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. – 2008. - Vol.16, No.3. - P.517-526.
133. Saiki H. Hovering control of outdoor blimp robots based on path following / H. Saiki, T. Fukao, T. Urakubo, T. Kohno // *IEEE International Conference on Control Applications, IEEE Multi-Conference on Systems and Control*. - Yokohama, Japan, September 8-10, 2010. – P. 2124-2129.
134. Liu Y. Control of autonomous airship / Y. Liu, Z. Pan, D. Stirling, F. Naghdy // *IEEE International conference on robotics and biomimetics*. - Guilin, China, December 19-23, 2009. – P.2457-2462.
135. Hygounenc E. Automatic airship control involving backstepping techniques / E. Hygounenc, P. Soueres // *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. - Hammamet, Tunisia, 2002. - Vol.6. – P. 6-9.

136. Beji L. Stabilization of a nonlinear underactuated autonomous airship – a combined averaging and backstepping approach / L. Beji, A. Abichou, Y. Bestaoui // 3rd international workshop on Robot Motion and Control. - 9-11 Nov. 2002. - P. 223-229.
137. Moutinho A. Stability and Robustness Analysis of the AURORA Airship Control System using Dynamic Inversion / A. Moutinho, J. R. Azinheira // IEEE International Conference on Robotics and Automation. - Barcelona, Spain, 18-22 April 2005. - doi: 10.1109/ROBOT.2005.1570450.
138. Ramos, J. J. G. Lateral/directional control for an autonomous unmanned airship / J. J. G. Ramos, E. C. de Paiva, J. R. Azinheira, S. S. Bueno, M. Bergerman, M. et al. // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. – 2001. - Vol. 73. - P. 453–458.
139. Munk M. M. The choice of the speed of an airship / M. M. Munk // Technical Notes. - National Advisory Committee for Aeronautics. - March 1992. – <http://nasa.larc.gov/reports/1924>.
140. Zhao Y. J. Benefits of Trajectory Optimization in Airship Flights / Y.J. Zhao, W.L. Garrard, J. Mueller // AIAA 3rd “Unmanned Unlimited” Technical Conference, Workshop and Exhibit. – 20-23 September 2004. – Chicago (USA). – P. 1-14.
141. Mueller J. B. Optimal Ascent Trajectories for Stratospheric Airships Using Wind Energy / J. B. Mueller, J. Y. Zhao, W. L. Garrard // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2009. - Vol. 32, No. 4. - P. 1232-1245.
142. Lee S. Three-dimensional ascent trajectory optimization for stratospheric airship platform in the jet stream / S. Lee, H. Bang // J. of guidance, control and dynamic. – 2007. – Vol.30, No.5. – P. 1341-1352.
143. Xie Y. Descent trajectory optimization for stratospheric airships with thermal effects / Y. Xie, M. Zhu, X. Guo, W. Lou, Q. Yang // IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference. – August 8-10, 2014. – Yantai (China). – P. 612-617.
144. Guo X. Ascent trajectory optimization for stratospheric airship with thermal effects / X. Guo, M. Zhu // Advances in Space Research. – 2013. - Issue 52(6). – P. 1097-1110. - doi: 10.1016/j.asr.2013.06.021.

145. Blouin C. Trajectory optimization of a small airship / C. Blouin: M.Sc. dissertation. – University of Ottawa, 2015. – 59 pp.
146. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт. - М.: Радио и связь, 1982. - 392 с.
147. Лебедев А. А. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов / А. А. Лебедев, М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев. - М.: Машиностроение, 1974. - 200 с.
148. Шалыгин А. С. Статистические методы в динамике беспилотных летательных аппаратов / А. С. Шалыгин, И. Л. Петрова. - СПб.: БГТУ, 2007. – 115 с.
149. Красильщиков М. Н. Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий / М. Н. Красильщиков, Г. Г. Серебряков. – М.: Физматлит, 2003. – 280 с.
150. Никифоров В. О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений / В. О. Никифоров. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.
151. Толпегин О. А. Дифференциально-игровые методы управления движением беспилотных летательных аппаратов / О. А. Толпегин. - СПб.: БГТУ, 2009. - 244 с.
152. Айзекс Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. - М.: Мир, 1967. - 480 с.
153. Васильев В. В. Моделирование задач оптимизации и дифференциальных игр / В. В. Васильев, В. Л. Баранов. – К.: Наукова Думка, 1989. – 296 с.
154. Кунцевич В. М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. – К.: Наукова думка, 1985. – 248 с.
155. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. - М.: Наука, 1985. – 520 с.
156. Сизова А.А. Синтез управления беспилотного летательного аппарата при наличии возмущений на основе методов теории дифференциальных игр / А. А. Сизова. – дисс...канд.техн.наук 05.13.01. – СПб, 2010. – 177 с.
157. Баранов В. Л. Моделирование игровых алгоритмов терминального управления динамическими объектами / В. Л. Баранов, О. С. Урусский, Г. Л. Баранов,

- Е. Ю. Комаренко // Электронное моделирование. – 1996. – В.18, №2. – С. 75-81.
158. Урусский О. С. Гарантированно-адаптивное управление процессом выведения аэрокосмических систем на орбиту / О. С. Урусский // Аэрокосмическая индустрия и экология. Проблемы конверсии и безопасности (AINESC 95): 1 международный симпозиум, 21-25 мая 1995 г.: тезисы доклада. – Днепропетровск (Украина), 1995. – С.47-48.
159. Сиразетдинов Т. К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем / Т. К. Сиразетдинов. – М.: Машиностроение, 1988. – 158 с.
160. Воронин А. Н. Многокритериальные решения: модели и методы / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиятдинов, М. В. Куклинский. – К.: НАУ, 2011. – 348 с.
161. Воронин А.Н. Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиятдинов, А.И. Козлов, В.С. Чабанюк. – К.: Техника, 1999. – 284 с.
162. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – 201 с.
163. Бенайюн Р. Линейное программирование с многими критериями. Метод ограничений / Р. Бенайюн, О. И. Ларичев, Ж. Де Монгольфье, Ж. Терни // Автоматика и телемеханика. - 1971. - № 8. – С.108-115.
164. Засядько А. А. Методи розв'язання некоректних задач на основі багатокритеріальної оптимізації і диференціальних перетворень для автоматизованих систем управління / А. А. Засядько: дис. ... д-ра тех. наук 05.13.06. – Черкаси: ЧНУ, 2006. – 323 с.
165. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
166. Подиновский В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. - М.: Ленанд, 2016. – 194 с.
167. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

168. Vira Ch. Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology / Ch. Vira, Y. Y. Haimes. - N.Y.: North Holland, 1983 – 432 p.
169. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А. Н. Воронин. - К.: Наукова думка, 1992. – 157 с.
170. Воронин А. Н. Теория и практика многокритериальных решений: модели, методы, реализация / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов. – Lambert Academic Publishing, 2013. – 305 с.
171. Воронин А. Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах / А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов. // в кн. Artificial Intelligence and Decision Making. International Book Series «Information Science & Computing», 2008. - Т.7. – С.79-85.
172. Урусский О. С. Многокритериальный синтез управления процессом выведения авиационно-космических систем на орбиту / О. С. Урусский // Космічна наука і технологія. – 1997. – Т.3, №1/2. – С.75-77.
173. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – К.: Наукова думка. – 1970. – 800 с.
174. Keller H. B. Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems / H. B. Keller. - New York, Dover Publications, 1992. – 397 с.
175. Пухов Г. Е. Дифференциальное преобразование функций и уравнений / Г. Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1980. – 419 с.
176. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г. Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1986. – 160 с.
177. Пухов Г. Е. Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике / Г. Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1978. – 286 с.
178. Семагина Э. П. Дифференциальные преобразования и их возможности для решения задач динамики / Э. П. Семагина // Электронное моделирование. – 1986. – Т.8, №4. – С.44-49.

179. Ронто Н. И. О некоторых модификациях уравнений связи изображений в дифференциальных преобразованиях / Н. И. Ронто // Теория дифференциальных преобразований и ее приложения. – К.: Наукова думка, 1990. – С.25-42.
180. Ронто Н. И. О неявных схемах интегрирования, основанных на дифференциальных преобразованиях / Н. И. Ронто // Электронное моделирование. – 1981. - №5 (3). – С.6-11.
181. Chen C. L. Solution of two-point boundary-value problems using the differential transformation method / C. L. Chen, Y. C. Liu // J. of optimization theory and applications. – 1998. - Vol.99, No.1. - P.23-35.
182. Aruna K. A novel approach for a class of higher order nonlinear singular boundary value problems / K. Aruna, A. S. V. R. Kanth // International journal of pure and applied mathematics. – 2013. – Vol.84, No.4. – P. 321-329.
183. Opanuga A. A. Numerical solution of two-point boundary value problems via differential transform method / A. A. Opanuga, S. O. Edaki, H. I. Akagbue, G. O. Akinlabi // Global journal of pure & applied mathematics. – 2015. – Vol.11, Issue 2. - P. 801-806.
184. El-Zahar E.R. Approximate analytical solutions of singularity perturbed fourth order boundary value problem using differential transform method / E. R. El-Zahar // J. King Saud University-Science. – V.25. - P. 257-265. - doi: 10.1016/jksus.2013.01.004.
185. El-Zahar E. R. Applications of adaptive multi-step differential transform method to singular perturbation problems arising in science and engineering / E. R. El-Zahar // Appl.Math.Inf.Sci. – 2015. – Vol.9, No.1. - P.223-232.
186. Lin Y. Modified differential transform method for two singular boundary value problems / Y. Lin, H. Tang, C. Chen // J. of applied mathematics. – 2014. - P.1-6. – doi: 10.1155/2014/138087.
187. Баранов В. Л. Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач / В. Л. Баранов, С. В. Водоп'ян, Р. М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. – 2007. - №2(41). – С.59-65.

188. Баранов В. Л. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / В. Л. Баранов, С. В. Водоп'ян, Р. М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. – 2005. – № 4 (35). – С. 42–48.
189. Фролова Е. А. Моделирование и оптимизация динамических объектов и процессов на основе смещенных дифференциальных преобразований / Е. А. Фролова: дис...канд. техн. наук: 01.05.02. – К., 2003. – 189 с.
190. Баранов В. Л. Решение нелинейных краевых задач на основе дифференциальных преобразований / В. Л. Баранов // Электронное моделирование. – 1996. – Т.18, №4. – С.58-63.
191. Баранов В. Л. Дифференциально-тейлоровская модель нелинейных краевых задач / В. Л. Баранов // Электронное моделирование. – 2000. – Т.22, №4. – С.25-31.
192. Hwan I. Differential Transformations and Its Application to Nonlinear Optimal Control / I. Hwan, J. Li, D. Du // J. of dynamic systems, measurement and control. – 2009. – Vol.131. - P. 051010-1 – 051010-11. - doi: 10.1115/1.3155013.
193. Симонян С. О. Решение задач линейного быстрогодействия с закрепленными краевыми условиями в области дифференциальных преобразований (общий случай) / С. О. Симонян, А. Г. Аветисян, Д. А. Казарян // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2009. - №1. – С. 137-144.
194. Симонян С. О. Об одном подходе к решению линейных задач оптимального быстрогодействия на основе дифференциальных преобразований / С. О. Симонян, А. Г. Аветисян, Д. А. Казарян // Вестник СГТУ. – 2009. – С. 218-227.
195. Симонян С. О. Прикладная теория дифференциальных преобразований / С. О. Симонян, А. Г. Аветисян. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.
196. Nazemi A. An application of differential transform method for solving nonlinear optimal control problems / A. Nazemi, S. Hesam, A. Haghighi // Computational Methods for Differential Equations. – 2015. – Vol.3, No.3. - P.200-217.
197. Fakharzadeh A. Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems by Differential Transformation Method / A. Fakharzadeh, S. Hashemi // TJMCS. – 2012. – Vol.5, No.3. - P.146-152.

198. Saberi Nik H. Solution of linear optimal control systems by differential transform method / Nik H. Saberi, S. Effati, A. Yildirim // *Neural Computing & Applications*. – 2013. - Volume 23, Issue 5. - P 1311–1317. – doi: 10.1007/s00521-012-1073-4.
199. Баранов В. Л. Дифференциально-тейлоровская модель оптимальных процессов управления / В. Л. Баранов // *Электронное моделирование*. – 2000. – Т.22, №5. – С.3-11.
200. Урусский О. С. Метод построения оптимального управления процессом выведения авиационно-космических систем на орбиту / О. С. Урусский // *Космічна наука і технологія*. – 1997. – Т.3, №1,2. – С.5-11.
201. Гусынин В. П. Методы решения проблем безопасности динамики разделения и управления выведением на орбиту двухступенчатых авиационно-космических систем горизонтального старта / В. П. Гусынин: дис.докт.техн.наук: 05.02.09. - К., 1999. - 289 с.
202. Gusynin A.V. Synthesis of control of the ascent into orbit of a multimode aerospace system / A. V. Gusynin, V. P. Gusynin, V. L. Baranov // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference*. - Quebec, Canada, July 30 – August 2, 2001. – P.408-418.
203. Гусинін А. В. Диференціальні перетворення в задачах керування рухом літальних апаратів / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, В. Л. Баранов, І. А. Жуков, Л. О. Алексеева. – К.: НАУ, 2003. – 158 с.
204. Baranov V. L. Simulating terminal control problems by differential transform method / V. L. Baranov, O. S. Uruski, G. L. Baranov, E. Yu. Komarenko // *Engineering simulation*. – 1995. – Vol.13. - P.195-204.
205. Баранов В. Л. Квазианалоговые многокритериальные модели оптимизации динамических процессов / В. Л. Баранов, Н. С. Залогин, О. С. Урусский, Г. Л. Баранов, Е. Ю. Комаренко // *Электронное моделирование*. – 1996. – В.18, №1. - С. 3-9.
206. Урусский О. С. Многокритериальное управление процессом выведения аэрокосмических систем на орбиту / О. С. Урусский, В. Л. Баранов, Г. Л. Баранов // *Аэрокосмическая индустрия и экология. Проблемы конверсии и*

- безопасности (AINESC 95): 1 международный симпозиум, 21-25 мая 1995 г.: тезисы доклада. – Днепропетровск (Украина), 1995. – С.47-48.
207. Urusky O. S. Modeling of multiple process of spacecraft orbital // Multiple criteria problems under uncertainty / O. S. Urusky, G. L. Baranov, V. L. Baranov, N. S. Zalugin. – Proceedings of the 3rd International workshop, September 5-9, 1994. – Orekhovo-Zuevo (Russia), 1994. – P.95.
208. Баранов В. Л. Моделирование задач терминального управления методом дифференциальных преобразований / В. Л. Баранов, Г. Л. Баранов, О. С. Урусский, Е. Ю. Комаренко // Электронное моделирование. – 1995. – Т.17, №2. – С.12-16.
209. Gusynin A.V. Application of differential transformations for the modeling motion of aerostatic vehicles and for the synthesis of control algorithms / A. V. Gusynin // Proceedings of the National Aviation University. – 2005. – No.2(24). – P.83-88.
210. Гусинін А. В. Застосування керованого вектору тяги на дирижаблях / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін // Вісник Національного авіаційного університету. – 2005. - №3(25). – С.79-84.
211. Гусынин А.В. Синтез алгоритма управления отклонением вектора тяги аэростатического летательного аппарата на этапе взлета дирижаблях / А. В. Гусинін : дис... канд. техн. наук : 05.13.03. – К., 2007. – 132 с.
212. Баранов В. Л. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / В. Л. Баранов, С. В. Водоп'ян, Р. М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. – 2005. - №4(35). – С.42-49.
213. Баранов В. Л. Метод моделювання нестационарних фізичних процесів на основі системи зміщених диференціальних перетворень / В. Л. Баранов, К. В. Молодецька, Д. В. Хаустов // Вісник ДУІКТ. – 2010. – Т.8, №3. – С.203-209.
214. Кухарський І. А. Розв'язання балістичних задач на основі зміщених диференціальних перетворень / І. А. Кухарський // Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. – 2013. - №2(11). – С. 205-207.

215. Ковбасюк С. В. Застосування зміщених диференціальних перетворень до розв'язку балістичних задач / С. В. Ковбасюк, М. Ю. Ракушев // Вісник ЖДТУ. – 2006. - №4(39). – С.127-133.
216. Гусынин А. В. Модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. В. Гусынин // Проблеми інформаційних технологій. – 2016. - №02(020). – С.26-34.
217. Biazar J. Multi-step differential transform method for nonlinear oscillators / J. Biazar, F. Mohammadi // Nonlinear Sci. Lett. A. – 2010. – Vol.1., No.4. – P. 391-397.
218. El-Zahar E. R. Applications of adaptive multi-step differential transform method to singular perturbation problems arising in science and engineering / E. R. El-Zahar // Appl.Math.Inf.Sci. – 2015. – Vol.9, No.1. - P. 223-232.
219. Behiry S. H. A new algorithm for the decomposition solution of nonlinear differential equations [Electronic resource] / S. H. Behiry // Computers & Mathematics with Applications. – 2007. – Vol. 54, Issue 4. – P. 459-466. – Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/08981221>.
220. Behiry S. H. Nonlinear integro-differential equations by differential transform method with Adomian polynomials / S. H. Behiry // Australian Journal of Basic and Applied Sciences. – 2013. – No. 7(7). – P. 128-139.
221. Chang S. H. A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions / S. H. Chang, I. L. Chang // Appl.Math.Comput. – 2008. - Issue 195. – P. 977-808.
222. Elsaied A. Fractional differential transform method combined with Adomian polynomials / A. Elsaied // Appl.Math.Comput. – 2012. - Issue 218. – P. 6899-6911.
223. Duan J. S. Convenient analytic recurrence algorithm for Adomian polynomials / J. S. Duan // Appl.Math.Comput. – 2011. – Issue 218. – P. 6337-6348.
224. Elsaied A. Adomian polynomials: a powerful tool for iterative methods of series solution of nonlinear equation / A. Elsaied // Journal of Applied Analysis and Computation. – 2012. - Vol.2, No.4. – P. 381-394.

225. Adomian G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations / G. Adomian // *Mathematical and Computer Modeling*. – 1990. – Vol. 13, Issue 7. – P. 17-43.
226. Ebaid A. On a general formula for computing the one-dimensional differential transform of nonlinear functions and its applications / A. Ebaid // *American Conference on Applied Mathematics*. - Harvard, Cambridge, USA, 2012. – P. 92-97
227. Gusynin A. Differential transform method for solving non-linear differential equation by the Adomian polynomials / A. Gusynin // *Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського*. – 2017. – No.03(104). – С. 46-51.
228. Al-Eybani A. Adomian decomposition method and differential transform method to solve the heat equations with a power nonlinearity / A. Al-Eybani // *Int.Journ. of Engineering research and applications*. – 2015. – Vol.5, No.2. – P. 94-98.
229. Гусынин А. В. Применение модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / А. В. Гусынин // *Проблеми інформаційних технологій*. – 2016. - №01 (019). - С.31-40.
230. Гусынин А. В. Решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, систем уравнений и краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Ю. К. Зіатдінов // *Norwegian Journal of development of the International Science*. – 2020. – Vol.1, № 49. – С. 32-47.
231. Гусынин А. В. Решение нелинейных двухточечных краевых задач модифицированным методом дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, О. Н. Замирец // *Технология приборостроения*. – 2016. - №1. - С. 16-21.
232. Gusynin A. The use of differential transformations for solving non-linear boundary value problems / A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // *Proceedings of the National Aviation University*. – 2016. - № 4 (69). - P.44-55.

233. Sunday J. Convergence Analysis and Implementation of Adomian Decomposition Method on Second-order Oscillatory Problems / J. Sunday // Asian Research Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 2(5). – P. 1-12.
234. Abdelrazec A. Convergence of ADM for initial value problems / A. Abdelrazec, D. Pelinovsky // Wiley Periodicals. - 2009. - doi: 10.1002/num.20549.
235. Saha Ray S. New Approach for General Convergence of the Adomian Decomposition Method / S. Saha Ray // World Applied Sciences Journal. – 2014. – No. 32 (11). – P. 2264-2268. – doi: 10.5829/idosi.wasj.2014.32.11.1317.
236. Bougoffa, L. A convergence analysis of the Adomian decomposition method for an abstract Cauchy problem of a system of first-order nonlinear differential equations / L. Bougoffa, R. C. Rach, S. EI-Manouni // International Journal of Computer Mathematics. – 2013. - No. 90(2). – P. 360-375.
237. Головин Е. Д. Математическое и численное моделирование нелинейных устройств и устройств с переменными параметрами / Е. Д. Головин: дис. к.т.н.: Томск, 2004. - 152 с.
238. Стукач О. В. Моделирование и оптимизация сверхвысокочастотных регулирующих устройств / О. В. Стукач: дис.д-р.техн.наук: Томск, 2010. - 272 с.
239. Баранов В. Л. Оцінка похибки моделювання фізичних полів і процесів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів / В. Л. Баранов, Р. М. Костюченко, К. В. Молодецька // Вісник ЖДТУ. – 2009. - №3(50). – С.71-77.
240. Баранов В. Л. Порівняння методів моделювання динамічних процесів традиційними та зміщеними диференціальними перетвореннями / В. Л. Баранов, Г. Л. Баранов, О. Г. Фролова // Проблеми інформатизації та керування. – 2004. - №10. – С. 72-77.
241. Баранов В. Л. Многокритериальная оптимизация динамических процессов в области смещенных дифференциальных преобразований / В. Л. Баранов, Е. Г. Фролова, Г. Л. Баранов // Оптимизация производственных процессов. – 2002. - №5. – С.25-34.

242. Gusynin A. Estimate of accuracy of approximate solutions of non-linear boundary value problems by the multi-step differential transform method / A. Gusynin, V. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2017. - № 1(70). – С.48-54.
243. Гусинін А. В. Дискретно-аналітичне відображення нелінійних задач багатоступового траєкторного руху літальних апаратів / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, Ю. К. Зіатдінов // International independent scientific journal. – 2020. - Vol.1, № 21. – С. 39-44.
244. Гусинін А. В. Дирижаблі. Ч.ІІ. Аеростатика, аеродинаміка та динаміка керованого польоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, В. М. Казак, М. С. Кулик. - К.: НАУ, 2010. – 212 с.
245. Woo G. A. Dynamic Response and Control of Airship for Cruising / G. A. Woo, K. R. Cho, Y. J. Cho // 4th International Airship Convention and Exhibition, July, 28-31, 2002. – Cambridge (England), 2002. – P. 50-57.
246. Jex H. R. Dynamics Flight-Tests of the Skyship-500 Airship / H. R. Jex, J. R. Hogue, R. E. Magdaleno. – Systems Technology. – TR-1151-4. – 1986. – P. 50-57.
247. Остославский И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – М.: Машиностроение, 1969. – 410 с.
248. Горбатенко О. А. Механика полета / О. А. Горбатенко, Э. М. Макашов, Ю. Ф. Полушкин, Л. Ф. Шефтель. – М.: Машиностроение, 1969. – 420 с.
249. Баранов В. Л. Снижение тепловых нагрузок действующих на поверхности изделий ракетно-космической техники методом траекторного управления: научно-технический отчет по проекту Т 3-6/10 / В. Л. Баранов, О. С. Урусский, Е. Ю. Комаренко. – К.: ИНТПТ «Интерпротех», 1994. – 135 с.
250. Збруцький О. В. Диференціальні Т-перетворення в задачах автоматичного керування рухом літальних апаратів / О. В. Збруцький, А. В. Гусинін, В. П. Гусинін. - К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 176 с.
251. Гусынин А. В. Применение дифференциальных преобразований к синтезу алгоритма многоэтапного терминального управления летательным аппаратом /

- А. В. Гусынин // Науковий вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2015. - № 2(10). – С. 24-33.
252. Гусынин А. В. Модель оптимизации многоэтапного процесса управления летательным аппаратом на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Я. О. Замирец // Системи обробки інформації. – 2015. - В.8(113). – С.77-81.
253. Гусынин А. В. Методы оптимизации управления многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциальных преобразований / А.В. Гусынин // 13-а Українська конференція з космічних досліджень, 2-6 сентября 2013 г.: тезисы докладов. – Євпаторія (Україна), 2013. - С. 121.
254. Gusynin A. An application of differential transformation for optimal control of non-linear processes / A. Gusynin // Electrotechnic and computer systems. – 2017. – Vol.26(102). – С.95-104.
255. Гусынин А. В. Моделирование процесса терминального управления многорежимными объектами на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 17-21 мая 2010 г.: тезисы докладов. – Евпатория (Украина). – С. 59-60.
256. Урусский О. С. Синтез замкнутых законов терминального управления на основе дифференциальных преобразований / О. С. Урусский, В. Л. Баранов // Электронное моделирование. – 1996. - №3. – С. 3-8.
257. Гусинін А. В. Оптимізація керування виведенням на орбіту багаторежимної авіаційно-космічної системи на основі диференціальних перетворень / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2008. - В.2(24). - С. 32-38.
258. Гусынин А. В. Синтез алгоритма терминального управления многоэтапным процессом выведения авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, О. С. Урусский // Проблеми інформаційних технологій. – 2015. - №02 (018). - С.60-67.

259. Разыграев А. П. Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей / А. П. Разыграев. – М.: Машиностроение, 1977. – 472 с.
260. Аэрокосмический ракетный комплекс легкого класса «Ориль». Часть 1. Ракета-носитель: Отчет о НИР (Аванпроект)/ГКБ «Южное». – Д., 1995. – 185 с.
261. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський Політехнічний Інститут». – 2008. - №3. - С. 87-95.
262. Gusynin A. V. The algorithm synthesis for automatic control of airship thrust vector tilting at takeoff stage / A. V. Gusynin, V. P. Gusynin // 7th International airship convention, October 9-11, 2008. – Friedchshafen (Germany), 2008. – Paper Nr.71154.
263. Гусинін А. В. Порівняльна оцінка ефективності ручного та автоматичного керування відхиленням вектору тяги дирижабля на етапі зльоту / А. В. Гусинін, В. П. Гусинін, О. М. Тачиніна // Вісник Національного авіаційного університету. – 2008. - В. 2(24). – С.68-72.
264. Гусинін А. В. Синтез алгоритму оптимального керування рухом аеростатичного літального апарату на етапі посадки / А. В. Гусинін // Проблеми інформаційних технологій. – 2013. - №01(013). - С. 53-60.
265. Khoury G. A. Airship Technology / G. A. Khoury, J. D. Gillett. – Cambridge University Press, 1999. – 524 p.
266. Гусынин А. В. Оптимизация управления посадкой дирижабля на основе многоэтапного метода дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин, Ю. В. Антонова-Рафи, А. В. Яровой // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2017. – В.5(45). - С.12-17.
267. Гусынин А. В. Оптимизация автоматической посадки дирижабля / А. В. Гусынин // Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 28-31 мая 2014 г.: тезисы докладов. – Евпатория (Украина), 2014. - С. 64-65.

268. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Ю-Ши. Хо. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
269. Гусынин А. В. Системоаналоговое моделирование законов оптимального управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // 14-а Українська конференція з космічних досліджень, 8-12 вересня 2014 г.: тези доповідей. – Ужгород (Україна), 2014. - С. 103.
270. Гусынин А. В. Моделирование оптимального процесса управления движением дирижабля смещенными дифференциальными преобразованиями / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании: международная научно-практическая конференция, 21-28 декабря 2009 г.: тезисы доклада. – Одесса (Украина), 2009. - Т.2. - С. 17-18.
271. Салуквадзе М. Е. Задачи векторной оптимизации и теории управления / М. Е. Салуквадзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – 202 с.
272. Попов Н. М. Об оценке вычислительной сложности многокритериальной оптимизации / Н. М. Попов // Вычислительные комплексы и моделирование сложных систем. – М.: МГУ, 1989. – С.142-152.
273. Гусинін А. В. Багатокритеріальна оптимізація керування рухом багаторежимних літальних апаратів / А. В. Гусинін // Технологія приборостроєння. – 2011. - Т.2. - С. 3-5.
274. Gusynin A. The system of injection of subminiature satellites (nanosatellites) to near-earth orbit on the basis of AN-124-100 and AN-225 airplane / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko, S. Chumachenko, I. Chekanova, I. Alexeeva // Актуальні проблеми моделювання ризиків і загроз виникнення надзвичайних ситуацій на об'єктах критичної інфраструктури: II міжнародна науково-практична конференція, 26-28 травня 2016 р.: тези доповіді. – Київ (Україна), 2016. - С. 278-292.
275. Gusynin A. The differential-and-taylor model of multicriterion optimization by control launch into orbit of multimode aerospace system / A. Gusynin // Науковий

вісник Академії муніципального управління, серія «Техніка». – 2016. - № 1-2 (11). – С. 104 -118.

276. Gusynin A. The method of injection of subminiature satellites with the aid of flying space launch facility based on An-124-100 and An-225 airplanes / A. Gusynin, O. Tachinina, O. Lysenko, S. Chumachenko // *Methods and Systems of Navigation and Motion Control: IEEE 4th International Conference, October 18-20, 2016.* – Kyiv (Ukraine), 2016. - P. 200-205. - doi:10.1109/ MSNMC. 2016.7783142.
277. Гусынин А. В. Снижение аэротермодинамических нагрузок на конструкцию многорежимной транспортно-космической системы путем многокритериальной оптимизации траекторного управления / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // *Материалы и покрытия в экстремальных условиях: исследования, применение, экологически чистые технологии производства и утилизации изделий: VII международная конференция, 24-28 сентября 2012 г.: тезисы доклада.* – Кацивели (Украина), 2012. – С. 82.
278. Гусынин А. В. Многокритериальная оптимизация процесса выведения на орбиту многорежимной авиационно-космической системы на основе дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // *12-а Українська конференція з космічних досліджень, 3-7 сентября 2012 г.: тезисы доклада.* – Евпатория (Украина), 2012. – С. 115.
279. Гусынин А. В. Комбинированное управление выведением многорежимной авиационно-космической системы на орбиту / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин // *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта: международная научная конференция, 25-29 мая 2012 г.: тезисы доклада.* – Евпатория (Украина). 2012. - С. 476.
280. Гусынин А. В. Многокритериальная оптимизация движения автоматически управляемого аэростатического летательного аппарата / А. В. Гусынин, В. П. Гусынин, Е. Н. Тачинина // *Проблеми інформатизації та управління.* – 2015. - Т.4(52). - С. 22-30.

281. Гусинін А.В. Оптимальне комбіноване керування автономним аеростатичним літальним апаратом / А.В. Гусинін, В.П. Гусинін // The scientific heritage. – 2020. – Vol.1, № 54 (54). – P. 39-47.
282. Гусынин А. В. Метод многокритериальной оптимизации управления движением многорежимных летательных аппаратов на основе смещенных дифференциальных преобразований / А. В. Гусынин // Проблеми інформаційних технологій. – 2014. – №02(016). – С. 97-102.
283. Толпегин О. А. Определение седловой точки в нелинейной игровой задаче преследования / О. А. Толпегин // Вторые Уткинские чтения: сборник трудов международной научно-технической конференции. - СПб.: БГТУ, 2001. - С. 142-151.
284. Кейн В. М. Оптимизация систем по минимаксному критерию / В. М. Кейн. - М.: Наука, 1985. – 248 с.
285. Боткин Н. Д. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах / Н. Д. Боткин, М. А. Зарх, В. М. Кейн, В.С. Пацко, и др. // Изв. РАН. Техническая кибернетика. - 1993. - № 1. - С. 68- 76.
286. Bulirsch R. Abort landing in the presence of windshear as a minimax control problem / R. Bulirsch, F. Montrone, H. J. Pesch // Journal of Optimization Theory and Applications. - 1991. - Vol. 70, № 1. - P. 1-23.
287. Гусынин А. В. Синтез программных алгоритмов терминального управления аэростатическим летательным аппаратом / А. В. Гусынин // Sciences of Europe. – 2020. – Vol.1, № 58. – P. 46-58.
288. Гусынин А. В. Терминальное управление многорежимными летательными аппаратами на основе дифференциально-игрового подхода / А. В. Гусынин // Людина і космос: XIV міжнародна молодіжна науково-практична конференція, 11-13 квітня 2012 р.: тези доповіді. – Дніпропетровськ (Україна), 2012. – С. 129.
289. Гусинін А. В. Диференціально-ігровий підхід до синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів / А. В. Гусинін // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. - №1(88). - С. 40-45.

290. Gusynin A. Synthesis of optimal multi-step control algorithms by UAVs based on differential-and-game approach / A. Gusynin, O. Yarovoy, J. Antonova-Rafi, I. Khudetsky // Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Development: IEEE 4th International Conference, October 17-19, 2017. – Kyiv (Ukraine), 2017. - P. 100-103.
291. Gusynin A. Algorithm of guaranteed-and-adaptive control of aerostatic vehicle under undetermined external disturbances / A. Gusynin, H. Tachinina // Proceedings of the National Aviation University. – 2014. – No.4(61). - P. 36-44.
292. Gusynin A. Guaranteed adaptive terminal control of an aerostatic aircraft based on differential game approach / Y. Ziatdinov, V. Gusynin, A. Gusynin // Proceedings of the National Aviation University. – 2020. – Т.82. - № 1. - P.12-22.
293. Гусинін А. В. Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень / А. В. Гусинін, О. М. Тачиніна // Проблеми інформатизації та управління. – 2013. -В.4(44). - С. 27-35.

ДОДАТОК

Акти впровадження результатів дисертаційної роботи

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Перший проректор

Національного технічного університету

України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

акт. тем. 11.11.18
України, д.т.н., проф.

Ю.І. Якименко



12 » 04 2018 р.

АКТ

щодо впровадження результатів дисертаційної роботи Гусиніна Андрія Вячеславовича «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень»

Результати, розроблені особисто Гусиніним А.В. в рамках дисертаційної роботи «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень» на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, впроваджені в навчальний процес з підготовки спеціалістів та магістрів з напрямів підготовки «Авіаційна та ракетно-космічна техніка» і «Авіоніка» на кафедрі приладів та систем керування літальними апаратами» ФАКС НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського» в навчальних дисциплінах «Методи моделювання систем і процесів», «Спеціальні розділи сучасної теорії автоматичного керування» та «Системи керування літальних апаратів», а саме:

- дискретно-аналітичне відображення нелінійних задач багатоетапного траєкторного руху літального апарата;
- застосування диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних задач оптимального керування;
- моделювання процесів керування траєкторним рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень;
- методи синтезу алгоритмів оптимального багатоетапного керування виведенням авіаційно-космічних систем та аеростатичних літальних апаратів у задану точку простору;
- алгоритми багатокритерійного оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень

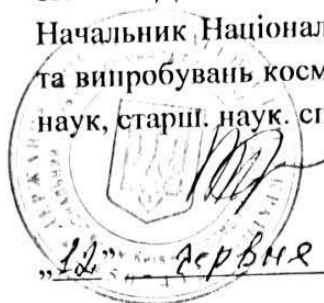
Декан ФАКС НТУУ
«КПІ ім. І. Сікорського»,
д.т.н., професор

Збруцький О.В.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Начальник Національного центру управління та випробувань космічних засобів, канд. техн. наук, старш. наук. співр.

В.І. ПРИСЯЖНИЙ



2018 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук Гусиніна Андрія Вячеславовича «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень»

Комісія Національного центру управління та випробувань космічних засобів у складі: голови комісії - начальника відділу інформаційно-аналітичного, канд. техн. наук Янчевського С.Л. та членів комісії – заступника начальника відділу науково-дослідної та випробувальної роботи, канд. техн. наук Мамарєва В.М. та головного фахівця відділу науково-дослідної та випробувальної роботи, канд. техн. наук Кутового О.М. у період з 5 по 11 червня 2018 року розглянула основні результати дисертаційного дослідження, отримані особисто Гусиніним А.В., а саме:

– модифікований метод диференціально-тейлорівських перетворень для розв'язання нелінійних крайових задач;

– метод синтезу термінальних алгоритмів багатокритеріального керування багаторежимними літальними апаратами при виведенні у задану точку простору на основі диференціальних перетворень;

– метод синтезу гарантовано-адаптивних алгоритмів багатоетапного керування літальними апаратами при максимальній протидії збурюванням з використанням диференціально-ігрової моделі багатоетапного процесу керування;

– алгоритм багатокритеріального керування процесом багатоетапного виведення авіаційно-космічної системи на орбіту;

– гарантовано-адаптивний алгоритм виведення багаторежимної АКС на орбіту в задані термінальні умови при дії обмежених збурювань.

Основні результати дисертаційних досліджень автора опубліковані у фахових наукових виданнях, зокрема:

1. Гусынин А.В. Решение нелинейных двухточечных краевых задач модифицированным методом нелинейных преобразований / В.П. Гусынин, А.В. Гусынин, О.Н. Замирец // Технология приборостроения. – 2016. – № 1. – С. 16–21.

2. Гусынин А.В. Синтез алгоритма терминального управления многоэтапным процессом выведения авиационно-космической системы на орбиту / О.С. Урусский, В.П. Гусынин, А.В. Гусынин // Проблемы информационных технологий. – 2015. – № 8. – С. 60–67.

3. Гусинін А.В. Синтез гарантовано-адаптивного алгоритму керування виведенням багаторежимної авіаційно-космічної системи на орбіту в умовах дії невизначених зовнішніх збурень / А.В. Гусинін, О.М. Тачиніна // проблеми інформатизації та управління. – 2013. – № 4 (44). – С. 27–35;

4. Gusynin A.V. The differential – and – taylor model of multicriterion optimization by control launch into orbit of multimode aerospace system / A.V. Gusynin // К.: NTUU KPI, 2015.

5. Gusynin A. The use of differential transformations for solving non-linear boundary value problems / V. Gusynin, A. Gusynin, H. Tachinina // National Aviation University. 2016. N 4(69): 44–55.

6. Гусынин А.В. Применение дифференциальных преобразований к синтезу алгоритма многоэтапного терминального управления летательным аппаратом / А.В. Гусынин // К.: НТУУ «КПИ». – Вісник АМУ серія «Техніка». – 2015. – вип. 2 (10). – С. 24–33.

7. Гусинін А.В. Диференціально-ігровий підхід до синтезу алгоритмів керування багаторежимних літальних апаратів / А.В. Гусинін // К.: НТУУ «КПИ». – Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 1 (88). – С. 40–45.


8. Гусинін А.В. Багатокритеріальна оптимізація керування рухом багаторежимних літальних апаратів / А.В. Гусинін // Технологія приборостроения. – 2011. – № 2. – С. 40-45.

На підставі розгляду представлених матеріалів комісія встановила та цим актом засвідчує, що результати вищезазначених дисертаційних досліджень, отриманих Гусиніним Андрієм Вячеславовичем, використані у Національному центрі при проведенні досліджень та виконанні пошукових робіт щодо створення перспективних систем виведення космічних апаратів в рамках Загальнодержавної цільової науково-технічної космічної програми України на 2013-2017 роки (завдання 5. «Створення космічних комплексів»).


Економічний ефект від впровадження не розраховувався у зв'язку з науковим призначенням результатів.


Акт складено для представлення в спеціалізовану вчену раду та не є підставою для виплати винагороди за впровадження та інших авторських винагород.

Голова комісії:

 С.Л. Янчевський

Члени комісії:

 В.М. Мамарев

 О.М. Кутовий

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи НАУ
доктор технічних наук, професор


В.П. Харченко

« 20 » 10 2018 р.

АКТ

щодо впровадження результатів дисертаційної роботи Гусиніна А.В.
«Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних
апаратів на основі диференціальних перетворень»

Результати дисертаційної роботи Гусиніна А.В. «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень», що подаються на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, а саме:

- розвинутий метод диференціальних перетворень для розв'язання нелінійних крайових задач;
- удосконалений метод відображення задач виведення багаторежимних літальних апаратів у задану точку простору у дискретні моделі;
- метод оптимізації процесів керування літальним апаратом на основі багатоетапного методу диференціальних перетворень;
- чисельно-аналітичний метод багатокритерійної оптимізації багатоетапного керування літальними апаратами;
- метод синтезу гарантовано-адаптивного багатоетапного керування літальним апаратом в умовах дії невизначених збурень

впроваджені в навчальному процесі на кафедрі автоматизації та енергоменеджменту Навчально-наукового аерокосмічного інституту Національного авіаційного університету з підготовки фахівців за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» в дисциплінах «Основи наукових досліджень», «Робототехнічні системи та комплекси», «Цифрові системи обробки інформації та керування» при проведенні лекційних та лабораторних занять.

В.о. директора ННАКІ



С. Дмитрієв

Завідувач кафедри

автоматизації та енергоменеджменту ННАКІ



В. Захарченко

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
 Директор ІПМ НАНУ
 ім. І.М. Францевича,
 академік НАН України
 Ю.М. Солонін
 09 2018 р.



АКТ

щодо впровадження результатів дисертаційної роботи Гусиніна А.В.
 «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом
 літальних апаратів на основі диференціальних перетворень»

Комісія у складі: голови комісії д.т.н., зав. відділом Фролова Г.О. та членів комісії: д.т.н., п.н.с. Урюкова Б.О., с.н.с. Кисіля В.М. склала цей акт про те, що результати, розроблені особисто Гусиніним А.В у рамках дисертаційної роботи «Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом літальних апаратів на основі диференціальних перетворень» на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, зокрема метод багатокритеріальної оптимізації процесу багатоетапного виведення авіаційно-космічної системи на орбіту впроваджений при розробці режимів випробувань зразків теплозахисних матеріалів на стендах та установках відділу «Високотемпературних процесів та випробувань матеріалів ракетно-космічної техніки», призначених для теплового захисту багаторазових авіаційно-космічних систем.

Голова комісії

Члени комісії:

Г.О. Фролов

Б.О. Урюков

В.М. Кисіль

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Головний конструктор

НВП «Хартрон-Аркос»



А.М. Калногуз

2018 р.

АКТ

щодо впровадження результатів дисертаційної роботи Гусиніна А.В.
«Методи розв'язання нелінійних задач оптимального керування рухом
літальних апаратів на основі диференціальних перетворень», що подається на
здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Результати дисертаційної роботи Гусиніна А.В., а саме:

- метод синтезу багатокритерійного керування багаторежимними літальними апаратами;
- метод синтезу гарантовано-адаптивного керування багаторежимними літальними апаратами в умовах дії невизначених збурень;
- алгоритми багатокритерійного та гарантовано-адаптивного керування процесом багатоетапного виведення авіаційно-космічної системи на орбіту

використані в НВП «Хартрон-Аркос» в рамках розробки аванпроектів систем керування перспективних авіаційно-космічних систем горизонтального старту на етапі їх виведення на орбіту.

Директор з питань
комплексного проектування
НВП Хартрон – Аркос

В.Г. Воронченко

