МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спеціальностей

Київ 2018

УДК

Укладачі:
І. О. Ластівка – д-р техн. наук, проф.;

Н. І. Затула – канд. фіз.-мат. наук, доц.;

В.П. Петрусенко – канд. техн. наук

Рецензент: О. І. Безверхий

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету(протокол № 4 від 13.12. 2018 р.).

Вища математика. Лінійна та векторна алгебра: методичні рекомендації до самостійної роботи для студентів технічних та економічних спеціальностей / уклад. : І. О. Ластівка, Н.І. Затула, В.П. Петрусенко. – К. : НАУ, 2018. – 76 с.

Укладено відповідно до програм курсів «Вища математика». Методичні рекомендації містять приклади розв’язання типових задач розділу «Лінійна та векторна алгебра», запитання для самоперевірки і завдання для самостійного виконання з відповідями.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Самостійна робота студента є основним способом оволодіння навчальним матеріалом протягом часу, вільного від обов'язкових аудиторних занять.

Мета виконання самостійної роботи – поглиблення, узагальнення та закріплення теоретичних знань і практичних умінь студентів з дисципліни «Вища математика» шляхом вироблення вміння самостійної роботи з навчальною літературою.

Самостійна робота студентів здійснюється у формі підготовки до лекційних і практичних занять, виконання індивідуального домашнього завдання та виконання модульної контрольної роботи. Така підготовка передбачає самостійне вивчення теоретичного матеріалу з кожної теми, що наданий у рекомендованій літературі та конспекті лекцій. При цьому важливо звернути увагу на необхідність чіткого засвоєння основних термінів та означень, розуміння їх змісту, обов'язкового аналізу використання теоретичних відомостей для розв'язування пропонованих завдань.

Мета вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» – опанування студентами основних математичних понять і методів, необхідних для застосування теоретичного матеріалу під час моделювання і розв'язування прикладних задач.

Завдання вивчення навчальної дисципліни – розвиток логічного та алгоритмічного мислення студентів, опанування методів дослідження та розв'язування математичних задач, набуття первинних навичок математичного дослідження прикладних задач тощо.

Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів укладено відповідно до навчальних програм курсу «Вища математика» для студентів технічних та економічних спеціальностей.

У пропонованій методичній праці наведено задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів. Значна кількість завдань для самостійної роботи має прикладну спрямованість.

Провідний викладач може коригувати кількість і зміст завдань, які студент повинен виконати самостійно протягом вивчення відповідного матеріалу.

Матеріал кожної теми відповідає робочим навчальним програмам дисципліни «Вища математика», зокрема одному з її розділів «Лінійна та векторна алгебра». Кожна тема містить основні методичні рекомендації, рекомендовану літературу, типові приклади з розв’язаннями та завдання для самостійного виконання, запитання для самоперевірки, що сприятиме кращому розумінню, засвоєнню та можливості застосування основних теоретичних положень.

Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи студентів технічних та економічних спеціальностей і орієнтовано на теоретичне та методичне підтримання навчального процесу студентів.

Тема 1. ВИЗНАЧНИКИ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

План

1. Визначники 2-го та 3-го порядків. Властивості визначників
2. Визначники вищих порядків та їх обчислення

Література: [1]; [2]; [3]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 1 студент повинен ***знати:*** означення та запис визначників, їх основні властивості; ***уміти:*** обчислювати визначники 2-го, 3-го і вищих порядків.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Згідно з формулою обчислення визначника другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ маємо:

$\Delta = 4 \cdot (-6) - 3 \cdot (-5) = -24 + 15 = -9.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Спочатку знайдемо визначники:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = x^2 - 1; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 3.$$

Тоді це рівняння набуде вигляду: $x^2 - 1 = 3.$ Звідки отримуємо $x^2 = 4,\ x = \pm 2.$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 8 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

За формулою обчислення визначника третього порядку
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$
маємо:
$$\Delta = 3\cdot(-4)\cdot 2 + 5\cdot(-6)\cdot 1 + 8\cdot 7\cdot(-1) - 7\cdot(-4)\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 2 -$$
$$-8\cdot 3\cdot(-6) = 72.$$

Приклад 4. Використовуючи властивості визначників, обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 400 & 100 \\ 36 & 72 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Оскільки спільний множник будь-якого рядка або стовпця визначника можна винести за знак визначника (згідно з властивістю визначника), то отримаємо:
$$\Delta = \begin{vmatrix} 400 & 100 \\ 36 & 72 \end{vmatrix} = 100\cdot 36\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3600\cdot(4\cdot 2 - 1\cdot 1) = 25200.$$

Приклад 5. Знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів третього рядка визначника $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Елементами третього рядка є $a_{31} = -3,\ a_{32} = 1,\ a_{33} = 1.$ Оскільки мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, утворений із цього визначника викресленням i-го рядка та j-го стовпця, то маємо такі мінори:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 11; \ M_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = -11;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -11.$$

За формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ дістаємо:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 11; \ A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -11.$$

Приклад 6. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами другого рядка.

Розв'язання

Застосуємо теорему Лапласа: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їхні алгебраїчні доповнення. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 2A_{21} + 6A_{22} - 9A_{23} = 2 \cdot (-1)^{2+1} M_{21} +$$

$$+6 \cdot (-1)^{2+2} M_{22} - 9 \cdot (-1)^{2+3} M_{23} = -2\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 72 + 24 - 144 = -48.$$

Приклад 7. Використовуючи властивості визначників, обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$ методом накопичення нулів.

Розв'язання

Обчислення визначника буде найбільш раціональним, якщо, застосувавши властивості, отримаємо визначник, у у будь-якому стовпці або рядку якого буде максимальна кількість нулів. Застосуємо до даного визначника такі властивості:

1) до другого рядка додамо перший, попередньо помноживши його на (–2);

2) додамо до третього рядка перший рядок, помножений на (–3), при цьому перший рядок залишимо без змін.

Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 6 & -9 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & -8 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & -16 & 4 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо отриманий визначник, розклавши його за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 1 \cdot \left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -16 & 4 \end{vmatrix} = -32 - 16 = -48.$$

Приклад 8. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ зведенням його до трикутного вигляду.

Розв'язання

Оскільки визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів, що знаходяться на головній діагоналі, то застосуємо для цього визначника властивості:

1) до другого рядка додамо перший;

2) до третього рядка додамо перший рядок, помножений на (–3), при цьому перший рядок залишимо без змін:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \end{vmatrix};$$

3) до третього рядка отриманого визначника додамо другий рядок, помножений на 8, при цьому перший та другий рядки залишимо без змін:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 = -4.$$

Приклад 9. Користуючись властивостями визначників, довести,

що $\begin{vmatrix} 4\alpha+2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha+3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha+\beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Розв'язання.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4\alpha+2\beta & 4 & 2 \\ 2\alpha+3\beta & 2 & 3 \\ -\alpha+\beta & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Визначник дорівнює} \\ \text{сумі двох визначників,} \\ \text{оскільки 1-й стовпець} \\ \text{є сумою двох стовпців}}} = \underbrace{\begin{vmatrix} 4\alpha & 4 & 2 \\ 2\alpha & 2 & 3 \\ -\alpha & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Виносимо спільний множ-} \\ \text{ник 1-го стовпця}}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2\beta & 4 & 2 \\ 3\beta & 2 & 3 \\ \beta & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Виносимо спільний множ-} \\ \text{ник 1-го стовпця}}} =$$

$$= \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Визначник дорівнює} \\ \text{нулю, оскільки має} \\ \text{два однакові стовпці}}} + \beta \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Визначник дорівнює} \\ \text{нулю, оскільки має} \\ \text{два однакові стовпці}}} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Приклад 10. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$,

розклавши його за елементами першого рядка.

Розв’язання.

Використовуючи теорему Лапласа, маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2&2\\1&-2&3&2\\4&-1&5&15\\6&-8&7&9\end{vmatrix}=1\cdot A_{11}-1\cdot A_{12}+2\cdot A_{13}+2\cdot A_{14}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2&3&2\\-1&5&15\\-8&7&9\end{vmatrix}-$$

$$-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3&2\\4&5&15\\6&7&9\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-2&2\\4&-1&15\\6&-8&9\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&-1&5\\6&-8&7\end{vmatrix}.$$

Обчислюючи визначники третього порядку, знаходимо
$\Delta=-147+98-98+98=-49.$

Приклад 11. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2&2\\1&-2&3&2\\4&-1&5&15\\6&8&7&9\end{vmatrix}$ методом накопичення нулів

Розв’язання.

Використовуючи властивості визначників, знаходимо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&2&2\\1&-2&3&2\\4&-1&5&15\\6&8&7&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-1&6&1\\3&-1&-2&-1\\4&-2&0&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&6&1\\-1&-2&-1\\-2&0&-3\end{vmatrix}=-16.$$

Другий визначник четвертого порядку отримуємо з першого визначника множенням його першого стовпця на (–1) і додаванням до відповідних елементів почергово другого, третього та четвертого стовпців. Після цього визначник розкладаємо за елементами першого рядка.

Приклад 12. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ зведенням його до трикутного вигляду.

Розв'язання

Відомо, що визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів, що містяться на головній діагоналі. Зведемо цей визначник до трикутного вигляду, використовуючи властивості визначників:

1) до другого рядка додамо перший, помножений на (–3);
2) до третього рядка додамо перший, помножений на 2;
3) до четвертого рядка додамо перший, помножений на (–2).

При цьому перший рядок залишаємо без змін:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

4) до третього рядка отриманого визначника додамо другий рядок, помножений на $\left(-\frac{4}{3}\right)$;

5) до четвертого рядка додамо другий рядок, помножений на $-\frac{2}{3}$, при цьому перший та другий рядки залишаємо без змін:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix};$$

6) до четвертого рядка отриманого визначника додамо третій, помножений на $\left(-\frac{10}{41}\right)$, при цьому перший, другий та третій рядки залишаємо без змін і обчислюємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{41}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{41} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{41}{3} \cdot \left(-\frac{65}{41}\right) = -65.$$

Запитання для самоперевірки

1. Скільки доданків містить формула для обчислення визначника другого порядку?
2. Скільки доданків входить у формулу розкладу визначника третього порядку за елементами рядка (стовпця)?
3. За яких умов визначник дорівнює нулю?
4. Відомо, що $\det A = 2$. Чому дорівнює $\det A^T$?
5. Чому дорівнює визначник трикутного вигляду?
6. Які операції над визначниками не змінюють їх значення?
7. Що називається визначником вищого порядку?
8. Скільки доданків входить у формулу розкладу визначника за елементами рядка (стовпця) четвертого порядку? п'ятого порядку?
9. Які методи застосовують для обчислення визначників вищих порядків?
10. Чи можна застосувати правило трикутників для обчислення визначників вищих порядків?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Обчисліть визначники другого порядку.

1.1. $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. **1.2**. $\begin{vmatrix} 1115 & 127 \\ 1115 & 128 \end{vmatrix}$. **1.3**. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **1.4.** $\begin{vmatrix} \dfrac{x}{x+1} & \dfrac{2x+1}{1+x} \\ \dfrac{-1}{1+x} & \dfrac{x}{1+x} \end{vmatrix}$.

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння.

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & 3x \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$. **2.2.** $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. **2.3.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & 3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 3. Обчисліть визначники третього порядку.

3.1. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$. **3.2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$. **3.3.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, **3.4.** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & -1 & -x \end{vmatrix}$.

Завдання 4. Обчисліть визначники методом накопичення нулів.

4.1. $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix}$. **4.2.** $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **4.3.** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. **4.4.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 5. Обчисліть визначники зведенням їх до трикутного вигляду

5.1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$. **5.2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **5.3.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Завдання 6. Розв'яжіть рівняння $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Завдання 7. Обчисліть визначники четвертого порядку.

7.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. **7.2.** $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **7.3.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 8 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

Завдання 8. Визначте, за яких значень x визначники дорівнюють нулю:

8.1. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & x \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **8.2.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. **8.3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Відповіді: **1.1.** 12. **1.2.** 1115. **1.3.** $4ab$. **1.4.** 1. **2.1.** $x=-1$. **2.2.** $x_1=2,\ x_2=3$. **2.3.** $x_1=1,\ x_2=2$. **3.1.** -10. **3.2.** 15. **3.3.** -13. **3.4.** 0. **4.1.** $-a^2-a$. **4.2.** -9. **4.3.** -22. **4.4.** -25. **5.1.** -19. **5.2.** 18. **5.3.** 15. **6.** $x=-\dfrac{29}{6}$. **7.1.** 1. **7.2.** 141. **7.3.** 0. **8.1.** $x=5$. **8.2.** $x=3{,}9$. **8.3.** $x=-2{,}5$.

Тема 2. МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

План

1. Матриці. Дії над матрицями
2. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці
3. Застосування матриць у прикладних задачах

Література: [1]; [2]; [3]; [5]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 2 студент повинен ***знати:*** означення та запис матриць, їх види, властивості дій над матрицями; ***уміти:*** виконувати дії над матрицями, знаходити обернену матрицю та її ранг, розв’язувати матричні рівняння.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задано дві матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C=3A-4B$.

Розв'язання

Користуючись правилом множення матриці на число (кожний елемент матриці множимо на це число), знаходимо:

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-4) & 3\cdot 2 & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9 & 3\\ 6 & -12 & 6 & 3\end{pmatrix};$$

$$-4B=\begin{pmatrix}-4\cdot 1 & -4\cdot 1 & -4\cdot 3 & -4\cdot 2\\ -4\cdot(-3) & -4\cdot 2 & -4\cdot 5 & -4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & -12 & -8\\ 12 & -8 & -20 & -24\end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом знаходження суми матриць (додаємо відповідні елементи матриць), визначаємо матрицю $C=3A+(-4B)$

$$C=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9 & 3\\ 6 & -12 & 6 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -4 & -12 & -8\\ 12 & -8 & -20 & -24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4 & -6-4 & 9-12 & 3-8\\ 6+12 & -12-8 & 6-20 & 3-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -3 & -5\\ 18 & -20 & -14 & -21\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Задано матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 4\\ -1 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 6\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Який із добутків існує: $A\cdot B$ чи $A\cdot C$?

Розв'язання

Оскільки добуток двох матриць можливий тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці, то можливий добуток $A\cdot B$, а добуток $A\cdot C$ – неможливий.

Приклад 3. Задано матриці $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

Знайти матрицю $C = A \cdot B.$

Розв'язання

Оскільки розмір матриці A – (2×2), а матриці B – (2×3), то добуток матриць можливий. Матриця C має розмір (2×3). Користуючись правилом множення матриць, знаходимо матрицю C:

$$C=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -3\cdot(-1)+2\cdot(-2) & -3\cdot 3+2\cdot(-4) & -3\cdot 2+2\cdot 1 \\ 5\cdot(-1)-4\cdot(-2) & 5\cdot 3-4\cdot(-4) & 5\cdot 2-4\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3-4 & -9-8 & -6+2 \\ -5+8 & 15-16 & 10-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -17 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Задано матриці

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $D = A^{\mathrm{T}} \cdot C - 2A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}.$

Розв'язання

Користуючись властивістю операцій над матрицями, можна винести за дужки ліворуч матрицю A^{T}: $D = A^{\mathrm{T}}\left(C - 2B^{\mathrm{T}}\right).$

Знаходимо матрицю B^{T} (операція транспонування матриці – це заміна її рядків стовпцями з відповідними номерами):

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо матрицю

$$C-2B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&-6&9\\5&4&2\\1&3&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&-3&5\\1&-4&4\\-7&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6&9\\5&4&2\\1&3&5\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-4&6&-10\\-2&8&-8\\14&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\3&12&-6\\15&3&3\end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю A: $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\4&3&0\end{pmatrix}$.

Виконуємо множення: $D=A^{\mathrm{T}}\left(C-2B^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\4&3&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot(-1)+2\cdot3-1\cdot15 & -2\cdot0+2\cdot12-1\cdot3 & -2\cdot(-1)+2\cdot(-6)-1\cdot3\\ 4\cdot(-1)+3\cdot3+0\cdot15 & 4\cdot0+3\cdot12+0\cdot3 & 4\cdot(-1)+3\cdot(-6)+0\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+6-15 & 24-3 & 2-12-3\\ -4+9 & 36 & -4-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&21&-15\\5&36&-22\end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Піднести матрицю $A=\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\end{pmatrix}$ до третього степеня.

Розв'язання

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&-1+3\\-2+6&2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\4&11\end{pmatrix};$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}3&2\\4&11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+4&3+6\\-4+22&4+33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\18&37\end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$.

Розв'язання

Користуючись правилом знаходження оберненої матриці, знаходимо спочатку визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4+0+3+6-0+2=15.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-1=-3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(0-3)=3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-6=-6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2+3=5;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-3)=5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-2+0)=2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Запишемо матрицю $\tilde{A}$, що складається з алгебраїчних доповнень: $\tilde{A}=\begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Знаходимо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}^T=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -6 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Методом приєднаної матриці знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Дописуємо до матриці A праворуч одиничну матрицю третього порядку.

$$A\,|\,E=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Перетворимо ліву частину отриманої матриці в одиничну. Для цього від третього рядка віднімемо перший рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right):\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right):$$

Третій рядок поділимо на (-3) і поміняємо місцями з другим рядком:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right):\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right):$$

Віднімемо від першого рядка другий рядок, помножений на 4, від третього рядка – другий рядок, помножений на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2-4\cdot 0 & 4-4\cdot 1 & 1-4\cdot 0 & 1-4\cdot {}^{1}\!/_{3} & 0-4\cdot 0 & 0-4\cdot\left(-{}^{1}\!/_{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right):$$

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & -{}^{1}\!/_{3} & 0 & {}^{4}\!/_{3} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{2}\!/_{3} & 1 & {}^{2}\!/_{3} \end{array}\right).$$

Віднімемо від першого рядка третій рядок:

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2-0 & 0-0 & 1-1 & -{}^{1}\!/_{3}-\left(-{}^{2}\!/_{3}\right) & 0-1 & {}^{4}\!/_{3}-{}^{2}\!/_{3} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{2}\!/_{3} & 1 & {}^{2}\!/_{3} \end{array}\right):$$

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & -1 & {}^{2}\!/_{3} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{2}\!/_{3} & 1 & {}^{2}\!/_{3} \end{array}\right):$$

Поділимо перший рядок на 2:

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{1}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{2}\!/_{3} & 1 & {}^{2}\!/_{3} \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{3} \\ {}^{1}\!/_{3} & 0 & -{}^{1}\!/_{3} \\ -{}^{2}\!/_{3} & 1 & {}^{2}\!/_{3} \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Розв’язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}.$

Розв’язання

Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$. Тоді рівняння можна записати у вигляді $A \cdot X = B.$ Помноживши обидві частини даного рівняння ліворуч на A^{-1}, отримаємо $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$ Звідси $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ або $X = A^{-1} \cdot B.$

Знаходимо спочатку A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;\ A_{11} = 2,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = 1;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+13 & 2-7 \\ -3+13 & -3-7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9. Розв’язати матричне рівняння $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -10 & 16 \end{pmatrix}.$

Розв’язання

Позначимо: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -10 & 16 \end{pmatrix}$. Тоді дане рівняння можна записати у вигляді $X \cdot A = B.$ Помноживши обидві частини цього рівняння праворуч на A^{-1}, отримаємо $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}.$ Звідси $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$ або $X = B \cdot A^{-1}.$

Знаходимо спочатку A^{-1}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9. \ \ A_{11} = 5,\ A_{12} = 2,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{T} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -10 & 16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 17 \\ -10 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -25+34 & 10+17 \\ -50+32 & 20+16 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 27 \\ -18 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. Знайти ранги матриць: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а) за допомогою елементарних перетворень матриць зведемо матрицю до східчастого вигляду

$$\underset{\substack{\textit{Множимо } 1-\textit{й рядок на } (-1) \\ \textit{і додаємо до елементів } 2-\textit{го} \\ \textit{і } 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}} \sim \underset{\substack{\textit{Множимо } 2-\textit{й рядок на } (-3) \\ \textit{і додаємо до елементів } 3-\textit{го} \\ \textit{рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки кількість ненульових рядків матриці дорівнює її рангу, то $r(A) = 3$;

б) Перетворимо матрицю до східчастого вигляду:

$$\underset{\substack{\textit{Множимо елементи } 1-\textit{го рядка на}\\ 2\, i\, (-1)\, \textit{та додаємо до елементів } 2-\textit{го}\\ i\, 3-\textit{го рядків відповідно}}}{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{\textit{Множимо елементи } 1-\textit{го рядка на}\\ (-1)\, \textit{та додаємо до елементів}\\ 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}} : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В останній матриці отримали два нульових рядки, тому $r(B) = 2$;

в) Перетворимо матрицю до східчастого вигляду, помінявши спочатку місцями рядки (ця операція не змінює рангу матриці):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} : \underset{\substack{\textit{Множимо } 1-\textit{й рядок на } 3\, i\\ \textit{додаємо до елементів } 2-\textit{го}\\ \textit{рядка, множимо } 1-\textit{й рядок}\\ \textit{на } 2\, i\, \textit{додаємо до елементів}\\ 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & 11 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{\textit{Множимо елементи } 1-\textit{го рядка}\\ \textit{на } (-5), 2, 5\, \textit{ і додаємо до елементів}\\ 3-\textit{го}, 4-\textit{го}\, i\, 5-\textit{го рядків}}}{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 22 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}} :$$

$$: \underset{\substack{\textit{Множимо елементи } 3-\textit{го рядка на } 0.4\, \textit{та } 1\\ \textit{і додаємо до елементів } 4-\textit{го}\, i\, 5-\textit{го рядка}\\ \textit{відповідно}}}{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}} : \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг матриці $r(C) = 3$.

Приклад 11. Два різних за якістю видів вершкового масла продаються у трьох магазинах. Матриця A – обсяги продажу цих продуктів у магазинах у 1-му кварталі, матриця B – у 2-му кварталі (тис. грн.). Визначити:

1) сумарний обсяг продажу у 1-му і 2-му кварталах;

2) приріст продажу в 2-му кварталі у порівнянні з першим.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1) Сумарний обсяг продажу у 1-му і 2-му кварталах визначається сумою матриць:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2) Приріст у 2-му кварталі в порівнянні з 1-м визначається різницею матриць B і A:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Від'ємні елементи свідчать про те, що в певному магазині продаж масла зменшився, додатні – збільшився, нульові – не змінився.

Приклад 12. Підприємство виробляє 4 типи продукції та реалізує її у трьох регіонах. Обсяги випуску продукції за типами задані матрицею A; ціна реалізації i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначити, який з регіонів вигідніший для реалізації товару.

Розв'язання

Знайдемо матрицю C – матрицю прибутку за регіонами. Прибуток визначається множенням ціни реалізації на обсяг випуску для кожного типу продукції, тобто в цьому випадку матрицею $C = A \cdot B$:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20+160+30+20 & 10+80+90+80 & 20+120+30+80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 230 & 260 & 250 \end{pmatrix}.$$

Як видно з матриці, максимальним за величиною є елемент $c_{12} = 260$. Отже, найбільш вигідним для реалізації є другий регіон.

Приклад 13. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи два види ресурсів. Норма витрат ресурсів i-го типу на виробництво одиниці продукції j-го типу задана матрицею витрат A, випуск продукції за квартал – матрицею X, вартість одиниці кожного виду ресурсів матрицею – P:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) матрицю S повних витрат ресурсів кожного виду;

2) повну вартість усіх витрачених ресурсів.

Розв'язання

1) Матриця повних витрат ресурсів S визначається як добуток матриць A та X:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+20+10 \\ 10+40+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, за даний період часу буде використано 50 од. ресурсів 1-го виду та 80 од. ресурсів 2-го виду.

2) Повна вартість усіх витрачених ресурсів визначається як добуток матриць P і S:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250+160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \end{pmatrix}.$$

Отже, повна вартість усіх витрачених ресурсів становить 410 ум. од.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають розміром матриці?

2. Як визначаються: сума двох матриць, добуток матриці на число, різниця та добуток двох матриць?)

4. Чи можна помножити матрицю розміром 2×3 на матрицю того самого розміру? Чи можна додати дві такі матриці?

5. Чи для кожної матриці існує транспонована матриця? Чому дорівнює матриця $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$? Чи можуть збігатися матриці A та A^{T} ?

6. Якщо матриці A і B можна множити, то чи можна їх додавати?

7. Якщо матриці A і B можна додавати, то чи можна їх множити?

8. Яка матриця називається оберненою?

9. Для яких матриць не існує обернена?

10. Що називається рангом матриці?

11. Чи може ранг матриці дорівнювати нулю?

12. Які дії над матрицями використовуються в прикладних задачах?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

Знайдіть матрицю $C=4A^{\mathrm{T}}-5B.$

Завдання 2. Дано вираз

$$3\cdot\begin{pmatrix} x & -1 & 5 \\ -2 & y & 4 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & t & 25 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть значення $x, y, z, t.$

Завдання 3. Знайдіть добутки матриць.

3.1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3.3. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3.4 $\begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3.5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.6. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Завдання 4. Знайдіть добутки матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо вони існують.

4.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4.3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 5. Піднесіть матрицю до квадрата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 6. Нехай $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$. Доведіть, що $A^2 = -A$.

Завдання 7. Переконайтеся, що матриця B обернена до матриці A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 8. Знайдіть обернені матриці до матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ b & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 9. Знайдіть методом приєднаної матриці обернені матриці до матриць $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 10. Розв'яжіть матричні рівняння.

10.1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **10.2.** $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -15 & 25 \end{pmatrix}$.

10.3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$. **10.4.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 11. Знайдіть ранги матриць.

11.1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **11.2.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **11.3.** $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 5 & 7 & -11 \\ 6 & 8 & -13 \end{pmatrix}$.

11.4. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & 2 & -3 \\ 5 & 15 & -11 & 1 & 18 \\ 7 & -24 & 26 & 5 & -27 \end{pmatrix}$.

Завдання 12. Три заводи випускають чотири типи продукції. Необхідно знайти:

а) матрицю випуску продукції за квартал, якщо задані матриці A_1, A_2, A_3 щомісячних випусків; б) матриці приросту випуску продукції за кожен місяць і проаналізувати результати.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Завдання 13. Підприємство виробляє продукцію, обсяги якої задаються матрицею A. Ціна реалізації i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею B. Знайдіть матрицю C – матрицю виручки за регіонами, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначте, який з трьох регіонів найбільш вигідний для реалізації товару.

Завдання 14. Підприємство виробляє металоконструкції трьох видів і продає їх у чотирьох областях. Матриця B

$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – ціна реалізації одиниці товару i-го типу в j-му регіоні. Визначте прибуток підприємства у кожному регіоні, якщо реалізація металоконструкцій за місяць (за типами) задана матрицею $A=\begin{pmatrix}200\\80\\100\end{pmatrix}$.

Завдання 15. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи два типи сировини. Норми витрат сировини задаються матрицею $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&4&2\end{pmatrix}$. Визначте грошові витрати підприємства за випуску товару, що задається матрицею $C=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, якщо вартість кожного виду сировини визначається матрицею $P=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}$.

Відповіді: **1.** $\begin{pmatrix}-23&3&-10\\4&15&17\\0&-15&34\end{pmatrix}$. **2.** $x=4$, $y=4$, $z=-2$, $t=-11$. **3.1.** $\begin{pmatrix}5&10\\6&14\end{pmatrix}$. **3.2.** $\begin{pmatrix}-3&-1\\9&3\end{pmatrix}$. **3.3.** $\begin{pmatrix}11\\8\end{pmatrix}$. **3.4.** $\begin{pmatrix}-20&-160&-40\\-1&8&2\\-12&96&24\end{pmatrix}$. **3.5.** $\begin{pmatrix}-1&5&10\\-8&5&4\\6&-1&2\end{pmatrix}$. **3.6.** $\begin{pmatrix}10&0&0\\0&6&0\\0&4&-2\end{pmatrix}$. **4.1.** $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&7\\23&1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-12&-4\\2&14\end{pmatrix}$. **4.2.** $A\cdot B=\begin{pmatrix}-18\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}-12&4&20\\3&-1&-5\\3&-1&-5\end{pmatrix}$. **4.3.** $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; добуток $B\cdot A$

неможливий. **4.4.** Добуток $A \cdot B$ неможливий, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -11 & -25 \\ -14 & 6 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. **8.** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{9b+2}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -b & 2 \end{pmatrix}$,

для D оберненої матриці не існує. **9.** $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 4 & 20 & -11 \\ 10 & 9 & -7 \\ -1 & -5 & 13 \end{pmatrix}$.

10.1. $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **10.2.** $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. **10.3.** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

10.4. $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. **11.1.** 3. **11.2.** 2. **11.3.** 3. **11.4.** 2.

12. а) $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 4 \\ 13 & 13 & 12 & 9 \end{pmatrix}$; б) $B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **13.** $C = \begin{pmatrix} 250 & 180 & 150 \end{pmatrix}$, 1-й регіон. **14.**

$\begin{pmatrix} 680 & 2040 & 540 & 1020 \end{pmatrix}$. **15.** 41 ум. од.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

План

1. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за формулами Крамера та матричним методом.
2. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера–Капеллі.
3. Однорідні системи лінійних рівнянь.
4. Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у прикладних задачах.

Література: [2]; [3]; [5]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 3 студент повинен ***знати:*** означення системи m лінійних рівнянь з n невідомими, означення визначеної, невизначеної, сумісної, несумісної СЛАР, теорему Крамера, теорему Кронекера–Капеллі; ***уміти:*** записувати СЛАР у вигляді матричного рівняння, розв’язувати їх за формулами Крамера, методом Гаусса, за допомогою оберненої матриці, досліджувати СЛАР на сумісність, розв’язувати однорідні СЛАР.

Приклади розв’язування типових задач

Приклад 1. Розв’язати СЛАР за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x + y + 5z = 5, \\ 5x + y + 2z = 10, \\ 3x - y + z = 3. \end{cases}$$

Розв’язання

Обчислюємо визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 25 + 6 - 15 + 8 - 5 = -27.$$

Обчислюємо визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 10 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 50 + 6 - 15 + 10 - 10 = -54;$$

1–й стовпець Δ заміняємо на стовпець вільних членів

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 40 + 75 + 30 - 150 - 24 - 25 = -54;$$

2–й стовпець Δ заміняємо на стовпець вільних членів

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 25 + 30 - 15 + 40 - 15 = 27.$$

3–й стовпець Δ заміняємо на стовпець вільних членів

Обчислюємо значення змінних за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-54}{-27} = 2,\ z = \frac{27}{-27} = -1.$$

Приклад 2. Розв'язати СЛАР за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо визначники $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -20,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 20.$$

Оскільки всі визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ відмінні від нуля, а визначник $\Delta = 0$, то система розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати СЛАР матричним методом
$$\begin{cases} -5x - y - 2z = 4, \\ 3x + 2y + z = -4, \\ 3x + y + z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання

Позначимо $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тоді СЛАР подамо у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, розв'язок якого знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$. Знаходимо обернену матрицю до матриці A: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Знаходимо розв'язок системи:
$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4-9 \\ 0-4+3 \\ -12-8+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Розв'язати СЛАР методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$

Розв'язання

За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до трикутного або трапецієподібного вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 1 & 26 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -39 & 9 & -30 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -39 & 9 & -30 \end{array}\right) :$$

1–й рядок множимо на (-8) *і додаємо до* 2*–го рядка*, 1*–й рядок множимо на* (-1) *і додаємо до* 3*–го рядка*

Міняємо місцями 2*–й і* 3*–й рядки*

Множимо всі елементи 1*–го рядка на* $\frac{1}{6}$

$$: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -39 & 9 & -30 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{array}\right).$$

Множимо елементи 2*–го рядка на* (-39) *і додаємо до* 3*–го рядка*

Матриця зведена до трикутного вигляду. Відповідна їй СЛАР має вигляд
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ -30x_3 = -30. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_3 = 1$. Підставляючи це значення у друге рівняння, знаходимо $x_2 = 1$. З першого рівняння обчислюємо $x_1 = 3$. Таким чином, розв'язок системи $(3;1;1)$.

Приклад 5. Розв'язати СЛАР методом Гаусса
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

За допомогою елементарних перетворень зведемо розширену матрицю системи до трикутного або трапецієподібного вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

1–й рядок множимо на (-2) *і додаємо до* 2*–го рядка*, 1*–й рядок множимо на* (-1) *і додаємо до* 3*–го рядка*

Множимо елементи 2*–го рядка на* (-1) *і додаємо до* 3*–го рядка*

Для отриманої матриці запишемо відповідну СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -5x_2 - 5x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_3 = 4. \end{cases}$$

З останнього рівняння $x = \varnothing$, тому система – несумісна.

Приклад 6. Дослідити систему на сумісність за теоремою Кронекера–Капеллі, у випадку сумісності – знайти її розв'язки

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо основну та розширену матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо ранги цих матриць зведенням до східчастого вигляду

$$\underset{\substack{\text{Поміняємо місцями } 1\text{–й та} \\ 2\text{–й рядки}}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{1\text{–й рядок множимо на } (-2) \\ \text{і додаємо до } 2\text{–го рядка}, 1\text{–й} \\ \text{рядок множимо на } (-4) \text{ і} \\ \text{додаємо до } 3\text{–го рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{\text{Множимо елементи } 2\text{–го рядка} \\ \text{на } (-1) \text{ і додаємо до } 3\text{–го рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -11 & 3 \\ 0 & -5 & -11 & 3 \end{pmatrix}} :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Отже } r(A) = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Поміняємо місцями } 1\text{–й та} \\ 2\text{–й рядки}}}{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{1\text{–й рядок множимо на } (-2) \\ \text{і додаємо до } 2\text{–го рядка}, 1\text{–й} \\ \text{рядок множимо на } (-4) \text{ і} \\ \text{додаємо до } 3\text{–го рядка}}}{:}$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -11 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -11 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Множимо елементи } 2\text{–го рядка} \\ \text{на } (-1) \text{ і додаємо до } 3\text{–го рядка}}}{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -11 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(B) = 2$.

Оскільки $r(A) = r(B)$, то за теоремою Кронекера–Капеллі система сумісна і має безліч розв'язків, оскільки $r(A) = r(B) < n$ ($n-$ кількість невідомих).

Розв'яжемо СЛАР, попередньо відкинувши останній (нульовий) рядок матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ -3x_2 - 11x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Серед змінних системи дві будемо вважати вільними (кількість вільних змінних дорівнює $n - r(A)$). За вільні змінні можна взяти, наприклад, x_3, x_4. Тоді інші змінні (основні) можна виразити через вільні:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - 4x_3 + x_4, \\ -3x_2 = -3 + 11x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Знаходимо x_2: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 - 4x_3 + x_4, \\ x_2 = 1 - \dfrac{11}{3} + x_4. \end{cases}$

Підставивши вираз для x_2 у перше рівняння системи, знайдемо $x_1: x_1=\frac{10}{3}x_3-x_4.$

Таким чином, розв'язок системи має вигляд $\left(\frac{10}{3}x_3-x_4;1-\frac{11}{3}x_3+x_4;\, x_3;\, x_4\right),$ де $x_3\in R,\ x_4\in R.$

Приклад 7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і у випадку сумісності – розв'язати її.

$$\begin{cases} x_1-3x_2+6x_3+5x_4=0,\\ 5x_1-x_2+2x_3+x_4=7,\\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=1. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо основну та розширену матриці системи

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 5\\ 5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 5 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці системи $r\left(A\right)=2,$ а ранг розширеної матриці $r\left(B\right)=3.$ За теоремою Кронекера–Капеллі, оскільки $r(B)>r(A),$ система є несумісною.

Приклад 8. Розв'язати однорідну СЛАР

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0,\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 3x_1-2x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

Розв'язання

Однорідна система завжди має нульовий розв'язок. Дослідимо, чи має вона ненульові розв'язки. Знайдемо ранг її основної матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\underset{\substack{1-й\ рядок\ множимо\ на\ (-2)\\ і\ додаємо\ до\ 2-го\ рядка,\ 1-й\\ рядок\ множимо\ на\ (-3)\ і\\ додаємо\ до\ 3-го\ рядка}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}} : \underset{\substack{2-й\ рядок\ множимо\ на\ (-1)\\ і\ додаємо\ до\ 3-го\ рядка}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -6\\ 0 & -5 & -2\end{pmatrix}} : \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -6\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Оскільки отримали три ненульових рядки, то $r(A)=3.$ Таким чином, ранг матриці дорівнює кількості невідомих. Тому система має єдиний нульовий розв’язок $(0;\,0;\,0)$.

Приклад 9. Розв’язати однорідну СЛАР

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0,\\ -x_1-x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Розв’язання

Перевіримо, чи має система ненульові розв’язки, обчисливши ранг матриці системи:

$$\underset{\substack{1-й\ рядок\ множимо\ на\ 1\\ і\ додаємо\ до\ 2-го\ рядка,\ 1-й\\ рядок\ множимо\ на\ (-2)\ і\\ додаємо\ до\ 3-го\ рядка}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ -1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}} : \underset{\substack{2-й\ рядок\ множимо\ на\ 3\\ і\ додаємо\ до\ 3-го\ рядка}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}} : \begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $r=2,$ а кількість невідомих $n=3,$ то система має безліч розв’язків. Відновимо систему за останньою матрицею

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0,\\ \quad x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Оскільки $n-r=3-2=1,$ то одну з невідомих змінних перенесемо у праві частини рівностей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Знайдемо з даної системи невідомі x_1 та x_2:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot 2x_3 = 5x_3, \\ x_2 = 2x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5x_3 - 4x_3, \\ x_2 = 2x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Таким чином розв'язок системи має вигляд $(x_3; 2x_3; x_3)$, де $x_3 \in R.$

Приклад 10. Розв'язати однорідну СЛАР

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Система має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$ Перевіримо, чи має вона ненульові розв'язки. Знайдемо ранг матриці системи.

$$\underset{\substack{\textit{Поміняємо місцями } 1-й \textit{ і } 2-й \\ \textit{рядки}}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{1-й \textit{ рядок множимо на } (-3) \\ \textit{і додаємо до } 3-го \textit{ рядка}, 1-й \\ \textit{рядок множимо на } (-2) \textit{ і} \\ \textit{додаємо до } 4-го \textit{ рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{2-й \textit{ рядок множимо на } (-4) \\ \textit{і додаємо до } 3-го \textit{ рядка}, 1-й \\ \textit{рядок множимо на } (-3) \textit{ і} \\ \textit{додаємо до } 4-го \textit{ рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}} :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненульових рядків – два, тому ранг матриці $r = 2,$ кількість невідомих $n = 4 \ (2 < 4).$ Система має безліч розв'язків. Відновимо її за останньою матрицею.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Змінні x_3, x_4 зробимо вільними змінними та знайдемо вирази для x_1 і x_2.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 - x_4, \\ \quad 2x_2 = x_3 + x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 5\left(\dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4\right) = -2x_3 - x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2}x_3 - 2x_3 + \dfrac{5}{2}x_4 - x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{2}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи $\left(\dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{3}{2}x_4; \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4, x_3; x_4\right),$ $x_3 \in R, \ x_4 \in R.$

Приклад 11. Розв'язати однорідну СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Дослідимо, чи має однорідна система ненульові розв'язки. Знайдемо ранг її основної матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\underset{\substack{1-\textit{й рядок множимо на } (-2)\\ \textit{і додаємо до } 2-\textit{го рядка}, 1-\textit{й}\\ \textit{рядок множимо на } (-3)\ \textit{і}\\ \textit{додаємо до } 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}} : \underset{\substack{2-\textit{й рядок множимо на } (-1)\\ \textit{і додаємо до } 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -6\\ 0 & -5 & -2\end{pmatrix}} : \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -6\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Оскільки отримали три ненульових рядки, то $r(A)=3$. Таким чином, ранг матриці дорівнює кількості невідомих. Тому система має єдиний нульовий розв'язок $(0;\ 0;\ 0)$.

Приклад 12. Розв'язати однорідну СЛАР

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\ -x_1-x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Розв'язання

Перевіримо, чи має система ненульові розв'язки, обчисливши ранг матриці системи.

$$\underset{\substack{1-\textit{й рядок множимо на } 1\\ \textit{і додаємо до } 2-\textit{го рядка}, 1-\textit{й}\\ \textit{рядок множимо на } (-2)\ \textit{і}\\ \textit{додаємо до } 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ -1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}} : \underset{\substack{2-\textit{й рядок множимо на } 3\\ \textit{і додаємо до } 3-\textit{го рядка}}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}} : \begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $r=2$, а кількість невідомих $n=3$, то система має безліч розв'язків. Відновимо систему за останньою матрицею.

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\ \quad x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Оскільки $n-r=3-2=1$, то одну із невідомих змінних перенесемо у праві частини рівностей.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Знайдемо з даної системи невідомі x_1 і x_2:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot 2x_3 = 5x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 5x_3 - 4x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3. \end{cases}$$

Таким чином, розв'язок системи має вигляд $(x_3;\, 2x_3;\, x_3)$, де $x_3 \in R$.

Приклад 13. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Система має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Перевіримо, чи має вона ненульові розв'язки. Знайдемо ранг матриці системи:

$$\underset{\substack{\textit{Поміняємо місцями 1–й і 2–й} \\ \textit{рядки}}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{\textit{1–й рядок множимо на } (-3) \\ \textit{і додаємо до 3–го рядка, 1–й} \\ \textit{рядок множимо на } (-2) \textit{ і} \\ \textit{додаємо до 4–го рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}} : \underset{\substack{\textit{2–й рядок множимо на } (-4) \\ \textit{і додаємо до 3–го рядка, 1–й} \\ \textit{рядок множимо на } (-3) \textit{ і} \\ \textit{додаємо до 4–го рядка}}}{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}} :$$

$$: \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненульових рядків – два, тому ранг матриці $r=2,$ кількість невідомих $n=4\ (2<4).$ Система має безліч розв'язків. Відновимо її за останньою матрицею.

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Змінні x_3, x_4 зробимо вільними змінними та знайдемо вирази для x_1 і x_2:

$$\begin{cases} x_1-5x_2=-2x_3-x_4, \\ \quad 2x_2=x_3+x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1-5\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)=-2x_3-x_4, \\ x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{5}{2}x_3-2x_3+\frac{5}{2}x_4-x_4, \\ x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4, \\ x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Отже, розв'язок системи $\left(\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{2}x_4;\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\ x_3;\ x_4\right),$ $x_3\in R,\ x_4\in R.$

Приклад 14. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва наведено в табл. 1. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за заданими запасами сировини.

Таблиця 1

Вид сировини	Витрати сировини за видами продукції			Запаси сировини
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Розв'язання

Позначимо невідомі обсяги випуску продукції через x_1, x_2, x_3. Тоді за умови повної витрати запасів для кожного типу сировини можна записати балансові співвідношення, які утворюють систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему у будь-який спосіб, знаходимо, що за заданих запасів сировини обсяги випуску продукції кожного виду становлять відповідно $x_1 = 150, x_2 = 250, x_3 = 100.$

Приклад 15. Нехай A – структурна матриця торгівлі чотирьох країн: $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною? Знайти ці бюджети, якщо сума всіх бюджетів дорівнює 58140 ум. од.

Розв'язання.

Умові збалансованості торгівлі для всіх країн відповідає рівняння $(A - E)X = B,$ де A – структурна матриця торгівлі; E – одинична матриця; X – невідома матриця-стовпець; B – нульова матриця-стовпець. Застосовуючи цю умову, маємо:

$$\left[\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Цьому матричному рівнянню відповідає система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -0,9x_1+0,2x_2+0,4x_3+0,3x_4=0, \\ 0,3x_1-0,5x_2+0,1x_3+0,1x_4=0, \\ 0,5x_1+0,1x_2-0,7x_3+0,1x_4=0, \\ 0,1x_1+0,2x_2+0,2x_3-0,5x_4=0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо розв'язок: $x_1=x_2=x_3=x_4$. Тобто бюджети цих країн однакові. Знайдемо їх:

$4x=58140, \quad x=14535.$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається визначником СЛАР?
2. Скільки розв'язків може мати СЛАР?
3. Чи може множина розв'язків СЛАР містити один елемент? Два елементи?
4. Чи можуть різні методи розв'язання СЛАР дати різні відповіді?
5. В чому полягає метод Гаусса розв'язання СЛАР?
6. Як перевірити СЛАР на сумісність за допомогою теореми Кронекера–Капеллі?
7. На скільки одиниць ранг основної матриці системи може відрізнятися від рангу розширеної матриці?
8. Яка СЛАР називається однорідною?
9. Чи може однорідна СЛАР бути несумісною?
10. Скільки розв'язків має однорідна СЛАР, якщо її матриця невироджена?
11. Що називається структурною матрицею торгівлі?
12. Яка торгівля країн називається бездефіцитною? збалансованою?
13. Як математично сформулювати умову збалансованості торгівлі країн?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Розв'яжіть СЛАР методом Крамера.

1.1. $\begin{cases} 2x-3y+z=-7, \\ x+4y+2z=-1, \\ x-4y=-5. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y+6z=-7, \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=2, \\ x+4y+2z=5. \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4=4, \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=-1, \\ x_1+4x_2+4x_3+3x_4=3, \\ 2x_1+5x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

Завдання 2. Розв’яжіть СЛАР матричним методом.

2.1. $\begin{cases} 8x_1-x_3=-21, \\ -x_1+3x_2-x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-1. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=6, \\ -3x_1-x_2-x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+2x_3=9, \\ -x_1+x_2=2, \\ x_1+3x_2+3x_3=4. \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=9, \\ 3x_1-x_2-x_3=0, \\ -2x_1+2x_2+x_3=2. \end{cases}$

Завдання 3. Розв’яжіть СЛАР методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1, \\ -x_1+x_2=2, \\ 2x_1+3x_2+x_3=-2. \end{cases}$

3. 3. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-x_3=3, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=8. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ -2x_1+3x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+x_3=-6. \end{cases}$

Завдання 4. Дослідіть СЛАР на сумісність і у випадку сумісності розв’яжіть їх.

4.1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$ **4.2.** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0,5. \end{cases}$

Завдання 5. Розв’яжіть однорідні СЛАР.

5.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ **5.2.** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$ **5.4.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$ **5.6.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 6. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва наведено в табл. 2. Визначте обсяг випуску продукції кожного виду за заданими запасами сировини.

Таблиця 2

Вид сировини	Витрати сировини за видами продукції			Запаси сировини
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Завдання 7. Дано структурну матрицю торгівлі трьох країн:

$$A=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ 4 & 3 & 5\\ 7 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною?

Завдання 8. Дано структурну матрицю торгівлі чотирьох країн:

$$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2\\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4\end{pmatrix}.$$

Яким повинно бути співвідношення між бюджетами цих країн, щоб їх торгівля була бездефіцитною? Знайдіть ці бюджети, якщо сума всіх бюджетів дорівнює 6270 ум. од.

Відповіді: **1.1.** $(-1;1;-2)$. **1.2.** $(-3;2;1)$. **1.3.** $\varnothing$. **1.4.** $(-1;3;-2;2)$. **1.5.** $(1;-2;1;2)$. **2.1.** $(-2;0;5)$. **2.2.** $(-1;1;1)$. **2.3.** $(-1;1;2)$. **2.4.** $(1;1;2)$. **3.1.** $(1;1;1)$. **3.2.** $(-1;1;-3)$. **3.3.** $\varnothing$. **3.4.** $(-3;0;-3)$. **4.1.** $(-1;3;-2;2)$. **4.2.** $(2;1;-3;1)$. **4.3.** $\left(x_1;\, x_1-\frac{1}{2};\, x_4+\frac{1}{2};\, x_4\right)$, де $x_1\in R,\ x_2\in R.$ **5.1.** $\left(\frac{5}{2}x_3;\, \frac{1}{2}x_3;\, x_3\right)$, $x_3\in R.$ **5.2.** $(-x_2;\, x_2;\, 0)$, $x_2\in R.$ **5.3.** $\left(-\frac{2}{13}x_3;-\frac{8}{13}x_3;\, x_3\right)$, $x_3\in R.$ **5.4.** $\left(-\frac{11}{7}x_3;-\frac{1}{7}x_3;\, x_3\right)$, $x_3\in R.$ **5.5.** $(x_4;\, x_4;\, x_4;\, x_4)$, $x_4\in R.$ **5.6.** $(x_4;\, x_3-2x_4;\, x_3;\, x_4)$, $x_3\in R,\ x_4\in R.$ **6.** $(70;120;30)$. **7.** $1:1:1$. **8.** $\frac{1400}{121}$ ум. од., $\frac{1460}{121}$ ум. од., $\frac{200}{11}$ ум. од., 10 ум. од.

Тема 4. ВЕКТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

План

1. Лінійні операції над векторами. Вектори у прямокутній декартовій системі координат
2. Скалярний добуток векторів
3. Векторний і мішаний добутки векторів
4. Застосування елементів векторної алгебри у прикладних задачах

Література: [1]; [2]; [3]; [5]; [6]; [7].

Методичні рекомендації

Після опрацювання матеріалу теми 4 студент повинен ***знати:*** означення вектора, види лінійних дій з векторами, основні формули щодо векторів у прямокутній декартовій системі координат, означення та основні властивості скалярного, векторного, мішаного добутків; ***уміти:*** виконувати лінійні дії з векторами, визначати координати, довжину, напрямні косинуси вектора, його проекцію на вісь, обчислювати скалярний, мішаний добутки, визначати векторний добуток, застосовувати ці добутки у прикладних задачах.

Приклади розв'язування типових задач

Приклад 1. Задано паралелограм $ABCD$ (рис. 1), $\overline{AB}=\vec{b}$, $\overline{AD}=\vec{c}$, M – точка перетину діагоналей. Виразити вектори $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$ через вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

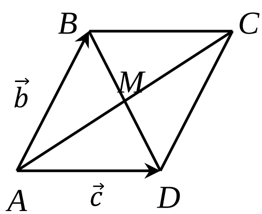

Рис.1

Розв'язання

Скористаємося лінійними діями з векторами, враховуючи, що точка M поділяє діагоналі навпіл, тоді

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}=\vec{b}+\vec{c},\quad \overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}=\vec{c}-\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right);\quad \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right);\quad \overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right);$$

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right).$$

Приклад 2. У трикутнику ABC (рис. 2) сторона BC поділена точкою D у відношенні $m:n$, тобто $\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{m}{n}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

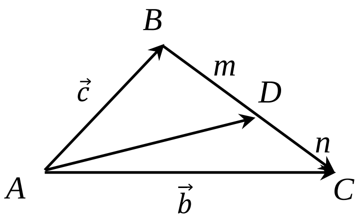

Рис.2

Розв'язання.

Відповідно до лінійних дій з векторами, маємо: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{c}$. Тоді

$$\overrightarrow{BD}=\frac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{c}\right);$$

$$\overrightarrow{DC}=\frac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{n}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{c}\right).$$

Розклад вектора $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ дістанемо, розглянувши трикутник ABD або трикутник ADC. Так, з трикутника ABD маємо:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{c}+\frac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\vec{c}-\frac{m}{m+n}\vec{c}=$$

$$=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}.$$ Тоді $$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}.$$

Із трикутника ADC дістаємо:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\frac{n}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{b}-\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}=$$

$$=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}.$$ Отже, $$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}.$$

Приклад 3. Задано вектори: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Знайти їх суму та різницю.

Розв'язання

Оскільки при додаванні та відніманні векторів відповідно додаються або віднімаються їх проекції, маємо:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (5+5)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (5-5)\vec{k} = -\vec{i} + 5\vec{j}.$$

Приклад 4. Дано точки $M_1(-4;5;-6)$ і $M_2(5;-7;2)$. Знайти

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| : \left|\overrightarrow{MM_2}\right| = 3:5$.

Розв'язання

а) Скористаємося формулою для визначення координат вектора, що заданий початковою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінцевою $M_2(x_2, y_2, z_2)$ точками:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Тоді маємо

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (9;-12;8).$$

Довжину вектора знаходимо за формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Отже,

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Напрямні косинуси дістаємо, поділивши відповідні координати вектора на його модуль:

$$\cos\alpha = \frac{9}{17};\ \cos\beta = -\frac{12}{17};\ \cos\gamma = \frac{8}{17};$$

Орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\vec{e}_{\overrightarrow{M_1M_2}} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \left(\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}; \frac{8}{17}\right)$.

б) Позначимо через $\lambda = \left|\overrightarrow{M_1M}\right| : \left|\overrightarrow{MM_2}\right|$. Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді координати точки $M(x, y, z)$, що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ (λ>0), знаходимо за формулами

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Отже, маємо:

$$x_M = \frac{-4 + \frac{3}{5}\cdot 5}{1+\frac{3}{5}} = -\frac{5}{8}, y_M = \frac{5 + \frac{3}{5}\cdot(-7)}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}, z_M = \frac{-6 + \frac{3}{5}\cdot 2}{1+\frac{3}{5}} = -3.$$

Приклад 5. Визначити початок вектора $\vec{a} = (2, -3, -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(1; -1; 2)$.

Розв'язання

Нехай початок вектора $\vec{a}$ міститься в точці $A(x, y, z)$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(2; -3; -1) = (1 - x, -1 - y, 2 - z)$. Прирівнявши відповідні координати, дістаємо рівності

$$1 - x = 2, -1 - y = -3,\ 2 - z = -1,$$

з яких $x = -1,\ y = 2,\ z = 3$. Отже, $B(-1; 2; 3)$.

Приклад 6. Визначити, за яких значень α і β вектори $\vec{a} = (-6;\ \alpha;\ 2)$ і $\vec{b} = (\beta;\ 4;\ -1)$ є колінеарними.

Розв'язання

Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ є колінеарними, якщо пропорційні їх координати, тобто

$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$. Тому з умови $\frac{-6}{\beta}=\frac{\alpha}{4}=\frac{2}{-1}=-2$ випливає, що $\alpha=-8,\ \beta=3$.

Приклад 7. Визначити довжину медіани CM та бісектриси BK у трикутнику з вершинами $A(6;8;-3)$, $B(4;0;3)$, $C(0;3;2)$.

Розв'язання

Оскільки точка $M(x,y,z)$ є серединою відрізка AB, то її координати визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Тоді $x=\frac{6+4}{2}=5$, $y=\frac{8+0}{2}=4$, $z=\frac{-3+3}{2}=0$.

Отже, $M(5;4;0)$.

За формулою відстані між двома точками обчислюємо довжину медіани CM:

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{(5-0)^2+(4-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30}.$$

За умовою BK – бісектриса внутрішнього кута B, тому

$$\frac{\left|\overrightarrow{AK}\right|}{\left|\overrightarrow{KC}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Оскільки

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(6-4)^2+(8-0)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{4+64+36}=2\sqrt{26}, \text{ а}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}, \text{ то}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{AK}\right|}{\left|\overrightarrow{KC}\right|}=\frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{26}}=2,$$

тобто точка K ділить відрізок AC у відношенні $\lambda=2$.

Тоді за формулами координат точки, що ділить даний відрізок у відношенні λ, дістаємо:

$$x_K = \frac{6+2\cdot 0}{1+2} = 2,\ y_K = \frac{8+2\cdot 3}{1+2} = \frac{14}{3},\ z_K = \frac{-3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Звідки $K\left(2;\frac{14}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Отже, довжина бісектриси BK:

$$\left|\overrightarrow{BK}\right| = \sqrt{(2-4)^2 + (14/3-0)^2 + (1/3-3)^2} =$$
$$= (1/3)\cdot\sqrt{36+196+64} = (2/3)\sqrt{74}.$$

Приклад 8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$, а їх довжини дорівнюють $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$. Обчислити $\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Розв'язання

Для обчислення добутку скористаємося означенням і властивостями скалярного добутку векторів:

$$\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right) = 8\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} =$$
$$= 8\vec{a}^2 + 10\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 8|\vec{a}|^2 + 10|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi - 3|\vec{b}|^2 =$$
$$= 8\cdot 2^2 + 10\cdot 2\cdot 5\cdot\cos\frac{\pi}{3} - 3\cdot 5^2 = 32+50-75 = 7.$$

Отже, $\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right) = 7$.

Приклад 9. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m}+2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m}-3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 6$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

Ураховуючи лінійні дії з векторами, діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, можна подати як $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, то

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|5\vec{m}+2\vec{n}+3\vec{n}-\vec{m}\right| = \left|4\vec{m}+5\vec{n}\right| = \sqrt{\left(4\vec{m}+5\vec{n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16\vec{m}^2+40\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{4}+25\vec{n}^2} = \sqrt{512+960+900} = 2\sqrt{593};$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|5\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{n}+\vec{m}\right| = \left|6\vec{m}-\vec{n}\right| = \sqrt{\left(6\vec{m}-\vec{n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{36\vec{m}^2-12\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|cos\frac{\pi}{4}+\vec{n}^2} = \sqrt{1152-288+36} = 30.$$

Приклад 10. Дано вектори $\vec{a}=(1;4;-1)$ і $\vec{b}=(0;3;-2)$. Знайти: а) скалярний добуток $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$; б) кут між векторами $2\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$.

Розв'язання

а) Знайдемо координати векторів:

$$\vec{a}+3\vec{b} = (1;4;-1)+3(0;3;-2) = (1;13;-7),$$

$$3\vec{a}-2\vec{b} = 3(1;4;-1)-2(0;3;-2) = (3;6;1).$$

Скалярний добуток векторів, заданих координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат. Отже, маємо:

$$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right) = 1\cdot3+13\cdot6-7\cdot1 = 3+78-7 = 74.$$

б) Знайдемо координати векторів:

$$\vec{c} = 2\vec{a}+\vec{b} = 2(1;4;-1)+(0;3;-2) = (2;11;-4),$$

$$\vec{d} = \vec{a}-\vec{b} = (1;4;-1)-(0;3;-2) = (1;1;1).$$

За формулою косинуса кута між двома векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|}$$

дістаємо

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot1+11\cdot1-4\cdot1}{\sqrt{2^2+11^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{141}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{47}}.$$

Звідси

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{47}}\ .$$

Приклад 11. Знайти координати вектора $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-2;3)$ і задовольняє умову $\vec{x}\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

Розв'язання

Нехай $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)$. Скористаємося необхідною і достатньою умовами перпендикулярності векторів $\vec{x}$ і $\vec{a}$, $\vec{x}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{x}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{x}\cdot\vec{b}=0.$

Ураховуючи також умову задачі, складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=-6. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо значення: $x_1=-3, x_2=3, x_3=3.$

Отже, $\vec{x}=(-3;3;3)$.

Приклад 12. Дано точки $A(0;4;-6), B(3;0;6), C(1;2;-4)$. Обчислити $\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)\cdot\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB}=(3;-4;12),\qquad \overline{BA}=(-3;4;-12),$$

$$\overline{BC}=(-2;2;-10),\qquad \overline{CB}=(2;-2;10),$$

$$2\overline{BC}=(-4;4;-20),\qquad 2\overline{AB}=(6;-8;24),$$

$$2\overline{BC}+\overline{BA}=(-7;8;-32),\qquad 2\overline{AB}-\overline{CB}=(4;-6;14)\ .$$

Обчислимо скалярний добуток:

$$\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)\cdot\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)=-7\cdot 4+8\cdot(-6)-32\cdot 14=$$

$$=-28-48-448=-524.$$

Приклад 13. Дано точки $A(-1;3;-3), B(4;3;6), C(2;0;3)$, $D(4;3;-3)$. Обчислити $\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB}=(5;0;9), \qquad \overrightarrow{CD}=(2;3;-6).$$

Ураховуючи геометричний зміст скалярного добутку, а також вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати, дістанемо:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{5\cdot2+0\cdot3+9\cdot(-6)}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=-\frac{44}{7}.$$

Приклад 14. Дано три вектори $\vec{a}=(3;-6;21), \vec{b}=(1;4;-5)$, $\vec{c}=(3;-4;12)$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Розв'язання

Знайдемо координати суми векторів $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=(4;-2;16)$.

Обчислюємо $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ за формулою

$$\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}=\frac{4\cdot3-2\cdot(-4)+16\cdot12}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=\frac{212}{13}.$$

Приклад 15. Показати, що чотирикутник з вершинами $A(-3;-2;1)$, $B(7;8;6)$, $C(-4;18;8), D(-14;8;4)$ є квадратом.

Розв'язання

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}=(10;10;5)$, $\overrightarrow{BC}=(-11;10;2)$, $\overrightarrow{DC}=(10;10;5)$, $\overrightarrow{AD}=(-11;10;2)$. Очевидно, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Оскільки $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{10^2+10^2+5^2}=\sqrt{225}=15$,

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-11)^2+10^2+2^2}=\sqrt{225}=15$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=$

$$=\left|\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|.$$

Крім того, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=10\cdot(-11)+10\cdot 10+5\cdot 2=0\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ є квадратом.

Приклад 16. Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання

Перетворимо вираз під знаком модуля, скориставшись властивостями векторного добутку:

$$\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=-5\vec{a}\times\vec{b}.$$

Знаходимо модуль векторного добутку за формулою

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Отже,

$$\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|=\left|-5\vec{a}\times\vec{b}\right|=5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=30.$$

Приклад 17. Дано вектори $\vec{a}=(-3;1;2)$ і $\vec{b}=(2;-1;1)$. Визначити координати векторів: а) $\vec{a}\times\vec{b}$, б) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

Розв'язання

а) Знайдемо векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}.$$

б) Визначимо координати векторів $2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:

$2\vec{a}+\vec{b}=2(-3;1;2)+(2;-1;1)=(-4;1;5)$, $\vec{a}-\vec{b}=(-5;2;1)$.

Векторний добуток векторів $2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ знаходимо за попередньою формулою:

$$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & 5\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ -5 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-9\vec{i}-21\vec{j}-3\vec{k}.$$

Приклад 18. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$ і $3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання

Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}+3\vec{b}$ і $3\vec{a}+\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах. Спочатку знайдемо векторний добуток:

$$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=$$

$$=-8\vec{a}\times\vec{b}.$$

Тоді площа паралелограма: $S=8\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=4.$

Приклад 19. Обчислити площу трикутника ABC, вершинами якого є точки $A(1;-1;-1), B(0;1;2), C(2;1;0)$.

Розв'язання

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та визначимо їх векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (-1;2;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;2;1)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Тоді $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = 2\sqrt{3}$.

Приклад 20. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4;-4;2)$, $\vec{b} = (2;3;6)$.

Розв'язання

Скористаємося формулою: $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Звідки

$$\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{S}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Маємо $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -30\vec{i} - 20\vec{j} + 20\vec{k},$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-30)^2 + (-20)^2 + 20^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}.$$

Тоді

$$\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{10\sqrt{17}}{6\cdot 7}=\frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

Приклад 21. У трикутнику з вершинами $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$, $C(3;5;1)$ знайти висоту BD.

Розв'язання

Із формули площі трикутника $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|$ виразимо висоту:

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{2S_{\triangle ABC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{2\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;4;-3)$.

Визначимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ та обчислимо модуль векторного добутку $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\sqrt{625}=25.$$

Знайдемо довжину сторони AC:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Обчислимо висоту BD:

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{25}{5}=5.$$

Приклад 22. З'ясувати, чи компланарні вектори

$$\vec{a}=(1;9;-11),\ \vec{b}=(-1;6;-6),\ \vec{c}=(-2;-3;5).$$

Розв'язання

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Оскільки мішаний добуток

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ -1 & 6 & -6 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

то задані вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

Приклад 23. Довести, що точки $A(0;1;2), B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8), D(1;6;11)$ лежать в одній площині.

Розв'язання

Точки A, B, C, D лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ компланарні.

Знаходимо вектори
$\overrightarrow{AB} = (-2;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;4;6)$, $\overrightarrow{AD} = (1;5;9)$.

Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, за властивістю мішаного добутку вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині.

Приклад 24. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо:
$\vec{a} = (2;1;-3)$, $\vec{b} = (3;-2;1)$, $\vec{c} = (-1;0;-2)$, $\vec{d} = (-2;2;1)$.

Розв'язання

Дослідимо вектори на компланарність або лінійну залежність, знайшовши їх мішаний добуток:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток векторів не дорівнює нулю, то вектори некомпланарні, тобто лінійно незалежні, і тому утворюють базис.

Розкладемо вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. При цьому лінійна комбінація векторів $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ у координатній формі набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma = -2, \\ \alpha - 2\beta = 2, \\ -3\alpha + \beta - 2\gamma = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \end{array}\right) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -14 & 2 & 12 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -14 & 2 & 12 \\ 0 & -19 & 0 & 19 \end{array}\right).$$

Тоді $\alpha = 0,\ \beta = -1,\ \gamma = -1.$

Отже, розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ має вигляд

$$\vec{d} = -\vec{b} - \vec{c}.$$

Приклад 25. Задано вершини піраміди: $A(1;2;1), B(3;0;-2)$, $C(5;2;7), D(-6;-5;8)$. Обчислити об'єм піраміди і довжину її висоти, опущеної з вершини D.

Розв'язання

Визначимо координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$, на яких побудована піраміда $ABCD$:

$$\vec{AB} = (2;-2;-3),\ \vec{AC} = (4;0;6),\ \vec{AD} = (-7;-7;7).$$

Об'єм піраміди V_{ABCD} дорівнює $\frac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}\right| = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{154}{3}.$$

Знайдемо площу основи $S_{\Delta ABC}$ піраміди, скориставшись вже відомою формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

Отже,

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k},$$

тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14.$$

Із формули об'єму піраміди

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{осн}H$$

дістаємо:

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3\cdot\frac{154}{3}}{14} = 11.$$

Приклад 26. Покупці A, B, C придбали у крамниці такі товари: A придбав 3 од. 1-го товару, 4 од. − 2-го товару, 2 од. – 3-го; B придбав 2 од. 2-го товару, 1 од. − 4-го товару, 4 од. – 5-го;

C придбав 6 од. 1-го товару, 2 од. − 3-го товару, 1 од. – 4-го, 3 од. − 5-го товару.

а) Записати придбаний товар кожного покупця у вигляді п'ятивимірних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

б) Нехай ціни на товари записані у вигляді вектора $\vec{p} = (10; 5; 12; 20; 7)$. Записати у векторному вигляді витрати кожного покупця у крамниці й обчислити ці витрати.

Розв'язання.

а) Уведемо вектори $\vec{a} = (3; 4; 2; 0; 0), \vec{b} = (0; 2; 0; 1; 4)$, $\vec{c} = (6; 0; 2; 1; 3)$, координатами яких є кількість придбаного товару кожного виду кожним покупцем A, B, C відповідно.

б) Витрати кожного покупця у крамниці є сумою витрат на кожен із типів товару. Витрати покупця на кожний товар визначаються як ціна, помножена на кількість товару. Тому, якщо розглядати ціни товарів як вектор $\vec{p} = (10; 5; 12; 20; 7)$, а кількість товару, придбаного одним покупцем $A(B, C)$, як вектор $\vec{a} = (3; 4; 2; 0; 0)$ $\left(\vec{b} = (0; 2; 0; 1; 4), \vec{c} = (6; 0; 2; 1; 3)\right)$, то сумарні витрати покупця дорівнюють скалярному добутку відповідних векторів.

Отже, скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{p} = 74$ визначає витрати покупця A, $\vec{b} \cdot \vec{p} = 58$ − витрати покупця B, $\vec{c} \cdot \vec{p} = 125$ − витрати покупця C.

Приклад 27. Підприємство випускає щодоби чотири види виробів, основні виробничо-економічні показники яких наведено в табл. 3. Знайти такі щодобові показники: витрати сировини S, витрати робочого часу T та вартість P продукції, що виробляє підприємство.

Таблиця 3

Вид виробу	Кількість виробів	Витрати сировини на одиницю виробу, кг	Норма часу виготовлення одиниці виробу, год	Вартість одиниці виробу, грош. од.
1	20	5	10	30

2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Розв'язання

За даними таблиці складемо чотири вектори, що характеризують увесь виробничий цикл:

$\vec{q} = (20; 50; 30; 40)$ − вектор асортименту;

$\vec{s} = (5; 2; 7; 4)$ − вектор витрат сировини;

$\vec{t} = (10; 5; 15; 8)$ − вектор затрат робочого часу;

$\vec{p} = (30; 15; 45; 20)$ − вектор вартості.

Тоді шукані величини є відповідними скалярними добутками вектора асортименту $\vec{q}$ на три інших вектори:

$S = \vec{q} \cdot \vec{s} = 20 \cdot 5 + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 4 = 570$ кг;

$T = \vec{q} \cdot \vec{t} = 20 \cdot 10 + 50 \cdot 5 + 30 \cdot 15 + 40 \cdot 8 = 1220$ год;

$P = \vec{q} \cdot \vec{p} = 20 \cdot 30 + 50 \cdot 15 + 30 \cdot 45 + 40 \cdot 20 = 3500$ грош. од.

Приклад 28. Відомі вектори заробітної плати 7 робітників за січень та лютий: $\vec{a} = (500; 190; 160; 210; 300; 270; 310)$;

$\vec{b} = (380; 190; 170; 150; 230; 250; 300)$. У березні цим робітникам надали відпустку, заплативши їм за середнім заробітком за січень і лютий. Знайти вектор $\vec{c}$ – вектор заробітної плати цих робітників за березень, і довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ − лінійно залежні.

Розв'язання

Маємо,

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \left(\frac{500+380}{2}; \frac{190+190}{2}; \frac{160+170}{2}; \frac{210+150}{2}; \right.$$

$$\left. \frac{300+230}{2}; \frac{270+250}{2}; \frac{310+300}{2} \right) =$$

$$= (440; 190; 165; 180; 265; 260; 305).$$

Оскільки вектор

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – лінійно залежні.

Приклад 29. Обчислити роботу, що виконує сила $\vec{F} = (3;2;4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(2;4;6)$ в точку $N(4;2;7)$. Під яким кутом до $\overrightarrow{MN}$ напрямлена сила $\vec{F}$?

Розв'язання

Знайдемо вектор переміщення $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (2;-2;1)$. Обчислимо роботу A за формулою

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 3\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 = 6.$$

Кут між векторами $\vec{F}$ і $\overrightarrow{MN}$ визначимо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}\cdot\vec{S}}{|\vec{F}||\vec{S}|} = \frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

Отже, $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}$.

Приклад 30. Знайти момент сили $\vec{F} = (1;-2;4)$, прикладеної до точки $A(1;2;3)$, відносно точки $B(3;2;-1)$.

Розв'язання

Відомо, що моментом сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A відносно точки B, є вектор $\vec{M}$, який визначається векторним добутком: $\vec{M} = \overrightarrow{BA}\times\vec{F}$.

Оскільки $\overrightarrow{BA} = (-2;0;4)$, то дістанемо:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається вектором, ортом, нульовим вектором?

2. Які вектори називають рівними, колінеарними, компланарними?

3. Як визначаються сума, різниця двох векторів, добуток вектора на число?

4. Як визначаються координати і довжина вектора?

5. Як знайти відстань між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$?

6. Що називається напрямними косинусами вектора? Яку умову вони задовольняють?

7. Як визначаються лінійні операції з векторами, заданими своїми координатами?

8. Якими є умови рівності та колінеарності векторів, заданих координатами?

9. У чому полягає задача про поділ відрізка в даному відношенні?

10. Що називається скалярним добутком двох векторів?

11. У чому полягає геометричний та механічний зміст скалярного добутку?

12. Сформулюйте основні властивості скалярного добутку.

13. Запишіть скалярний добуток векторів у координатній формі.

14. Як визначається косинус кута між двома векторами через їх скалярний добуток?

15. Сформулюйте необхідну і достатню умову перпендикулярності двох векторів, заданих координатами.

16. Що називається векторним добутком двох векторів?

17. Як визначається площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

18. Якими є фізичні застосування векторного добутку?

19. Сформулюйте властивості векторного добутку.

20. Запишіть формулу для обчислення векторного добутку двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат.

21. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

22. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?

23. Сформулюйте необхідну і достатню умову компланарності трьох векторів.

24. Як виражається мішаний добуток через координати векторів співмножників?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Дано точки $M_1(3;3;-2)$ і $M_2(0;1;4)$. Знайдіть: а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; б) координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| : \left|\overrightarrow{MM_2}\right| = 2:3$.

Завдання 2. Три сили $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначте модуль їх рівнодійної, якщо

$$\left|\vec{F_1}\right| = 10H,\ \left|\vec{F_2}\right| = 11H,\ \left|\vec{F_3}\right| = 2H$$

Завдання 3. У ромбі $ABCD$ дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a},\ \overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкладіть за цими векторами усі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

Завдання 4. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ дано $\overrightarrow{AB} = \vec{m},\ \overrightarrow{AE} = \vec{n}$. Розкладіть за цими векторами такі вектори: $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$.

Завдання 5. Знайдіть точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = (3;-1;4)$, якщо його початок знаходиться в точці $M(1;2;-3)$.

Завдання 6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Знадіть число x, якщо вектори $(x-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + x\vec{b}$ колінеарні.

Завдання 7. Дано точки $A(5;0;2)$, $B(-3;3;-1)$, $C(1;2;-3), D(5;-4;3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

Завдання 8. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо координати його вершин: $A(3;-2)$, $B(5;2)$, $C(-1;4)$.

Завдання 9. Відомо, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$. Обчисліть:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; в) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

Завдання 10. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 6\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$.

Завдання 11. Обчисліть, за якого значення m вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Завдання 12. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайдіть вектор $\vec{x}$, якщо $\vec{x}\cdot\vec{a} = 8$, $\vec{x}\cdot\vec{b} = 10$, $\vec{x}\cdot\vec{c} = 8$.

Завдання 13. Точки $A(1;4), B(-2;5), C(-3;a), D(3;-3)$ є послідовними вершинами чотирикутника *ABCD*. За якого значення *a* діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні?

Завдання 14. Дано три вектори: $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Обчисліть $\text{пр}_{\vec{c}}\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)$.

Завдання 15. Дано три вектори: $\vec{a} = (2;-6;8)$, $\vec{b} = (3;-4;2)$, $\vec{c} = (-1;1;4)$. Обчисліть $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

Завдання 16. Точки $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$ – вершини трикутника ABC. Знайдіть внутрішній кут у трикутнику при вершині B і проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Завдання 17. Обчисліть $\left|\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$.

Завдання 18. Дано вектори $\vec{a} = (-2;0;1)$ і $\vec{b} = (-1;4;5)$. Визначте координати векторів:

а) $(2\vec{a} - 5\vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})$, б) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$.

Завдання 19. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Завдання 20. Обчисліть площу трикутника ABC, вершинами якого є точки: $A(1;2;0), B(0;-2;1), C(-1;0;2)$

авдання 21. Обчисліть синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3;4;1)$, $\vec{b} = (2;3;1)$.

Завдання 22. З'ясуйте, чи належать точки $A(2;-1;5), B(-1;2;3), C(1;1;-1)$ одній площині.

Завдання 23. Доведіть, що вектори $\vec{a} = (-2;2;-1)$, $\vec{b} = (-2;1;-1)$, $\vec{c} = (-1;0;1)$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d} = (-1;1;1)$ за цим базисом.

Завдання 24. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

Завдання 25. Обчисліть об'єм піраміди $ABCD$ з вершинами у точках: $A(1;-2;-1)$, $B(4;4;4)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;0;3)$.

Завдання 26. У тетраедрі з вершинами у точках $A(2;2;1)$, $B(3;1;2), C(3;3;2)$, $D(4;5;-3)$ обчисліть висоту DE.

Завдання 27. На заводі є чотири цехи. Планові завдання цехів (у мільйонах гривень) утворюють вектор-план $\vec{X} = (100;200;300;200)$. На скільки мільйонів гривень виробив завод продукції за певний період, якщо цехи виконали свої плани відповідно на 20%, 30%, 20%, 40%.

Завдання 28. За даними таблиці 1 складіть нову таблицю виробничо-економічних показників за такими умовами:

– кількість виробів усіх видів збільшується на 20%;

– норма часу виготовлення за всіма виробами зменшується на 20%;

– ціна на всі види виробів зменшується на 10%.

Знайдіть такі щодобові показники: а) витрати сировини S; б) затрати робочого часу T; в) вартість P продукції, що виробляє підприємство; г) відсоткове відношення цих показників.

Завдання 29. Обчисліть, яку роботу виконує сила $\vec{F}=(6;-4;-10)$, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $M(3;-2;6)$ у точку $N(4;-1;0)$.

Завдання 30. Дві сили $\vec{F_1}(2;1;3)$ і $\vec{F_2}(1;3;-5)$ прикладені в точці $A(2;-1;-2)$. Знайдіть момент рівнодійної цих сил відносно початку координат.

Відповіді: **1**.а) $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3;-2;6)$;

$\cos\alpha=-\frac{3}{7}$; $\cos\beta=-\frac{2}{7}$; $\cos\ \gamma=\frac{6}{7}$; $\vec{e}_{\overrightarrow{M_1M_2}}=\left(-\frac{3}{7};-\frac{2}{7};\frac{6}{7}\right)$.

б) $\left(\frac{9}{5};\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right)$. **2**. $15H$. **3.** $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. **4.** $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}$. **5.** $N(4;1;1)$.

6. $x=3$ або $x=-2$. **7.** Ні, не можуть. **8.** $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$.

9. а) -6; б) 37; в) -61. **10.** а) $-\frac{4}{9}$; б) $-\frac{1}{62}$. **11.** $m=-6$.

12. $\vec{x}=(2;2;2)$. **13.** $a=1,5$. **14.** -22. **15.** 10. **16.** $B=45°;-\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
17. 21. **18.** а) $(-36;81;-72)$ б) $(-8;-6;-16)$. **19.** $3\sqrt{437}$. **20.** $3\sqrt{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{273}}{182}$. **22.** Ні. **23.** $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **4.** 76. **25.** $\frac{4}{3}$. **26.** $3\sqrt{2}$. **27.** 220 млн. грн. **28.** $S=684$ кг, збільшення на 20%; $T=1171,2$ год, зменшення на 4%; $P=3720$ грош. од., збільшення на 6,3%. **29.** 62. **30.** 15.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П.Вовкодав [та ін.]; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

2. Вища математика: навч. посіб. / І.О. Ластівка, О.І. Безверхий, І.П. Кудзіновська. – К.: НАУ, 2018. – 452с.

3. Вища математика. У 10 ч. Ч. 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія: навч. посіб. / В.Ф. Антоненко, І.С. Клюс, Р.В. Горідько, Л.О. Чуб. – 2-ге вид. випр. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 304с.

4. Высшая математика для экономистов: Учеб. для вузов / Н. Ш.Кремер, Б. А. Путко,И.М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ, 1998.– 471 с.

5. *Денисюк В.П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. Ч. 1. / В.П. Денисюк, В.К. Репета. – 2-ге вид., виправ. – К.: НАУ, 2017. – 472 с

6. *Дубовик В. П.* Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Вища шк., 1993. – 648с.

7. Математика для економістів : навч. посіб. У 3 ч. Ч. 1 / І. О. Ластівка, В. С. Коновалюк, І. В. Шевченко [та ін.]. – К.: НАУ, 2012. – 432 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи студентів
технічних та економічних спецыальностей

Укладачі: ЛАСТІВКА Іван Олексійович
ЗАТУЛА Неллі Іванівна
ПЕТРУСЕНКО Валентина Павлівна